MOTROL. COMMISSION OF MOTORIZATION AND ENERGETICS IN AGRICULTURE – 2013, Vol.15, No. 2, 185–189

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ВОЛН С ТОНКИМ КРУГОВЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ НУЛЕВОЙ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Вячеслав Шебанин, Лариса Вахонина
Николаевский национальный аграрный университет
54020, г. Николаев, ул. Парижской коммуны, 9
Vjacheslav Shebanin, Larisa Vakhonina
Nikolaev National Agrarian University
54020, Nikolaev, st. Paris Commune, 9

Аннотация. Решена задача о осесисиметричных колебаниях упругого изотропного пространства в результате распространения в нем волн, в котором содержится тонкие упругие круговые включения. Учитывалось, что изгибная жесткость включения пренебрежительно мала, а на боковые кромки действуют усилия, которые находятся при решении. Метод решения базируется на использовании разрывного решения уравнения гармонических колебаний упругой среды. В результате начальная граничная задача сведена к интегральному уравнению относительно неизвестных скачков касательных напряжений, которое решается численно.

Ключевые слова: концентрация напряжений, круговое упругое включение, осесимметричне волны.

ВВЕДЕНИЕ

Наличие в деталях машин и инженерных сооружениях технологических дефектов или конструктивных элементов в виде тонких жестких включений является источником концентрации напряжений, которая может привести к разрушению конструкции. Задачи о колебаниях упругих тел, содержащих тонкие включения, чаще всего рассматривались в предположении о том, что включение является абсолютно жестким [1 - 4]. Такое допущение значительно облегчает математическое решение, но с другой стороны не позволяет учитывать влияние упругих свойств включения на концентрацию напряжений вблизи него[5 - 7]. В настоящей работе методом, основанным на применении разрывных решений, решается задача о гармонических колебаниях упругой среды с тонким упругим круговым включением. При этом включение считается настолько тонким, что можно пренебречь его изгибной жесткостью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим неограниченную упругую изотропную среду, в которой находится упругое включение в виде тонкой круглой пластины толщины h и радиуса a. Включение в плоскости $z=0$ занимает круг $0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le r \le a$. В среде происходят осесимметрические колебания (ось симметрии проходит через центр включения перпендикулярно к нему) в результате распространения в ней упругих волн. Это может быть плоская продольная волна с фронтом параллельным плоскости включения с потенциалом [8]:

$$\varphi_0(z) = \frac{A}{\kappa_1} e^{i\kappa_1 z};$$

и вызывающая в среде следующие перемещения:

$$u_z^0 = iAe^{i\kappa_1 z}; \qquad u_r^0 \equiv 0 \qquad (1)$$

Так же возможно распространение продольных или поперечных цилиндрических волн. Продольная волна задается потенциалом [8]:

$$\varphi_0(r,z) = \frac{A_0}{\beta_1} J_0(\beta, r) e^{i\gamma z},$$

а вызванные ней перемещения определяются по формулам:

$$u_z^0 = \frac{i\gamma A}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z},$$

$$u_r^0 = -A_0 J_1(\beta_1 r) e^{i\gamma z}. \qquad (2)$$

Потенциал поперечной волны равен [8]

$$\Psi_0(r,z) = \frac{B_0}{\beta_2^2} J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z};$$

и она вызывает следующие перемещения:

$$u_z^0(r,z) = B_0 J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z},$$

$$u_r^0(r,z) = -B_0 \frac{i\gamma}{\beta_2} J_1(\beta_2 r) e^{i\gamma z}. \qquad (3)$$

Граничные условия на включении в виду его малой толщины сформулируем на его срединной плоскости $z=0$. Будем считать изгибную жесткость включения пренебрежительно малой, и что между ней и средой выполнены условия полного сцепления. Тогда на включении терпят разрыв касательные напряжения с некоторым скачком:

$$<\tau_{rz}>=\tau_{rz}(r,+0)-\tau_{rz}(r,-0)=\chi_2(r), \quad 0<r<a \; ; \quad (4)$$

