

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики



ВИЩА МАТЕМАТИКА
Елементи лінійної алгебри
завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
спеціальності G3 «Електрична інженерія»
денної та заочної форм здобуття вищої освіти

Миколаїв
МНАУ
2025

УДК 512.64
В 55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 8 від 18. 04. 2025 р.)

Укладач:

Є. Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ

Рецензенти:

Р. В. Дінжос – д.т.н., професор, проректор з наукової роботи ЧНУ ім. Петра Могили;

О. С. Садовий – к.т.н, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для здобувачів вищої освіти ступеня "Бакалавр" спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка".

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, завдань для виконання на практичних заняттях, завдань для самостійного розв'язання. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв'язання. Пропонуються приклади розв'язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Дії з матрицями.

Тема 2. Визначники другого і третього порядків.

Тема 3. Обчислення визначників n -го порядку.

Тема 4. Обернена матриця.

Тема 5. Ранг матриці.

Тема 6. Правило Крамера.

Тема 7. Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Тема 8. Дослідження системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.

.

Тема 1. Дії з матрицями

1.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Матрицею A називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці*, а запис $m \times n$ означає її *розмір*. Зауважимо, що на першому місці в цьому запису зазначено кількість рядків матриці, а на другому — кількість стовпців. Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Елементи з двома однаковими індексами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* матриці. Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то матриця називається *симетричною*.

Квадратна матриця, в якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається *одиничною матрицею*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Коли всі елементи матриці, що містяться по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця називається *трикутною*.

Означення. Сумою матриць одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ називається матриця $C = A + B$; $C = (c_{ij})$, будь-який

елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Означення. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на деяке число α називається така матриця C , кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці A на α , $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1) $A + B = B + A$; 2) $\alpha A = A\alpha$; 3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; 4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; 5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

Означення. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ розміру $m \times p$ на матрицю $B = (b_{ij})$ розміру $p \times n$ називається така матриця $C = AB$ розміру $m \times n$, $C = (c_{ij})$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}.$$

Кожний елемент матриці C утворюється як сума добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто за схемою:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Слід зазначити, що в результаті множення дістанемо матрицю розміру $m \times n$.

З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний*: $AB \neq BA$.

Означення. Транспонування матриці – це операція нал матрицею $A = (a_{ij})$, при якій рядки та стовбці міняються місцями:

$$a_{ij}^T = a_{ji},$$

де a_{ij}^T - елементи транспонованої матриці A^T .

Властивості транспонованих матриць:

- 1) Якщо матриця має розмір $m \times n$, то транспонована матриця має розмір $n \times m$; 2) $(A^T)^T = A$; 3) $(kA)^T = kA^T$; 4) $(A+B)^T = A^T + B^T$; 5) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти суму матриць

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Обидві матриці A і B мають розмір 3×4 , тому за означенням можна утворити їх суму — матрицю

$$A+B = \begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Приклад 2. Знайти матрицю $2A+5B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}, 2A+5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти множення матриць AB і BA , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти значення матричного многочлена $2A^2 + 3A^T + 5E$ при

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ якщо } E - \text{одинична матриця}$$

Розв'язання:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad 2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3A^T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 3 & 9 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad 5E = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$2A^2 + 3A^T + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 22 \\ 19 & 36 & 15 \\ 24 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

Приклад 5. Знайти A^3 , якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2 & 6+8 \\ 3+4 & 2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33+14 & 22+56 \\ 21+18 & 14+72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

1.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Знайти множення матриць :

$$1. \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \quad 4. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}. \quad 6. (1-2 \quad 4 \quad 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad 7. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}^4.$$

Завдання 2. Знайти значення полінома $7A^2 + 13A - E$ від матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Завдання 3. Чи справедливі для матриць рівності

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2, \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2? \quad \text{Чому?}$$

Тема 2. Визначники другого і третього порядків.

