УДК 533.6.013.4:533.6.013.42
DOI https://doi.org/10.26661/2413-6549-2020-2-02

ПРО УТОЧНЕННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЯКА ПОДІЛЯЄ ДВОШАРОВУ ІДЕАЛЬНУ РІДИНУ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Лимар О. О.
кандидат фізико-математичних наук,
асистент
Миколаївський національний аграрний університет
вул. Георгія Гонгадзе, 9, Миколаїв, Україна
orcid.org/ 0000-0002-0301-7313
aleksandr1402aa@gmail.com

Ключові слова:
гідропружність, прямокутна пластина, ідеальна рідина, плоскі коливання, стійкість.

У лінійній постановці отримано і досліджено частотне рівняння власних коливань пластини, яка горизонтально розділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Контури пластини можуть мати довільні закріплення. Спільні коливання пружної пластини і двошарової рідини з вільною поверхнею моделюються з допомогою системи інтегро-диференціальних рівнянь. Для затиснених контурів пластини отримано єдину форму частотного рівняння як для симетричних, так і несиметричних спільних коливань пластини і рідини. Розглянуто граничні випадки виродження пластини в мембрану та її відсутність. Показано, що при глибині верхньої рідини більшої ширини каналу впливом вільної поверхні на частотний спектр можна нехтувати. Уточнено умови стійкості спільних коливань пластини і рідини з вільною поверхнею для таких трьох випадків, як відсутність розтягувальних зусиль у пластині, виродження пластини в мембрану і випадок рідин з однаковою щільністю за умов дії на пластину стискальних зусиль. Показано, що в першому випадку наближені значення умов стійкості занижено для несиметричних частот у 1,050 разів, а для симетричних – у 1,075 разів. У випадку мембрани наближені значення занижено для несиметричних частот у 1,251 раз, а для симетричних – у 1,222 рази. У третьому випадку наближені значення занижено для несиметричних частот у 1,002 рази, а для симетричних – у 1,010 разів. Таким чином, для пластини наближені значення умов стійкості з достатньою для практики точністю збігаються з точними, а у разі мембрани для наближених обчислень слід ураховувати більше двох членів ряду. На підставі проведених досліджень і результатів попередніх робіт можна стверджувати, що наближені й точні умови стійкості спільних коливань пластини і двошарової рідини не залежать від наявності вільної поверхні, її відсутності і навіть від наявності пружної пластини на вільній поверхні верхньої рідини.

ON REFINING THE CONDITIONS OF VIBRATION STABILITY A RECTANGULAR PLATE DIVIDING A TWO-LAYER IDEAL LIQUID WITH A FREE SURFACE

Lymar O. O.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Assistant
Mykolaiv National Agrarian University
George Gongadze str., 9, Mykolaiv, Ukraine
orcid.org/ 0000-0002-0301-7313
aleksandr1402aa@gmail.com

Key words: *hydroelasticity, rectangular plate, ideal fluid, plane vibrations, stability.*

In a linear formulation, the frequency equation of natural vibrations of a plate horizontally separating a two-layer ideal fluid with a free surface in a rectangular channel is derived and investigated. The contours of the plate can have arbitrary fixings. Joint vibrations of an elastic plate and a two-layer fluid with a free surface are reduced to a system of integro-differential equations. For the clamped contours of the plate, a unified form of the frequency equation is obtained for both symmetric and asymmetric joint vibrations of the plate and fluid. It is shown that if the depth of filling the upper liquid is greater than the channel width, then the effect of the free surface on the frequency spectrum can be neglected. The limiting cases of degeneration of a plate into a membrane and its absence are considered. The conditions for the stability of joint vibrations of a plate and a fluid with a free surface are specified for three cases: the absence of tensile forces in the plate, degeneration of the plate into a membrane, and the case of fluids with the same densities under compressive forces acting on the plate. It is shown that, in the first case, the approximate values of the stability conditions are underestimated for asymmetric frequencies by a factor of 1.050, and for symmetric frequencies – by a factor of 1.075. In the case of a membrane, the approximate values are underestimated for unbalanced frequencies by 1.002 times, and for symmetrical frequencies by 1.010 times. In the third case, the approximate values are underestimated for unbalanced frequencies by 1.002 times, and for symmetric ones – by 1.010 times. Thus, for a plate, the approximate values of the stability conditions coincide with the exact ones with sufficient accuracy for practice, and in the case of a membrane, for approximate calculations it is necessary to take into account more than two terms of the series. Based on the studies carried out and the results of previous works, it can be argued that the approximate and exact conditions for the stability of joint vibrations of a plate and a two-layer liquid do not depend on the presence of a free surface, its absence, and even in the presence of an elastic plate on the free surface of the liquid.

Вступ. Для безпеки транспортування і зберігання рідких вантажів великі резервуари поділяють на відсіки. Зважаючи на це, виникає питання про вплив пружних і масових характеристик пластин, які поділяють рідини, на частотний спектр і стійкість коливань механічної системи. Найбільш актуальною є ця проблема під час роботи й охолодження ядерних реакторів.