Для радиального перемещения выполняется равенство:

$$u_r(r,\pm 0)=u(r), \quad 0\le r\le a \quad (5)$$

В равенстве (5) $u(r)$ перемещение в серединной плоскости включения. Оно находится из дифференциального уравнения [9]:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}u\right)+q^2u=-\frac{P}{D_0h}-\frac{\chi_2(r)}{D_0h}, \quad q^2=\frac{\rho_2\omega^2}{D_0},$$

$$D_0=\frac{E_0}{1-\nu_0^2} \; ; \quad (6)$$

где: ρ_0,ν_0,E_0 - плотность, коэффициент Пуассона, модуль упругости материала включения. Граничные условия для уравнения (6) сформулируем исходя из того, что в центре включения радиальное перемещение равно нулю, а со стороны среды на боковую кромку включения действуют силы растяжения сжатия:

$$N=N_0+N_1, N_k=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{rr}^{(k)}(a+0,z)\,dz \; ; \quad (7)$$

Здесь $\sigma_{rr}^{(0)},\sigma_{rr}^{(1)}$ -напряжения, вызванные падающей волной и напряжения, источником которых является включение. Тогда должны выполняться равенства:

$$N_r(0)=D_0\left(\frac{du}{dr}+\nu_0\frac{u}{r}\right)\bigg|_{r=a}=N. \; ;$$

$$u(0)=0 \, . \quad (8)$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Представим перемещения среды в виде:

$$u_r=u_r^0+u_r^1, u_z=u_z^0+u_z^1 \; ; \quad (9)$$

где: u_r^0,u_z^0 - перемещения падающей волны, а u_r^1,u_z^1 - перемещения вызванные волнами, отраженными от включения. Перемещения u_r^1,u_z^1 удовлетворяют уравнения Ламе для гармонических колебаний в условиях осевой симметрии. Поэтому они могут быть представлены разрывным решением этих уравнений со скачком (4). Так радиальное перемещение определится формулой [10]:

$$u_r^1=\int_0^a\eta\frac{\chi_2(\eta)}{\mu_1}g_{42}(\eta,r,z)d\eta \; ; \quad (10)$$

$$g_{42}(\eta,r,z)=-\frac{1}{2\pi\kappa_2^2}\int_0^\infty\left[\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2-\kappa_1^2}}\cdot e^{-\sqrt{\lambda^2-\kappa_1^2}|z|}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{\lambda^2-\kappa_2^2}\cdot e^{-\sqrt{\lambda^2-\kappa_1^2}|z|}\right]\lambda J_1(\lambda r)J_1(\lambda\eta)d\lambda.$$

Для того, чтобы выразить через скачок касательных напряжений перемещение самого включения, следует решить граничную задачу (6), (8). Это решение определяется формулой:

$$u=-\frac{1}{D_0h}\int_0^a(P(\eta)+\chi_2(\eta))\cdot G_1(\eta,r)d\eta+a\frac{NB_0}{hD_0}J_1(qr) \; , \quad (11)$$

где: $G_1(\eta,r)$ - функция Грина граничной задачи (7).

После того как радиальное перемещение среды и перемещения самого включения выражены через скачок касательных напряжений, он может быть определен из граничного условия (5). В результате подстановки (9), (10), (11) в (5) получим интегральное уравнение относительно $\chi_2(r)$, которое с помощью преобразований подробно изложенных в [11,12] приводится к виду:

$$\frac{1+\xi^2}{2}g_2(y)+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^1 g_2(\varsigma)\left[-\frac{2m_0}{\varepsilon}\ln|\varsigma-y|+F(\varsigma,y)\right]d\varsigma=f(y) \; ;(12)$$

$$F(\varsigma,y)=W(\varsigma-y)+Q(\varsigma-y)-\frac{4\pi m_0}{\varepsilon}B_0B(\varsigma)\sin q_0y \; ;$$

$$W(z)=\frac{2m_0}{\varepsilon}(D(z)-B_1\cos q_0(z)) \; ;$$

$$D(z)=(\ln|z|-ci(q_0|z|))+2\sin^2\frac{q_0|z|}{2}ci(q_0|z|)-\sin(q_0|z|)(si(q_0|z|)+\frac{\pi}{2}) \, .$$

