

УДК 539.3

Григоренко О.Я.<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., проф.,  
Борисенко М.Ю.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н.,  
Бойчук О.В.<sup>2</sup>, к.ф.-м.н.

### Чисельний аналіз вільних коливань не- замкнених циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом

<sup>1</sup> Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН  
України, 83000, м. Київ, вул. Нестерова, 3,  
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com,  
mechanics530@gmail.com.

<sup>2</sup> Миколаївський національний аграрний уні-  
верситет, 54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Га-  
нгадзе, 9, e-mail: boychuklena@outlook.com.

A.Ya. Grigorenko<sup>1</sup>, Dr Sci., Prof.,  
M.Yu. Borysenko<sup>1</sup>, Ph.D.,  
O.V. Boychuk<sup>2</sup>, Ph.D.

### Numerical analysis of free vibrations of open cylindrical shells with elliptical cross section

<sup>1</sup> Institute of Mechanics after S.P. Tymoshenko NAS  
of Ukraine, 83000, Kyiv, Nesterov st., 3,  
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com,  
mechanics530@gmail.com.

<sup>2</sup> Nikolaev National Agrarian University, 54030,  
Nikolaev, Georgy Gongadze st., 9,  
e-mail: boychuklena@outlook.com.

*Чисельно визначаються динамічні характеристики незамкнутої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу змінної товщини з різними варіаціями відкритості оболонки – уздовж малої півосі і уздовж великої півосі, а також з двома варіантами жорсткого закріплення на торцях. Розрахунок частот і форм вільних коливань проводився методом скінченних елементів, реалізованого за допомогою ліцензованого програмного комплексу FEMAP з розв'язувачем NASTRAN. Проводиться порівняльний аналіз залежностей власних частот від кута відкритості відносно великої та малої півосей. Наводяться форми коливань для перших десяти частот при різних закріпленнях оболонки при однакових кутах відкритості.*

*Ключові слова: незамкнута циліндрична оболонка, еліптичний поперечний переріз, кут відкритості, власна частота, форма коливань, метод скінченних елементів.*

*The natural frequencies and the corresponding vibration modes of open cylindrical shells with an elliptical cross-section and variable thickness are analyzed. Various opening angle of the shell along both the minor and major axes are allowed and various boundary conditions are considered. The numerical solutions are obtained using the finite element package FEMAP with the NASTRAN solver. A number of low-frequency vibrations are investigated in terms of their dependence on the opening angle along major and minor axes of the shell. The vibration forms for the first ten frequencies with different boundary conditions at the same opening angles are shown.*

*Keywords: open cylindrical shells, elliptical cross-section, opening angle, frequency, vibration forms, finite element method.*

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

#### Вступ

Широкого застосування в будівництві різних інженерних конструкцій набули циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу постійної та змінної товщини, які можуть мати як замкнутий, так і незамкнутий контур з різною варіацією граничних умов. При проектуванні таких споруд необхідно мати інформацію про їхні динамічні характеристики, зокрема про частоти і форми вільних коливань, так як в реальних умовах експлуатації необхідно уникати резонансних

режимів.

Теоретичне дослідження даного класу задач пов'язане зі значними труднощами, які обумовлені складністю системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок задачі на визначення власних частот в рамках теорії тонких оболонок можливий для об'єктів простої геометричної форми [5, 7].

У випадках складної геометричної форми, наприклад, замкнутої оболонки еліптичного по-

перечного перерізу з різним характером зміни товщини, доцільно застосовувати метод скінченних елементів (МСЕ) [1, 3, 8].

Для розв'язування задач на визначення динамічних характеристик оболонок, також використовують експериментальні методи, наприклад, безконтактний метод стробогографічної інтерферометрії [6, 8], який можна застосовувати не тільки для двовимірної, а й тривимірної задачі динаміки [9].