На основі єдиного лагранжевого підходу завдання щодо коливання і стійкості пружної прямокутної пластинки, що розділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі, вперше розглянуто в роботах [1; 2]. Повне дослідження вільних коливань мембрани на вільної поверхні рідини в прямокутному каналі проведено в [3; 4]. У роботі [5] завдання (з урахуванням пружності дна) досліджувалось для мембран і двошарової рідини. У роботах [6–9] розглядалося більш складне завдання про коливання пластини (мембрани), що розділяє ідеальні рідини в прямокутному каналі з однією або двома пружними основами у вигляді пластин або мембран. Для вирішення цього завдання в разі пружного дна необхідно враховувати статичний прогин пластин (мембран) [9]. Питання стійкості спільних коливань пластин (мембран) і рідини досліджувалися в статтях [10–14]. Вплив різних способів закріплення контурів пластин на частотний спектр розглянуто в [15–16]. Для нескінченно довгого прямокутного контейнера із жорсткими стінками в статті [17] проведено аналіз таких двох систем, як резервуар із жорстким дном і бічною стінкою, вільна поверхня якого вкрита мембраною, і контейнер із мембранним дном і вільною поверхнею. Під час аналізу враховувалися нелінійна залежність напруження від деформації і велика амплітуда руху мембрани. Для обмежених розмірів контейнерів у літературі доступні тільки чисельні підходи [18–19].

Багато робіт присвячено гідропружним коливанням ідеальної рідини в кругових і кільцевих циліндрах із жорстким і пружним дном, зокрема, роботи [20–23] і багато інших. Асиметричні коливання круглої пластини на вільній поверхні ідеальної рідини в круговому циліндрі досліджувалися у [20]. У статті [21] розглядаються коливання ідеальної рідини в круглому циліндричному резервуарі з пружними підставами у вигляді круглих пластин. Запропоновано аналітичний метод, що ґрунтується на розвиненні у ряду Фур'є-Бесселя і методі Релея-Рітца. У статті [22] отримано частотне рівняння осесиметричних коливань важкої двошарової ідеальної рідини в жорсткому кільцевому циліндричному резервуарі з пружними верхом і днищем у вигляді затиснутих кільцевих пластин. Роботу [23] присвячено дослідженню частотних рівнянь несиметричних і симетричних власних коливань ідеальної двошарової рідини в жорсткому круглому циліндричному резервуарі з пружним верхом і днищем у вигляді затиснутих круглих пластин. На прикладі однорідної рідини з вільною поверхнею і пружним дном у вигляді мембрани проаналізовано аналітично і чисельно частотний спектр спільних коливань.

Як уже зазначалося, в роботах [6–9] розглянуто загальне завдання з коливання пластини (мембрани), що розділяє ідеальні рідини в прямокутному каналі з пружними підставами. У [6] наведено частотне рівняння коливань пластини, що розділяє двошарову рідину з вільною поверхнею й отримані достатні умови стійкості. У цій роботі отримано це частотне рівняння, підтверджено зроблені припущення в роботах [6–9] і уточнено умови стійкості за відсутності розтягувальних зусиль у пластині й для рідин однакової щільності під час дії стискальних зусиль. У статті [6] отримано наближені умови стійкості з урахуванням двох членів ряду частотного рівняння. Під точними умовами стійкості в цій роботі, як і в роботі [10], будемо розуміти умови, які виписані окремо від кількості членів ряду частотного рівняння.

Постановка завдання. Розглянемо плоскі коливання пружної прямокутної пластини, яка горизонтально поділяє двошарову ідеальну нестисливу рідину зі щільністю ρ_i $(i = 1, 2)$ в прямокутному каналі шириною b $(b = 2a)$. Пластина має постійну згинальну жорсткість D і допускається наявність розтягувальних та стискальних зусиль у серединній поверхні інтенсивності *T*. Контури пластини можуть мати довільне закріплення, наприклад, бути затиснені, оперті або вільні. Верхня рідина щільності ρ_1 заповнює канал до глибини h_1, а нижня рідина щільності ρ_2 – до глибини h_2. Верхня рідина має вільну поверхню.

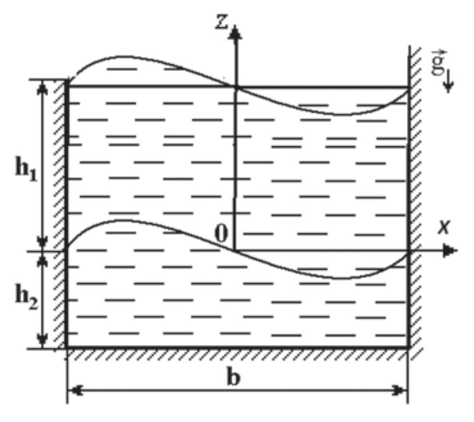

Рис. 1. Прямокутна пластина розділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі

Систему координат *Oxyz* розташуємо так, щоб площина *Oxy* перебувала на незбуреній серединній поверхні пластини, вісь *Oy* була направлена вздовж каналу, а вісь $Oz\vec{g}$ – протилежно вектору прискорення сили тяжіння $\vec{g}$ (рис.1). Коливання пластини й рідини розглядатимемо в лінійній постановці, вважаючи спільні коливання пластини і рідини безвідривними, а руху рідин потенційними.