Вид функции $Q(z)$ подробно приведен в [13] Новые неизвестные функции $g_2(\varsigma)$ связаны со скачком $\chi_2(\varsigma)$ формулами:

$$\varphi(\tau)=\int_\tau^a\frac{\tau\chi_2(r)}{\sqrt{r^2-\tau^2}}dr \; ; \quad g_2(\varsigma)=-\frac{\varphi_2(a\varsigma)}{\mu_1 a} \; ; \quad (13)$$

$$g_2(-\varsigma) = -g_2(\varsigma);$$

$$\chi_2(r) = \frac{2}{\pi}\int_r^a \varphi_2(\tau)\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\right)d\tau.$$

Функция $g_2(\varsigma)$ была продолжена нечетным образом на [-1,1].

При выводе уравнений (12), также была получена формула для неизвестных усилий N_1 из формулы (7). Для этого напряжения σ_r^1 были выражены через скачок (4) с помощью разрывного решения [14 - 16]. После подстановки этого решения в (7) и интегрирования с учетом (13) была получена формула:

$$N_1 = 2a\mu_1\int_{-1}^{1} g_2(\varsigma)B(\varsigma)d\varsigma, \quad (14)$$

где:

$$B(\varsigma) = B_1(\varsigma) + B_2(\varsigma),$$

$$B_k(\varsigma) = \int_0^\infty R_k(u)\sin(\kappa_0 u\varsigma)du; \quad k = 1, 2,$$

$$R_1(u) = \kappa_0 u^2 J_1(u\kappa_0)\left[\frac{(2u^2 - 2\varsigma^2 + 1)}{p_1(u)^2}\left(1 - e^{\frac{-\kappa_0 p_1(u)\varepsilon}{2}}\right) - 2\left(1 - e^{\frac{-\kappa_0 p_2(u)\varepsilon}{2}}\right)\right];$$

$$R_2(u) = 2uJ_1(u\kappa_0)\left[\frac{u^2}{p_1(u)^2}\left(1 - e^{\frac{-\kappa_0 p_1(u)\varepsilon}{2}}\right) - 2\left(1 - e^{\frac{-\kappa_0 p_2(u)\varepsilon}{2}}\right)\right].$$

Уравнение (12) решается численным методом, основанным на приближении интеграла с логарифмической особенностью по квадратурной формуле из [17,18,19], а регулярных интегралов формулой Гаусса. В результате из (12) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1+\xi^2}{2}g_k + \frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{n} A_m g_m\left[-\frac{2m_0}{\varepsilon}B_{km} + F(\varsigma_m - \varsigma_k)\right] = f(\varsigma_k), k = 1,2,\ldots n \quad (15)$$

где $A_m = \dfrac{2}{(1-\varsigma_m^2)[P_n^{/}(\varsigma_m)]^2}$; ς_m - корни многочлена Лежандра $P_n(\varsigma)$, $g_m = g_2(\varsigma_m)$.

После решения системы (15) неизвестную функцию приблизим интерполяционным многочленом:

$$g_2(\varsigma) = \sum_{m=1}^{n} g_m \frac{p_n(\varsigma)}{(\varsigma - \varsigma_m)P_n^{/}(\varsigma_m)}; \quad (16)$$

Для оценки напряженного состояния введем коэффициент интенсивности напряжений (КИН) равный[2]

$$K = \lim_{r \to a-0}\sqrt{a-r}\,\chi_2(r).$$

После подстановки выражения для $\chi_2(r)$ из (15), выполнения предельного перехода найдем

$$K = -\sqrt{2a}\mu_1 k, \quad k = \frac{g_2(1)}{\pi}; \quad (17)$$

После подстановки в (14) значения $g_2(1)$ найденного из (16) получим окончательную формулу для безразмерного значения КИН

$$k = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n} c_m g_m; \quad c_m = 1/((1-\varsigma_m)P_n^{/}(\varsigma_m)); \quad (18)$$

Результаты численного анализа и выводы. С помощью формулы (18) проведено численное исследование зависимости КИН от безразмерного волнового числа κ_0 и отношения модулей упругости включения и внешней среды e_0. Ниже приводятся графики этих зависимостей для некоторых случаев воздействия на включение.