У світовій літературі вивченню динаміки незамкнених оболонок приділено не так багато уваги як вивчення замкнутих оболонок, так в [10] розроблена точна процедура розв'язку для визначення частот і форм вільних коливань відкритих некругових циліндричних оболонок змінної товщини і кривини. В [4] проведено аналіз вільних коливань відкритих кругових циліндричних оболонок, в яких закріплені дві прями кромки або дві вигнуті кромки, а інші дві кромки підтримуються довільними класичними граничними умовами. В [2] в рамках двох скінченно-елементних реалізацій досліджені власні коливання тонкостінних відкритих оболонок кругового поперечного перерізу з різними граничними умовами і з різними кутами відкритості.

Дане повідомлення присвячено чисельному визначенню динамічних характеристик незамкненою циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу змінної товщини з варіаціями відкритості оболонки – уздовж малої півосі і уздовж великої півосі, а також з двома варіантами жорсткого закріплення на торцях. Розрахунок частот і форм вільних коливань проводився МСЕ, реалізованим за допомогою ліцензійного програмного комплексу FEMAP.

#### Вихідні співвідношення для визначення власних частот МСЕ

Рівняння руху механічної системи з скінченною кількістю ступенів вільності описується системою рівнянь Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (1)$$

Дане рівняння руху для оболонки при її скінченно-елементній апроксимації з урахуванням того, що  $L = T - U$ , та відсутності зовнішніх сил ( $F_j = 0$ ) приймає вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (2)$$

Використаємо дискретну форму функціоналів кінетичної енергії та енергії деформації відповідно

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\Phi}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\bar{\Phi}}_i,$$

$$U = \frac{1}{2} \bar{\Phi}_i^T \mathbf{K}_i \bar{\Phi}_i,$$

де  $\mathbf{K}_i$  та  $\mathbf{M}_i$  – матриця жорсткості та матриця мас  $i$ -того скінченного елемента відповідно,  $\bar{\Phi}_i$  – вектор вузлових переміщень  $i$ -того елемента. З рівняння Лагранжа (2) отримаємо наступні рівняння руху оболонки при відсутності демпфування:

$$\mathbf{K} \bar{\Phi}_j + \mathbf{M} \ddot{\bar{\Phi}}_j = 0, \quad (3)$$

де  $\mathbf{K}$  та  $\mathbf{M}$  – матриця жорсткості та матриця мас механічної системи відповідно,  $\bar{\Phi}_j$  – вектор переміщень вузлів системи, що відповідає  $j$ -тому ступеню вільності, що відтворює  $j$ -ту форму коливань.

При вільних коливаннях оболонок всі вузлові точки здійснюють гармонічні коливання як функції часу:

$$\bar{\Phi}_j(t) = \bar{\Phi}_j \sin \omega_j t. \quad (4)$$

Після підстановки функцій (4) в рівняння руху оболонки (3) визначення власних частот і форм коливань зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь

$$\mathbf{K} \bar{\Phi}_j - \omega_j^2 \mathbf{M} \bar{\Phi}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (5)$$

де  $\omega_j$  – пульсація або частота гармонічних коливань.

#### Тестова задача

Для перевірки достовірності обраної методики дослідження динамічних характеристик незамкненої циліндричної оболонки розв'яжемо тестову задачу [2] і порівняємо отримані результати з результатами отримані автором.

За допомогою FEMAP була побудована геометрія двох незамкнутих оболонок у вигляді циліндричних поверхонь кругового поперечного перерізу радіусом серединної поверхні  $R = 77,25 \text{ мм}$ , відношенням висоти до радіусу  $L/R = 2,99$ , товщиною  $d = 1,5 \text{ мм}$ , кутами відкритості  $\varphi = 30^\circ$  і  $\varphi = 60^\circ$ . Задавався матеріал з

фізико-механічними характеристиками: модуль Юнга  $E = 205 ГПа$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,30$ , густина  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ . Оболонки закріплювалися по двом торцям з різними варіаціями закріплення:  $F$  – вільний край  $u \neq v \neq w \neq \varphi_x \neq \varphi_y \neq \varphi_z \neq 0$ ;  $C$  – жорстке закріплення  $u = v = w = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$ .

Результати тестової задачі, а саме перші п'ять частот власних коливань для двох варіантів відкритості оболонки з двома типами закріплення, отримані за допомогою FEMAP, а також іншим автором, представлені в таблиці 1 і 2, де  $\varepsilon$  – відхилення між розрахунками.