2.1 Основні теоретичні відомості

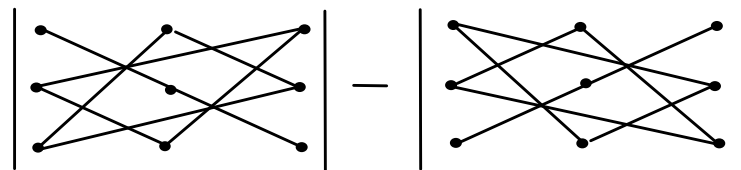
Означення. Визначником другого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1)$$

Означення. Визначником третього порядку називається вираз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (2)$$

Для запам'ятовування правила обчислення визначника третього порядку пропонуємо таку схему (правило трикутників):



Позначимо точками елементи визначника, тоді доданки зі знаком «плюс» — це добутки елементів a_{11} , a_{22} , a_{33} , розміщених на головній діагоналі визначника, і добутки елементів a_{13} , a_{21} , a_{32} і a_{12} , a_{23} , a_{31} , розміщених у

вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Зі знаком «мінус» беруться доданки, що є добутками елементів a_{13} , a_{22} , a_{31} , розміщених на сторонній діагоналі визначника, та у вершинах рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні сторонній діагоналі визначника — a_{11} , a_{23} , a_{32} і a_{12} , a_{21} , a_{33} .

Ще одне правило обчислення визначника третього порядку називається *правилом Саррюса*.

У початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Для знаходження визначника за цим правилом треба утворити зі знаком «плюс» алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком «мінус» — добутків елементів, розміщених на сторонній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти визначники другого порядку:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$; б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$;

б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$;

в) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \sin(\alpha - \beta)$.

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ за правилом трикутників.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-(-4) \cdot 1 \cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ за правилом Саррюса.

Розв'язання:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0(-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 -$$

$$-(-2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0.$$

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Знайти визначники другого порядку:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}.$

Завдання 2. Обчислити визначники за правилом трикутників:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}.$

Завдання 3. Обчислити визначники за правилом Саррюса:

1. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$

Тема 3. Обчислення визначників n-го порядку

3.1 Основні теоретичні відомості

Кожній квадратній матриці A можна поставити у відповідність *визначник* (детермінант), який складається з тих самих елементів.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Якщо такий визначник відмінний від нуля, то матриця називається неособливою, або невиродженою. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця особлива, або вироджена.

Означення. Визначником (детермінантом) квадратної матриці A n -го порядку називається число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} M_{12} + \dots + (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + \dots$$

$$+ (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}, \quad (3)$$

де M_{1j} - детермінант матриці $(n-1)$ -го порядку, яка отримується з матриці A викресленням 1-го рядку і j -го стовпця.

Матриця порядку $n=1$ складається із одного числа і її детермінант дорівнює цьому числу: $|a_{ij}| = a_{ij}$.

Означення. Доповняльним мінором M_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A n -го порядку називається детермінант матриці $(n-1)$ -го порядку, яка отримується з матриці A викресленням i -го рядку та j -го стовбця.

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A n -го порядку називається

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (4)$$

Обчислення детермінанту за формулою (3) називають розкладанням детермінанта за першим рядком.

Теорема Лапласа стверджує, що детермінант можна розкласти за будь яким рядком або стовбцем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{ij}A_{ij} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (5)$$

Властивості визначників

1. Визначник не змінюється в результаті транспонування.

З властивості 1 випливає, що будь-яке твердження, котре справджується для рядків визначника, справджується і для його стовпців, і навпаки.

2. Якщо один із рядків визначника складається лише з нулів, то такий визначник дорівнює нулю.

3. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то його знак зміниться на протилежний.

4. Визначник, який має два однакові рядки, дорівнює нулю.

5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника помножити на сталє число C , то й визначник помножиться на C .

З останньої властивості випливає, що спільний множник елементів рядка можна виносити за знак визначника.

6. Визначник, який має два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

7. Якщо всі елементи будь-якого рядка визначника можна подати у вигляді суми двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких елементами цього рядка будуть відповідно перший доданок у першому визначнику і другий доданок у другому визначнику, а решта елементів будуть ті самі, що й у початковому визначнику.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні елементи довільного іншого рядка, попередньо помножені на деяке число.

