МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Контрольні завдання та методичні рекомендації для виконання самостійної роботи здобувачами першого (бакалавр) рівня вищої освіти ОПП “Агрономія” спеціальності 201 “Агрономія” заочної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2023

УДК 51.517
В 55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 29. 05. 2023р., протокол № 11

Укладач:

С. І. Богданов – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;

Рецензент:

В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор, професор кафедри математики та методики її викладання, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського.

ВСТУП

Курс вищої математики відіграє важливу роль при підготовці фахівців сільського господарства. Кількісні методи аналізу, методи теорії ймовірності, математичної статистики широко використовуються при плануванні дослідів та обробці їх результатів у біології, племінній справі. Ці методи дозволяють з потрібною долею вірогідності аналізувати результати практичної діяльності в різних галузях сільськогосподарського виробництва.

Математика, крім того, є фундаментальною дисципліною, її викладання передбачає: розвиток логічного і алгоритмічного мислення; оволодіння основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач сільського господарства; вироблення вміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики та прикладних математичних дисциплін.

Обсяг і зміст курсу вищої математики визначається програмою та навчальними планами; не залежить від форми навчання (денна, заочна), але методика вивчення його при цьому різна.

Ці методичні рекомендації опрацьовані для студентів дистанційної (заочної) форми навчання спеціальності 201 - "Агрономія".

В них подано загальні рекомендації студентам-заочникам для вивчення курсу, методичні рекомендації до розв'язання кожної з десяти задач контрольної роботи та завдання для однієї контрольної роботи в двадцяти варіантах.

Загальні рекомендації студентові-заочнику до вивчення курсу вищої математики і контрольні завдання

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота з навчальним матеріалом, що складається з таких елементів: вивчення матеріалу за підручниками, розв'язання задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт. Щоб допомогти студентам-заочникам, університет організовує лекції, практичні та лабораторні заняття. Крім того, студент-заочник може звернутися до викладача з будь-якого питання і отримати письмову або усну консультацію.

У разі письмової консультації у своїй роботі студенту потрібно якомога точніше визначити питання, що викликають труднощі при їх засвоєнні. При цьому обов'язково слід вказати повну назву книги, рік видання та сторінку, де є важкий для засвоєння матеріал, або неясно сформульоване відповідне завдання.

Рекомендації студентові з поточної роботи подаються також у процесі рецензування контрольної роботи. Проте студент повинен пам'ятати, що тільки завдяки систематичній та наполегливій самостійній роботі допомога викладача може бути ефективною. Кінцевим етапом вивчення курсу є складання заліку.

Навчальним планом передбачається виконання однієї контрольної роботи. Нижче наведено таблиці номерів задач, що входять до контрольної роботи. Студент виконує той варіант контрольної роботи, що збігається з останньою цифрою його навчального шифру. При цьому, якщо передостання цифра навчального шифру є число непарне (1,3,5,7,9), то номери задач для відповідного варіанту слід брати з **таблиці 1**. Якщо передостання цифра навчального шифру число парне (2,4,6,8,0), то номери задач відповідного варіанту вказано в **таблиці 2**.

Наприклад, якщо шифр студента 073172, то він виконує задачі 2-го варіанту **(табл.1)** -1.1, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, якщо ж шифр студента 073182, то він повинен виконувати задачі 2-го варіанту **(табл.2)** – 1.12, 2.12, 3.12, 4.12, 5.12, 6.12.

табл. 1

номер варіанту	**НОМЕР ЗАДАЧІ**					
1	**1.1**	**2.1**	**3.1**	**4.1**	**5.1**	**6.1**
2	**1.2**	**2.2**	**3.2**	**4.2**	**5.2**	**6.2**
3	**1.3**	**2.3**	**3.3**	**4.3**	**5.3**	**6.3**
4	**1.4**	**2.4**	**3.4**	**4.4**	**5.4**	**6.4**
5	**1.5**	**2.5**	**3.5**	**4.5**	**5.5**	**6.5**
6	**1.6**	**2.6**	**3.6**	**4.6**	**5.6**	**6.6**
7	**1.7**	**2.7**	**3.7**	**4.7**	**5.7**	**6.7**
8	**1.8**	**2.8**	**3.8**	**4.8**	**5.8**	**6.8**

9	**1.9**	**2.9**	**3.9**	**4.9**	**5.9**	**6.9**
10	**1.10**	**2.10**	**3.10**	**4.10**	**5.10**	**6.10**

табл. 2

номер варіанту	**НОМЕР ЗАДАЧІ**					
1	**1.11**	**2.11**	**3.11**	**4.11**	**5.11**	**6.11**
2	**1.12**	**2.12**	**3.12**	**4.12**	**5.12**	**6.12**
3	**1.13**	**2.13**	**3.13**	**4.13**	**5.13**	**6.13**
4	**1.14**	**2.14**	**3.14**	**4.14**	**5.14**	**6.14**
5	**1.15**	**2.15**	**3.15**	**4.15**	**5.15**	**6.15**
6	**1.16**	**2.16**	**3.16**	**4.16**	**5.16**	**6.16**
7	**1.17**	**2.17**	**3.17**	**4.17**	**5.17**	**6.17**
8	**1.18**	**2.18**	**3.18**	**4.18**	**5.18**	**6.18**
9	**1.19**	**2.19**	**3.19**	**4.19**	**5.19**	**6.19**
10	**1.20**	**2.20**	**3.20**	**4.20**	**5.20**	**6.20**

Правило вибору задач №7, №8, №9 подано на сторінці 57.

Правила виконання та оформлення контрольних робіт

Виконання кожної контрольної роботи слід починати тільки після вивчення відповідного матеріалу курсу за підручником та розв’язання задач, що подані до кожної теми. Потрібно також уважно розібрати розв’язання тих задач, які наведено в даному посібнику до кожної теми.

При виконанні контрольних робіт потрібно суворо дотримуватися наведених нижче правил. Роботи, написані без дотримання цих вимог не зараховуються і повертаються студентові для доопрацювання.

1. Кожну контрольну роботу слід виконувати в окремому зошиті, чорнилом будь-якого кольору, крім червоного. Для зауважень рецензента необхідно на кожній сторінці залишити поля завширшки 3-4 см.

2. На обкладинці зошита повинно бути ясно написане прізвище студента, його ініціали, навчальний номер (шифр), назва дисципліни; тут же слід указати дату, коли робота була надіслана до університету. У кінці роботи треба поставити дату її виконання та підпис.

3. У роботі мають бути всі задачі, що вказані в завданні відповідного варіанту. Розв'язання задач потрібно розміщувати за порядком номерів, даних у завданнях, не змінюючи номери задач.

Контрольні роботи, в яких виконано не всі завдання, а також ті, що містять задачі не свого варіанту, зараховуватися не будуть.

4. Контрольні роботи повинні виконуватися самостійно. Якщо буде виявлено, що ту або іншу контрольну роботу виконано не самостійно, то її не буде зараховано, навіть якщо в цій роботі всі задачі розв’язано правильно.

5. Перед розв’язанням кожної задачі слід записати повністю її умову. В разі, якщо декілька задач, з яких студент вибирає задачу потрібну для свого варіанту, мають загальне формулювання, слід переписати умову задачі, змінюючи загальні дані конкретними, що відповідають номеру варіанту.

6. Розв’язання всіх задач та пояснення до них повинні бути детальними. За необхідності, слід посилатися на питання теорії з назвами формул, теорем, та інш., що використовувалися при розв’язанні даної задачі.

Усі обчислення (в тому числі й допоміжні) потрібно робити повністю. Малюнки та графіки повинні бути виконані (бажано на міліметровому папері) акуратно, чітко, з указуванням одиниць масштабу координатних осей та інших елементів рисунку. Пояснення до задач, повинні відповідати позначенням, що дані на рисунку.

7. Після повернення роботи (як зарахованої так і не зарахованої) студент повинен виправити в ній усі недоліки, вказані рецензентом. У разі, якщо робота не зарахована, студенту слід в короткий термін виконати всі зауваження рецензента та подати роботу на повторне рецензування, додаючи при цьому перший екземпляр з рецензією на неї. У зв'язку з цим рекомендується при виконанні контрольної роботи залишити у кінці зошита декілька чистих аркушів для доповнень та виправлень відповідно до вказівок рецензента. Вносити виправлення у сам текст роботи після рецензування забороняється.

Приклад оформлення титульної сторінки

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ

МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра вищої та прикладної математики

Шифр *2305534*

Контрольна робота

з вищої математики

студентки агрономічного факультету

спеціальності «Насінництво »

групи *ЗА 1/1*

Іваненко Олени Миколаївни

Миколаїв – 2023

__Бланк для рецензії контрольної роботи__

МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

РЕЦЕНЗІЯ НА КОНТРОЛЬНУ РОБОТУ

Студента(ки)____________*Іваненко Олени Миколаївни*_________________

(прізвище, ім'я, по-батькові)

Шифр _*2305534*___, який(а) навчається на __*першому* ___ курсі

_______________*агрономічного* _______________________ факультету

Контрольна робота _ з _______*вищої математики*_____________

(найменування навчальної дисципліни)

Тема: _____________ ________________________

__*Завдання № 1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1*

____

РЕЄСТРАЦІЙНИЙ № __________ Дата отримання роботи

«____» ______________________ 20___ р.

Оцінка ___________ Дата повернення роботи «____» _________ 20___ р.

Рецензент ____

(учене звання, прізвище, ім'я, по-батькові)

ЗМІСТ РЕЦЕНЗІЇ

____

____

____

____

____

____

Підпис рецензента _______________

Похідна та диференціал функції

Похідні основних елементарних функцій

$y = x$	$y' = 1$	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

Нехай задано диференційовані функції $u = u(x)$ та $v = v(x)$.

Є такі правила:

1. Похідна алгебраїчної суми кінцевого числа диференційованих функцій дорівнює сумі похідних цих функцій:

$$(u \pm v) = u' \pm v' \qquad \textbf{(1)}$$

2. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутку похідної першого співмножника на другий та добутку похідної другого співмножника на перший:

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \textbf{(2)}$$

Наслідок 1. Постійний множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)' = cu' \qquad (3)$$

Наслідок 2. $(uv\omega)' = u'v\omega + uv'\omega + uv\omega'$ **(4)**

3. Похідна частки: $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$ **(5)**

Наслідок 1. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$ **(6)**

Наслідок 2. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c}{v^2}$ **(7)**

Похідна складеної та неявної функції

Нехай змінна y є функцією від змінної u: $y = f(u)$, а змінна u є функцією від незалежної змінної $x: u = \varphi(x)$. Якщо $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ - диференційовані функції своїх аргументів, то похідна складеної функції існує та дорівнює похідній даної функції за проміжним аргументом, помноженій на похідну самого проміжного аргументу за незалежною змінною x, тобто:

$$y' = f'(u)u' = f'(\varphi(x))\varphi'(x) \qquad (8)$$

Розглянемо диференціювання неявної функції, що задана рівнянням $F(x;y) = 0$. Для знаходження похідної функції y, заданої неявно, треба продиференціювати обидві частини рівняння, розглядаючи y як функцію від x, а потім з отриманого рівняння знайти похідну y'.

Логарифмічне диференціювання функції $y = f(x)^{\varphi(x)}$

Розглянемо визначення похідної функції $y = f(x)^{\varphi(x)}$. Для цього виконаємо такі кроки:

Крок 1: Прологарифмуємо спочатку дві частини рівності:

$$\ln y = \ln f\left(x\right)^{\varphi(x)}; \qquad \textbf{(9)}$$

Крок 2. За властивістю логарифма: $\ln y = \varphi\left(x\right)\ln f\left(x\right)$; **(10)**

Крок 3. Диференціюючи обидві частини, отримаємо:

$$\frac{1}{y}y' = \varphi'\left(x\right)\ln f\left(x\right) + \varphi\left(x\right)\left(\ln f\left(x\right)\right)' = \varphi'\left(x\right)\ln f\left(x\right) + \frac{\varphi\left(x\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)} \qquad \textbf{(11)}$$

Крок 4. Помножимо ліву і праву частину останньої рівності на y:

$$y = y\left(\varphi'\left(x\right)\ln f\left(x\right) + \frac{\varphi\left(x\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

Крок 5. Замінимо в правій частині рівності y на $f\left(x\right)^{\varphi(x)}$:

$$y = f\left(x\right)^{\varphi(x)}\left(\varphi'\left(x\right)\ln f\left(x\right) + \frac{\varphi\left(x\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right) \qquad \textbf{(13)}$$

або: $y = \varphi\left(x\right)f'\left(x\right)f\left(x\right)^{\varphi(x)-1} + f\left(x\right)^{\varphi(x)}\ln f\left(x\right)\varphi'\left(x\right)$

Покажемо спосіб відшукання похідної функції, яка задана параметрично. Нехай y як функція x задана параметричними рівняннями: $\begin{cases} x = \varphi\left(t\right) \\ y = \psi\left(t\right) \end{cases}$ **(14)**

Похідну функцію яка задана параметрично, знаходимо: $y'_x = \dfrac{\psi'\left(t\right)}{\varphi'\left(t\right)}$ **(15)**

Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної

ЗАДАЧА 1.

У задачах **1.1 – 1.20** знайти похідні функцій: у прикладах **1), 2),3)** – користуючись властивостями похідної та формулою похідної складеної функції, у прикладі **4)** – використовуючи метод логарифмічного диференціювання.

1.1

1) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$ 2) $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$

3) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-6x^2}$ 4) $y=(2x+3)^{tg 3x}$

1.2.

1) $y=\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$ 2) $y=\ln tgx^3$

3) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}}$ 4) $y=(1+\cos x)^{x^2}$

1.3.

1) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^5-5x^2+3}}$ 2) $y=\left(3^{\cos 4x}+\sin^2 3x\right)^3$

3) $y = arctg\,\frac{2x+1}{2x-1}$

4) $y = \left(x^3+2\right)^{\sin 6x}$

1.4.

1) $y = \frac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$

2) $y = \left(2^{\arcsin 3x} + \arccos 2x\right)^4$

3) $y = 10^{xtgx}$

4) $y = (x^2+1)^{arctg\,2x}$

1.5.

1) $y = \frac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$

2) $y = \left(5^{tg\,2x} - x^2\right)^3$

3) $y = \arcsin\sqrt{1-4x^2}$

4) $y = \left(\arcsin 6x\right)^{\sqrt{1-2x^2}}$

1.6.

1) $y = e^{arctg\sqrt{2x-1}}$

2) $y = \left(4^{tg\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^3$

3) $y = \frac{4x+1}{\sqrt{x^2-4x-2}}$

4) $y = \left(x + \sin 3x\right)^{x^3}$

1.7.

1) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$ 2) $y=\left(3^{arctg\,2x}-\ln\left(1+4x^2\right)\right)^4$

3) $y=\sqrt{x\sqrt{x^2+3}}$ 4) $y=\left(tg2x\right)^{tg\,2x}$

1.8.

1) $y=\dfrac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$ 2) $y=\left(2^{\cos^2 3x}+\sin^2 3x\right)^3$

3) $y=e^{\arcsin\sqrt{1-x}}$ 4) $y=\left(x+1\right)^{arctg\sqrt{2x}}$

1.9.

1) $y=\ln\arcsin\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ 2) $y=\left(4^{\arccos 2x}-\sqrt{1-4x^2}\right)^3$

3) $y=\dfrac{4x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$ 4) $y=\left(ctg3x\right)^{\cos 2x}$

1.10.

1) $y=\dfrac{x^3-10}{\sqrt{x^4-3x}}$ 2) $y=\left(6^{arcctg\,3x}+arcctg3x\right)^4$

3) $y=\ln tg\dfrac{1}{\sqrt{3x}}$

4) $y=\left(x+\ln 2x\right)^{x}$

1.11.

1) $y=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^{2}+3x+1}}$

2) $y=\left(2^{tg3x}-\cos 3x\right)^{5}$

3) $y=arctg\dfrac{2x+1}{2x-1}$

4) $y=\left(\sqrt{3x}+\dfrac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{x}$

1.12.

1) $y=e^{arctg\sqrt{2x-1}}$

2) $y=\left(3^{\cos 2x}+\cos^{2}x\right)^{3}$

3) $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{2}$

4) $y=\left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{x}$

1.13.

1) $y=\dfrac{2x-7}{\sqrt{x^{2}+2x-14}}$

2) $y=\left(6^{\cos 3x}+\cos^{2}x\right)^{4}$

3) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{4x}$

4) $y=\left(tg2x\right)^{\cos 2x}$

1.14.

1) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}$ 2) $y=\left(5^{\sin x}-\cos 2x\right)^3$

3) $y=\ln\cos e^{-3x}$ 4) $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin x}$

1.15

1) $y=\dfrac{5x+4}{\sqrt{x^3-5x-2}}$ 2) $y=\left(2^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}\right)^5$

3) $y=e^{arctg\sqrt{3x^2-1}}$ 4) $y=\left(ctg4x\right)^{\sin 4x}$

1.16.

1) $y=\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^5+9x-1}}$ 2) $y=\left(3^{arctg 2x}+\ln\left(1+x^2\right)\right)^4$

3) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ 4) $y=\left(\sin 2x\right)^{tg 2x}$

1.17.

1) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^3-8x+4}}$ 2) $y=\left(4^{tg 2x}-tg 2x\right)^5$

3) $y=\ln arcctg\frac{1}{5x}$ 4) $y=\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{4x}}$

1.18.

1) $y=\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}+3x+1}$ 2) $y=\left(5^{tg^2 3x}+\cos^2 2x\right)^3$

3) $y=e^{\arccos\sqrt{1-\beta x^2}}$ 4) $y=\left(\cos 2x\right)^{tg 2x}$

1.19.

1) $y=\frac{4x+3}{\sqrt{x^3-4x-1}}$ 2) $y=\left(2^{\arccos\sqrt{x}}-\sqrt{1-x}\right)^4$

3) $y=\ln tge^{\sqrt{4x}}$ 4) $y=\left(ctg 4x\right)^{\sin 3x}$

1.20.

1) $y=\frac{5x-6}{\sqrt{x^3+5x-2}}$ 2) $y=\left(3^{ctg 4x}+\ln\sin 3x\right)^3$

3) $y=e^{arctg\sqrt{4\beta x-1}}$ 4) $y=\left(\sqrt{3x}+\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^x$

Методичні рекомендації

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 1</u> Функція **1)** запишеться: $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Оскільки функція y являє собою частку від ділення функції чисельника $u=x+1$ на функцію знаменника $v=\sqrt{x^3+5x^2-2}$, то похідну функцію y' запишемо за формулою похідної частки:

$$y'=\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}\right)'=\frac{(x+1)'\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)-(x+1)\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)'}{\left(\sqrt{x^3+5x^2-2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^3+5x^2-2}-(x+1)\frac{1}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}\left(x^3+5x^2-2\right)'}{x^3+5x^2-2}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^3+5x-2}-\frac{(x+1)\left(3x^2+10x\right)}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}}{x^3+5x^2-2}=$$

$$=\frac{\frac{2\left(x^3+5x^2-2\right)-\left(3x^3+10x^2+3x^2+10x\right)}{2\sqrt{x^3+5x^2-2}}}{x^3+5x^2-2}=$$

$$=\frac{-x^3-3x^2-10x-4}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}}=-\frac{x^3+3x^2+10x+4}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x-2}}$$

$$=\frac{2\left(x^3+5x^2-2\right)-3x^3-13x^2-10x}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}}=\frac{2x^3+10x^2-4-3x^3-13x^2-10x}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}}=$$

$$=\frac{-x^3-3x^2-10x-4}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x^2-2}}=-\frac{x^3+3x^2+10x+4}{2\left(x^3+5x^2-2\right)\sqrt{x^3+5x-2}}$$

Запишемо функцію **2)** : $y=\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^6$

Функція y - складена. Зовнішня функція її – степенева, а внутрішня функція основи – це сума двох у свою чергу складених функцій. Зовнішня функція першої з них – показникова, а внутрішня – обернено тригонометрична.

Зовнішня функція другої – степенева, а внутрішня функція – тригонометрична.

За правилом взяття похідної від складеної функції матимемо:

$$y=f\left(g\left(x\right)\right)$$

$$y'=f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

Беремо похідну від зовнішньої функції, а далі від внутрішньої:

$$y'=\left(\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^6\right)'=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)'=$$

$$6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(\left(4^{\arcsin x}\right)'+\left(\sin^2 6x\right)'\right)=$$

$$=6\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(4^{\arcsin x}\ln 4\left(\arcsin x\right)'+2\sin 6x\left(\sin 6x\right)'\right)=$$

$$5\left(4^{\arcsin x}+\sin^2 6x\right)^5\left(\frac{4^{\arcsin x}\ln 4}{\sqrt{1-x^2}}+12\sin 6x\cos 6x\right)$$

Функція **3)** запишеться: $y=\ln tge^{\sin 3x}$

Функція y являє собою складену з п’яти елементарних функцій. За правилом взяття похідної від складеної функції беремо похідну від зовнішньої функції, а потім від внутрішньої.

$$y'=\left(\ln tge^{\sin 3x}\right)'=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\left(tge^{\sin 3x}\right)'=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}}\left(e^{\sin 3x}\right)'=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}}e^{\sin 3x}\left(\sin 3x\right)'=$$

$$=\frac{1}{tge^{\sin 3x}}\frac{1}{\cos^2 e^{\sin 3x}}e^{\sin 3x}\cos 3x\left(3x\right)'=\frac{3e^{\sin 3x}\cos 3x}{\sin e^{3x}\cos e^{3x}}$$

Функцію **4)** запишемо $x - y = \mathbf{arcsin}\,4x - \mathbf{arcsin}\,4y$

Подамо функцію y у вигляді $f(x;y)=0$: $x - y - \mathbf{arcsin}\,4x + \mathbf{arcsin}\,4y = 0$.
Якщо незалежна змінна x та функція y зв’язані рівнянням виду $F(x;y)=0$, що не розв’язане відносно y, то y називається неявною функцією x. Незважаючи на те, що рівняння $f(x;y)=0$ не розв’язне відносно y, є можливість знайти похідну від y за x. Метод знаходження похідної полягає в тому, що обидві частини рівняння $f(x;y)=0$ диференціюються за x з урахуванням того, що y є функцією x, і з отриманого рівняння визначається y'.

Диференціюємо за x обидві частини рівності та враховуємо те, що обидві обернено тригонометричні функції є складеними:

$$(x)' - (y)' - (\mathbf{arcsin}\,4x)' + (\mathbf{arcsin}\,4y)' = 0$$

$$1 - y' - \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}} = 0$$

$$1 - y' - \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}(4x)' + \frac{1}{\sqrt{1-(4y)^2}}(4y)' = 0$$

$$\frac{4y'}{\sqrt{1-16y^2}} - y' = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}} - 1$$

Перенесемо складові, що не містять y', у праву частину рівності:

$$y'\left(\frac{4-\sqrt{1-16y^2}}{\sqrt{1-16y^2}}\right) = \frac{4-\sqrt{1-16x^2}}{\sqrt{1-16x^2}}$$

Винесемо y' у лівій частині рівняння та зведемо до спільного знаменника в обох частинах рівняння.

Розв’яжемо це рівняння відносно y'

$$y'\left(\frac{4}{\sqrt{1-16y^2}}-1\right)=\frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}-1$$

$$y'=\frac{\dfrac{4-\sqrt{1-16x^2}}{\sqrt{1-16x^2}}}{\dfrac{4-\sqrt{1-16y^2}}{\sqrt{1-16y^2}}}=\frac{\left(4-\sqrt{1-16x^2}\right)\sqrt{1-16y^2}}{\sqrt{1-16x^2}\left(4-\sqrt{1-16y^2}\right)}$$

Функція **5)** запишеться: $y=\left(1-\sin 10x\right)^{x^{15}}$

Якщо треба продиференціювати добуток декількох функцій або дріб, чисельник і знаменник якого містить добутки, часто є вигідним обидві частини даного виразу спочатку прологарифмувати за основою e, а потім уже приступити до диференціювання. Цей метод дістав назву логарифмічного диференціювання. До цього методу завжди звертаються, коли треба продиференціювати функцію виду

$$y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

тобто коли і основа степеня $f(x)$ і його показник $\varphi(x)$ є функціями від x. Саме такого виду маємо функцію, похідну якої треба знайти. В загальному вигляді задача диференціювання цієї функції розв'язується так:

$$y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$$

Прологарифмуємо за основу **e** обидві частини рівності й отримаємо

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x)$$

Тепер, вважаючи $\ln y$ складеною функцією змінної x, знайдемо похідну обох частин рівності, продиференціювавши праву частину як добуток.

$$\frac{1}{y}y'=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x)$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на y і, враховуючи, що

$$y=(f(x))^{\varphi(x)},\quad \text{отримаємо}\quad y'=(f(x))^{\varphi(x)}\left(\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

Скориставшись крокама загального розв`язку для нашої функції, маємо:

$$y=\left(1-\sin 10x\right)^{x^{15}}$$

$$\ln y=\ln\left(1-\sin 10x\right)^{x^{15}}$$

$$\ln y=x^{15}\ln\left(1-\sin 10x\right)$$

$$y'=\left(1-\sin 10x\right)^{x^{15}}\left(15x^{14}\ln\left(1-\sin 10x\right)-\frac{10x^{15}\cos 10x}{1-\sin 10x}\right)$$

$$\frac{1}{y}y'=15x^{14}\ln\left(1-\sin 10x\right)+x^{15}\frac{1}{1-\sin 10x}\left(1-\sin 10x\right)'$$

функцію **6)** запишемо: $\begin{cases} x=\dfrac{18at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{18at^2}{1+t^3} \end{cases}$

Похідну функції, заданої параметрично, знаходимо за формулою: $y'=\dfrac{y'_t}{x'_t}$

Знайдемо y', продиференціювавши функцію y за змінною t.

$$y=\frac{18at^2}{1+t^3}$$

$$y'=\left(\frac{18at^2}{1+t^3}\right)'=18a\left(\frac{t^2}{1+t^3}\right)'=\frac{18a\left(\left(t^2\right)'\left(1+t^3\right)-t^2\left(1+t^3\right)'\right)}{\left(1+t^3\right)^2}=$$

$$=\frac{18a\left(2t\left(1+t^3\right)-3t^4\right)}{\left(1+t^3\right)^2}=\frac{18at\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}$$

Знайдемо x', продиференціювавши x за змінною t.

$$x' = \left(\frac{18at}{1+t^3}\right)' = \frac{18a\left(t'\left(1+t^3\right) - t\left(1+t^3\right)'\right)}{\left(1+t^3\right)^2}$$

$$= \frac{18a\left(\left(1+t^3\right) - 3t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2} = \frac{18a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}$$

Скористуємося формулою для знаходження похідної функції, заданої параметрично. Маємо:

$$y'_x = \frac{\dfrac{18at\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}}{\dfrac{18a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}} = \frac{t\left(2-t^3\right)}{1-2t^3}$$

Невизначений та визначений інтеграл

Основним завданням диференціального числення є знаходження похідної або диференціала заданої функції.

Інтегральне числення розв'язує обернену задачу – знаходження функції за її похідною або диференціалом. Тобто для заданої функції $f(x)$ потрібно знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$. Функцію $F(x)$ називають первісною для функції $f(x)$. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на деякому проміжку називають невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ та позначають $\int f(x)dx$, де $\int$ - знак інтеграла; $f(x)$ - підінтегральна функція; $f(x)dx$ - підінтегральний вираз. Процес відшукування первісних функцій $F(x)$ тобто знаходження невизначеного інтеграла від деякої функції $f(x)$ називають інтегруванням цієї частини функції.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad (1)$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів.

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx \quad (2)$$

3. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int \alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx \quad (3)$$

4. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції:

$$\int dF(x)=F(x)+C \quad (4)$$

5. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\left(\int f(x)dx\right)= f(x)dx \quad (5)$$

Таблиця основних інтегралів

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \text{крім } x = 0$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$

5. $\int e^x dx = e^x + C$

6. $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

Безпосереднє інтегрування

Безпосереднє інтегрування здійснюється у тих випадках, якщо заданий інтеграл близький до табличного або отримується у вигляді, близькому до табличного за допомогою незначних перетворень (використання властивостей степеня, зведення подібних додатків, внесення постійного множника за знак інтеграла).

Розглянемо приклади:

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$$

Інтегрування за допомогою розкладання

Інтегрування, що здійснюється тільки за допомогою властивостей:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

та $$\int \left(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx,$$

що дає змогу звести заданий інтеграл до табличного вигляду, називають інтегруванням за допомогою розкладання. Якщо відбувається інтегрування окремих додатків, то не обов'язково записувати для кожного з них постійну C, звичайно у кінці розв'язку записують одну загальну постійну C.

Інтегрування методом підстановки (заміни змінної)

Метод інтегрування, який називають методом підстановки (заміни змінної), полягає у використанні формули:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad \textbf{(6)}$$

Формула **(6)** означає, що знаходження $\int f(x)dx$ зводиться до знаходження іншого інтеграла , в якому підінтегральний вираз залежить від змінної t. Його отримують за формулою $x=\varphi(t)$. Однак загального правила щодо вибору функції $\varphi(t)$ немає. Завдяки правильному вибору цієї функції новий інтеграл може бути простішим або навіть табличним. В останньому випадку виконують інтегрування та знаходять первісну як функцію змінної t. Після заміни цієї змінної її виразом через x отримують шуканий інтеграл.

Наприклад:

$$\int \frac{dx}{1-2x} = \left[\begin{array}{ll} 1-2x=t & dx=-\frac{1}{2}dt \\ -2x=t-1 & \\ 2x=1-t & \\ x=\frac{1-t}{2} & \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{1}{2}}{t}dt = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C$$

$$\int xe^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} -x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \int e^t\left(-\frac{1}{2}dt\right) = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{bmatrix} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

Інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ - диференційовані функції від x. Згідно з властивістю диференціала добутку двох функцій маємо: $d(uv) = vdu + udv$, звідки: $udv = d(uv) - vdu$.

Інтегруючи праву та ліву частину останньої рівності та враховуючи, що $\int d(uv) = uv$ маємо інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (7)$$

Для використання формули інтегрування частинами підінтегральний вираз потрібно розбити на два співмножники. Один з них позначають через u, а останню частину відносять до іншого співмножника; її позначають через dv. Потім за допомогою диференціювання знаходять du та інтегруванням – функцію v: $du = u'dx$ та $v = \int dv + C$. За u слід брати таку частину підінтегрального виразу, яка диференціюванням спрощується, а за dv - таку, що легко інтегрується.

За інтегрування dv для v отримують нескінчену множину первісних, зазвичай вибирають ту, в якій довільна постійна $C = 0$, тобто її не вводять у розв’язок взагалі. Інколи метод інтегрування частинами слід використовувати послідовно кілька разів.

Наприклад:

1. $\int xe^{-2x}dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2xdx} & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}dx\right) =$

$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

2. $\int x\ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ та $F(x)$ - будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a;b]$. Тоді визначений інтеграл від функції $f(x)$ на $[a;b]$ дорівнює приросту первісної $F(x)$ на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \textbf{(8)}$$

Слід зазначити, що знаходження визначених інтегралів з використанням формули Ньютона-Лейбніца **(8)** здійснюється за два кроки: спочатку, використовуючи техніку знаходження невизначеного інтеграла, знаходять деяку первісну $F(x)$ для підінтегрального виразу $f(x)$. Потім використовують власне формулу Ньютона-Лейбніца – знаходять приріст первісної, що дорівнює шуканому інтегралу.

Тому введемо позначення приросту первісної, яке зручно використовувати:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad \textbf{(9)}$$

Для використання формули Ньютона-Лейбніца можна використовувати будь-яку первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$, наприклад ту, що має найпростіший вигляд при $C=0$. Звичайно так і здійснюють обчислення визначеного інтеграла.

Наприклад:

$$\int_0^1 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\int_1^2 2^{3x-4} dx = \left.\left(\frac{1}{3\ln 2} 2^{3x-4}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left.\left(2^{3x-4}\right)\right|_1^2 = \frac{1}{3\ln 2}\left(4 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6\ln 2} \approx 1{,}6831$$

ЗАДАЧА 2.

У задачах **2.1 –2.20** знайти невизначені та визначені інтеграли:

У прикладі **1)** - користуючись властивостями інтегралів та таблицею основних інтегралів;

у прикладі **2)** – використовуючи метод заміни змінної у невизначеному інтегралі;

у прикладі **3)** –використовуючи формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі;

у прикладі **4)** –використовуючи формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

У прикладах **1), 2), 3)** виконати перевірку диференціюванням.