Таблиця 1  
Результати тестової задачі з кутом відкритості  $\varphi$  і граничними умовами C-F

№	f, Гц					
	$\varphi=30^\circ$			$\varphi=60^\circ$		
	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$
1	256,77	259,61	1,1	252,23	244,26	3,2
2	261,90	264,78	1,1	267,34	260,01	2,7
3	591,20	599,14	1,3	588,18	569,26	3,2
4	665,87	676,80	1,6	683,98	675,06	1,3
5	724,48	727,44	0,4	726,83	698,18	3,9

Аналізуючи отримані результати тестової задачі можна спостерігати невелике відхилення між двома скінченно-елементними реалізаціями, запропонованими нами і автором [2], яке не перевищує 5%.

Таблиця 2  
Результати тестової задачі з кутом відкритості  $\varphi$  і граничними умовами C-C

№	f, Гц					
	$\varphi=30^\circ$			$\varphi=60^\circ$		
	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$	[2]	FEMAP	$\varepsilon, \%$
1	651,02	652,35	0,2	651,39	626,31	3,9
2	651,42	652,78	0,2	652,9	627,19	3,9
3	1217,19	1215,5	0,1	1218,61	1163,12	4,6
4	1217,26	1215,54	0,1	1219,46	1163,54	4,6
5	1525,1	1536,75	0,8	1515,2	1477,19	2,5

### Побудова розрахункової моделі

За допомогою програми FEMAP була побудована геометрія оболонки у вигляді циліндричної поверхні еліптичного поперечного перерізу змінної товщини з розмірами: висота  $h = 120 \text{ мм}$ , півосі серединної поверхні:  $a = 50,810 \text{ мм}$  і  $b = 36,295 \text{ мм}$ , товщина оболонки уздовж великої півосі  $d_a = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , уздовж малої півосі  $d_b = 2,73 \text{ мм}$ . Потім оболонка розрізалась секто-

ром заданого кута відкритості  $\varphi$  (рис. 1). Як матеріал задавалась сталь з характеристиками: модуль Юнга  $E = 212 ГПа$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,30$ , густина  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ . Оболонка досліджувалась при жорстко закріпленому одному і двох торцях.

Параметри моделювання було встановлено відповідно до характеристик і розмірів замкнутої некругової циліндричної оболонки, яка досліджувалась на частоті і форми вільних коливань МСЕ [1] і методом стробогологафічної інтерферометрії [8].

Оболонка в поперечному перерізі має форму еліпса змінної товщини, тому необхідно розглянути різні способи її відкритості відносно великої (рис. 1, а) і малої півосей (рис. 1, б), так як в залежності від цього будуть змінюватися її властивості міцності, а відповідно і частоти вільних коливань. В даному дослідженні визначимо залежність частоти вільних коливань від величини відкритості оболонки, яка буде визначатися кутом відкритості в межах від  $0^\circ$  до  $90^\circ$  з кроком  $10^\circ$ .

Оскільки оболонки змінної товщини, то розбивку краще проводити solid-елементами.

### Результати чисельних розрахунків

Перші десять частот вільних коливань, розрахованих для некругової циліндричної оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі з жорстко закріпленням одним торцем, в залежності від кута відкритості наведені в таблиці 3. Для порівняння наведені також частоти для замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини при відповідних граничних умовах. В таблиці 4 наведені перші десять частот вільних коливань некругової циліндричної оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі, закріпленої по двом торцям, в залежності від кута відкритості.

В таблиці 5 наведені перші десять власних частот некругової циліндричної оболонки змінної товщини відкритої відносно малої півосі, закріпленої по двом торцям, в залежності від кута відкритості. Перші десять форм вільних коливань незамкнутою циліндричної оболонки змінної товщини з відповідним значенням кута відкритості уздовж великої півосі для жорстко закріпленого одного торця і двох торців зображені на рис. 8-15.