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ за першим рядком:

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = ((-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2) - 2(3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) + (3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) = \\
 = -4 - 14 + 5 = -13.$$

Приклад 2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ за третім рядком:

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
 = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) - 2 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) + 2 \cdot (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = \\
 = -3 + 4 - 14 = -13.$$

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ за третім стовпцем:

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (3 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) - (1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) + 2 \cdot (1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3) = \\
 = 5 - 4 - 14 = -13.$$

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: Виконаємо наступні дії:

- від елементів 1-го рядка віднімемо елементи 2-го рядка, помножені на 3;
- до елементів 3-го рядка додамо елементи 2-го рядка помножені на 2;
- від елементів 4-го рядка віднімемо елементи 2-го рядка.

Згідно властивості 8 детермінант вихідної матриці не зміниться і перетвориться до вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей визначник за елементами 1-го стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41} = 0 \cdot M_{11} - 1 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31} - 0 \cdot M_{41} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Додаючи в останньому визначнику до елементів 1-го рядка елементи 3-го рядка і віднімаючи від елементів 2-го рядка елементи 3-го рядка, отримаємо

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник розкладемо за 1-им стовпцем:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 1 \cdot M_{31}) = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 0 & 7 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -70$$

Приклад 4. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання: Винесемо за знак визначника загальні множники 1, 4 та 5-го стовпців:

$$D = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо з елементів 2-го стовбця елементи 1-го стовпця і розкладемо отриманий визначник за елементами 1-го стовпця:

$$D = 20 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів 2-го рядка елементи 1-го рядка, винесемо -2 (загальний множник елементів 1-го стовпця) за знак визначника, а потім розкладемо отриманий визначник за елементами 1-го стовпця.

$$D = -40 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -40 \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Віднімемо від елементів 2-го рядка елементи 3-го рядка, винесемо 2 (загальний множник елементів 1-го рядка) за знак визначника і розкладемо отриманий визначник за елементами 3-го стовпця:

$$D = -80 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -80 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 640.$$

Приклад 5. Обчислити визначник трикутної матриці

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{розкладемо виначник} \\ \text{за 4-м рядком} \end{array} \right] = -0 \cdot M_{41} + 0 \cdot M_{42} - 0 \cdot M_{43} +$$

$$a_{44} \cdot M_{44} = a_{44} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{розкладемо виначник} \\ \text{за 3-м рядком} \end{array} \right] = a_{44} \cdot (0 \cdot M_{31} - 0 \cdot M_{32} +$$

$$+ a_{33} \cdot M_{33}) = a_{44} \cdot a_{33} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{44} \cdot a_{33} \cdot a_{11} \cdot a_{22} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}.$$

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання . Обчислити визначники:

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} \quad 3. \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

Тема 4. Обернена матриця.

4.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до квадратної невинродженої матриці A , якщо виконується співвідношення: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема. Якщо $\det A \neq 0$, то існує єдина обернена до матриці A матриця A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Тут A_{ij} - алгебраїчні доповнення (4) елемента a_{ij} квадратної матриці A .

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

Обчислимо:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{l} \text{додамо до елементів 3-го} \\ \text{рядку елементи 2-го рядку,} \\ \text{помножені на } (-4) \end{array} \right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{розкладемо визначник} \\ \text{за 3-м стовпцем} \end{array} \right] = 0 \cdot M_{13} - 1 \cdot M_{23} + 0 \cdot M_{33} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5.$$

$\Delta \neq 0$ — обернена матриця існує.

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -M_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -M_{21} = - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -M_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1} , побудована нами, справді є оберненою до матриці A . Знайдемо AA^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання. Знайти матриці, обернені до матриць:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$

3. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$

:

Тема 5. Ранг матриці.

5.1 Основні теоретичні відомості

Розглянемо довільну матрицю A розміру $m \times n$. Виберемо будь-які s рядків з номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ і s стовбців з номерами $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ відповідно.

Означення. Мінором матриці A порядку s називається визначник матриці, утвореної елементами, розташованими на перетині s рядків і s стовбців:

$$L_{k_1 k_2 \dots k_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_s} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_s k_1} & a_{i_s k_2} & \dots & a_{i_s k_s} \end{vmatrix}.$$

Означення. В матриці A розміру $m \times n$ мінор порядку r називається базисним, якщо він відмінний від нуля, а всі мінори порядку $r+1$ дорівнюють нулю або мінорів порядку $r+1$ взагалі не існує. В останньому випадку r співпадає з меншим із чисел m або n .