Рівняння плоских коливань пружної пластини і рідини мають вигляд [6; 7]:

$$k_{01}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-T\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+g\Delta\rho W=\rho_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}-\rho_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}+Q\,, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2}=0 \quad (i=1,2)$$

з граничними умовами:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0\,, \quad (2)$$

$$\left(\mathfrak{L}_{jp}[W]\right)\Big|_{\gamma_j}=0 \quad (j,p=1,2)\,, \quad (3)$$

$$\int_{-a}^{a} W dx=0\,, \quad (4)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right|_{\gamma_j}=0 \quad (i,j=1,2)\,,$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial \zeta}{\partial t},\quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}+g\zeta=0 \quad \text{при} \quad z=h_1;\quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}=0 \quad \text{при} \quad z=-h_2\,. \quad (5)$$

Тут $k_{01}=\rho_0\cdot\delta_0$; $W(y,t)$, ρ_0, δ_0 – відповідно нормальний прогин, щільність і товщина пластини; $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$; $\Phi_i(y,z,t)$ – потенціал швидкостей i-ої рідини ($i=1,2$); $z=\zeta(y,t)$ – форма вільної поверхні верхньої рідини; $\mathfrak{L}_{j1}$ і $\mathfrak{L}_{j2}$ – диференціальні оператори граничних умов закріплення пластини на контурі γ_j; наприклад, у разі жорсткого защемлення пластини оператор $\mathfrak{L}_{j1}$ буде одиничним, а $\mathfrak{L}_{j2}=\mathrm{d}/\mathrm{d}x$; γ_j ($j=1,2$) – позначення контура, причому індекс $j=1$ відповідає контуру $x=-a$, а $j=2$ – $x=a$.

Метод розв'язання. Як і в [6; 7], представимо функції $\Phi_i(y,z,t)$ і $\zeta(y,t)$ та у вигляді рядів Фур'є за власними функціями $\psi_n(y)$

$$\Phi_i(x,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}(t)\mathrm{e}^{k_n z}+B_{in}(t)\mathrm{e}^{-k_n z}\right]\psi_n(x) \quad (i=1,2), \quad (6)$$

$$\zeta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n(t)\psi_n(x)\,, \quad (7)$$

де $\psi_n(y)=\cos k_n(x+a)$, а відповідні їм власні числа $k_n=\pi n/2a$.

Підставивши ряди (6)–(7) в (2) і (5), скориставшись ортогональністю функцій ψ_n, отримаємо

$$A_{1n}=\frac{\dot{\zeta}_n-\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}}}{2k_n\sinh\kappa_{1n}},\quad B_{1n}=\frac{\dot{\zeta}_n-\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{\kappa_{1n}}}{2k_n\sinh\kappa_{1n}}\,,$$

$$A_{2n}=\frac{\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{\kappa_{2n}}}{2k_n\sinh\kappa_{2n}},\quad B_{2n}=\frac{\dot{W}_n\,\mathrm{e}^{-\kappa_{2n}}}{2k_n\sinh\kappa_{2n}} \quad (8)$$

Тут

$$W_n=\frac{1}{N_n^2}\int_{-a}^{+a}W\psi_n dy\,,\ N_n^2=\int_{-a}^{+a}\psi_n^2 dx=a\,,\ \kappa_{in}=h_i k_n\,. \quad (9)$$

З урахуванням співвідношень (6)–(9), рівняння (1) набуде вигляду

$$k_{01}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+D\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}-T\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+g\Delta\rho W=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\ddot{\zeta}_n-a_n\ddot{W}_n}{k_n}\psi_n+Q\,, \quad (10)$$

де $a_n=\rho_1\coth\kappa_{1n}+\rho_2\coth\kappa_{2n}$.

Із другого співвідношення у (5) і співвідношень (9) отримаємо

$$\ddot{\zeta}_n+\sigma_n^2\zeta_n-\frac{\ddot{W}_n}{\cosh\kappa_{1n}}=0\,. \quad (11)$$

Тут $b_n=\dfrac{\rho_1}{\sinh\kappa_{1n}}$; $\sigma_n^2=gk_n\tanh\kappa_{1n}$ – квадрат частоти коливань вільної поверхні верхньої рідини у випадку абсолютно жорсткої пластини ($W=0$).

Таким чином, спільні коливання пружної пластини і рідини з вільною поверхні знаходять із системи інтегро-диференціальних рівнянь (9)–(10), граничних умов (3), умов нестисливості рідини (4) і заданих початкових умов.

Власні частоти спільних коливань пружної пластини і рідини. Для знаходження власних частот спільних коливань пружної пластини і рідини покладемо

$$W(x,t)=w(x)\mathrm{e}^{i\omega t},\ \zeta(y,t)=\tilde{\zeta}(y)\mathrm{e}^{i\omega t},\ Q=C_0\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,. \quad (12)$$

Підставивши (12) в (10)–(11), в граничні умови (3) і умови (4), будемо мати

$$\frac{d^4 w}{dx^4}-P\frac{d^2 w}{dx^2}+qw=\frac{\omega^2}{D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^* w_n}{k_n}\psi_n+C\,, \quad (13)$$

$$w_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}w\psi_n dx\,, \quad (14)$$

$$\int_{-a}^{a}w dx=0\,, \quad (15)$$

$$\left(\mathfrak{L}_{jp}w\right)\Big|_{\gamma_j}=0\,,\quad (j,p=1,2)\,. \quad (16)$$

Тут $P=T/D$, $q=\left(g\Delta\rho-k_0\omega^2\right)/D$ ($D\neq 0$), $a_n^*=a_n-\tilde{b}_n$, $C=C_0/D$,

$$\tilde{b}_n=\frac{\omega^2 b_n}{\left(\omega^2-\sigma_n^2\right)\cosh\kappa_{1n}}=\frac{2\omega^2\rho_1}{\left(\omega^2-\sigma_n^2\right)\sinh 2\kappa_{1n}}\,.$$

Отже, власні частоти і форми спільних коливання пружної пластини і рідини знаходять із системи інтегро-диференціальних рівнянь (13)–(15) і граничних умов (16).