2.1 **1)** $\int (6x^3 - \sqrt[4]{x} + \frac{7}{x^4})dx$ **2)** $\int \frac{dx}{1-4x}$

3) $\int \ln 3x dx$ **4)** $\int_1^2 \ln(3x-2)\, dx$

4.2 **1)** $\int \left(\cos 2x - 3e^{4x}\right)\, dx$ **2)** $\int \frac{\cos 4x}{\sin 2x \cos 2x}\, dx$

3) $\int x\cos 3x\,dx$

4) $\int_{2}^{5} \ln(4x-5)\,dx$

2.3 1) $\int\left(x^5+\frac{5}{x^3}-\sqrt[3]{x^7}\right)dx$

2) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+7}\,dx$

3) $\int x\cos 5x\,dx$

4) $\int_{3}^{6} \ln(3x-8)\,dx$

2.4 1) $\int\left(2x^3+\frac{3}{x^3}-\frac{7}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$

2) $\int \frac{\sin x}{1+4\cos x}\,dx$

3) $\int x4^x dx$

4) $\int_{4}^{7} \ln(6x-11)\,dx$

2.5 1) $\int\left(2x^6+\frac{8}{x^2}-\sqrt[5]{x}\right)dx$

2) $\int \cos^5 x\sin x\,dx$

3) $\int x\ln 2x\,dx$

4) $\int_{5}^{8} \ln(2x-14)dx$

2.6 1) $\int\left(3x^4+\frac{1}{x^6}-\frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$

2) $\int \frac{x^2}{6x^3+1}dx$

3) $\int x\cdot e^{-5x}dx$

4) $\int_{0}^{3} \ln(4x+1)dx$

2.7 1) $\int\left(3x^4-\frac{10}{x^7}+9\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

2) $\int \sin^5 4x\cos 4x dx$

3) $\int x\sin 3x dx$

4) $\int_{-1}^{2} \ln(5x+4)dx$

2.8 1) $\int\left(3x-\frac{4}{x^4}+\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ 2) $\int\frac{x^3-1}{x^4-4x+5}dx$

3) $\int\sin(1-5x)dx$ 4) $\int_{-2}^{1}\ln(5x+7)dx$

2.9 1) $\int\sqrt[4]{4x+5}dx$ 2) $\int 6^{(2x+3)}dx$

3) $\int x\cos 8x dx$ 4) $\int_{-1}^{0}\ln(2x+10)dx$

2.10 1) $\int x\cos 4x dx$ 2) $\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}+8}dx$

3) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ 4) $\int_{1}^{2}\ln(3x+13)dx$

2.11 1) $\int\frac{dx}{\sin^2(3x+5)}$ 2) $\int\frac{4x^3}{x^4+10}dx$

3) $\int x\sin 7x dx$ 4) $\int_{0}^{2}\ln\left(x^2+5\right)dx$

2.12 1) $\int\sqrt[3]{2x+7}dx$ 2) $\int\frac{x^3}{4x^4+3}dx$

3) $\int x5^x dx$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\sin 4x dx$

2.13 1) $\int\left(x^4-\frac{5}{x^5}-7\sqrt[3]{x^5}\right)dx$ 2) $\int\frac{x^2}{7x^3+5}dx$

3) $\int x\cos 4x\,dx$ 4) $\int_{-1}^{2} x\ln(2x+2)dx$

2.14 1) $\int\left(3x-\frac{4}{x^5}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ 2) $\int\cos^4 3x\sin 3x\,dx$

3) $\int xe^{5x}dx$ 4) $\int_{0}^{1}\ln(3x+1)dx$

2.15 1) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}}$ 2) $\int\sin^5 2x\cos 2x\,dx$

3) $\int x\cdot e^{2x}dx$ 4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos 7x\,dx$

2.16 1) $\int(6x^3+\frac{2}{x^4}-\frac{6}{\sqrt[5]{x}})dx$ 2) $\int e^{3x+5}dx$

3) $\int x\sin 8x\,dx$ 4) $\int_{1}^{4}\ln(3x-4)dx$

2.17 1) $\int(x^3+\frac{7}{x^7}-\frac{12}{\sqrt[3]{x^7}})dx$ 2) $\int\frac{\sin x}{5+3\cos x}dx$

3) $\int xe^{5x}dx$ 4) $\int_{2}^{3}\ln(2x+4)dx$

2.18 1) $\int (3x^4 + \frac{1}{x} + 6\sqrt[3]{x^2})dx$ 2) $\int \frac{dx}{2-5x}$

3) $\int \frac{\cos x}{2+5\sin x}dx$ 4) $\int_{-1}^{3} \ln(7x+5)dx$

2.19 1) $\int (6x^3 - \frac{7}{x^2} + 4\sqrt[5]{x^3})dx$ 2) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+5)}$

3) $\int \sin^6 3x \cdot \cos 3x dx$ 4) $\int_{1}^{4} \ln(6x-13)dx$

2.20 1) $\int (5x^4 - \frac{10}{x^3} + 2\sqrt[5]{x^2})dx$ 2) $\int 5^{(3x+1)}dx$

3) $\int x\cos 6x dx$ 4) $\int_{0}^{1} \ln(x^2+3)dx$

Методичні рекомендації

Приклад виконання ЗАДАЧІ 2 Інтеграл 1) запишемо:

$$\int \left(\frac{7}{\sqrt[16]{x^3}} + \frac{1}{x^{12}} - x^{20} \right) dx$$

Інтегрування, що основане на використанні таблиці основних інтегралів, основних властивостей, а також простіших тотожних перетворень підінтегральної функції, називають безпосереднім інтегруванням.

Скористаємося тією властивістю інтегралів, що інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій, які мають первісну, дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих від цих функцій і запишемо:

$$=7\int\frac{dx}{\sqrt[16]{x^3}}+\int\frac{dx}{x^{12}}-\int x^{20}dx=$$

Останній інтеграл – табличний, а в перших двох виконаємо простіші алгебраїчні перетворення:

$$=7\int x^{-\frac{3}{16}}dx+\int x^{-12}dx-\int x^{20}dx=$$

Скориставшись табличним інтегралом від степеневої функції отримаємо:

$$=7\cdot\frac{x^{-\frac{3}{16}+1}}{-\frac{3}{16}+1}+\frac{x^{-12+1}}{-12+1}-\frac{x^{20+1}}{20+1}+c=\frac{112}{13}x^{\frac{13}{16}}-\frac{x^{-11}}{11}-\frac{x^{21}}{21}+c=\frac{112}{13}\sqrt[16]{x^{13}}-\frac{1}{11x^{11}}-\frac{x^{21}}{21}+c$$

Виконаємо перевірку, що основана на понятті первісної функції F(x), похідна якої дорівнює заданій функції:

$$F'(x)=f(x),$$

тобто у прикладах **1);2);3);** маючи результат інтегрування - функцію $F(x)$, і знайшовши похідну $F'(x)$, за умови якщо помилок не допущено, повинні отримати підінтегральну функцію $f(x)$ вихідного інтеграла;

$$F'(x)=\left(\frac{112}{13}\sqrt[16]{x^{13}}-\frac{1}{11x^{11}}-\frac{x^{21}}{21}+c\right)'=\frac{112}{13}\left(x^{\frac{13}{16}}\right)'-\frac{1}{11}\left(\frac{1}{x^{11}}\right)'-\frac{1}{21}\left(x^{21}\right)'=$$

$$=\frac{112}{13}\cdot\frac{13}{16}x^{\frac{13}{16}-1}--\frac{1}{11}\left(-\frac{1}{\left(x^{11}\right)^2}\right)\cdot 11x^{10}-\frac{1}{21}\cdot 21x^{20}=7\cdot x^{-\frac{3}{16}}+\frac{1}{x^{12}}-x^{20}=$$

$$=\frac{7}{\sqrt[16]{x^3}}+\frac{1}{x^{12}}-x^{20}=f(x)$$

Інтеграл 2) запишемо:

$$\int\frac{x^3+\cos x}{x^4+4\sin x}dx=$$

Скористаємося методом заміни змінної (підстановки). Замінимо знаменник підінтегральної функції $x^4+4\sin x$ на t, тоді визначимо диференціал функції знаменника:

$$\left(4x^3+4\cos x\right)dx=dt$$
$$4\left(x^3+\cos x\right)dx=dt$$
$$\left(x^3+\cos x\right)dx=\frac{dt}{4}$$

Підставивши інтеграл, маємо:

$$\int\frac{\frac{dt}{4}}{t}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+c=\frac{1}{4}\ln\left|x^4+4\sin x\right|+c$$

Виконаємо перевірку.

$$F'(x)=\left(\frac{1}{4}\ln\left|x^4+4\sin x\right|+c\right)'=\frac{1}{4}\left(\ln\left|x^4+4\sin x\right|\right)'=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+4\sin x}\left(x^4+4\sin x\right)'=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^4+4\sin x}\times\left(4x^3+4\cos x\right)=\frac{x^3+\cos}{x^4+4\sin x}=f(x).$$

Інтеграл **3)** запишемо:

$$\int(x+5)\sin 3x dx=$$

Скористаємося формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі:

$$\int udv=uv-\int vdu$$

Нехай $u=x+5,\ dv=\sin 3xdx,\ \text{тоді}\ du=dx,\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x$

Підставивши у формулу інтегрування частинами, маємо:

$$=-\frac{1}{3}(x+5)\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}(x+5)\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$$

Виконаємо перевірку

$$F'(x)=\left(-\frac{1}{3}(x+5)\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c\right)'=\frac{1}{3}\left((x+5)\cos 3x\right)'+\frac{1}{9}(\sin 3x)'$$
$$=\frac{1}{3}\left((x+5)\right)'\cos 3x+(x+5)(\cos 3x)'+\frac{1}{9}(\sin 3x)'=-\frac{1}{3}\left(\cos 3x-3(x+5)\sin 3x\right)+$$
$$+\frac{1}{9}\cdot 3\cos 3x=-\frac{1}{3}\cos 3x+(x+5)\sin 3x+\frac{1}{3}\cos 3x=(x+5)\sin 3x=f(x)$$

Інтеграл **4)** запишемо:

$$\int_0^1 \ln\left(4x^2+6\right)dx=$$

Скористаємося формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$$

Нехай $u=\ln(4x^2+6), dv=dx,$ тоді

$$du=\frac{8x}{4x^2+6}dx; \quad v=u$$

Підставивши у формулу, маємо:

$$= x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{8x^2}{4x^2+6}dx=$$

Розділимо чисельник підінтегральної функції на знаменник за правилом ділення многочлена на многочлен і представимо неправильний дріб $\frac{8x^2}{4x^2+6}$ у вигляді суми цілої частини і правильного дробу.

$$\begin{array}{r|l} -\;8x^2 \qquad & 4x^2+6 \\ \cline{2-2} \underline{8x^2+\quad 12} & 2 \\ -12 \qquad & \end{array}$$

$$= x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(2-\frac{12}{4x^2+6}\right)dx = x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 dx + 12\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+6} = x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 -$$

$$-2\int_0^1 dx + 3\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}} = x\ln\left(4x^2+6\right)\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 - \frac{3\sqrt{2}}{3}arctg\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \ln 10 - 2 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Теорія ймовірності.

ЗАДАЧА 3.

У задачах **3.1 – 3.20** відомо, що з даної кількості насіння деякої сільськогосподарської культури проростає тільки **p** відсотків.

1) Знайти ймовірність того, що з відібраних навмання **n** насінин проросте:

а) менше $(\boldsymbol{m} - 1)$ насінин;

б) рівно $\boldsymbol{m}$ насінин;

в) не менше $\boldsymbol{m}$ насінин.

2) Написати біномний закон розподілу дискретної випадкової величини $\boldsymbol{X}$ – числа проростань серед відібраних $\boldsymbol{n}$ насінин. Побудувати багатокутник розподілу та обчислити числові характеристики: математичне сподівання $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})$, дисперсію $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})$, середнє квадратичне відхилення $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})$.

Значення $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}$ для кожного варіанта наведені нижче в **таблиці 1.**

Таблиця 1

Номер задачі	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{p}$ %	**Номер задачі**	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{p}$ %
3.1	10	8	92	**3.11**	9	4	85
3.2	9	4	75	**3.12**	8	6	90
3.3	8	6	90	**3.13**	7	4	95
3.4	7	4	95	**3.14**	6	3	82
3.5	6	3	80	**3.15**	10	4	75
3.6	10	7	90	**3.16**	9	5	78
3.7	9	5	90	**3.17**	10	7	93
3.8	8	4	87	**3.18**	7	5	90
3.9	7	5	90	**3.19**	6	4	85
3.10	6	4	94	**3.20**	10	5	76

ЗАДАЧА4.

У задачах **4.1 – 4.20** відома ймовірність p появи події A в кожному з n незалежних випробувань. Знайти ймовірність того, що вказана подія A в цих випробуваннях з'явиться:

1) рівно k разів;

2) не менше, як k_1 раз, та не більше як k_2 рази;

3) не менше, як k_1 раз;

4) не більше, як k_2 рази.

Значення n, p, k, k_1 та k_2 наведені нижче в **таблиці 2.**

Таблиця 2

Номер задачі	n	p	k	k_1	k_2	Номер задачі	n	p	k	k_1	k_2
4.1	1600	0,9	1420	1421	1494	**4.11**	400	0,9	350	351	387
4.2	1350	0,4	511	512	621	**4.12**	1225	0,8	960	961	1036
4.3	625	0,5	291	292	355	**4.13**	1350	0,6	782	783	891
4.4	2100	0,7	1440	1441	1533	**4.14**	225	0,5	100	101	141
4.5	225	0,8	170	171	207	**4.15**	625	0,64	378	379	448
4.6	2700	0,75	1988	1989	2097	**4.16**	900	0,8	700	701	758
4.7	2400	0,6	1402	1403	1536	**4.17**	300	0,75	208	209	252
4.8	625	0,8	480	481	538	**4.18**	600	0,4	220	221	294
4.9	2500	0,36	860	861	1008	**4.19**	2500	0,64	1560	1561	1708
4.10	400	0,5	184	185	238	**4.20**	400	0,8	304	305	356

ЗАДАЧА 5.

У задачах **7.1 –7.20** відома ймовірність p появи події A в

кожному з n незалежних випробовувань. Знайти ймовірність того, що названа подія A в цих випробуваннях наступить:

1) рівно m разів;

2) менше m разів;

3) більше m разів;

4) жодного разу;

5) хоча б один раз.

Значення ***n, m, p*** наведено нижче, в **таблиці 3.**

Таблиця 3

Номер задачі	***n***	***p***	***m***	**Номер задачі**	***n***	***p***	***m***
5.1	2000	0,002	3	**5.11**	1000	0,008	3
5.2	3000	0,003	4	**5.12**	1500	0,0047	4
5.3	2500	0,0008	5	**5.13**	2500	0,0025	5
5.4	4000	0,00025	3	**5.14**	1000	0,006	3
5.5	1000	0,005	3	**5.15**	2000	0,0035	3
5.6	1500	0,0027	4	**5.16**	1500	0,002	4
5.7	2000	0,0015	5	**5.17**	1000	0,007	5
5.8	3500	0,00057	4	**5.18**	2500	0,0016	4
5.9	3000	0,002	3	**5.19**	1500	0,002	3
5.10	1500	0,0034	4	**5.20**	1000	0,004	4

Методичні рекомендації

Якщо виконується декілька випробувань, то при цьому ймовірність появи події ***A*** в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються **незалежними відносно події *A***.

Нехай на деякій земельній ділянці проводиться сівба кукурудзи. При цьому в ґрунт потрапляє велика кількість зернин кукурудзи, що можуть прорости, або не прорости. Сівбу кукурудзи можна розглядати як проведення повторних випробовувань зерна кукурудзи. Позначимо через ***A*** подію, що нас цікавить, а саме проростання однієї зернини кукурудзи. Проростання кожної окремої зернини можна розглядати як незалежні події, а ймовірності проростання можуть бути різними або однаковими. Припустимо, що розглядаються незалежні випробовування, в кожному з яких ймовірність появи події однакова.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в **n** незалежних випробовуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює $\boldsymbol{p}\left(0<\boldsymbol{p}<1\right)$**,** така подія настане рівно ***m*** разів ***(t = m),*** байдуже в якій послідовності, а, отже, не настане ***(n - m)*** разів, дорівнює:

$$\boldsymbol{P_n\left(m\right)=P_n\left(t=m\right)\approx C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}}, \tag{3.1}$$

або

$$\boldsymbol{P_n\left(m\right)=P_n\left(t=m\right)\approx \frac{n!}{m!\left(n-m\right)!}p^m\cdot q^{n-m}}, \tag{3.2}$$

де $\boldsymbol{q=1-p}$

Ймовірності того, що в **n** незалежних випробовуваннях подія **A** наступить:

а) менше $\boldsymbol{m}$ разів $\left(\boldsymbol{t<m}\right)$;

б) більше $\boldsymbol{m}$ разів$\left(\boldsymbol{t>m}\right)$;

в) не менше $\boldsymbol{m}$ разів $\left(\boldsymbol{t\geq m}\right)$;

г) не більше $\boldsymbol{m}$ раз $\left(\boldsymbol{t\leq m}\right)$ – знаходяться відповідно за формулами:

а) $\boldsymbol{P_n\left(t<m\right)=P_nP_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+\ldots+P_n\left(m-1\right)}$; (3.3)

б) $\boldsymbol{P_n\left(t\ >m\right)=P_n\left(m+1\right)+P_n\left(m+2\right)+\ldots+P_n\left(n\right)}$; (3.4)

в) $\boldsymbol{P_n\left(t\ \geq\ m\right)=P_n\left(m\right)+P_n\left(m+1\right)+\ldots\ +P_n\left(n\right)}$; (3.5)

г) $\boldsymbol{P_n\left(t\ \leq m\right)=P_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+\ldots+P_n\left(m\right).}$ (3.6)

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 3.</u>

Проростання насіння кукурудзи дорівнює 90%. Знайти ймовірність того, що з 8 посіяних насінин проросте:

1) менше п’яти;

2) рівно шість;

3) не менше шести.

Розв'язання.

1) Шукана подія $\boldsymbol{A}$ – з 8 насінин проросте менше п'яти полягає в тому, що для 8 посіяних насінин можливі такі результати: "жодне не проросте", або "проросте два", або "проросте три", або "проросте чотири". Так як вказані чотири події несумісні, то за теоремою додавання несумісних подій шукана ймовірність (5.3) дорівнює:

(1) $$\boldsymbol{P_8 = (t<5) = P_8(t=0) + P_8(t=1) + P_8(t=2) + P_8(t=3) + P_8(t=4)}$$

Згідно з умовою задачі, схожість насіння кукурудзи становить 90%, тобто ймовірність того, що кожна окрема насінина проросте $\boldsymbol{p = \frac{90\%}{100\%} = 0{,}9}$, тоді ймовірність того, що насінина кукурудзи не проросте: $\boldsymbol{q = 1 - p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1}$.