Означення. Рангом матриці називається порядок базисного мінору. Якщо кожен елемент матриці дорівнює нулю, то ранг такої матриці за визначенням дорівнює нулю.

Ранг матриці A будемо позначати RgA .

До елементарних перетворень матриці відносять:

- 1) множення рядка на число, відмінне від нуля;
- 2) додавання до одного рядка іншого;
- 3) перестановка рядків;
- 4) ті ж самі операції зі стовбцями.

Ранг матриці не змінюється від елементарних перетворень.

Кожну матрицю A рангу r за допомогою елементарних перетворень рядків та перестановки стовпців можна привести до стандартного вигляду:

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & * & * & * & * & * & * & * \\
 0 & a_{22} & * & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & a_{33} & * & * & * & * & * \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rr} & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Тут $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, $a_{33} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0$; через $*$ позначені елементи, значення яких не впливає на визначення рангу матриці.

Якщо матриця A приводиться за допомогою елементарних перетворень до виду (7), то її ранг дорівнює порядку трикутної матриці з діагональними елементами $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{rr}$ (розташована в верхньому лівому куті матриці A).

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Утворити кілька мінорів другого і один мінор третього порядку визначника:

$$\begin{vmatrix}
 3 & -1 & 2 & 4 \\
 0 & 1 & -3 & 5 \\
 2 & 6 & -7 & 1 \\
 0 & 2 & -1 & 3
 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання:

$$L_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, L_{13}^{34} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, L_{34}^{24} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \dots, L_{134}^{234} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Мінори L_{12}^{12} , L_{13}^{34} , L_{34}^{24} другого порядку утворюються з елементів, розміщених на перетині першого, другого рядків; першого, другого стовпців; третього, четвертого рядків; першого, третього стовпців; другого, четвертого рядків; третього, четвертого стовпців. Мінор L_{134}^{234} третього порядку утворюється з елементів, розміщених на перетині другого, третього, четвертого рядків і першого, третього, четвертого стовпців.

Приклад 2. Знайти ранг матриці A методом обвідних мінорів, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Мінор другого порядку, який міститься в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Проте матриця A має

й відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Далі запишемо мінор третього порядку, який обводить відмінний від нуля мінор другого порядку:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Утворимо тепер обвідні мінори четвертого порядку для мінора третього порядку. Їх існує лише два:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Обидва вони дорівнюють нулю, а це означає, що ранг початкової матриці дорівнює трьом.

Приклад 2. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{array}{l} \text{поміняємо місцями} \\ 1\text{-й і } 4\text{-й рядки} \end{array} \right]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & -6 \\ -3 & 1 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{array}{l} \text{додамо } 1\text{-й рядок до другого} \\ \text{помножимо } 1\text{-й рядок на } 3 \text{ і додамо до } 3\text{-го} \\ \text{помножимо } 1\text{-й рядок на } (-2) \text{ і додамо до } 4\text{-го} \end{array} \right]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & -6 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{array}{l} \text{розділимо } 2\text{-й, } 3\text{-й, } 4\text{-й рядки} \\ \text{на } 6, 7, (-3) \text{ відповідно} \end{array} \right]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left[\begin{array}{l} \text{віднімемо } 2\text{-й рядок} \\ \text{від } 3\text{-го і } 4\text{-го} \end{array} \right]} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Остання матриця має стандартний вид (7). В верхньому лівому куті розташована трикутна матриця $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Її розмір 2×2 , тому $\text{Rg}A = 2$.

5.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Знайти ранг матриць методом обвідних мінорів:

$$\begin{aligned}
1. & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} & 2. & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Завдання 2. Дослідити залежно від значення λ ранг матриць:

$$\begin{aligned}
1. & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} & 2. & \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Завдання 3. Знайти ранг матриці методом елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Тема 6. Правило Крамера.

6.1 Основні теоретичні відомості

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (8)$$

Теорема. Якщо визначник Δ , складений із коефіцієнтів при невідомих системи n лінійних рівнянь з n невідомими (8), відмінний від нуля, то така система рівнянь має єдиний розв'язок, який обчислюється за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де Δ — визначник матриці системи, який утворюється з коефіцієнтів при невідомих у лівій частині системи (8);

Δ_j — визначник, який утворюється заміною j -го стовпця в визначнику матриці системи на стовпець вільних членів.