а) кут відкритості  $\varphi$  відносно великої півосі;

б) кут відкритості  $\varphi$  відносно малої півосі

Рис. 1. Креслення поперечного перетину циліндричної оболонки

Таблиця 3

Частоти вільних коливань ( $f_{\text{чис}}$ , Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі з граничними умовами C-F

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі $\varphi$ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	1565,07	1000,14	900,02	805,32	741,30	704,45	669,47	626,50	593,58	571,19	560,38
2	1757,83	1012,84	925,84	850,37	782,56	721,86	688,59	686,68	691,59	695,49	688,66
3	1991,80	1540,67	1498,58	1480,46	1509,68	1581,97	1691,69	1690,51	1631,23	1593,80	1592,12
4	2022,06	1572,23	1648,68	1762,46	1828,59	1814,79	1757,62	1831,57	1988,27	2113,85	2145,67
5	3142,73	1999,45	2315,00	2296,23	2339,38	2352,71	2313,33	2271,71	2235,60	2209,31	2196,47
6	3677,46	2327,80	2326,32	2477,37	2415,96	2365,33	2334,15	2321,87	2332,07	2395,08	2499,34
7	3702,04	2560,10	2583,46	2504,83	2460,60	2576,96	2841,68	3178,74	3243,18	3082,09	3025,10
8	4129,99	2578,18	2601,86	2722,98	3117,62	3556,72	3593,57	3420,25	3580,25	4053,15	4388,09
9	4441,27	2744,24	3199,26	3722,21	3951,67	2807,25	4110,09	4429,67	4381,54	4362,65	4484,60
10	4457,50	3430,33	4068,94	482,55	4300,98	4300,72	4351,96	4442,44	4511,06	4528,38	4549,72

Таблиця 4

Частоти вільних коливань ( $f_{\text{чис}}$ , Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно великої півосі з граничними умовами C-C

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі $\varphi$ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	3981,74	2350,97	2312,15	2195,14	2102,47	2038,40	1997,09	1962,35	1927,47	1898,59	1876,80
2	3999,00	2351,46	2315,89	2196,13	2109,49	2049,57	2002,48	1972,12	1956,11	1940,96	1917,47
3	4388,83	3945,95	3909,33	3948,31	3929,64	3923,64	3995,68	4044,68	4003,36	4005,38	4082,49
4	4400,06	3967,45	4072,10	4010,09	4070,31	4144,57	4106,69	4137,59	4241,59	4233,17	4199,66
5	5185,93	3967,53	4146,64	4153,15	4176,60	4210,16	4232,66	4242,06	4248,42	4234,84	4219,08
6	5531,64	4009,46	4146,91	4153,27	4177,82	4210,97	4235,39	4248,93	4334,35	4543,63	4657,96
7	6325,98	4314,69	4353,30	4582,16	4617,27	4694,51	5008,39	5470,17	5549,04	5528,19	5715,35
8	6439,24	4516,27	4713,85	4710,47	5023,99	5504,96	5691,29	5630,20	6049,38	6759,26	7228,14
9	6972,08	5184,39	5173,61	5608,26	6069,81	6051,71	6420,19	7129,35	7241,75	7254,11	7233,60
10	7136,60	5367,81	5834,18	6124,84	6342,06	6922,39	7088,96	7191,64	7242,41	7261,74	7456,36

Таблиця 5

Частоти вільних коливань ( $f_{\text{чис}}$ , Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно малої півосі з граничними умовами C-F

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі $\varphi$ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	1565,07	618,34	613,59	612,54	617,77	631,18	651,75	715,07	851,10	947,93	912,85
2	1757,83	628,23	625,71	624,15	624,56	635,74	674,10	746,37	882,49	1102,89	1061,21
3	1991,80	1627,67	1607,30	1596,29	1602,91	1590,48	1518,85	1493,62	1633,96	1478,45	1656,14
4	2022,06	1721,10	1777,57	1749,79	1672,96	1650,43	1760,73	1923,86	1693,02	1999,08	1924,17
5	3142,73	1922,33	1870,74	1906,12	1973,32	2000,12	1989,02	1979,20	2047,87	2181,47	2560,72
6	3677,46	2130,71	2122,19	2098,58	2066,02	2035,56	2011,37	1983,91	2050,45	2284,45	2594,38
7	3702,04	2214,24	2184,93	2166,59	2184,57	2319,50	2347,74	2174,66	2466,78	2359,07	3250,24
8	4129,99	2351,32	2448,10	2564,95	2613,43	2531,58	2584,05	2818,50	2543,81	3450,71	4246,75
9	4441,27	3234,33	3232,65	3152,40	3164,82	3373,92	3263,65	3117,55	3670,74	3812,22	4248,35
10	4457,50	3340,47	3443,33	3684,33	3680,04	3502,44	3769,32	3777,97	3671,16	3821,88	4500,35