Крім того $\boldsymbol{n = 8,\ t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3 = 2,}$

$\boldsymbol{t_4 = 3,\ t_5 = 4.}$

Підставляючи послідовно ці величини у формулу (3.1) , знаходимо:

$$\boldsymbol{P_n(t=m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}} \quad ;$$

$$\boldsymbol{P_n(t=m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}}$$

$$\boldsymbol{P_8(t=0) = \frac{8!}{0!8!} \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^8 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1^8 = 0{,}00000001};$$

$$\boldsymbol{P_8(t=0) = \frac{8!}{1!7!} \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^7 = 8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}000001 = 0{,}00000072};$$

$$\boldsymbol{P_8(t=2) = \frac{8!}{2!8!} \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1^6 = 28 \cdot 0{,}81 \cdot 0{,}000001 = 0{,}00002268};$$

$$\boldsymbol{P_8(t=3) = \frac{8!}{3!5!} \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}1^5 = 56 \cdot 0{,}729 \cdot 0{,}00001 = 0{,}00040824};$$

$$\boldsymbol{P_8(t\ =\ 4) = \frac{8!}{4!4!} 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^4 = 70 \cdot 0{,}6561 \cdot 0{,}001 = 0{,}0045927}.$$

Підставивши в формулу (3.3) маємо:

$$P_8(t<5)=0{,}00000001+0{,}00000072+0{,}00002268+0{,}00040824+0{,}0045927=$$
$$=0{,}00502435.$$

2) Ймовірність того, що з 8 посіяних насінин кукурудзи проросте рівно шість, знайдемо за формулою Бернуллі (3.1)

$$P_n(t=m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m};$$

$$P_8(t\ =6)=C_8^6 0{,}9^6\cdot 0{,}1^2=0{,}9^6\cdot 0{,}1^2=28\cdot 0{,}5314\cdot 0{,}01=0{,}1488$$

3) Шукана подія **А** – з 8 посіяних насінин кукурудзи проросте не менше шести, тобто більше шести, полягає в тому, що для 8 посіяних насінин можливі такі результати: "проросте шість насінин", або "проросте сім насінин ", або "проросте вісім насінин". Тому що названі три події несумісні, то за теоремою додавання несумісних подій шукана ймовірність (3.5) дорівнює:

(2) $$P_8(t>6)=P_8(t=6)+P_8(t=7)+P_8(t=8)$$

Кожна з ймовірностей у правій частині формули знаходиться за формулою Бернуллі (3.1):

$$P_n(t=m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$$

Ймовірність проростання однієї насінини кукурудзи дорівнює 0,9 , ймовірність непроростання – **0,1**, крім того $n\ =\ 8$, а $m_6=6$, $m_7=7$, $m_8=8$.

$$P_8(t=6)=C_8^6 0{,}9^6\cdot 0{,}1^2=\frac{8!}{6!2!}\cdot 0{,}9^6\cdot 0{,}1^2=28\cdot 0{,}5314\cdot 0{,}01=0{,}1488$$

$$P_8(t\ =\ 7)=C_8^7\cdot 0{,}9^7\cdot 0{,}1^1=0{,}9^7\cdot 0{,}1^1=8\cdot 0{,}4783\cdot 0{,}1=0{,}3827$$

$$P_8(t=8)=C_8^8\cdot 0{,}9^8\cdot 0{,}1^0=0{,}9^8\cdot 0{,}1^0=1\cdot 0{,}9^8\cdot 1=0{,}4305$$

Підставивши результати в формулу (2), маємо:

$$P_8(t\geq 6)=0{,}1488+0{,}3827+0{,}4305=0{,}9620$$

Ймовірність того, що з восьми посіяних насінин кукурудзи проросте не менше шести насінин $P_8(t\geq 6)=0{,}9620.$

Якщо число випробовувань n досить велике $(n>10)$, то знаходження ймовірності $P_n(t=m)$ за формулою Бернуллі приводить до громіздких обчислень і застосування цієї формули стає практично неможливим. В таких випадках використовують наближену формулу, що виражає **локальну теорему Муавра – Лапласа** : якщо в кожному окремому випробовуванні ймовірність появи події дорівнює $p(0<p<1)$, то ймовірність того, що в n незалежних випробовуваннях така подія дорівнює m разів (байдуже в якій послідовності), наближено дорівнює:

$$P_n(t=m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \tag{4.1}$$

де $$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}};\quad q=1-p;\qquad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Формулу (4.1) ще називають асимптотичною формулою для біномного розподілу ймовірностей. Функція $\varphi(x)$ – функція Лапласа. Ця функція є парною, а її графік називається кривою розподілу випадкової величини. Для значень функції $\varphi(x)$ складені детальні таблиці для різних значень аргументу x (дивись додатки **таблиця 1**). Тому що функція Лапласа $\varphi(x)$ парна, то для всіх $x<0:\varphi(-x)=\varphi(x)$. Для значень x таких, що $|x|\geq 4$беремо значення $\varphi(x)\approx 0$.

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 4.</u>

У деякому ставку коропи становлять 80% від усієї кількості риби, що там є. Знайти ймовірність того, що з 1000 виловлених у цьому ставку рибин буде 890 коропів.

<u>Розв'язання.</u>

У відповідності з умовою задачі маємо:

$$n=1000,\ m=890,\ p=\frac{80\%}{100\%}=0,8;\ q=1-p=1-0,8=0,2.$$

Тому що число випробувань $n=1000$ – досить велике число, то для знаходження ймовірностей того, що з 1000 виловлених рибин буде 890 коропів, будемо використовувати наближену формулу (6.1) локальної теореми Муавра-

Лапласа. Для цього знаходимо спочатку значення аргументу $\boldsymbol{x}$ **:**

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{890-1000\cdot 0,8}{\sqrt{1000\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{-10}{12,6491}\approx -0,79.$$

У таблиці значень функції Лапласа $\varphi(x)$ (дивись **табл. 1** додатка), враховуючи при цьому, що $x=-0,79<0$, та те, що **φ(x)** парна, знаходимо значення $\varphi(-0,79)=\varphi(0,79)\approx 0,292$. Підставляючи це значення в формулу (2.7), обчислюємо відшукувану ймовірність:

$$P_{1000}(890)=P_{1000}(t=890)\approx\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0,8\cdot 0,2}}\cdot\varphi(-0.79)\approx\frac{0,292}{12,6491}\approx 0,02308$$

а бо остаточно $P_{1000}(890)\approx$ **0,0231.**

Застосування асимптотичної формули (6.1) в тих випадках, коли маємо справу з масовими, але мало ймовірними подіями, тобто тоді, коли число подій $\boldsymbol{n}$ дуже велике, а $\boldsymbol{p}$ дуже мале, приводить до значних відхилень від точного значення ймовірності $P_n(t=m)$.Тоді при досить малих значеннях $\boldsymbol{p}$ та великих значеннях $\boldsymbol{n}$ використовується асимптотична формула Пуассона.

Якщо ймовірність $\boldsymbol{p}$ появи події $\boldsymbol{A}$ в кожному з $\boldsymbol{n}$ незалежних випробовувань мала, а число випробовувань $\boldsymbol{n}$ досить велике, то ймовірність того, що подія $\boldsymbol{A}$ наступить рівно $\boldsymbol{m}$ разів, обчислюється за формулою Пуассона:

$$P_n(m)=P_n(t=m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda} \qquad (5.1)$$

де $\lambda=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}$ – середнє число появи подій.

Формулу (7.1) використовують в такому разі, коли $\lambda=n\cdot p\le 10$. При цьому, чим більше число випробовувань $\boldsymbol{n}$ та чим менше ймовірність $\boldsymbol{p}$**,** тим точнішим буде результат (відповідна ймовірність), який обчислений за формулою (5.1).

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 5.</u>

Ймовірність пошкодження довгоносиком коренеплоду цукрового буряку на деякій ділянці дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що серед 1000 коренеплодів пошкоджених буде:

1) рівно 4 коренеплоди;

2) менше 4 коренеплодів;

3) більше 4 коренеплодів;

4) хоча б один коренеплід.

Розв'язання.

Згідно з умовою задачі $n = 1000, m = 4, p = 0,003$;

Тоді $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0,003 = 3 < 10.$

1) Використовуючи формулу (5.1) знаходимо відшукувану ймовірність $P_{1000}(t = 4)$

$$P_{1000}(4) = P_{1000}(t = 4) = \frac{3^4}{4!} \cdot 2,71^{-3} = \frac{81 \cdot 0,0502}{24} \approx 0,1694.$$

2) Шукана подія A – з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджених буде менше 4 коренеплодів полягає в тому, що для 1000 коренеплодів можливі такі результати: " жодного пошкодженого коренеплоду", або "один пошкоджений", або "два пошкоджених", або "три пошкоджені". Вказані чотири події несумісні. За теоремою додавання несумісних подій шукана ймовірність дорівнює:

$$P_{1000}(t < 4) = P_{1000}(t = 0) + P_{1000}(t = 1) + P_{1000}(t = 2) + P_{1000}(t = 3). \quad (3)$$

Кожну з ймовірностей у правій частині формули окремо знайдемо за формулою Пуассона (5.1).

$$P_n(m) = P_n(t = m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda};$$

$m = 0, \lambda = 3, e = 2,71;$

$$P_{1000}(t = 0) = \frac{3}{0!} \cdot 2,71^{-3} = \frac{1}{2,71^3} = 0,0502;$$

$m = 1, \lambda = 3, e = 2,71;$

$$P_{1000}(t = 1) = \frac{3^1}{1!} \times 2,71^{-3} = \frac{3}{2,71^3} = 0,1507;$$

$m = 2, \lambda = 3, e = 2,71;$

$$P_{1000}(t = 2) = \frac{3^2}{2!} 2,71^{-3} = \frac{9}{2 \cdot 2,71^3} = 0,2261;$$

$$m = 3,\ \lambda = 3,\ e = 2{,}71;$$

$$P_{1000}(t = 3) = \frac{3^3}{3!} \cdot 2{,}71^{-3} = \frac{27}{6 \cdot 2{,}71^3} = 0{,}2261.$$

Підставивши результат у формулу (3), маємо:

$$P_{1000}(t < 4) = 0{,}0502 + 0{,}1507 + 0{,}2261 + 0{,}2261 = 0{,}6531.$$

3) Шукана подія A – з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджених буде більше 4 коренеплодів, полягає в тому, що для 1000 коренеплодів можливі такі результати: "пошкоджених 4 коренеплоди", або "пошкоджених 5 коренеплодів", або "пошкоджених 6 коренеплодів" і т.д. аж до "пошкоджених 1000 коренеплодів".

Знайти шукану ймовірність $P_{1000}(k \geq 4)$ звичайним способом, використовуючи формулу (3.5) практично неможливо внаслідок того, що треба знаходити суму численної кількості ймовірностей кожної з несумісних подій. Тому це питання задачі розв’язується, використовуючи поняття протилежних подій. Події "з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджених буде більше 4" і "з 1000 коренеплодів цукрового буряка пошкоджених буде менше 4" – вважаємо протилежними подіями. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P_{1000}(k \geq 4) + P_{1000}(k < 4) = 1.$$

Звідки:

$$P_{1000}(k \geq 4) = 1 - P_{1000}(k < 4).$$

Ймовірність $P_{1000}(k < 4)$ знайдена в пункті "б", тому ймовірність того, що з 1000 коренеплодів пошкоджених буде більше чотирьох, знайдемо:

$$P_{1000}(k \geq 4) = 1 - 0{,}6531 = 0{,}3469.$$

4) Це питання задачі розв’язується також використовуючи поняття протилежних подій. Події "з 1000 коренеплодів цукрового буряку пошкоджений буде хоча б один" і "з 1000 коренеплодів цукрового буряку жоден не буде пошкоджений" – вважаємо протилежними подіями. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P_{1000}(k<1)+P_{1000}(k\ =0)=1.$$

Звідки

$$P_{1000}(k<1)\ =1-P_{1000}(k=0).$$

Ймовірність того, що з 1000 коренеплодів цукрового буряку жоден не буде пошкоджений, знайдено в пункті "б" задачі:

$$P_{1000}(k\ =0)=0{,}0502,$$

тому ймовірність того, що з 1000 коренеплодів цукрового буряку хоча б один пошкоджений знайдемо:

$$P_{1000}(k<1)\ =1-0{,}0502=0{,}9498.$$

Формули Бернуллі (3.1), Пуассона (5.1) та асимптотична формула (4.1), що виражає локальну теорему Муавра-Лапласа, дозволяють знаходити ймовірність появи події A рівно m разів в n незалежних випробовуваннях. На практиці досить часто буває потрібно визначити ймовірність того, що подія A наступить не менше як m_1 раз та не більше як m_2 разів, тобто число $t=m$ визначається нерівностями $m_1\le m\le m_2$. В таких випадках застосовується формула з **інтегральної теореми Муавра-Лапласа.**

Якщо ймовірність появи події A в кожному з n випробовувань стала і дорівнює $p(0<p<1)$, то ймовірність $P_n(m_1;\ m_2)$ того, що в n незалежних випробовуваннях подія A наступить не менше як m_1 разів, наближено дорівнює різниці функцій Лапласа для значення x_2 та x_1:

$$P_n(m_1;\ m_2)\approx\Phi\ (x_2)-\Phi\ (x_1), \tag{4.2}$$

де

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}};\ \ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}};$$

$$\Phi\ (x)\ =\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Для отримання значень функції Лапласа $\Phi(x)$ для даного аргумента x

використовуємо ту ж **таблицю 2**, враховуючи, що функція Лапласа непарна, тобто $\boldsymbol{\Phi}(-x) = \boldsymbol{\Phi}(x)$**.** Для значень аргумента $x > 5$ беремо $\boldsymbol{\Phi}(x) \approx 0{,}5$, а для значень $x < -5$ приймаємо $\boldsymbol{\Phi}(x) \approx -0{,}5$.

Приклад виконання ЗАДАЧІ 4.

На тракторному заводі робітник за зміну виготовляє 200 деталей, серед яких 93% найвищої якості. Знайти ймовірність того, що деталей найвищої якості серед виготовлених буде:

1) не менше як 180 штук та не більше як 195 штук;

2) не менше як 180 штук;

3) не більше як 195 штук.

Розв'язання.

1) У відповідності з умовою задачі маємо: $n = 200;\ m_1 = 180;\ m_2 = 195$,

$P = \dfrac{93\%}{100\%} = 0{,}93$; $\qquad q = 1 - p = 1 - 0{,}97 = 0{,}07$. Знаходимо значення аргументів x_1 та x_2 для функції Лапласа $\hat{O}\left(\tilde{o}\right)$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{180 - 200 \cdot 0{,}93}{\sqrt{200 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}07}} \approx \frac{-6}{3{,}608} \approx -1{,}663;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{195 - 200 \cdot 0{,}93}{\sqrt{200 \cdot 0{,}93 \cdot 0{,}07}} \approx \frac{9}{3{,}608} \approx 2{,}494.$$

У таблиці 2 додатку знаходимо:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1{,}66) = -\Phi(1{,}66) \approx -0{,}4515;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}49) = \frac{\Phi(2{,}48) + \Phi(2{,}5)}{2} \approx \frac{0{,}4934 + 0{,}4938}{2} = 0{,}4936$$

Підставляючи ці значення $\Phi(x_1)$ та $\Phi(x_2)$ у формулу (4.2), знаходимо шукану ймовірність:

$$P_{200}(180;\ 195) \approx 0{,}4936 - (-0{,}4515) = 0{,}9451.$$

2) Оскільки в умові задачі говориться "не менше як 100 штук", тобто більше 180 штук, то нижня межа буде m_1 = 180, а верхню межу беремо m_2 = 200 –

максимальне число деталей.

Знаходимо значення аргументів x_1 та x_2 для функції Лапласа $\Phi(x)$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \frac{180 - 200 \cdot 0,93}{= \sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx \frac{-6}{3,608} \approx -1,663;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{200 - 200 \cdot 0,93}{\sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx \frac{14}{3,608} \approx 3,88.$$

У таблиці 2 додатку знаходимо

$$\Phi(x_1) = \Phi(-1,66) = -\Phi(1,66) \approx -\ 0,4515;$$

$$\Phi\ (x_2) = \Phi(-3,88) = \frac{\Phi(3,80) + \Phi(4,00)}{2} \frac{0,49993 + 0,49997}{2} = 0,49995.$$

Підставляючи ці значення $\Phi\ (x_1)$та $\Phi\ (x_2)$ у формулу (4.2), знаходимо шукану ймовірність:

$$P_{200}(180;\ 200) = 0,49995 - (-\ 0,4515) = 0,49995 + 0,4515 = 0,95145.$$

3) "Не більше як 195 штук" в умові задачі розуміємо так, що нижня межа $\mathbf{m_1}$ повинна бути 0, а верхня повинна бути 195.