6.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = -11 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = -4 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = -11 \end{cases}$$

Розв'язання: Тут матриця системи A і стовпець вільних членів $\bar{b}$ мають вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ -4 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Складемо й обчислимо спочатку визначник матриці цієї системи:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{[позмінюємо місцями]} \\ \text{[1-й і 2-й рядки]} \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{matrix} \text{[помножимо 1-й рядок на (-2) і додамо до 2-го]} \\ \text{[помножимо 1-й рядок на (-1) і додамо до 4-го]} \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 7 & -5 & 13 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{matrix} \text{[розкладемо визначник]} \\ \text{за 1-м стовпцем} \end{matrix} = -(1 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{21} + 0 \cdot M_{31} - 0 \cdot M_{41}) = - \begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{matrix} \text{[помножимо 2-й стовпець на 2 і додамо до 1-го]} \\ \text{[помножимо 2-й стовпець на 2 і додамо до 3-го]} \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{matrix} \text{[розкладемо визначник]} \\ \text{за 2-м рядком} \end{matrix} = -(-0 \cdot M_{21} + (-1) \cdot M_{22} - 0 \cdot M_{23}) = - \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27. \end{aligned}$$

Отже, визначник матриці системи відмінний від нуля. За правилом Крамера така система має єдиний розв'язок. Знайдемо його. Для цього утворимо і обчислимо ще чотири визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -5 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -11 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -11 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -11 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -11 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -11 & 6 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -11 \\ 1 & -3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -7 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

За правилом Крамера маємо розв'язки:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2; x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{27} = 0.$$

Отже, $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 0$ — єдиний розв'язок вихідної системи.

6.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Розв'язати за правилом Крамера систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}.$$

Тема 7. Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

7.1 Основні теоретичні відомості

Запишемо систему (8) у матричному вигляді:

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}.$$

Тут A - матриця системи, $\bar{x}$ - стовпець невідомих, $\bar{b}$ - стовпець вільних членів. Припустимо, що матриця системи не вироджена, тобто $\Delta = \det A \neq 0$. Тоді для матриці A побудуємо обернену A^{-1} — вона за тих припущень, які щойно зроблено, існує. Помноживши тепер матричну рівність $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$ зліва на матрицю A^{-1} , дістанемо:

$$A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}\bar{b} \Rightarrow (A^{-1}A)\bar{x} = A^{-1}\bar{b} \Rightarrow E\bar{x} = A^{-1}\bar{b}, \text{ або остаточно} \\ \bar{x} = A^{-1}\bar{b}. \quad (9)$$

Останній вираз — це розв’язок системи лінійних рівнянь. Зауважимо, що в такому вигляді можна записати розв’язок будь-якого матричного рівняння, якщо матриця A задовольняє умови існування A^{-1} .

7.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - x_3 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$

Розв’язання: Запишемо систему в матричному вигляді $A\bar{x} = \bar{b}$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A обернена матриця була побудована в прикладі 1 (розділ 4.2). Тому за формулою (9) маємо:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \\ 2 - \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \\ 0 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ — розв’язок системи.

Приклад 2. Розв’язати матричне рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання: Знайдемо $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

Оскільки $A_{11} = 3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 3$, маємо:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

За формулою (9) визначаємо:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукана матриця:

$$X = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}.$$

7.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Розв'язати системи рівнянь методом оберненої матриці:

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 = -13 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} -4x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ -2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 6 \end{cases}.$$

Завдання 2. Розв'язати матричні рівняння:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}. \quad 2. \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тема 8. Дослідження системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

8.1 Основні теоретичні відомості

Предметом розгляду лінійної алгебри є насамперед теорія систем лінійних рівнянь, які в загальному вигляді можна подати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (10)$$

Система (10) називається системою m лінійних рівнянь з n невідомими (змінними), де $x_1, x_2, \dots, x_n$ - невідомі; a_{ij} ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) - коефіцієнти системи рівнянь; b_i ($i = \overline{1, m}$) - вільні члени, або праві частини

системи рівнянь. Якщо всі $b_i = 0$ ($i = \overline{1, m}$), то система лінійних рівнянь називається *однорідною*.

Розв'язком системи рівнянь (10) є множина таких чисел $k_1, k_2, \dots, k_n$, у результаті підставляння яких замість відповідних невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ у кожне з рівнянь системи (10) останні перетворюються на правильні числові рівності.