Розв'язок рівняння (13) будемо шукати у вигляді

$$w=\sum_{k=1}^{4}A_k^0 w_k^0+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_n\psi_n+w_0\,, \quad (17)$$

де w_k^0 $(k=\overline{1,4})$ – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння

$$\frac{d^4 w_k^0}{dx^4} - P\frac{d^2 w_k^0}{dx^2} + q w_k^0 = 0\,, \qquad (18)$$

Невідомі константи $\tilde{C}_n$ і w_0 виразимо через константи A_k^0, які будуть знайдені з умов закріплення пластини.

Підставивши (17) у рівняння (13) і скориставшись співвідношеннями $\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = -k_n^2\psi_n,\ \frac{d^4\psi_n}{dx^4} = k_n^4\psi_n$, виразимо константу $\tilde{C}_n$ через w_n

$$\tilde{C}_n = \omega^2 a_n^* w_n / k_n d_n\,, \qquad (19)$$

де $d_n = \left(Dk_n^2 + T\right)k_n^2 + g\Delta\rho - k_0\omega^2$.

Підставивши (17) у (14) і враховуючи (19), отримаємо вирази для w_0 і w_n

$$w_0 = -\sum_{k=1}^{4} \tilde{w}_k^0 A_k^0\,, \quad w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n^*}\sum_{k=1}^{4} A_k^0 E_{kn}^0\,. \qquad (20)$$

Тут

$$\tilde{w}_k^0 = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} w_k^0 dx\,,$$

$$E_{kn}^0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w_k^0 \psi_n dx\,. \qquad (21)$$

З урахуванням (15), (19) і (20), остаточний вираз для форми прогину пластини w набуде вигляду

$$w = \sum_{k=1}^{4}\left(w_k^0 - \tilde{w}_k^0 - \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^* E_{kn}^0}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n}\psi_n\right)A_k^0\,. \qquad (22)$$

У формулу (22) входить чотири невідомі константи A_k^0. Із граничних умов закріплення пластини (16) маємо чотири лінійних однорідних рівняння щодо A_k^0

$$\sum_{k=1}^{4}\left(\mathfrak{L}_{jpk}^0 - \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0 \mathfrak{L}_{jpn}\right)A_k^0 = 0 \quad (p, j = 1,2)\,. \qquad (23)$$

Тут

$$\mathfrak{L}_{jpk}^0 = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[w_k^0 - \tilde{w}_k^0\right]\right)\Big|_{\gamma_j}\,,\ \mathfrak{L}_{jpn} = \left(\mathfrak{L}_{jp}\left[\psi_n\right]\right)\Big|_{\gamma_j}\,,$$

$$\alpha_n = a_n^* / \left(\omega^2 a_n^* - k_n d_n\right).$$

Із рівності нулю визначника однорідної системи (23) випливає частотне рівняння власних спільних коливань пружної пластини і рідини [6]:

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|_{q,k=1}^{4}\right| = 0\,, \qquad (24)$$

де

$$C_{pk} = \mathfrak{L}_{jpk}^0 - \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0\mathfrak{L}_{jpn} \quad (j=1,\ p=1,2;\ k=\overline{1,4})\,,$$

$$C_{p+2,k} = \mathfrak{L}_{jpk}^0 - \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0\mathfrak{L}_{jpn} \quad (j=2,\ p=1,2;\ k=\overline{1,4})\,.$$

Скориставшись розвиненнями функцій w_k^0 в ряд на повній і ортогональній системі функцій ψ_n, умовою $\int_{-a}^{a}\psi_n dx = 0$ і позначенням (21), рівняння (24) можна переписати так:

$$\left|\left\|C_{qk}\right\|_{q,k=1}^{4}\right| = 0\,, \qquad (25)$$

де

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E_{kn}^0\mathfrak{L}_{j1n}\,,\ \ C_{2k} = \mathfrak{L}_{j2k}^0 - \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0\mathfrak{L}_{j2n}$$
$$(j=1,\ k=\overline{1,4})\,,$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n E_{kn}^0\mathfrak{L}_{j1n}\,,\ \ C_{4k} = \mathfrak{L}_{j2k}^0 - \omega^2\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n E_{kn}^0\mathfrak{L}_{j2n}$$
$$(j=2,\ k=\overline{1,4})\,.$$

Тут $\beta_n = k_n d_n / \left(\omega^2 a_n^* - k_n d_n\right)$.

Так, наприклад, у разі жорсткого защемлення контурів пластини значення величин $\mathfrak{L}_{jpn}$ $(p=1,2)$ будуть такі:

$$\mathfrak{L}_{j1n} = \begin{cases} 1,\ j=1, \\ (-1)^n,\ j=2, \end{cases} \qquad \mathfrak{L}_{j2n} = 0.$$

Рівняння (24) і (25) при $a_n^* = a_n$ ($b_n^* = 0$) збігаються з рівнянням роботи [10]. У цій роботі верхня основа була тверда. Отже, власні спільні частоти коливання пружної пластини і рідини в прямокутному каналі із жорсткими основами (тобто з «кришкою» на вільній поверхні) випливають із рівнянь (24) і (25), якщо покласти коефіцієнт $b_n^* = 0$. З зростання h_1/b цей коефіцієнт прагне до нуля як $\mathrm{e}^{-2\pi h_1/b}$. Таким чином, при $h_1/b > 1$ впливом вільної поверхні на частотний спектр можна знехтувати [6].