Таблиця 6

Частоти вільних коливань ( $f_{чис}$ , Гц) оболонки змінної товщини відкритої відносно малої півосі з граничними умовами С-С

№	Замк.	Кут відкритості відносно великої півосі $\varphi$ , град									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
1	3981,74	1896,83	1864,31	1830,57	1791,42	1757,10	1731,99	1732,10	1822,43	2083,99	2340,01
2	3999,00	1897,44	1864,74	1830,71	1792,60	1759,51	1734,00	1735,92	1832,37	2119,19	2360,52
3	4388,83	4000,80	4017,45	4058,38	3944,79	3807,97	3647,46	3484,58	3388,29	3541,66	3955,35
4	4400,06	4171,47	4142,65	4058,40	3945,02	3808,37	3647,61	3485,60	3388,96	3548,63	3984,60
5	5185,93	4209,32	4142,73	4061,02	4059,14	4029,89	4037,78	4041,30	3958,44	3955,35	4124,53
6	5531,64	4209,41	4142,94	4101,70	4122,76	4201,19	4183,73	4129,58	4262,68	4268,08	4175,48
7	6325,98	4267,39	4377,64	4553,82	4671,97	4622,36	4723,24	4893,60	4767,34	5126,58	5613,17
8	6439,24	4598,37	4675,80	4707,67	4775,56	5057,11	5144,86	5090,73	5320,16	5263,36	5637,96
9	6972,08	5513,20	5568,27	5717,18	5723,77	5609,81	5771,37	5704,12	5343,54	5337,52	5783,19
10	7136,60	5820,00	5882,90	5829,53	6007,34	6423,45	6107,92	5706,15	5930,26	5712,67	5812,21

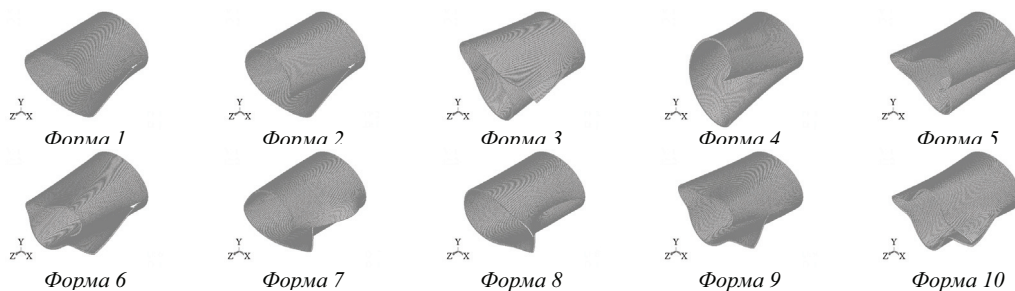


Рис. 8. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 0^\circ$  уздовж великої півосі з граничними умовами С-F

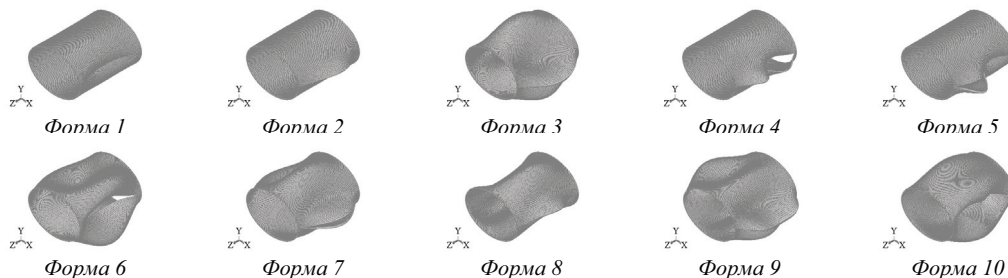


Рис. 9. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 0^\circ$  уздовж великої півосі з граничними умовами С-С