Знаходимо значення аргументів x_1 та x_2 для функції Лапласа $\Phi(x)$:

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 200 \cdot 0,93}{\sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx -\frac{186}{3,608} \approx -51,55;$$

$$\mathrm{x}_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{195 - 200 \cdot 0,93}{\sqrt{200 \cdot 0,93 \cdot 0,07}} \approx \frac{9}{3,608} \approx 2,494.$$

У таблиці 2 додатка знаходимо:

$$\Phi(x_1) = \Phi(-51,55) = -\Phi(51,55) \approx -0,5$$

$$\Phi(x_2) = \Phi\ (2,494) = \frac{\Phi(2,48) + \Phi(2,5)}{2} \approx \frac{0,4934 + 0,4938}{2} = 0,4936.$$

Підставляючи ці значення $\Phi\ (x_1)$та $\Phi\ (x_2)$ у формулу (2.9), знаходимо шукану ймовірність:

$$P_{200}(90;\ 195) = 0,4936 - (-0,5) = 0,4936\ + 0,5\ = 0,9936.$$

ЗАДАЧА 6.

У задачах **6.1 – 6.20** задано закон розподілу дискретної випадкової величини ***X*** (у першому рядку таблиці дано можливі значення ***X*,** а в другому рядку вказані ймовірності ***p*** цих можливих значень). Знайти числові характеристики:

1) математичне сподівання ***M(X)*;**

2) дисперсію ***D(X)*** – двома способами;

3) середнє квадратичне відхилення $\delta = \delta\left(X\right)$**.**

Побудувати многокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на ньому знайдені значення математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення.

6.1

X	23	28	28	29
p	0,3	0,2	0,4	0,1

6.**2**

X	15	29	42	56
p	0,1	0,3	0,2	0,4

6.3

X	17	21	25	27
p	0,2	0,4	0,3	0,1

6.4

X	24	26	28	30
p	0,2	0,2	0,5	0,1

6.5

X	10	18	25	34
p	0,3	0,2	0,4	0,1

6.6

X	25	27	30	32
P	0,2	0,4	0,3	0,1

6.7

X	12	16	19	21
p	0,1	0,5	0,3	0,1

6.8

X	23	29	35	40
p	0,1	0,3	0,2	0,4

6.9

X	30	32	35	40
p	0,1	0,5	0,2	0,2

6.10

X	12	14	16	20
p	0,1	0,2	0,5	0,2

6.11

X	21	35	48	51
p	0,1	0,4	0,2	0,3

6.12

X	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

6.13

X	60	64	67	70
p	0,1	0,3	0,2	0,4

6.14

X	12	26	39	51
p	0,1	0,5	0,3	0,1

6.15

X	45	47	50	52
p	0,2	0,4	0,3	0,1

6.16

X	46	49	51	55
p	0,2	0,3	0,1	0,4

6.17

X	25	27	30	32
p	0,2	0,4	0,3	0,1

6.18

X	18	22	23	26
p	0,2	0,3	0,4	0,1

6.19

X	78	80	84	85
p	0,2	0,3	0,1	0,4

6.20

X	26	38	50	64
p	0,2	0,3	0,4	0,1

Методичні рекомендації

Одним з основних понять теорії ймовірностей є поняття випадкової величини. Використання теорії ймовірностей для розв'язання задач практики в першу чергу пов'язано з цим поняттям.

Випадковою називають величину, що в результаті випробовування набуде одного і тільки одного можливого значення, наперед невідомого, тому що воно залежить від багатьох випадкових величин (факторів), які заздалегідь не можуть бути враховані. Розрізняють два види випадкових величин: **дискретні** та **неперервні**. Випадкові величини прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту ***X, Y, Z***, або $X_1, X_2, X_3 \ldots Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ **Дискретною** називають випадкову величину, можливі значення якої є окремі ізольовані числа (тобто між двома сусідніми можливими значеннями немає інших можливих значень), які ця випадкова величина приймає з відомими ймовірностями. Іншими словами, можливі значення дискретної випадкової величини можна пронумерувати. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченним або нескінченним (в останньому разі множина всіх можливих значень буде зчисленною).

Законом розподілу або **рядом розподілу дискретної випадкової величини** називається відповідність між її можливими значеннями та ймовірностями. Закон розподілу дискретної випадкової величини можна записати у вигляді таблиці, перший рядок якої складається з можливих значень x_i, а в другій записані відповідні ймовірності p_i:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

(6.1),

де $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1,\ ma\ P\left(X = x_i\right) = p_i\left(i = 1,2,3 \ldots n\right).$

Закон розподілу дискретної випадкової величини **X** може бути заданий аналітично (у вигляді формули):

$$P\left(X = x_i\right) = \varphi\left(x_i\right), \qquad (6.2)$$

за допомогою функції, яку називають **інтегральною функцією розподілу**.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно.

Для цього в прямокутній системі координати достатньо побудувати точки $M(x_1; p_1)$, $M\ (x_2; p_2), \ldots\ M_n(x_n; p_n)$ та з’єднати їх відрізками прямих. Одержану фігуру називають **багатокутником розподілу**.

Біномним називають закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в **n** незалежних випробовуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події стала і дорівнює "p": ймовірність того, що випадкова величина **X** прийме можливе значення, рівне m, де m – число появи подій, обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P(x = \mathrm{m}) = \mathrm{P_n}(\mathrm{t}\ =\ \mathrm{m}) = C_n^m \cdot \mathrm{p^m} \cdot \mathrm{q^{n-m}}. \qquad (6.3)$$

Якщо число випробувань **n** велике, а ймовірність **p** появи події в кожному випробуванні дуже мала, то використовують наближену формулу Пуассона:

$$P(x = m) = P(t = m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \qquad (6.4)$$

де m – число появи подій в n незалежних випробовуваннях;

$\lambda\ =\ n \cdot p$ – середнє число появи події в n випробовуваннях.

У такому разі (формула (3.4)) вважають, що випадкова величина X розподілена за законом Пуассона.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідну ймовірність:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,. \qquad (6.5)$$

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення:

$$D\ (X)\ =\ M\ \left(\left(X\ -\ M\ (X)\right)^2\right)\ = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i\,. \qquad (6.6)$$

Дисперсію також можна обчислити за іншою формулою:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (6.7)$$

Середнім квадратичним відхиленням називають квадратний корінь з дисперсії:

$$\delta = \delta(X) = \sqrt{D(X)}\,. \qquad (6.8)$$

<u>Приклад виконання ЗАДАЧІ 6.</u>

Задано закон розподілу дискретної випадкової величини ***X***(в першому рядку дано можливі значення ***X***, а в другому вказані ймовірності ***p*** цих можливих значень):

X	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

Знайти числові характеристики:

1) математичне сподівання ***M(X);***

2) дисперсію ***D(X)*** – двома способами;

3) середнє квадратичне відхилення $\delta = \delta(X)$**.**

Побудувати багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на ньому знайдені значення математичного сподівання ***M(X)*** та середнього квадратичного відхилення $\delta(\mathrm{X})$**.**

<u>Розв'язання.</u>

1) Математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюється за формулою (6.5) :

$$M\,(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 = 21 \cdot 0,1 + 25 \cdot 0,4 + 28 \cdot 0,2 + 31 \cdot 0,3 =$$
$$= 2,1 + 10,0 + 5,6 + 9,3 = 27,0$$

2) Дисперсію дискретної випадкової величини можна обчислювати безпосередньо за визначенням (формула (3.6)). Для цього обчислимо всі можливі значення квадрата відхилення:

$$(x_1 - M(X))^2 = (21 - 27)^2 = (-6)^2 = 36\,;$$

$$(x_2 - M(X))^2 = (25 - 27) = (-2)^2 = 4\,;$$

$$(x_3 - M(X))^2 = (28 - 27) = (1)^2 = 1\,;$$

$$(x_4 - M(X))^2 = (31 - 27) = (4)^2 = 16\,.$$

Для того, щоб обчислити дисперсію ***D (X)***, запишемо закон розподілу квадрата відхилення, а потім знову використаємо формулу (6.5) :

$\left(X-M(X)\right)^2$	36	4	1	16
p	0,1	0,4	0,2	0,3

$$D(X)=36\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}4\ +1\cdot 0{,}2\ +16\cdot 0{,}3=3{,}6+1{,}6+0{,}2+4{,}8=10{,}2\ .$$

Обчислимо дисперсію дискретної випадкової величини **X** іншим способом, тобто за формулою (6.7). Для цього запишемо закон розподілу величини $\tilde{O}^2$:

X^2	$(21)^2$	$(25)^2$	$(28)^2$	$(31)^2$
p	0,1	0,4	0,2	0,3

Далі знаходимо математичне сподівання $M\ \left(X^2\right)$**:**

$$M\ \left(X^2\right)=x_1^2\cdot p_1+x_2^2\cdot p_2+x_3^2\cdot p_3+x_4^2\cdot p_4$$
$$=\left(21\right)^2\cdot 0{,}1\ +\left(25\right)^2\cdot 0{,}4\ +\left(28\right)^2\cdot 0{,}2+\left(31\right)\cdot 0{,}3=$$
$$=441\cdot 0{,}1\ +625\cdot 0{,}4\ +784\cdot 0{,}2+961\cdot 0{,}3=$$
$$=44{,}1\ +\ 250{,}0\ +\ 156{,}8\ +\ 288{,}3\ =739{,}2.$$

Користуючись формулою (6.7), знаходимо:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M\ \left(X\right)\right)^2=739{,}2\ -\left(27\right)^2=739{,}2-729=10{,}2.$$

Виконані обчислення показали, що значення дисперсної ***D(X)*** в обох випадках одне й те саме.

3) Середнє квадратичне відхилення σ обчислюємо за (6.8):

$$\delta=\delta(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{10{,}2}\approx\ 3{,}19.$$

Побудуємо багатокутник розподілу. По осі абсцис відкладаємо у вибраному масштабі можливі значення x_i випадкової величини *X*; по осі ординат – відповідні значення ймовірностей p_i. Побудовані точки $\left(x_i;p_i\right)$з'єднуємо відрізками прямих. Одержали багатокутник розподілу заданої випадкової величини. Знайдене значення математичного сподівання $M(X)=\ 27$ відкладаємо від точки 0 (початок системи координат) по осі абсцис. Від значення математичного сподівання вправо та вліво відкладаємо відрізки довжиною в одне квадратичне відхилення. Виконані вказаним способом побудови подано нижче, на **рис.1.**

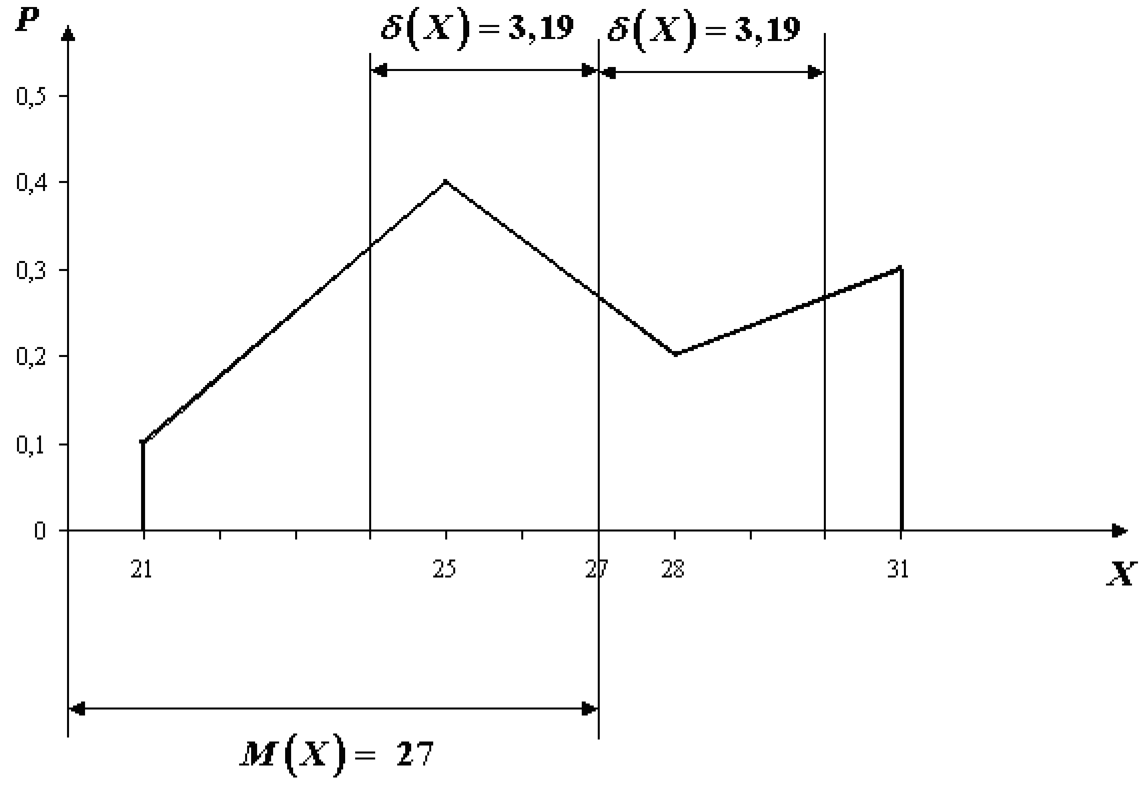

Рис.1

Математична статистика в агрономії.

Середні величини.

ЗАДАЧА 7.

При складанні умов задач **№7, №8** та **№9** в якості α використовуємо останні дві цифри своєї залікової книги, а в якості **N** – останню цифру. Студенти, передостання цифра номеру залікової книги яких закінчується парним числом, використовують для формування задачі **табл. 1**, а ті , у яких передостання цифра непарне число, використовують **табл. 2.**

Табл. 1.

X_i	$3+\alpha$	$5+\alpha$	$6+\alpha$	$8+\alpha$	$10+\alpha$	$14+\alpha$
n_i	$1+\alpha$	$2+\alpha$	$3+\alpha$	$4+\alpha$	$3+\alpha$	$2+\alpha$

Обчислити різні види середніх величин (гармонійну, геометричну, арифметичну, квадратичну) та перевірити правило мажорантності середніх.

Табл. 2.

X_i	$3+\alpha$	$7+\alpha$	$8+\alpha$	$11+\alpha$	$12+\alpha$	$17+\alpha$
n_i	$1+\alpha$	$2+\alpha$	$3+\alpha$	$4+\alpha$	$3+\alpha$	$2+\alpha$

Обчислити різні види середніх величин (гармонійну, геометричну, арифметичну, квадратичну) та перевірити правило мажорантності середніх.

Приклад виконання ЗАДАЧІ 7.

Обчислити різні види середніх величин (гармонічну, геометричну, арифметичну, квадратичну) та перевірити правило мажорантності середніх.

X_i	4	6	7	9	11	15
n_i	1	2	3	4	3	2

Розв’язання

Внесемо розрахунки в таблицю 1.1.

1) Обчислимо середню гармонійну за формулою $\bar{x}_{гарм} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i}{x_i}}$.

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{1+2+3+4+3+2}{\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\frac{3}{11}+\frac{2}{15}} = \frac{15}{1,86241} \approx 8,05408.$$

Таблиця 1.1

Дані для розрахунку різних видів середніх

X_i	n_i	$\dfrac{n_i}{X_i}$	$Ln\ X$	$n \cdot Ln\ X$	$X \cdot n$	X^2	$X^2 \cdot n$
4	1	0,25	0,60206	0,60206	4	16	16
6	2	0,333333	0,778151	1,556303	12	36	72
7	3	0,428571	0,845098	2,535294	21	49	147
9	4	0,444444	0,954243	3,81697	36	81	324
11	3	0,272727	1,041393	3,124178	33	121	363
15	2	0,133333	1,176091	2,352183	30	225	450
Сума	**15**	**1,86241**	**5,397036**	**13,98699**	**136**	**528**	**1372**

1) Обчислимо середню гармонійну за формулою $\bar{x}_{гарм} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k} \dfrac{n_i}{x_i}}$.

$$\bar{x}_{гарм} = \frac{1+2+3+4+3+2}{\frac{1}{4}+\frac{2}{6}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\frac{3}{11}+\frac{2}{15}} = \frac{15}{1,86241} \approx 8,05408.$$

2) Обчислимо середню геометричну

$$\bar{x}_{геом} = \sqrt[\sum n_i]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot x_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}}.$$

Підставимо вихідні дані:

$$\overline{x}_{геом} = \sqrt[15]{4^1 \cdot 6^2 \cdot 7^3 \cdot 9^4 \cdot 11^3 \cdot 15^2}$$

Корінь будь-якого степеня можна обчислити за допомогою логарифмування. Прологарифмуємо обидві частини рівняння:

$$\ln \overline{x}_{геом} = \ln\left(4^1 \cdot 6^2 \cdot 7^3 \cdot 9^4 \cdot 11^3 \cdot 15^2\right)^{1/15}.$$

За властивостями логарифмів:

$$\ln \overline{x}_{геом} = \frac{1}{15}\ln\left(4^1 \cdot 6^2 \cdot 7^3 \cdot 9^4 \cdot 11^3 \cdot 15^2\right) =$$

$$= \frac{1}{15}\left(\ln 4^1 + \ln 6^2 + \ln 7^3 + \ln 9^4 + \ln 11^3 + \ln 15^2\right) =$$

$$= \frac{1}{15}\left(1\ln 4 + 2\ln 6 + 3\ln 7 + 4\ln 9 + 3\ln 11 + 2\ln 15\right) = 2,147082.$$

Тоді, $\overline{x}_{геом} = e^{2,147082} \approx 8,55984$.