Рівняння (25) за формою збігається з рівнянням статті [10]. Його можна спростити, провівши обчислення і перетворення коефіцієнтів визначника цього рівняння аналогічно цій роботі. У статтях [6; 8; 10] показано, що для мембрани та для затиснених контурів пластини частотне рівняння (25) спрощується і розпадається на два рівняння, які описують непарні й парні частоти, вони можуть бути записані в єдиній формі для цих частот.

Таким чином, для затиснених контурів частотне рівняння (25) спрощується і розпадається на два рівняння, що описують несиметричні ($n = 2m-1$) і симетричні ($n = 2m$) частоти, та може бути записане в єдиній формі для цих частот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} = 0\,. \qquad (26)$$

Уточнені умови стійкості коливань прямокутної пластини, яка поділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею. З урахуванням двох членів ряду в роботі [6], розглянуто рівняння (26) й отримано достатні умови стійкості сумісних коливань пластини і рідини. Для непарних і парних форм коливань ці умови мають вигляд:

$$2.05\pi^2 D/a^2 + T > 4g(\rho_1 - \rho_2)a^2/5\pi^2 \text{ , } (n = 1,3 \text{),} \quad (27)$$

$$3.4\pi^2 D/a^2 + T > 2g(\rho_1 - \rho_2)a^2/5\pi^2 \text{ , } (n = 2,4 \text{).} \quad (28)$$

Умови стійкості (27)–(28) збігаються з необхідними умовами стійкості в разі наявності «кришки» на вільній поверхні [10]. Вони не залежать від глибин заповнення рідин і маси пластини. Для стійкості несиметричних коливань, на відміну від симетричних, як видно з указаних умов, потрібна значно більша згинальна жорсткість і величина попереднього натягу. З умов (27)–(28) випливає, що при $g \geq 0$ і природної стратифікації $\rho_1 \leq \rho_2$ частотне рівняння (26) завжди має додатні корені, а плоска форма рівноваги пружної пластини стійка. Нестійкість може мати місце тільки в разі $g\Delta\rho < 0$, а при $g > 0$ (без урахування негативного перевантаження) – тільки якщо порушується природна стратифікація, тобто за умови $\rho_1 > \rho_2$. Слід зазначити, що наближені умови стійкості (27)–(28) можна уточнити з урахуванням трьох і більше членів ряду частотного рівняння, але при цьому доведеться скористатися умовами додатності коренів полінома n-го ступеня, що значно ускладнило б аналітичні дослідження.

Для знаходження критичних значень механічних параметрів, за яких відбувається втрата стійкості, як і в роботі [10], покладемо в частотному рівнянні (26) $\omega^2 = 0$. Воно буде мати вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(Dk_n^2 + T\right)k_n^2 + g\Delta\rho} = 0 \text{ .} \quad (29)$$

Рівняння (29) збігається з рівнянням цієї роботи, в якій отримано точні умови стійкості у разі мембрани та пластини за відсутності натягу ($T = 0$). Тому точні умови стійкості коливань пластини, яка поділяє двошарову рідину з вільною поверхнею, будуть такими:

$$D > 0.0042066g(\rho_1 - \rho_2)a^4 \quad (n = 2m - 1 \text{). } \quad (30)$$

$$D > 0.00129876g(\rho_1 - \rho_2)a^4 \quad (n = 2m \text{). } \quad (31)$$

Наближені значення умови стійкості, виписані з умови (27)–(28) при $T = 0$, запишуться так:

$$D > 0.39024439g(\rho_1 - \rho_2)a^4/\pi^4 = 0.00400624g(\rho_1 - \rho_2)a^4 \text{ ,}$$

$$(n = 1,3 \text{).} \quad (32)$$

$$D > 0.1176471g(\rho_1 - \rho_2)a^4/\pi^4 = 0.0012077626g(\rho_1 - \rho_2)a^4 \text{ ,}$$

$$(n = 2,4 \text{).} \quad (33)$$

Із (30)–(33) слідує, що наближені значення умов стійкості для пластини занижено для несиметричних частот у 1,050 разів, а для симетричних – у 1,075 разів.

У разі виродження пластини в мембрану в рівнянні (26), (29) і нерівностях (27)–(28) треба покласти $D = 0$. Точні умови стійкості коливань мембрани, яка поділяє двошарову рідину з вільною поверхнею мають вигляд [10]:

$$T > g(\rho_1 - \rho_2)a^2/\pi^2 = 0.1013g(\rho_1 - \rho_2)a^2$$

$$(n = 2m - 1 \text{),} \quad (34)$$

$$T > 0.0495277g(\rho_1 - \rho_2)a^2 \quad (n = 2m \text{). } \quad (35)$$

Наближені значення умови стійкості, виписані з умови (27)–(28) при $D = 0$, запишуться так:

$$T > 4g(\rho_1 - \rho_2)a^2/5\pi^2 = 0.0810g(\rho_1 - \rho_2)a^2$$

$$(n = 1,3 \text{),} \quad (36)$$

$$T > 2g(\rho_1 - \rho_2)a^2/5\pi^2 = 0.04052847g(\rho_1 - \rho_2)a^2$$

$$(n = 2,4 \text{).} \quad (37)$$

Із (34)–(37) бачимо, що наближені значення умов стійкості для мембрани занижені для несиметричних частот у 1,251 раз, а для симетричних – у 1,221 раз.

Слід указати на достатню близькість наближеного значення і точного для пластини, тобто врахування двох членів ряду дає достатню для практики точність. У разі мембрани для наближених обчислень слід ураховувати більше двох членів ряду.