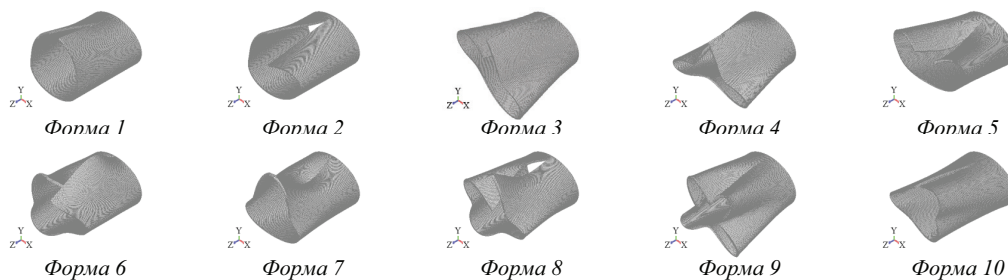


Рис. 10. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 0^\circ$  уздовж малої півосі з граничними умовами С-F

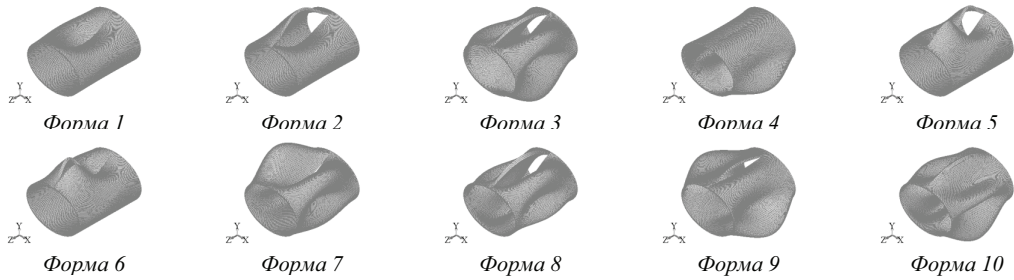


Рис. 11. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 0^\circ$  уздовж малої півосі з граничними умовами С-С

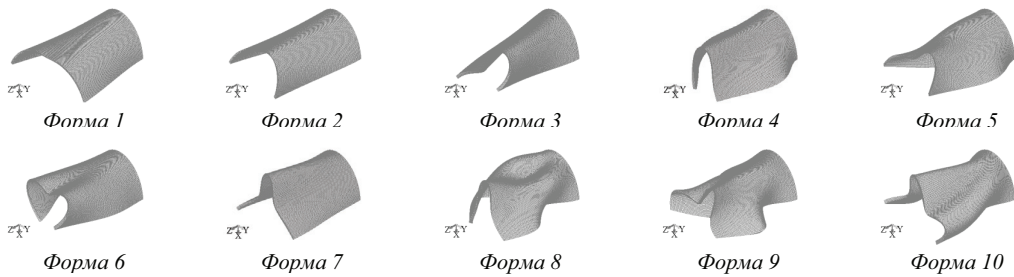


Рис. 12. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 90^\circ$  уздовж великої півосі з граничними умовами С-F

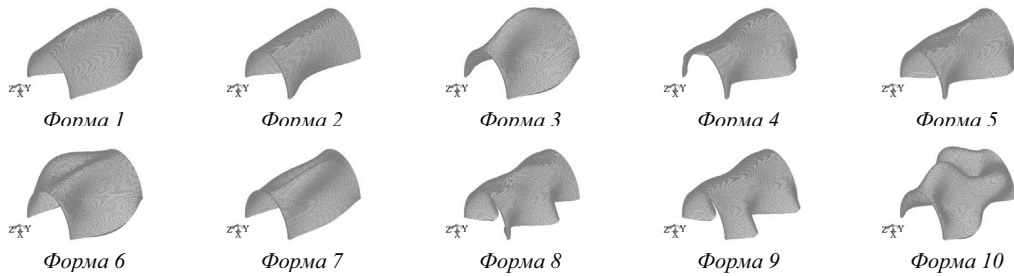


Рис. 13. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 90^\circ$  уздовж великої півосі з граничними умовами С-С