На рис. 1 приведены графики зависимости абсолютной величины безразмерных КИН от κ_0 при указанных значениях e_0, когда на включение действует плоская продольная волна. Можно видеть, что при возрастании κ_0 абсолютные значения КИН возрастают до максимального значения, а затем практически не изменяются. С увеличением e_0 значение КИН также увеличивается, а если e_0 приближается к 0, то КИН та стремится к 0, что соответствует случаю абсолютно жесткого включения [4]. Графики на рис.2 построены для случая взаимодействия с включением продольных цилиндрических волн. В этом случае при возрастании κ_0 место возрастания абсолютных значений КИН до достижения максимума, а затем медленное убывание. Для малых значений e_0 ($e_0 \le 0{,}0001$) график совпадает с аналогичным графиком для абсолютно жесткого включения, возле которого концентрация будет наибольшей. С увеличением e_0 абсолютные значения КИН быстро убывает.

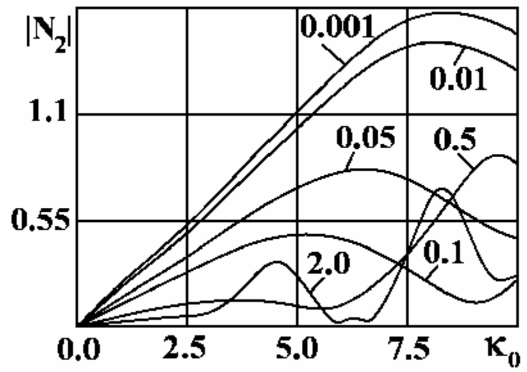

Рис.1. Воздействие плоской продольной волны

Fig. 1. The impact of the plane-wave

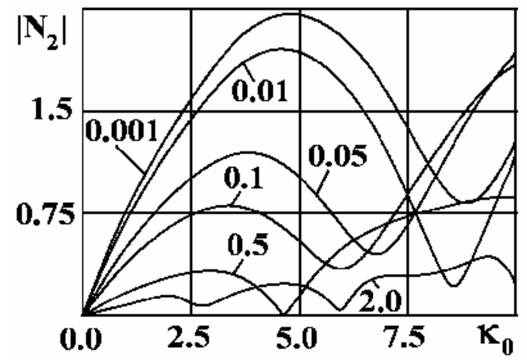

Рис. 2. Воздействие продольных цилиндрических волн

Fig. 2. The impact of longitudinal cylindrical waves

ВЫВОДЫ

Сравнение графиков на рис.1 и рис. 2 устанавливает, что при взаимодействии с продольными цилиндрическими волнами имеет место несколько большая концентрация напряжений, чем при взаимодействии с плоской продольной[20,21].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Popov G.Ja. Koncentracija uprugih naprjazhenij vozle shtampov, razrezov, ploskih vkljuchenij i podkreplenij.-M.:Nauka,1982.-342 s.

2.Aleksandrov V.M., Smetanin B.I., Sobol' B.V. Tonkie koncentratori naprjazhenij v uprugih telah. -M.:Nauka,1993.-224 s.

3.Andrejkiv A.E., Stadnik M.M. Rastjazhenie tela s sistemoj tonkih uprugih vkljuchenij.- PM. 1979, 15, № 5. – S. 61– 66.

4.Vahonina L.V., Popov V.G. Koncentracija naprjazhenij vblizi kruglogo tonkogo absoljutno zhestkogo otsloivshegosja vkljuchenija pri vzai-modejstvii s volnoj kruchenija//Izvestija RAN. Mehanika deformirovannogo tverdogo tela.-2004.-№ 4.-S.70-76.

5.Babeshko V.A. Obobshhennyj metod faktorizacii v prostranstvennyh dinamicheskih smeshannyh zadachah teorii uprugosti. – M.: Nauka, 1984. – 256s.