Розглянемо ще випадок, коли можна отримати точні умови стійкості для розглянутого завдання. Нехай $\rho_1 = \rho_2$ ($\Delta\rho = 0$). Із нерівностей (27)–(28) випливає, що під час дії розтягувальних зусиль або за їх відсутності ($T \geq 0$) вони завжди будуть виконані. Нестійкість може виникнути тільки під час дії стискальних зусиль ($T < 0$).

Для знаходження критичних значень механічних параметрів, за яких відбувається втрата стійкості, як і раніше, в частотному рівнянні (26) покладемо $\omega^2 = 0$. Воно отримає такий вигляд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(Dk_n^2 + T\right)k_n^2} = 0 \text{ .}$$

Це рівняння можна переписати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - \beta^2 n^2} = 0 \text{ .} \quad (38)$$

Тут $\beta^2 = 4\tilde{T}a^2/D\pi^2 > 0$, $\tilde{T} = -T > 0$.

Числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\left[n^2\left(n^2 - \beta^2\right)\right]$ для непарних і парних значень n мають уявлення:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2\left[(2m-1)^2 - \beta^2\right]} = \pi^4 \frac{\tan x - x}{32x^3} \text{ ,} \quad (39)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2\left[(2m)^2 - \beta^2\right]} = -\pi^4 \frac{x^2 + 3x\cot x - 3}{96x^4} \text{ ,} \quad (40)$$

де $x = \pi\beta/2$.

Перший корінь рівняння (38) для непарних n з урахуванням (39) має значення $x = 4.49341$, наступна точна умова стійкості

$$D > 0.04953\tilde{T}a^2 \quad (n = 2m - 1 \text{).}$$

Перший корінь рівняння (38) для парних n з урахуванням (40) має значення $x = 5.76346$, із якого також випливає така уточнена умова стійкості:

$$D > 0.03011\tilde{T}a^2 \quad (n = 2m).$$

Наближені значення умови стійкості, виписані з умови (27)–(28) при $\Delta\rho = 0$ і $\tilde{T} = -T > 0$, запишуться так:

$$D > 0.04943\tilde{T}a^2 \quad (n = 1,3),$$

$$D > 0.02980\tilde{T}a^2 \quad (n = 2,4).$$

Таким чином, наближені значення умов стійкості занижені для несиметричних частот у 1,002 рази, а для симетричних – у 1,010 разів.

Слід також зазначити близькість наближеного значення і точного, тобто врахування двох членів ряду дає достатню точність для практики.

У разі відсутності пластини або мембрани ($D = 0,\ T = 0,\ k_{01} = 0$) із рівнянь (10)–(11) маємо таке частотне рівняння коливання двошарової рідини в прямокутному каналі:

$$\left(\rho_1 + \rho_2 \operatorname{cth}\kappa_{1n}\operatorname{cth}\kappa_{2n}\right)x^2 - \rho_2\left(\operatorname{cth}\kappa_{1n} + \operatorname{cth}\kappa_{2n}\right)x + \Delta\rho = 0, \quad (41)$$

Тут $x = \omega_n^2 / gk_n$.

Для нескінченно глибокої нижньої рідини ($h_2 = \infty$) рівняння (41) має такий розв'язок:

$$x_1 = \Delta\rho / \left(\rho_1 + \rho_2 \operatorname{cth}\kappa_{1n}\right), \quad x_2 = 1,$$

де $gk_n \Delta\rho / \left(\rho_1 + \rho_2 \operatorname{cth}\kappa_{1n}\right)$ – власна частота коливань внутрішньої поверхні за наявності «кришки» на вільної поверхні, а gk_n – власна частота коливань нескінченно глибокої рідини з вільною поверхнею.

Висновки. У лінійній постановці отримано і досліджено частотне рівняння власних коливань пластини, яка горизонтально розділяє двошарову ідеальну рідину з вільною поверхнею в прямокутному каналі. Контури пластини можуть мати довільні закріплення. Спільні коливання пружної пластини і двошарової рідини з вільною поверхнею моделюються системою інтегро-диференціальних рівнянь. Форму прогину пластини подано у вигляді суми фундаментальних розв'язків однорідного рівняння для пластини і частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Частинний розв'язок представлено у вигляді розкладання за власними функціями коливань ідеальної рідини в прямокутному каналі. Для затиснених контурів пластини отримано єдину форму частотного рівняння як для симетричних, так і для несиметричних спільних коливань пластини і рідини. Розглянуто граничні випадки виродження пластини в мембрану та її відсутність. Якщо глибина заповнено верхню рідини більше за ширину каналу, то впливом вільної поверхні на частотний спектр можна нехтувати, тобто в цьому разі можна замінити вільну поверхню твердої «кришкою». Уточнені умови стійкості спільних коливань пластини і рідини з вільною поверхнею для трьох випадків: відсутність розтягувальних зусиль у пластині, виродження пластини в мембрану і випадок рідин з однаковою щільністю під час дії на пластину стискальних зусиль. Показано, що в першому випадку наближені значення умов стійкості занижені для несиметричних частот у 1,050 разів, а для симетричних – у 1,075 разів. У випадку мембрани наближені значення занижено для несиметричних частот у 1,251 раз, а для симетричних – у 1,222 рази. У третьому випадку наближені значення занижено для несиметричних частот у 1,002 рази, а для симетричних – у 1,010 разів.