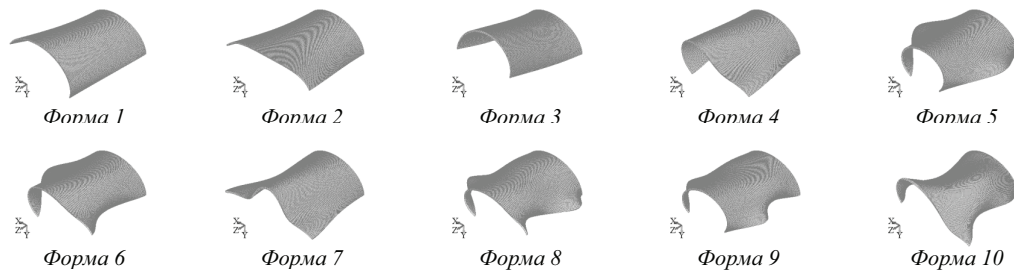


Рис. 14. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 90^\circ$  уздовж малої півосі з граничними умовами С-F

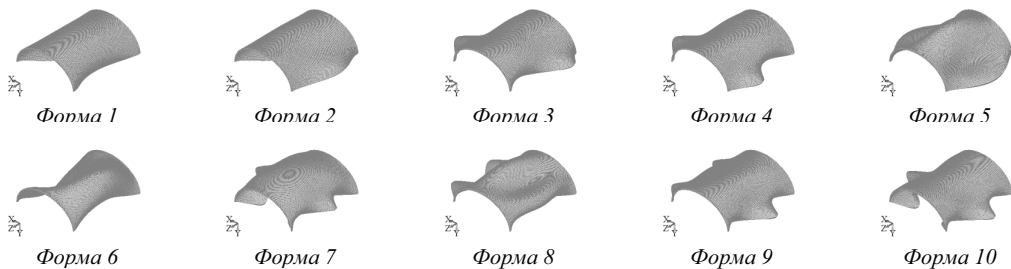


Рис. 15. Форми вільних коливань оболонки зі значенням кута відкритості  $\varphi = 90^\circ$  уздовж малої півосі з граничними умовами С-С

### Висновки

Проведено розрахунок частот вільних коливань незамкнутої циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу змінної товщини при різних кутах відкритості відносно великої і малої півосей з жорстко закріпленим одним і двома торцями методом скінченних елементів, реалізованим за допомогою програмного комплексу FEMAP.

Отримані чисельно частоти і форми вільних коливань розглянутої оболонки дають можливість зробити ряд висновків:

- перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки змінної товщини жорстко закріпленої по одному торцю більші в 1,6-1,7 разу в порівнянні з відповідними частотами ідентичною оболонки з розрізом уздовж твірної по великій півосі та в 2,5-2,8 разу з розрізом уздовж твірної по малій півосі;

- в разі закріплення двох торців перші дві власні частоти замкнутої некругової циліндричної оболонки більше в 1,7 разу відповідних частот некругової циліндричної оболонки з розрізом

уздовж твірної по великій півосі та в 2,1 разу з розрізом уздовж твірної по малій півосі;

- максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається при куті відкритості  $0^\circ$  відносно великої півосі для обох розглянутих умов закріплення;

- максимальне значення першої резонансної частоти спостерігається для оболонки з жорстко закріпленим одним торцем при куті відкритості  $80^\circ$  відносно малої півосі та  $90^\circ$  для закріпленої по двом торцям;

- для оболонок відкритих відносно великої півосі спостерігається значна відмінність між третьою і другою частотою для обох способів закріплення, яка знаходиться в межах від 1,5 до 2,5 разу, при цьому різниця зростає із збільшенням кута відкритості;

- для оболонок відкритих відносно малої півосі спостерігається протилежна тенденція, тобто із зростанням кута розкриття різниця між третьою і другою частотою для обох способів закріплення спадає в межах від 1,5 до 2,5 разу.