3) Обчислимо середню арифметичну $\overline{x}_{арифм} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i}$.

$$\overline{x}_{арифм} = \frac{4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 11 \cdot 3 + 15 \cdot 2}{15} = \frac{136}{15} \approx 9,06667.$$

4) Обчислимо середню квадратичну $\overline{x}_{квадр} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} n_i}}$.

$$\overline{x}_{квадр} = \sqrt{\frac{4^2 \cdot 1 + 6^2 \cdot 2 + 7^2 \cdot 3 + 9^2 \cdot 4 + 11^2 \cdot 3 + 15^2 \cdot 2}{15}} \approx 9,56382.$$

5) Одержані середні розміщуються в такому порядку:

$$8,05408 < 8,55984 < 9,06667 < 9,56382,$$

що відповідає вимогам властивості мажорантності середніх:

$$\overline{x}_{гарм} < \overline{x}_{геом} < \overline{x}_{арифм} < \overline{x}_{квадр}.$$

Відповідь: $\overline{x}_{гарм} \approx \mathbf{8{,}05408}$; $\overline{x}_{геом} \approx \mathbf{8{,}55984}$; $\overline{x}_{арифм} \approx \mathbf{9{,}06667}$; $\overline{x}_{квадр} \approx \mathbf{9{,}56382}$. Одержані середні розміщуються відповідно до правила мажорантності середніх: $\overline{x}_{гарм} < \overline{x}_{геом} < \overline{x}_{арифм} < \overline{x}_{квадр}$.

Показники варіації. Полігон. Гістограма.

Розрахункова робота № 8

Результати дослідження урожайності зернових у господарствах області подано в таблиці 1: **Табл. 1.**

№ п.п	Межі інтервалів за урожайністю зернових культур, ц/га	Число господарств (частота)
1	***14,0+0,1N …18,0+0,1N***	***9***
2	***18,1+0,1N …22,0+0,1N***	***15***
3	***22,1+0,1N …26,0+0,1N***	***16***
4	***26,1+0,1N …30,0+0,1N***	***24***
5	***30,1+0,1N …34,0+0,1N***	***18***
6	***34,1+0,1N …38,0+0,1N***	***12***
7	***38,1+0,1N …42,0+0,1N***	***6***

Результати дослідження урожайності зернових у господарствах області подано в таблиці 2: **Табл. 2.**

№ п.п	Межі інтервалів за урожайністю зернових культур, ц/га	Число господарств (частота)
1	***15,0+0,1N …19,0+0,1N***	***8***
2	***19,1+0,1N …23,0+0,1N***	***14***
3	***23,1+0,1N …27,0+0,1N***	***17***

4	***27,1+0,1N …31,0+0,1N***	***25***
5	***31,1+0,1N …35,0+0,1N***	***17***
6	***35,1+0,1N …39,0+0,1N***	***12***
7	***39,1+0,1N …43,0+0,1N***	***7***

Приклад виконання розрахункової роботи №8.

Результати дослідження урожайності зернових у господарствах області подано в таблиці:

Таблиця 2.1

№ п.п	Межі інтервалів за урожайністю зернових культур, ц/га	Число господарств (частота)
1	***14,0 …18,0***	***5***
2	***18,1 …22,0***	***7***
3	***22,1 …26,0***	***9***
4	***26,1 …30,0***	***14***
5	***30,1 …34,0***	***7***
6	***34,1 …38,0***	***5***
7	***38,1 …42,0***	***3***

За цими даними:

1. Побудувати гістограму та полігон розподілу частот.

2. Розрахувати середню врожайність двома методами (звичайним та спрощеним).

3. Розрахувати медіанне та модальне значення врожайності.

4. Розрахувати показники варіації: розмах варіації, середнє лінійне відхилення, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Розв’язання

1. Відобразимо варіаційний ряд розподілу господарств за врожайністю зернових культур у вигляді гістограми. Для цього відкладемо значення інтервалів (за урожайністю x_i, ц/га) на осі абсцис, а кількість n_i об’єктів (частоти) – на осі ординат (рис. 2.2)

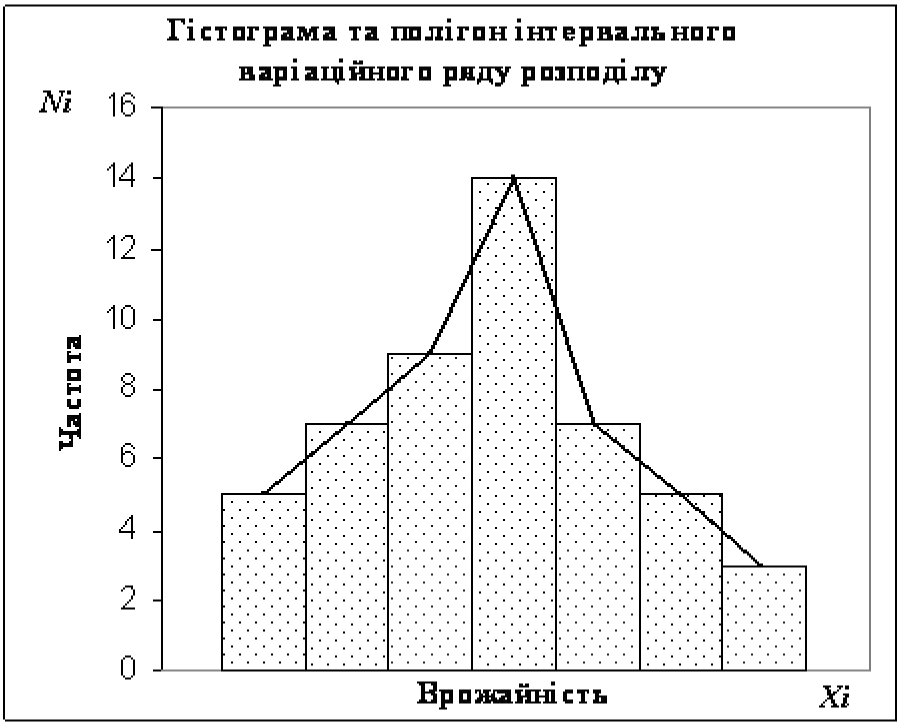

Рис. 2.2

Побудуємо на цьому ж рисунку полігон розподілу, з’єднуючи середини верхніх частин прямокутників гістограми.

2. Розрахуємо середню врожайність звичайним способом як середню арифметичну зважену.

Середня арифметична зважена обчислюється за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i}.$$

Складемо додаткову таблицю 2.3.

Середину кожного інтервалу визначаємо так: додаємо початок інтервалу та його кінець і ділимо навпіл.

Добуток $x_i n_i$ шукаємо як добуток відповідних стовпчиків.

Таблиця 2.3

Дані для розрахунку середньої арифметичної зваженої в інтервальному ряді розподілу

№ п.п	Врожайність, ц/га	Середина інтервалу врожайності x_i, ц/га	Число господарств n_i	Добуток $x_i \cdot n_i$
1	***14,0 …18,0***	***16,0***	***5***	***80***
2	***18,1 …22,0***	***20,0***	***7***	***140***
3	***22,1 …26,0***	***24,0***	***9***	***216***
4	***26,1 …30,0***	***28,0***	***14***	***392***
5	***30,1 …34,0***	***32,0***	***7***	***224***
6	***34,1 …38,0***	***36,0***	***5***	***180***
7	***38,1 …42,0***	***40,0***	***3***	***120***
	Усього	**-**	***50***	***1352***

Підставляємо дані:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{1352}{50} = 27{,}04 \text{ ц/га}.$$

Розрахуємо середню врожайність зернових культур методом відліку від умовного початку. За умовний початок відліку візьмемо середнє значення інтервалу, що має найбільшу частоту. В нашому випадку x_0 ***= 28,0 ц\га***. Довжина кожного інтервалу ***h=4,0 ц\га.***

Для спрощення розрахунків від кожного значення x_i віднімаємо x_0. Потім одержані відхилення розділимо на величину інтервалу, в результаті чого одержимо відхилення варіант від умовного початку, визначене на кожному інтервалі (x'). Усі потрібні розрахунки зведемо в таблиці 2.4.

Таблиця 2.4

Дані для розрахунку середньої арифметичної в інтервальному ряді розподілу методом відліку від умовного початку

№ п.п	Урожайність, ц/га	Середина інтервалу врожайності x_i, ц/га	Число господарств n_i	Відхилення від умовного початку		Добуток $x'_i \cdot n_i$
				$x_i - x_0$ *ц/га*	$x'_i = \frac{x_i - x_0}{h}$ в інтервалах	
1	***14,0 …18,0***	***16,0***	***5***	***-12***	***-3***	***-15***
2	***18,1 …22,0***	***20,0***	***7***	***-8***	***-2***	***-14***
3	***22,1 …26,0***	***24,0***	***9***	***-4***	***-1***	***-9***
4	***26,1 …30,0***	***28,0***	***14***	***0***	***0***	***0***
5	***30,1 …34,0***	***32,0***	***7***	***4***	***1***	***7***
6	***34,1 …38,0***	***36,0***	***5***	***8***	***2***	***10***
7	***38,1 …42,0***	***40,0***	***3***	***12***	***3***	***9***
	Всього	**-**	***50***			***-12***

Середнє арифметичне методом відліку від умовного початку обчислюємо за формулою: $\bar{x} = \overline{x'} \cdot h + x_0$.

Розрахуємо умовну (зменшену) середню

$$\overline{x'} = \frac{\sum x'_i \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{\sum \left(\frac{x_i - x_0}{h} \right) \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{-12}{50} = -0,24 .$$

Підставляємо отримані значення в формулу:

$\bar{x} = \overline{x'} \cdot h + x_0 = -0,24 \cdot 4,0 + 28,0 = 27,04$ *ц/га.*

Відповідь: розрахунки середньої врожайності двома методами (звичайним і спрощеним) дали один і той самий результат $\bar{x} = 27,04$ *ц/га.*

3. Для розрахунку медіани складемо таблицю 2.5, за даними якої знайдемо медіанний інтервал, для чого попередньо побудуємо ряд накопичених частот. На кожному інтервалі накопичена частота утворюється додаванням частоти даного інтервалу до накопиченої частоти попереднього інтервалу. Наприклад, на другому інтервалі частота ***7*** плюс накопичена частота першого ***5***, отримаємо накопичену частоту на другому інтервалі ***12***.

Таблиця 2.5

Дані для розрахунку моди і медіани в інтервальному ряді розподілу господарств за врожайністю зернових культур

№ п.п	Урожайність, ц/га	Число господарств n_i	Накопичена частота S_i
1	***14,0 …18,0***	***5***	***5***
2	***18,1 …22,0***	***7***	***12***
3	***22,1 …26,0***	***9***	***21***
4	***26,1 …30,0***	***14***	***35***
5	***30,1 …34,0***	***7***	***42***
6	***34,1 …38,0***	***5***	***47***
7	***38,1 …42,0***	***3***	***50***

Медіанним є інтервал ***26,1 …30,0***, оскільки на цей інтервал приходиться перша накопичена частота, що перевищує половину всього об'єму сукупності (***35*** перевищує $\sum n_i : 2 = 50 : 2 = 25$).

Розрахуємо медіанне значення врожайності зернових культур:

$$Me = x_0 + h \cdot \frac{0{,}5\sum n_i - S_{Me-1}}{n_{Me}} = 26{,}1 + 4 \cdot \frac{25-21}{14} = 27{,}24 \text{ ц/га},$$

де $x_0=26{,}1$ – нижня межа медіанного інтервалу,

$h=4{,}0$ – довжина інтервалу;

$0{,}5\sum n_i = 25$ - половина суми накопичених частот;

$S_{Me-1} = 21$ - сума накопичених частот інтервалу, що передує медіанному;

$n_{Me} = 14$ - частота медіанного інтервалу.

Розрахуємо модальне значення врожайності.

Оскільки інтервал ***26,1 …30,0*** має найбільшу частоту, в ньому міститься мода.

$$Mo = x_0 + h \cdot \frac{n_{Mo} - n_{Mo-1}}{\left(n_{Mo} - n_{Mo-1}\right) + \left(n_{Mo} - n_{Mo+1}\right)} =$$

$$= 26{,}1 + 4 \cdot \frac{14 - 9}{\left(14 - 9\right) + \left(14 + 7\right)} = 27{,}77 \text{ ц/га},$$

де $x_0 = 26{,}1$ – нижня межа модального інтервалу,

$h = 4{,}0$ – довжина інтервалу;

$n_{Mo} = 14$, $n_{Mo-1} = 9$, $n_{Mo+1} = 7$ - відповідно частоти модального, передмодального і післямодального інтервалів.

Відповідь: медіана $Me = 27{,}24$ ***ц/га***, мода $Mo = 27{,}77$ ***ц/га***.

4. Розрахуємо показники варіації (розмах варіації, середнє лінійне відхилення, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації).

Для розрахунку необхідних показників варіації складемо додаткову таблицю 8.6.

Розмах варіації $R = x_{max} - x_{min} = 42{,}0 - 14{,}0 = 28{,}0$ ***ц/га***.

Середнє лінійне відхилення

$$\bar{d} = \frac{\sum\left|x_i - \bar{x}\right| \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{263{,}68}{50} = 5{,}2736 \text{ ц/га.}$$

Дисперсія

$$\sigma^2 = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{2129{,}92}{50} = 42{,}5984.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i}{\sum n_i}} = \sqrt{\frac{2129{,}92}{50}} = \sqrt{42{,}5984} = 6{,}53 \text{ ц/га.}$$

Коефіцієнт варіації

$$V = \frac{\sigma}{\overline{x}} \cdot 100\% = \frac{6,53}{27,04} \cdot 100\% = 24,15\%.$$

Урожайність зернових культур у заданій сукупності коливається в межах ± ***6,53 ц/га*** або на ***24,15%*** по відношенню до середньої врожайності.

Відповідь: **с**ереднє лінійне відхилення $\overline{d} = 5,2736$ ***ц/га***; дисперсія $\sigma^2 = 42,5984$; середнє квадратичне відхилення $\sigma = 6,53$ ***ц/га***; коефіцієнт варіації $V = 24,15\%$.

Таблиця 2.6

Дані для розрахунку середнього лінійного і середнього квадратичного відхилення

№ п. п	Урожай -ність, ц/га	Середина інтервалу врожай-ності x_i, ц/га	Число господ-дарств n_i	Середнє лінійне відхилення		Середнє квадратичне відхилення	
				$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert \cdot n_i$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^2 \cdot n_i$
1	***14,0 …18,0***	***16,0***	***5***	***11,04***	***55,20***	***121,88***	***609,41***
2	***18,1 …22,0***	***20,0***	***7***	***7,04***	***49,28***	***49,56***	***346,93***
3	***22,1 …26,0***	***24,0***	***9***	***3,04***	***27,36***	***9,24***	***83,17***
4	***26,1 …30,0***	***28,0***	***14***	***0,96***	***13,44***	***0,92***	***12,91***
5	***30,1 …34,0***	***32,0***	***7***	***4,96***	***34,72***	***24,60***	***172,21***
6	***34,1 …38,0***	***36,0***	***5***	***8,96***	***44,80***	***80,28***	***401,41***
7	***38,1 …42,0***	***40,0***	***3***	***12,96***	***38,88***	***167,96***	***503,99***
	Усього	-	***50***	-	***263,68***	-	***2129,92***

Кореляційно-регресійний аналіз в агрономії

Розрахункова робота №9

Задача для тих, в кого передостання цифра номеру залікової книги закінчується парним числом

Використовуючи дані господарств про урожайність зернових культур та якість ґрунту, провести кореляційно-регресійний аналіз зв’язку між двома ознаками: урожайністю та якістю ґрунту:

1. Побудувати графік кореляційної залежності між урожайністю та якістю ґрунту.

2. Знайти оцінки параметрів рівняння регресії методом найменших квадратів та побудувати її графік.

3. Перевірити адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.

4. Обчислити коефіцієнт кореляції та детермінації. Перевірити значимість коефіцієнта кореляції.

№	Урожайність зернових культур, ц/га	Якість грунту, бали
1	***32,2 + 0,1 α***	***84 + N***
2	***35,3 + 0,1 α***	***84 + N***
3	***27,5 + 0,1 α***	***82 + N***
4	***25,1 + 0,1 α***	***71 + N***
5	***26,7 + 0,1 α***	***77 + N***
6	***18,9 + 0,1 α***	***67 + N***
7	***26,1 + 0,1 α***	***75 + N***
8	***37,7 + 0,1 α***	***82 + N***
9	***24,6 + 0,1 α***	***70 + N***
10	***26,6 + 0,1 α***	***75 + N***
11	***29,6 + 0,1 α***	***83 + N***
12	***34,7 + 0,1 α***	***86 + N***
13	***26,4 + 0,1 α***	***73 + N***
14	***18,3 + 0,1 α***	***72 + N***
15	***28,6 + 0,1 α***	***70 + N***

Задача для тих, в кого передостання цифра номеру залікової книги закінчується непарним числом.