Таким чином, наукове і практичне значення роботи полягає в тому, що для пластини наближені значення умов стійкості з достатньою для практики точністю збігаються з точними, а у разі мембрани для наближених обчислень слід ураховувати більше двох членів ряду. Наближені й точні умови стійкості спільних коливань пластини і двошарової рідини не залежать від наявності вільної поверхні, «твердої» кришки на вільної поверхні і навіть від наявності пружної пластини на вільній поверхні двошарової рідини.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ильгамов М.А., Сахабутдинов Ж.М. Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности. *Избранные проблемы прикладной механики. Сборник статей к шестидесятилетию академика Н. Челомея.* Москва : Машиностроение, 1974. С. 341–346.
2. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. Москва : Наука, 1991. 200 с.
3. Троценко В.А. Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности. *Прикладная механика.* 1995. Т. 31, №8. С. 74–80.
4. Богун Р.І., Троценко В.А. Вільні коливанні рідини в прямокутному каналі з довільним симетричним дном та пружною мембраною на вільній поверхні. *Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем : збірник праць Інституту математики НАН України.* 2009. Т. 6, № 3. С. 53–76.
5. Кононов Ю.Н., Татаренко Е.А. Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном. *Прикладна гідромеханіка.* 2008. № 1. С. 33–38.
6. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. О колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним упругим основаниями. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій* : *збірник наукових праць.* 2017. Вип. 26. С. 79–96.

7. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с упругими основаниями. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 190–204.
8. Лимарь А.А. Об упрощении частотных уравнений в задаче о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць*. 2017. Вип. 27. С. 106–128.
9. Лимарь А.А. Статический прогиб упругих оснований прямоугольного канала с жидкостью. *Вісник Донецького університету. Серія А : Природничі науки.* 2017. № 1–2. С. 87–95.
10. Кононов Ю.Н., Лимарь А.А. Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями. *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій : збірник наукових праць*. 2016. Вип. 25. С. 69–84.
11. Лимарь А.А., Кононов Ю.Н. Об уточнении условий устойчивости колебаний мембраны, разделяющей идеальные жидкости в прямоугольном канале с жесткими основаниями. *Праці ІПММ НАН України*. 2017. Т. 31. С. 81–91.
12. Kononov Yu.N., Lymar A.A. On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. *Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*. 2018. Vol. 06, Issue 1. P. 1755–1760.
13. Kononov Y., Lymar A. On the stability of coupled oscillations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and ideal liquid. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Fluid mechanics, Sofia. 2020. Vol. 50. P. 292–303.
14. Кононов Ю.Н., Шевченко В.П., Лимарь А.А. Об устойчивости колебаний прямоугольной пластины в идеальной жидкости. *Механіка та математичні методи*. 2019. Т. 1, Вип. 2. С. 6–17.
15. Кононов Ю.Н., Шевченко В.П., Лимарь А.А. О колебании прямоугольной пластины в идеальной жидкости с учетом различных способов закрепления ее контуров. *Механіка та математичні методи*. 2020. Т. 2, Вип. 1. С. 6–19.
16. Кононов Ю.М., Шевченко В.П., Лимарь А.А. Коливання прямокутної пластини в ідеальної рідини з урахуванням різних способів її закріплення. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2020»*. URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Kononov2.pdf.
17. Bauer H.F., Eidel W. Non-linear hydroelastic vibration in rectangular container. *Journal of Sound and Vibration*. 1988. Vol. 125. P. 93–114.
18. Jeong K.-H., Yoo G.H., Lee S.C. Hydroelastic vibration of two identical rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2004. Vol. 272. P. 539–555.
19. Zhou D., Liu W. Hydroelastic vibrations of flexible rectangular tanks partially filled with liquid. *Int. J. Numer Methods Eng*. 2007. Vol. 71. P. 149–174.
20. Jeong K.-H. Free vibration of two circular plates coupled with bounded fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 2003. Vol. 260. P. 653–670.
21. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Appl. Math. Model*. 2013. Vol. 37(1-2). P. 228–239.
22. Kononov Y.M., Shevchenko V.P., Dzhukha Y.O. Axially symmetric oscillations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical reservoir. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 240, № 1. P. 98–112.
23. Kononov Y.M., Dzhukha Y.O. Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases. *Journalof Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 246, № 3. P. 365–383.

REFERENCES

1. Il'gamov M.A., Sahabutdinov J.M. (1974) Ob ustoychivosti uprugoy plastiny mezhdu zhidkostyami raznoy plotnosti [On the stability of elastic plates between liquids of different density]. *Izbrannie problemi prikladnoy mekhaniki. Sbornik statiy k shistidesyatiletiyu acad. Chelomei.* Moscow: Mashinostroenie, pp. 341–346 (in Russian).
2. Il'gamov M.A. (1991) *Vvedenie v nelineynuyu gidrouprugost* [Introduction to nonlinear hydroelasticity]. Moskow: Nauka (in Russian).
3. Trotsenko V.A. (1995) Svobodnye kolebaniya zhidkosti v pryamougol'nom kanale s uprugoy membranoy na svobodnoy poverkhnosti [Free oscillations fluid in a rectangular channel with an elastic membrane on the free surfaceї. *Prikladnaya mekhanika,* vol. 31, no.8, pp. 74–80.
4. Bogun R.I., Trotsenko V.A. (2009) Viljni kolyvanni ridyny v prjamokutnomu kanali z doviljnym symetrychnym dnom ta pruzhnoju membranoju na viljnij poverkhni [Free oscillations of the fluid in a rectangular channel with an arbitrary symmetrical bottom and an elastic membrane on the free surface].

Problemy dynamiky ta stiikosti bahatovymirnykh system : zb. prats In-tu matematyky NAN Ukrainy, vol.6, no 3, pp. 53–76.