### Список використаних джерел

1. Будак В. Д. Вільні коливання еліптичної оболонки змінної товщини / В. Д. Будак, О. Я. Григоренко, М. Ю. Борисенко, О. В. Бойчук // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія: «Математика. Механіка». – 2014. – 32, №2. – С. 32-37.
2. Лекомцев С. В. Конечно-элементные алгоритмы расчёта собственных колебаний трёхмерных оболочек / С. В. Лекомцев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – 5, № 2. – С. 233-243.
3. Budak V. D. Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, E. V. Boychuk // J. of Mathematical Sci. – 2016. – 212, No 2. – P. 182-192.
4. Xiong-liang Yao Exact free vibration analysis of open circular cylindrical shells by the method of reverberation-ray matrix / Yao Xiong-liang, Tang Dong, Pang Fu-zhen, Li Shuo // Journal of Zhejiang University-SCIENCE A.– 2016, – 17, No4. P. 295-316.
5. Greenspon J. F. Vibration of thick cylindrical shells / J. F. Greenspon // J. Acoust. Soc. Amer. – 1959. – 31, No 12. – P. 1682-1683.
6. Budak V. D. Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, V. V. Khorishko, M. Yu. Borisenko // Int. Appl. Mech. – 2014. – 50, No 1. – P. 68-74.
7. Leissa A. W. Vibration of Shells / A. W. Leissa // NASA SP-288: US Government Printing Office, Washington DC, 1973. – 438 p.
8. Budak V. D. Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness / V. D. Budak, A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, E. V. Boichuk // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, No 2. – P. 167-172.
9. Grigorenko A. Ya. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell / A. Ya. Grigorenko, M. Yu. Borisenko, E. V. Boichuk, A. P. Prigoda // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, No 1. – P. 75-84.
10. Suzuki K. Exact solutions for the free vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness / K. Suzuki, A. W. Leissa // Journal of sound and vibration. – 1986. – 107, No 1. P. 1-15.

### References

1. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOYCHUK O. V. (2014) Natural vibrations of elliptical shells of variable thickness. *Bulletin of Taras Shevchenko national university of Kyiv. Mathematics and Mechanics*. 32. (2). p. 32–37.
2. LEKOMTSEV S. V. (2012) Finit-element algorithms for calculation of natural vibrations of three-dimensional shells. *Computational continuum mechanics*. 5. (2). p. 233–243.
3. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOYCHUK E. V. (2016) Determination of eigenfrequencies of an elliptic shell with constant thickness by the finite-element method. *J. of Mathematical Sci*. 212. (2). p. 182–192.
4. XIONG-LIANG YAO, DONG TANG, FUZHEN PANG, SHUO LI (2016) Exact free vibration analysis of open circular cylindrical shells by the method of reverberation-ray matrix. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*. 17. (4). p. 295–316.
5. GREENSPON J. F. (1959) Vibration of thick cylindrical shells. *J. Acoust. Soc. Amer*. 31. (12). p. 1682–1683.
6. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., KHORISHKO V. V., BORISENKO M. Y. (2014) Holographic Interferometry Study of the Free Vibrations of Cylindrical Shells of Constant and Variable Thickness. *Int. Appl. Mech*. 50. (1). p. 68–74.
7. LEISSA A. W. (1973) *Vibration of Shells*. NASA SP-288: US Government Printing Office, Washington DC.
8. BUDAK V. D., GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOICHUK E. V. (2017) Natural Frequencies and Modes of Noncircular Cylindrical Shells with Variable Thickness. *Int. Appl. Mech*. 53. (2). p. 167–172.
9. GRIGORENKO A. Y., BORISENKO M. Y., BOICHUK E. V., PRIGODA A. P. (2018) Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of the Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell. *Int. Appl. Mech*. 54. (1). p. 75–84.
10. SUZUKI K. & LEISSA A. W. (1986) Exact solutions for the free vibrations of open cylindrical shells with circumferentially varying curvature and thickness. *Journal of sound and vibration*. 107. (1). p. 1–15.

Надійшла до редколегії 20.12.2019