6.Grilickij D.V., Sulim G.T. Uprugie naprjazhenija v ploskosti s tonkostennymi vkljuchenijami // Mat. metody i fiz.-meh. polja. – 1975 – vyp. 1. – S. 41 – 48.

7. Kit G.S., Kunec Ja.I., Mihas'kiv V.V. Vzaimodejstvie stacionarnoj volny s ton-kim diskoobraznym vkljucheniem maloj zhe-stkosti v uprugom tele // Izvestija RAN. Me-hanika tverdogo tela. – 2004. – № 5. – S. 82–89.

8..Guz' A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. Difrakcija uprugih voln. -K.:Naukova dumka, 1978.-308 s.

9. Percev A.K., Platonov Je.G. Dinamika obolochek i plastin.-L.: Sudostroenie, 1987.-316 s.

10. Popov G.Ja. Postroenie razryvnyh reshe-nij differencial'nyh uravnenij teorii uprugosti dlja sloistoj sredy s mezhfazny-mi defektami//Doklady RAN.-1999.-T.364.-№ 6.-S.769-773.

11.Morar' G.A. Metod razryvnyh reshenij v mehanike deformiruemyh tel. – Kishinev: Shtiinca, 1990. –130s.

12. Popov G.Ja. Matematicheskie problemy kontaktnyh zadach. – Odessa, 1976. –115s.

13. L.Vahonina, V.Popov. Krutil'ni koli-vannja neobmezhenogo pruzhnogo seredovishha, shho mistit' tonke pruzhne krugove vkljuchen-nja// Mashinoznavstvo.-2001.-№ 7(49).-S.13-16.

14.Popov G.Ja. Ob odnom sposobe reshenija zadach mehaniki dlja oblastej s razrezami ili tonkimi vkljuchenijami // PMM. – 1978. –T.42, vyp.1.– S.122– 136.

15.Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral'-nye preobrazovanija i operacionnoe ischis-lenie. – M.: Fiz. mat. meh. 1961. – 524s.

16.Kanaun S.K. O singuljarnih modeljah tonkogo vkljuchenija v odnorodnoj uprugoj srede.// Prikladnaja matematika i mehanika. 1984.– T.48, vyp.1. S.81– 91.

17. Belocerkovskij S.M.,Lifanov I.K. Chislennye metody v singuljarnyh integral'nyh uravnenijah i ih primenenie v ajerodinami-ke, teorii uprugosti, jelektrodinamike. -M.:Nauka,1985. -283 s.

18. Nazarchuk Z.T. Chislennoe issledovanie difrakcii voln na cilindricheskih struk-turah. – K.: Nauk. dumka, 1989. –256s.
19. Krylov V.I. Priblizhennoe vychislenie integralov. -M.:Nauka, 1967. -500 s.
20. Butakov B. Artjuh V. 2010. Islelovanie fiziko himicheskih svojstv stal'nih detalej posle obkatyvanija rolikom so stabilizaci-ej rabochego usilija - MOTROL. – Lublin. –– Volume 12A – p. 27-30.
21. Butakov B. Zubehina O. 2011. Modelirovanie processa obkatyvanija igol'cha-tymi rolikami rez'b s shirokoj vpadinoj i arhimedovyh chervjakov obkatyvaniem konusov i giperboloidov // MOTROL. – Lublin. –– Volume 13A – p. 23-24.

INTERACTION AXISYMMETRIC WAVES WITH A THIN CIRCULARELASTIC INCLUSION OF ZERO FLEXURAL RIGIDITY

Summary. The problem about axis–symmetric oscillations of the elastic isotropic medium as a result of spreading waves in it is solved. The medium contains the thin elastic circular inclusion. It is assumed, that the bent rigidity of the inclusion is so small that it can be disregarded, and the efforts calculated in the process of the solution act on the lateral edge of the inclusion. The method of the solution is based on the use of the discontinuous solution of harmonic oscillations equations for elastic medium. As a result the initial border problem is reduced to the integral equation concerning the unknown jump of tangent stresses. The integral equation was solved numerically.

Key words: stress concentration, a circular elastic inclusion of axially symmetric wave.