5. Kononov Yu.N., Tatarenko K.A. (2008) Svobodnye kolebaniya uprugikh membran i dvukhsloynoy zhidkosti v pryamougol'nom kanale c uprugim dnom [Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in a rectangular channel with elastic bottom]. *Prikladnaya gidromehanika,* no. 1, pp. 33–38.
6. Kononov Yu.N., Lymar A.A. (2017) O kolebanii pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s odnim uprugim osnovaniyami [On the oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with one elastic base]. *Problemu obchislyuvalnoi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy*: *zb. nauk. prats,* vol. 26, pp. 79–96.
7. Kononov Yu.N., Lymar A.A. (2017) Kolebaniya pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s uprugimi osnovanimi [Oscillations of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with elastic bases]. *Visnuk Zaporizkogo natsionalnogo universitetu. Ser. Phiz.-math. nauk*, no. 1, pp. 190–204.
8. Lymar A.A. (2017) Ob uproshchenii chastotnykh uravneniy v zadache o kolebanii pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale [On the simplification of frequency equations in the problem of oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel]. *Problemu obchislyuvalnoi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy : zb. nauk. prats,* vol. 26, pp. 106–128.
9. Lymar A.A. (2017) Staticheskiy progib uprugikh osnovaniy pryamougol'nogo kanala s zhidkost'yu [Simplification of frequency equations in the problem of oscillation of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel Static deflection of elastic bases of a rectangular channel with liquid]. *Visnuк. Donetskogo natsionalnogo universitetu. Ser. A*: *Pryrodnychi nauky,* no. 1-2, pp. 87–95.
10. Kononov Yu.N., Lymar A.A. (2016) Ob ustoychivosti kolebaniya pryamougol'noy plastiny, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti raznoy plotnosti v pryamougol'nom kanale s zhestkimi osnovaniyami [On the oscillation stability of a rectangular plate separating ideal liquids of different densities in a rectangular channel with rigid bases]. *Problemu obchislyuvalnoi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy*: *zb. nauk. prats,* vol. 25, pp. 69–84.
11. Lymar A.A., Kononov Yu.N. (2017) Ob utochnenii usloviy ustoychivosti kolebaniy membrany, razdelyayushchey ideal'nye zhidkosti v pryamougol'nom kanale s zhestkimi osnovanimi [About specification of conditions of stability of fluctuations of the membrane separating ideal liquids in the rectangular channel with rigid bases]. *Pratsi IPMM NAN Ukrainy,* vol. 31, pp. 81–91.
12. Kononov Yu.N., Lymar A.A. (2018) On the update of the conditions of the stability of vibrations of the plate separating ideal liquids in a rectangular channel with hard foundations. *Intern. Journal of Mechanical Engineering and Information Technology*, vol. 06, issue 1, pp. 1755–1760.
13. Kononov Y., Lymar A. (2020) On the stability of coupled oscillations of the elastic bottom of a rigid rectangular channel and ideal liquid. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Fluid mechanics*, Sofia, vol. 50, pp. 292–303.
14. Kononov Yu.N., Shevchenko V.P., Lymar A.A. (2019) Ob ustoychivosti kolebaniy pryamougol'noy plastiny v ideal'noy zhidkosti [On the stability of oscillations of a rectangular plate in an ideal fluid]. *Mekhanyka ta matematychni metody*, vol. 1, no. 2, pp. 6–17.
15. Kononov Yu.N., Shevchenko V.P., Lymar A.A. (2020) O kolebanii pryamougol'noy plastiny v ideal'noy zhidkosti s uchetom razlichnykh sposobov zakrepleniya ee konturov [On the oscillation of a rectangular plate in an ideal fluid, taking into account different ways of fixing its contours]. *Mekhanyka ta matematychni metody*, vol. 2, no. 1, pp. 6–19.
16. Kononov Yu.M., Shevchenko V.P., Lymar O.O. (2020) Kolyvannja prjamokutnoji plastyny v idealjnoji ridyny z urakhuvannjam riznykh sposobiv jiji zakriplennja [Oscillations of a rectangular plate in an ideal liquid taking into account different ways of its fixing]. *Conference of Young Scientists "Pidstryhachivski chitannia – 2020".* URL: http://iapmm.lviv.ua/chyt2020/abstracts/Kononov2.pdf.
17. Bauer H.F., Eidel W. (1988) Non-linear hydroelastic vibration in rectangular container. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 125, pp. 93–114.
18. Jeong K.-H., Yoo, G.H., Lee S.C. (2004) Hydroelastic vibration of two identical rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, pp. 539–555.
19. Zhou D., Liu W. (2007) Hydroelastic vibrations of flexible rectangular tanks partially filled with liquid. *Int. J. Numer Methods Eng*, vol. 71, pp. 149–174.
20. Jeong K.-H. (2003) Free vibration of two circular plates coupled with bounded fluid. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 260, pp. 653–670.

21. Tariverdilo S., Shahmardani M., Mirzapour J., Shabani R. (2013) Asymmetric free vibration of circular plate in contact with incompressible fluid. *Appl. Math. Model*, vol. 37(1-2), pp. 228–239.
22. Kononov Y.M., Shevchenko V.P., Dzhukha Y.O. (2019) Axially symmetric oscillations of elastic annular bases and a perfect two-layer liquid in a rigid annular cylindrical reservoir. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 240, no 1, pp. 98–112.
23. Kononov Y.M., Dzhukha Y.O. (2020) Vibrations of Two-Layer Ideal Liquid in a Rigid Cylindrical Vessel with Elastic Bases. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 246, no 3, pp. 365–383.