Якщо система рівнянь не має жодного розв'язку, вона називається *несумісною*, а якщо має хоча б один розв'язок — *сумісною*. Сумісна система рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо розв'язків більш як один.

У загальному випадку перш ніж розв'язати систему рівнянь (10), важливо знати, чи існують її розв'язки, тобто чи буде вона сумісною. Щоб відповісти на це запитання, розглянемо дві матриці: *матрицю системи* A , складену з коефіцієнтів при невідомих системи рівнянь (10), і *розширену матрицю* $\bar{A}$, утворену приєднанням до матриці A стовпця вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера—Капеллі. Для того щоб система рівнянь (10) була сумісною (мала розв'язок), необхідно і достатньо, щоб ранг основної матриці A дорівнював рангу розширеної матриці $\bar{A}$:

$$\text{Rg}A = \text{Rg}\bar{A} = r.$$

З теореми випливає, що в матриці, складеній з коефіцієнтів при невідомих, неодмінно існує мінор r -го порядку, відмінний від нуля, оскільки ранг цієї матриці дорівнює r .

Нехай, наприклад, це мінор, який складено з коефіцієнтів при перших r невідомих. Залишимо доданки з цими невідомими в лівій частині рівняння, а решту доданків перенесемо у праву частину. Усі рівняння системи (10) після r -го відкинемо. Тоді система рівнянь набере вигляду:

[illegible]

Невідомі змінні $x_1, x_2, \dots, x_r$ називаються *базисними невідомими* (змінними), а $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ — *параметричними невідомими* (змінними).

Визначник матриці системи рівнянь (11) (мінор r -го порядку) відмінний від нуля. За правилом Крамера така система рівнянь має єдиний розв'язок відносно базисних невідомих $x_1, x_2, \dots, x_r$. Зрозуміло, що кожен з базисних невідомих можна подати через параметричні невідомі. Якщо параметричним невідомим не надано конкретних числових значень, маємо так званий *загальний розв'язок* системи рівнянь (10). Надавши параметричним невідомим деяких числових значень, дістанемо *частинний розв'язок* цієї системи. Зрозуміло, що частинних розв'язків системи в цьому разі безліч. Така система є сумісною, але невизначеною.

Якщо ж система сумісна і її ранг дорівнює кількості невідомих ($r = n$, всі змінні базисні), то вона визначена.

8.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Дослідити систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}.$$

Розв’язання: Знайдемо ранги матриці і розширеної матриці системи.
Запишемо розширену матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & | & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & | & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

Вертикальною лінією ми відділили елементи матриці системи (матриці A) від вільних членів системи.

Додамо до елементів 2-го рядка відповідні елементи 3-го рядка, а потім поділимо всі елементи 2-го рядка на 3:

$$A_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right).$$

Віднімаємо від елементів 2-го рядка відповідні елементи 1-го рядка:

$$A_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right);$$

$$A \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{array} \right).$$

Нескладно бачити, що $RgA = 2$, $RgA_1 = 3$, тобто $RgA \neq RgA_1$; отже, система несумісна.

Приклад 2. Дослідити систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання: Розширена матриця системи має вигляд:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Додамо елементи 2-го рядка до відповідних елементів 1-го та 4-го рядків, а потім поділимо елементи 1-го рядка на 4, а елементи 4-го рядка на 5:

$$A_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 5 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Відніmemo від елементів 3-го рядка відповідні елементи 1-го рядка, а від елементів 5-го рядка відніmemo елементи 4-го рядка; після цього викреслемо 3-й і 5-й рядок:

$$A_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right); \quad A \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Обчислемо визначник останньої матриці:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot M_{31} - 1 \cdot M_{32} + 0 \cdot M_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 1 \neq 0.$$

Отже $RgA = 3$. Ранг розширеної матриці також дорівнює 3, оскільки знайдений визначник є мінором матриці $\overline{A}$.

Отже, система сумісна. Для її розв'язання візьмемо, наприклад, перше, третє і п'яте рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему *методом Гаусса*. На першому етапі приведемо систему за допомогою елементарних перетворень до східчастого виду.