Використовуючи дані господарств про урожайність зернових культур та дозу внесення мінеральних добрив ґрунту провести кореляційно-регресійний аналіз та встановити вплив дози мінеральних добрив на урожайність зернових культур:

1. Побудувати графік кореляційної залежності між врожайністю та дозою внесення мінеральних добрив.

2. Знайти оцінки параметрів рівняння регресії методом найменших квадратів та побудувати її графік.

3. Перевірити адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.

4. Обчислити коефіцієнт кореляції та детермінації. Перевірити значимість коефіцієнта кореляції.

№	Урожайність зернових культур, ц/га	Доза внесення мінеральних добрив
1	***23,6 + 0,1 α***	***1,1 + N***
2	***31,9 + 0,1 α***	***3,1 + N***
3	***35,2 + 0,1 α***	***2,8 + N***
4	***36,4 + 0,1 α***	***2,9 + N***
5	***23,6 + 0,1 α***	***1,2 + N***
6	***34,0 + 0,1 α***	***2,9 + N***
7	***38,2 + 0,1 α***	***3,0 + N***
8	***17,3 + 0,1 α***	***0,8 + N***
9	***23,8 + 0,1 α***	***0,7 + N***
10	***19,7 + 0,1 α***	***1,3 + N***
11	***24,6 + 0,1 α***	***1,4 + N***
12	***15,1 + 0,1 α***	***0,7 + N***
13	***28,6 + 0,1 α***	***1,6 + N***
14	***38,4 + 0,1 α***	***2,9 + N***
15	***22,4 + 0,1 α***	***1,3 + N***

Приклад виконання розрахункової роботи №9.

Використовуючи дані господарств про урожайність зернових культур та дозу внесення мінеральних добрив ґрунту, провести кореляційно-регресійний аналіз та встановити вплив дози мінеральних добрив на урожайність зернових культур:

Таблиця 3.1

№	Урожайність зернових культур, ц/га	Доза внесення мінеральних добрив
1	***23,6***	***1,1***
2	***31,9***	***3,1***
3	***35,2***	***2,8***
4	***36,4***	***2,9***
5	***23,6***	***1,2***
6	***34,0***	***2,9***
7	***38,2***	***3,0***
8	***17,3***	***0,8***
9	***23,8***	***0,7***
10	***19,7***	***1,3***
11	***24,6***	***1,4***
12	***15,1***	***0,7***
13	***28,6***	***1,6***
14	***38,4***	***2,9***
15	***22,4***	***1,3***

1. Побудувати графік кореляційної залежності між урожайністю та дозою внесення мінеральних добрив.

2. Знайти оцінки параметрів рівняння регресії методом найменших квадратів та побудувати її графік.

3. Перевірити адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.

4. Обчислити коефіцієнт кореляції та детермінації. Перевірити значимість коефіцієнта кореляції.

Розв'язання

1. Для визначення виду аналітичної залежності між урожайністю зернових культур та дозою внесення мінеральних добрив побудуємо графік – кореляційне поле (рис.3.1). На осі абсцис нанесемо значення факторної ознаки (незалежної змінної ***X*** – дози внесення мінеральних добрив), а на осі ординат – результативної ознаки (залежної змінної ***У*** – урожайності зернових культур).

Використовуючи фактичні значення ***X*** та ***У,*** побудуємо задані 15 точок $(x_i ; y_i)$, що утворюють кореляційне поле.

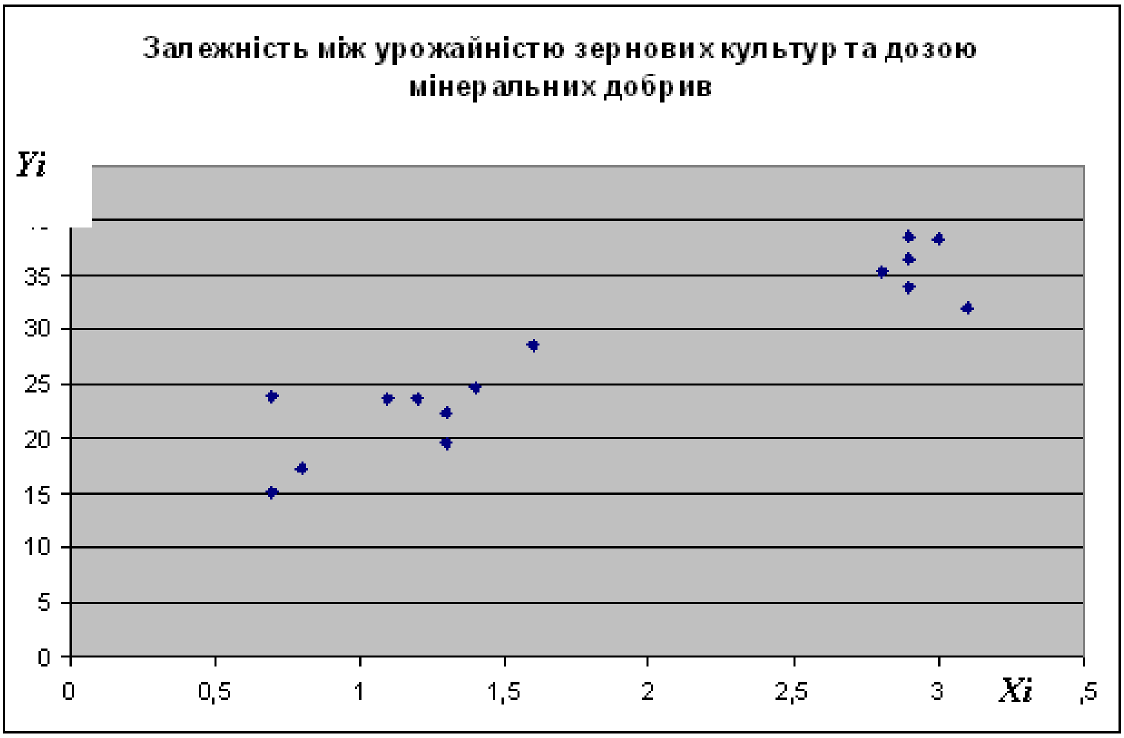

Рис. 3.1

Графік показує, що зв'язок близький до лінійного і тому залежність можна виразити у вигляді рівняння парної лінійної регресії $\overline{y}_x = b_1 x + b_0$.

2. Рівняння прямої лінії регресії $\overline{y}_x = b_1 x + b_0$.

Таблиця 3.2

Розрахунок даних для визначення показників кореляційного зв'язку

№	Урожайність зернових культур, ц/га y	Доза внесення мінеральних добрив x	Розрахункові величини			
			yx	y^2	x^2	Очікуване (теоретичне) значення урожайності, ц/га $\bar{y}$
1	**23,6**	**1,1**	**25,96**	**556,96**	**1,21**	**21,90142**
2	**31,9**	**3,1**	**98,89**	**1017,61**	**9,61**	**36,95119**
3	**35,2**	**2,8**	**98,56**	**1239,04**	**7,84**	**34,69373**
4	**36,4**	**2,9**	**105,56**	**1324,96**	**8,41**	**35,44621**
5	**23,6**	**1,2**	**23,32**	**556,96**	**1,44**	**22,65391**
6	**34,0**	**2,9**	**98,6**	**1156,0**	**8,41**	**35,44621**
7	**38,2**	**3,0**	**114,6**	**1459,24**	**9,0**	**36,1987**
8	**17,3**	**0,8**	**13,84**	**299,29**	**0,64**	**19,64395**
9	**23,8**	**0,7**	**16,66**	**566,44**	**0,49**	**18,89146**
10	**19,7**	**1,3**	**25,61**	**388,09**	**1,69**	**23,4064**
11	**24,6**	**1,4**	**34,44**	**605,16**	**1,96**	**24,15888**
12	**15,1**	**0,7**	**10,57**	**228,01**	**0,49**	**18,89146**
13	**28,6**	**1,6**	**45,76**	**817,96**	**2,56**	**25,66386**
14	**38,4**	**2,9**	**111,36**	**1474,56**	**8,41**	**35,4621**
15	**22,4**	**1,3**	**29,12**	**501,76**	**1,69**	**23,4064**
Сума	**412,8**	**27,7**	**857,85**	**12192,04**	**63,85**	**412,8**
Сер.зн.	**27,52**	**1,8467**	**57,19**	**812,8027**	**4,2567**	**27,52**

Параметри рівняння лінії регресії b_1 та b_0 знайдемо за методом найменших квадратів, використовуючи систему:

$$\begin{cases} \sum y = b_0 n + b_1 \sum x, \\ \sum yx = b_0 \sum x + b_1 \sum x^2 . \end{cases}$$

Усі необхідні для розв’язання системи рівнянь дані внесемо до табл. 3.2.

Одержані дані підставляємо в систему:

$$\begin{cases} 412,8 = 15b_0 + 27,7b_1, \\ 857,85 = 27,7b_0 + 63,85b_1. \end{cases}$$

Параметри рівняння регресії можна визначити за формулами:

$$b_1 = \frac{n\sum yx - \sum y \cdot \sum x}{n\sum x^2 - \sum x \cdot \sum x} = \frac{15 \cdot 857,85 - 412,8 \cdot 27,7}{15 \cdot 63,85 - 27,7 \cdot 27,7} \approx 7,5249;$$

або $b_1 = \dfrac{\overline{yx} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \dfrac{57,19 - 27,52 \cdot 1,8467}{4,2567 - (1,8467)^2} \approx 7,5249$;

$$b_0 = \overline{y} - b \cdot \overline{x} = 27,52 - 7,5249 \cdot 1,8467 \approx 13,624$$

або безпосередньо розв’язавши систему, наприклад, методом віднімання.

Розділимо перше рівняння (кожен доданок) на коефіцієнт за b_1, в нашому випадку на ***15***. Друге рівняння розділимо на ***27,7***.

$$\begin{cases} 15b_0 + 27,7b_1 = 412,8 \,|: 15, \\ 27,7b_0 + 63,85b_1 = 857,85 \,|: 27,7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 + 1,8467b_1 = 27,52, \\ b_0 + 2,3051b_1 = 30,9693. \end{cases}$$

Віднімемо друге рівняння від першого, тобто віднімемо відповідні пари членів:

$b_0 - b_0 + (1,8467 - 2,3051)b_1 = 27,52 - 30,9693$ або

$$-0,4584b_1 = -3,4493.$$

З останнього рівняння знаходимо b_1: $b_1 = -3,4493 : (-0,4584)$;

$$b_1 = 7,5247.$$

Знайдемо коефіцієнт b_0, підставивши знайдене значення b_1 в будь-яке, наприклад, у перше рівняння системи.

$$b_0 = 27{,}52 - 1{,}8467 b_1 = 27{,}52 - 1{,}8467 \cdot 7{,}5247 = 13{,}6241.$$

Відхилення від розрахованих безпосередньо за формулами значень отримані за рахунок округлень.

Отже, підставивши отримані дані в рівняння регресії, маємо:

$$\overline{y}_x = 13{,}624 + 7{,}5249x \; -$$

рівняння регресії (кореляційне рівняння), що виражає зв'язок між урожайністю зернових культур та дозою мінеральних добрив.

Розглянемо його економічну інтерпретацію.

Коефіцієнт регресії $b_1 = 7{,}5249$ показує, що за підвищення дози мінеральних добрив на одиницю, урожайність зернових культур в середньому за заданою сукупністю господарств збільшиться на ***7,5249ц/га***.

Використовуючи рівняння регресії, можна розрахувати очікувані (розрахункові, теоретичні) значення урожайності ($\overline{y}_x$) за різних значень внесення дози мінеральних добрив. Для цього замість x у рівняння регресії ставимо конкретне значення. Наприклад,

$$\overline{y}_{x=2,8} = 13{,}624 + 7{,}5249 \cdot 2{,}8 = 34{,}69373.$$

Отримані розрахункові значення врожайності внесемо в таблицю 3.2.

Для побудови лінії регресії $\overline{y}_x = 13{,}624 + 7{,}5249x$ нанесемо на рисунок дві точки $M_1(0{,}7;18{,}89146)$ і $M_2(3{,}1;36{,}95119)$ та проведемо через них пряму лінію (рис. 3.4).

Відповідь: рівняння лінії регресії $\overline{y}_x = 13{,}624 + 7{,}5249x$.

3. Перевіримо адекватність побудованої моделі за ***F***-критерієм Фішера.

Складемо додаткову таблицю 3.3.

Таблиця 3.3

Дані для розрахунку коефіцієнта Фішера

№	y	x	$\overline{y}_{x_i}$	$\overline{y}_{x_i} - \overline{y}$	$\left(\overline{y}_{x_i} - \overline{y}\right)^2$	$\overline{y}_{x_i} - y_i$	$\left(\overline{y}_{x_i} - y_i\right)^2$
1	***23,6***	***1,1***	***21,9014***	***-5,6185***	***31,5684***	***-1,6985***	***2,8851***
2	***31,9***	***3,1***	***36,9511***	***9,4311***	***88,9473***	***5,0511***	***25,514***
3	***35,2***	***2,8***	***34,6937***	***7,1737***	***51,4623***	***-0,5062***	***0,2563***
4	***36,4***	***2,9***	***35,4462***	***7,9262***	***62,8248***	***-0,9537***	***0,9097***
5	***23,6***	***1,2***	***22,6539***	***-4,8660***	***23,6788***	***-0,9460***	***0,8950***
6	***34***	***2,9***	***35,4462***	***7,9262***	***62,8248***	***1,4462***	***2,0915***
7	***38,2***	***3***	***36,1987***	***8,6787***	***75,3198***	***-2,0013***	***4,0051***
8	***17,3***	***0,8***	***19,6439***	***-7,8760***	***62,0321***	***2,3439***	***5,4941***
9	***23,8***	***0,7***	***18,8914***	***-8,6285***	***74,4516***	***-4,9085***	***24,0937***
10	***19,7***	***1,3***	***23,4064***	***-4,1136***	***16,9217***	***3,7063***	***13,7373***
11	***24,6***	***1,4***	***24,1588***	***-3,3611***	***11,2971***	***-0,4411***	***0,1946***
12	***15,1***	***0,7***	***18,8914***	***-8,6285***	***74,4516***	***3,7914***	***14,375***
13	***28,6***	***1,6***	***25,6638***	***-1,8561***	***3,4452***	***-2,9361***	***8,6209***
14	***38,4***	***2,9***	***35,4462***	***7,9262***	***62,8248***	***-2,9537***	***8,7249***
15	***22,4***	***1,3***	***23,4064***	***-4,1136***	***16,9217***	***1,0064***	***1,0128***
$\sum$	***412,8***	***27,7***	***412,8***		***718,9729***		***112,8111***
Ср	***27,52***	***1,8467***	***27,52***				

Обчислимо розрахункове значення критерію Фішера:

$$F_{розр} = \frac{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_{x_i} - \overline{y}\right)^2}{1}}{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_{x_i} - y_i\right)^2}{n-2}},$$

де n – число дослідів.

Підставимо отримані дані в формулу:

$$F_{розр} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_i - \overline{y}\right)^2}{1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{y}_i - y_i\right)^2}{n-2}} = \frac{(15-2)\cdot 718{,}9729}{112{,}8111} \approx 82{,}8522 .$$

Знайдемо табличне значення коефіцієнта Фішера за $k_1=1$, $k_2=13$ чисел ступенів вільності (*додаток* 5): $F_{табл} = 4{,}7$.

Оскільки розрахункове значення Фішера більше ніж табличне (***82,85>4,7***), то розглянута математична модель адекватна експериментальним даним.

Відповідь: побудована математична модель адекватна експериментальним даним.

4. Визначимо тісноту зв’язку між ознаками, що вивчаємо (урожайністю та дозою внесення мінеральних добрив).

Для цього розрахуємо лінійний коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2}} .$$

Усі необхідні для розрахунку дані візьмемо із таблиці 3.3.

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - \left(\overline{y}\right)^2}} =$$

$$= \frac{57{,}19 - 1{,}8467 \cdot 27{,}52}{\sqrt{4{,}2567 - (1{,}8467)^2} \cdot \sqrt{812{,}8027 - (27{,}52)^2}} = 0{,}9297 .$$

Коефіцієнт кореляції показує, що між урожайністю та дозою внесення мінеральних добрив має місце тісний прямий зв’язок.

Коефіцієнт детермінації $r^2 = (0{,}9297)^2 = 0{,}8644$ показує, що ***86,44%*** загальної варіації урожайності обумовлено дозою внесення мінеральних добрив, а інша частина (***13,56%***) – іншими випадковими факторами, які в даній задачі не враховані.