До *елементарних перетворень* системи відносять: додавання рівнянь системи, перестановка рівнянь в системі, множення рівнянь на від'ємне від нуля дійсне число.

Елементарні перетворення приводять систему до *еквівалентної*, тобто до системи, що має точно такі ж розв'язки, що і вихідна система.

Для зручності будемо робити елементарні перетворення не системи, а розширеної матриці системи:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \text{помножимо 1-ий рядок на } (-1) i \\ \text{додаємо до 2-го і 3-го рядка} \end{array} \right] \\ \square \end{array} \\
& \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array} \right) \square \left[\begin{array}{l} \text{відніmemo від 3-го рядка 2-ий} \end{array} \right] \square \\
& \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \square \left[\begin{array}{l} \text{помножимо 2-ий та} \\ \text{3-ий рядки на } (-1) \end{array} \right] \square \\
& \square \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \quad 12)
\end{aligned}$$

Отже, матриця системи приведена до трикутного (12), а система до схи́дчастого виду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_3 = 3. \end{cases} \quad (13)$$

На другому етапі розв'язуємо систему (13), рухаючись від останнього рівняння до першого. Отже із третього рівняння знаходимо, що $x_3 = 3$. Підставляючи $x_3 = 3$ в друге рівняння, отримуємо:

$$x_2 + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2.$$

Нарешті, підставляючи $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ в перше рівняння, знаходимо

$$x_1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Таким чином, розв'язок вихідної системи: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Приклад 3. Дослідити систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання: Тут

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Відніmemo від 3-го рядка 1 – ий:

$$A_1 \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Розділимо елементи 3-го рядка на 2 і відніmemo від отриманого 3-го рядка 2-ий; потім викреслимо 3-ий рядок:

$$A_1 \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad A_1 \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Нескладно бачити, що $RgA = RgA_1 = 2$. Отже, система сумісна.

Візьmemo перше і друге рівняння вихідної системи:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

За базисні змінні візьmemo x_1 та x_2 . Це можна зробити, оскільки визначник $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ із коефіцієнтів при цих невідомих відмінний від нуля.

Параметричні невідомі тоді x_3 та x_4 . Перепишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4. \end{cases}$$

За допомогою правила Крамера виразим x_1 та x_2 через x_3 та x_4 :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{6}{11}x_3 - \frac{8}{11}x_4 - \frac{1}{11},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{6}{11}x_3 + \frac{7}{11}x_4 + \frac{2}{11}.$$

Позначимо $x_3 = u$, $x_4 = v$, тоді отримаємо розв'язок системи у вигляді

$$x_1 = -\frac{6}{11}u - \frac{8}{11}v - \frac{1}{11}, \quad x_2 = -\frac{6}{11}u + \frac{7}{11}v + \frac{2}{11}, \quad x_3 = u, \quad x_4 = v.$$

Задаючи параметрам u і v різні числові значення, будемо отримувати різні розв'язки системи рівнянь.

8.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Дослідити на сумісність системи залежно від λ .

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5 \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases}$$

Завдання 2. Дослідити і розв'язати систему, якщо вона сумісна:

$$1. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Завдання 3. Розв'язати згідно свого варіанту систему лінійних рівнянь методом Гауса, методом Крамера та матричним методом:

Варіант 1	$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ x - 3y + 2z = 5, \\ 2x + y - 3z = 3. \end{cases}$	Варіант 16	$\begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ 2x - y = 1, \\ 3x + 2y - z = 4. \end{cases}$
Варіант 2	$\begin{cases} x - 2y + 3z = -5, \\ 4x + 2y - 3z = 0, \\ 3x - 3y + 5z = -9. \end{cases}$	Варіант 17	$\begin{cases} 3x + y + z = 2, \\ x - 2y + 2z = -1, \\ 4x - 3y - z = 5. \end{cases}$
Варіант 3	$\begin{cases} 3x - y + z = 7, \\ x + 2y + 3z = 8, \\ x + y - 2z = -6. \end{cases}$	Варіант 18	$\begin{cases} 4x + 4y + 3z = 5, \\ 2x - y + z = 7, \\ 3x + 2y - z = -4. \end{cases}$
Варіант 4	$\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$	Варіант 19	$\begin{cases} x - 2y + z = -2, \\ 5x + 4y - z = 0, \\ 3x + y + z = 2. \end{cases}$