Перевіримо значимість коефіцієнта кореляції. Для цього обчислимо ***t***-статистику:

$$t = r_{xy}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} = 0{,}9297\sqrt{\frac{15-2}{1-0{,}8644}} \approx 9{,}103 .$$

За заданої ймовірності ***P=0,95*** і ***k=13*** числа ступенів вільності, знайдемо табличне значення критерію t_{pk} ***=2,16*** (*додаток* 6).

Оскільки $|t| \geq |t_{Pk}|$ (***9,103>2,16***), то коефіцієнт кореляції є значимим.

Відповідь: коефіцієнт кореляції $r = 0{,}9297$; коефіцієнт детермінації $r^2 = 0{,}8644$. Обчислений коефіцієнт кореляції є значимим.

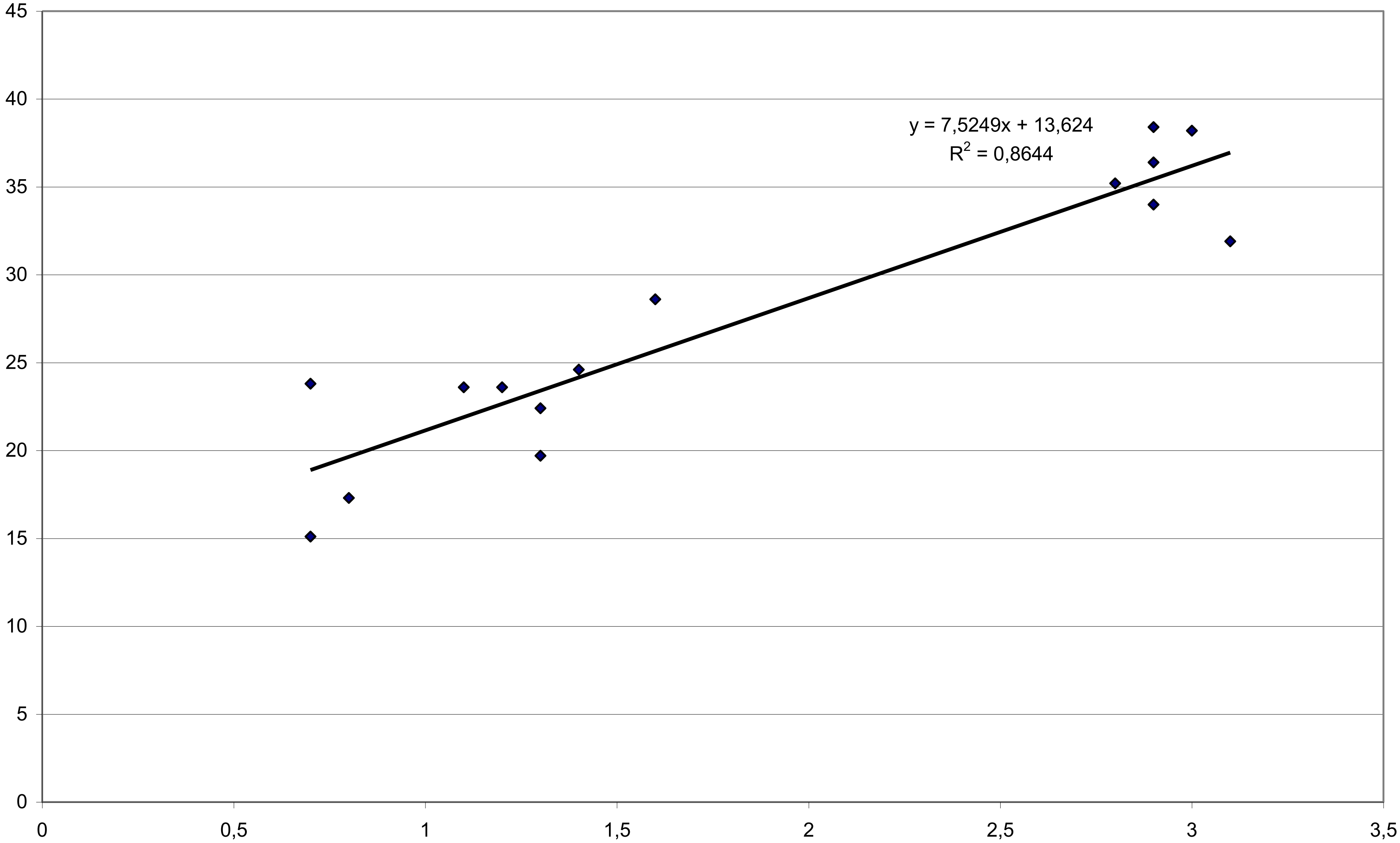

Рис. 3.4. Графік залежності урожайності зернових культур від дози внесення мінеральних добрив

Додаток 1

Значення функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3667
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3521	3503	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3392	3271	3251	3230	3209	3287	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2832	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2689	2565	2541	2516	2592	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1682	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	100969	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Закінчення на стор. 80

Продовження додатка 1

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0476	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0191	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0090	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	*Ф (х)*	*x*	*Ф (х)*	*x*	*Ф (х)*	*x*	*Ф (х)*
0,00	0,0000	**0,34**	0,1331	**0,68**	0,2517	**1,02**	0,3461
0,01	0,0040	**0,35**	0,1368	**0,69**	0,2549	**1,03**	0,3485
0,02	0,0080	**0,36**	0,1406	**0,70**	0,2580	**1,04**	0,3508
0,03	0,0120	**0,37**	0,1443	**0,71**	0,2611	**1,05**	0,3551
0,04	0,0160	**0,38**	0,1480	**0,72**	0,2642	**1,06**	0,3554
0,05	0,0199	**0,39**	0,1517	**0,73**	0,2673	**1,07**	0,3577
0,06	0,0239	**0,40**	0,1554	**0,74**	0,2703	**1,08**	0,3599
0,07	0,0279	**0,41**	0,1591	**0,75**	0,2734	**1,09**	0,3621
0,08	0,0319	**0,42**	0,1628	**0,76**	0,2764	**1,10**	0,3643
0,09	0,0359	**0,43**	0,1664	**0,77**	0,2794	**1,11**	0,3665
0,10	0,0398	**0,44**	0,1700	**0,78**	0,2823	**1,12**	0,3686
0,11	0,0438	**0,45**	0,1736	**0,79**	0,2852	**1,13**	0,3708
0,12	0,0478	**0,46**	0,1772	**0,80**	0,2881	**1,14**	0,3729
0,13	0,0517	**0,47**	0,1808	**0,81**	0,2910	**1,15**	0,3749
0,14	0,0557	**0,48**	0,1844	**0,82**	0,2939	**1,16**	0,3770
0,15	0,0596	**0,49**	0,1879	**0,83**	0,2967	**1,17**	0,3790
0,16	0,0636	**0,50**	0,1915	**0,84**	0,2995	**1,18**	0,3810
0,17	0,0675	**0,51**	0,1950	**0,85**	0,3023	**1,19**	0,3830
0,18	0,0714	**0,52**	0,1985	**0,86**	0,3051	**1,20**	0,3849
0,19	0,0753	**0,53**	0,2019	**0,87**	0,3078	**1,21**	0,3869
0,20	0,0793	**0,54**	0,2054	**0,88**	0,3106	**1,22**	0,3883
0,21	0,0832	**0,55**	0,2088	**0,89**	0,3133	**1,23**	0,3907
0,22	0,0871	**0,56**	0,2123	**0,90**	0,3159	**1,24**	0,3925
0,23	0,0910	**0,57**	0,2157	**0,91**	0,3186	**1,25**	0,3944
0,24	0,0948	**0,58**	0,2190	**0,92**	0,3212	**1,26**	0,3962
0,25	0,0987	**0,59**	0,2224	**0,93**	0,3238	**1,27**	0,3980
0,26	0,1026	**0,60**	0,2257	**0,94**	0,3264	**1,28**	0,3997
0,27	0,1064	**0,61**	0,2291	**0,95**	0,3289	**1,29**	0,4015
0,28	0,1103	**0,62**	0,2324	**0,96**	0,3315	**1,30**	0,4032
0,29	0,1141	**0,63**	0,2357	**0,97**	0,3340	**1,31**	0,4049
0,30	0,1179	**0,64**	0,2389	**0,98**	0,3365	**1,32**	0,4066
0,31	0,1217	**0,65**	0,2422	**0,99**	0,3389	**1,33**	0,4082
0,32	0,1255	**0,66**	0,2454	**1,00**	0,3413	**1,34**	0,4099
0,33	0,1293	**0,67**	0,2486	**1,01**	0,3438	**1,35**	0,4115

Закінчення на стор. 82

x	***Ф (x)***	*x*	***Ф (x)***	*x*	***Ф (x)***	*x*	***Ф (x)***
1,36	0,4131	**1,67**	0,4525	**1,98**	0,4761	**2,58**	0,4951
1,37	0,4147	**1,68**	0,4535	**1,99**	0,4767	**2,60**	0,4953
1,38	0,4162	**1,69**	0,4545	**2,00**	0,4772	**2,62**	0,4956
1,39	0,4177	**1,70**	0,4554	**2,02**	0,4783	**2,64**	0,4959
1,40	0,4192	**1,71**	0,4564	**2,04**	0,4793	**2,66**	0,4961
1,41	0,4207	**1,72**	0,4573	**2,06**	0,4803	**2,68**	0,4963
1,42	0,4222	**1,73**	0,4582	**2,08**	0,4812	**2,70**	0,4965
1,43	0,4236	**1,74**	0,4591	**2,10**	0,4821	**2,72**	0,4967
1,44	0,4251	**1,75**	0,4599	**2,12**	0,4830	**2,74**	0,4969
1,45	0,4265	**1,76**	0,4608	**2,14**	0,4838	**2,76**	0,4971
1,46	0,4219	**1,77**	0,4616	**2,16**	0,4846	**0,78**	0,4973
1,47	0,4292	**1,78**	0,4625	**2,18**	0,4854	**2,80**	0,4974
1,48	0,4306	**1,79**	0,4633	**2,20**	0,4861	**2,82**	0,4976
1,49	0,4319	**1,80**	0,4641	**2,22**	0,4868	**2,84**	0,4977
1,50	0,4332	**1,81**	0,4649	**2,24**	0,4875	**2,86**	0,4979
1,51	0,4345	**1,82**	0,4656	**2,26**	0,4881	**2,88**	0,4980
1,52	0,4357	**1,83**	0,4664	**2,28**	0,4887	**2,90**	0,4981
1,53	0,4370	**1,84**	0,4671,	**2,30**	0,4893	**2,92**	0,4982
1,54	04382	**1,85**	0,4678	**2,32**	0,4898	**2,94**	0,4984
1,55	0,4394	**1,86**	0,4686	**2,34**	0,4904	**2,96**	0,4985
1,56	0,4406	**1,87**	0,4693	**2,36**	0,4909	**2,98**	0,4986
1,57	0,4418	**1,88**	0,4699	**2,38**	0,4913	**3,00**	0,49865
1,58	0,4429	**1,89**	0,4706	**2,40**	0,4918	**3,20**	0,49931
1,59	0,4441	**1,90**	0,4713	**2,42**	0,4922	**3,40**	0,49966
1,60	0,4452	**1,91**	0,4719	**2,44**	0,4927	**3,60**	0,499841
1,61	0,4463	**1,92**	0,4726	**2,46**	0,4931	**3,80**	0,499928
1,62	0,4474	**1,93**	0,4732	**2,48**	0,4934	**4,00**	0,499968
1,63	0,4484	**1,94**	0,4738	**2,50**	0,4938	**4,50**	0,499997
1,64	0,4495	**1,95**	0,4744	**2,52**	0,4991	**5,00**	0,499997
1,65	0,4505	**1,96**	0,4750	**2,54**	0,4945		
1,66	0,4515	**1,97**	0,4756	**2,56**	0,4948		

Додаток 3

Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	***γ***			***n***	***γ***		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,656
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

Значення $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,50	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Додаток 5

Критичні точки розподілу Фішера (F-розподілу)

Рівень значущості 0,05									
k_2 \ k_1	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***12***	***24***	∞
1	164,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	244,9	249,0	254,3
2	18,5	9,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,6	9,3	9,1	9,0	8,9	8,7	8,6	8,5
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	5,9	5,8	5,6
5	6,6	5,8	5,4	5,2	5,1	5,0	4,7	4,5	4,4
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,0	3,8	3,7
7	5,6	4,7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,6	3,4	3,2
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,3	3,1	2,9
9	5,1	4,3	3,9	3,6	3,5	3,4	3,1	2,9	2,7
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	2,9	2,7	2,5
11	4,8	4,0	3,6	3,4	3,2	3,1	2,8	2,6	2,4
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,7	2,5	2,3
13	4,7	3,8	3,4	3,2	3,0	2,9	2,6	2,4	2,2
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,5	2,3	2,1
15	4,5	3,7	3,3	3,1	2,9	2,8	2,5	2,3	2,1
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,4	2,2	2,0
17	4,5	3,6	3,2	3,0	2,8	2,7	2,4	2,2	2,0
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,3	2,1	1,9
19	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,3	2,1	1,8
22	4,3	3,4	3,1	2,8	2,7	2,6	2,2	2,0	1,8
24	4,3	3,4	3,0	2,8	2,6	2,5	2,2	2,0	1,7
26	4,2	3,4	3,0	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,7
28	4,2	3,3	2,9	2,7	2,6	2,4	2,1	1,9	1,6
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,1	1,9	1,6
40	4,1	3,2	2,9	2,6	2,5	2,3	2,0	1,8	1,5
60	4,0	3,2	2,8	2,5	2,4	2,3	1,9	1,7	1,4
120	3,9	3,1	2,7	2,5	2,3	2,2	1,8	1,6	1,3
∞	3,8	3,0	2,6	2,4	2,2	2,1	1,8	1,5	1,0

		Рівень значущості 0,01								
k_2	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***8***	***12***	***24***	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6234	6366
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,3	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,1	26,6	26,1
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,4	13,9	13,5
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	9,9	9,5	9,0
6	13,7	10,9	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,7	7,3	6,9
7	12,3	9,6	8,5	7,9	7,5	7,2	6,8	6,5	6,1	5,7
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,7	5,3	4,9
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,1	4,7	4,3
10	10,0	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,7	4,3	3,9
11	9,7	7,2	6,2	5,7	5,3	5,1	4,7	4,4	4,0	3,6
12	9,3	6,9	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2	3,8	3,4
13	9,1	6,7	5,7	5,2	4,9	4,6	4,3	4,0	3,6	3,2
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,1	3,8	3,4	3,0
15	8,7	6,4	5,4	4,9	4,6	4,3	4,0	3,7	3,3	2,9
16	8,5	6,2	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,6	3,2	2,8
17	8,4	6,1	5,2	4,7	4,3	4,1	3,8	3,5	3,1	2,7
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,7	3,4	3,0	2,6
19	8,2	5,9	5,0	4,5	4,2	3,9	3,6	3,3	2,9	2,4
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,2	2,9	2,4
22	7,9	5,7	4,8	4,3	4,0	3,8	3,5	3,1	2,8	2,3
24	7,8	5,6	4,7	4,2	3,9	3,7	3,3	3,0	2,7	2,2
26	*7,7*	5,5	4,6	4,1	3,8	3,6	3,3	3,0	2,6	2,1
28	7,6	5,5	4,6	4,1	3,8	3,5	3,2	2,9	2,5	2,1
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	2,8	2,5	2,0
40	7,3	5,2	4,3	3,8	3,5	3,3	3,0	2,7	2,3	1,8
60	7,1	5,0	4,1	3,7	3,3	3,1	2,8	2,5	2,1	1,6
12	6,9	4,8	4,0	3,5	3,2	3,0	2,7	2,3	2,0	1,4
∞	6,6	4,6	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,2	1,8	1,0

Додаток 6

Критичні точки розподілу Стьюдента (t-розподілу)

Число ступенів свободи, *k*	Рівень значущості, *α*						
	0,20	***0,10***	***0,05***	***0,02***	***0,01***	***0,002***	***0,001***
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Базова

1. Барковський В.В., Барковська Н.В.: Математика для економістів. У 2-х ч. Вища математика.- К.:Національна академія управління, 1999 р.- 399 с.

2. Васильченко П.І. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454 с.

3. Лавренчук В.П., Т.І. Готинчан. Математика для економістів: теорія та застосування. Підручник – Київ: Кондор, 2007. – 596 с.

4. Макаренко В.О. Вища математика для економістів: Навч. посіб.– К.: Знання, 2008.– 517 с.

\

Допоміжна

1. Бугір М.К. Математика для економістів: Посібник. – К.:Академія, 2003. –520с.

2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К.Г. Валуєв, І.А. Джалладова, О.І. Лютий.– Вид. 2-ге, перероб. і доп.– К.:КНЕУ, 2002.–606 с.

3. Валєєв К.Г., Джаладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2004.- Ч.1.-546 с., 2002.- Ч.2.-451 с.

4. Валуєв К.Г., Джалладова І.А. Математичний практикум: Навч. посібник.– К.: КНЕУ, 2004.–682 с.

5. Лавренчук В.П., Т.І. Готинчан Вища математика. Частина 1-3: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2002. – 168 с.

З М І С Т

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

методичні рекомендації

Укладач: **Богданов**, Сергій Іванович

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 6Тираж 30. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі Миколаївського національного аграрного університету

54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р