Варіант 5	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$	Варіант 20	$\begin{cases} 3x - y - z = 1, \\ x + 3y + 2z = 6, \\ 2x - 4y - z = -3. \end{cases}$
Варіант 6	$\begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1. \end{cases}$	Варіант 21	$\begin{cases} x + 2y - z = -1, \\ 2x + 3y + 4z = -1, \\ 3x - y - z = 4. \end{cases}$
Варіант 7	$\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + 2y + 2z = 2. \end{cases}$	Варіант 22	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ 4x - 2y - 2z = 0, \\ 3x + y - 3z = 1. \end{cases}$
Варіант 8	$\begin{cases} x + y + 3z = -5, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x + 2y - z = 5. \end{cases}$	Варіант 23	$\begin{cases} 4x - y - 3z = 5, \\ x + 2y - 2z = 0, \\ 3x - 3y = 4z = 10. \end{cases}$
Варіант 9	$\begin{cases} x + y - z = -2, \\ 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + 4y - 3z = -5. \end{cases}$	Варіант 24	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ 3x - 2y - z = 0, \\ 3x - y - 3z = 9. \end{cases}$
Варіант 10	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ x + 3y + 4z = 6, \\ 2x - y - z = 1. \end{cases}$	Варіант 25	$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = -1, \\ 3x - y + 2z = 3, \\ 4x + 2y - z = 0. \end{cases}$
Варіант 11	$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - y + 3z = -7, \\ 2x + y - 2z = 9. \end{cases}$	Варіант 26	$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 4x - 3y - z = 2, \\ 4x + 2y + z = -8. \end{cases}$
Варіант 12	$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ 3x - y + 2z = 1, \\ x + 4y - z = 2. \end{cases}$	Варіант 27	$\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ 2x + y - 3z = 0, \\ x - 2y - z = 5. \end{cases}$
Варіант 13	$\begin{cases} 2x - y + z = 5, \\ 3x + 4y - 2z = -3, \\ x - y + z = 4. \end{cases}$	Варіант 28	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = -2, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$
Варіант 14	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 5, \\ x + 4y - z = -3, \\ 3x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$	Варіант 29	$\begin{cases} 3x + y - z = 8, \\ 3x - y + z = 4, \\ x + 2y - z = 4. \end{cases}$

Варіант 15	$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 3x + 4y + z = 1, \\ 5x + y - 3z = -2. \end{cases}$	Варіант 30	$\begin{cases} 2x + y + z = 4, \\ 3x + 6y + 2z = 4, \\ 4x - y - 3z = 1. \end{cases}$
------------	---	------------	--

Список рекомендованої літератури

Основна:

1. Вишнякова А. М., Заварзіна О. О. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Харків : Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, 2024, 160 с.
2. Дьоміна Н., Назарова О. Вища математика, частина 1. Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії : навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Мелітополь : ФОП Силаєва О.В., 2021, 124 с.
3. Іщенко О. А., Халанчук Л. В., Назарова О.П. Вища математика: конспект лекцій (частина 1). Мелітополь : ФОП Кузьмін В.А., 2021, 124 с.
4. Набока О. О. Лінійна алгебра : навчально-методичний посібник. Харків : Стильна типографія, 2020, 64 с.
5. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. Рівне: НУВГП, 2020. 205 с.

Додаткова:

1. Барковський В. М. Вища математика : практикум. Київ : Центр учбової літератури, 2023, 536 с.
2. Іщенко О. А., Халанчук Л. В. Вища математка : методичні вказівки до практичних робіт. Мелітополь : ТОВ “Колор Принт”, 2020, 160 с.
3. Корніль Т. Л. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 1. Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія на площині : навч.-метод. посібник. Харків : Мадрид, 2020, 80 с
4. Сердюк І.В., Ахієзер О. Б, Дунаєвська О. І. Практикум з курсу Алгебра і геометрія. Визначники та матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь : навчальний посібник для студентів напрямів підготовки “Прикладна математика” та “Системний аналіз”. Харків: “НТМТ”, 2022, 112 с.

Зміст

ВСТУП.....	3
Тема 1. Дії з матрицями.....	4
Тема 2. Визначники другого і третього порядків.....	8
Тема 3. Обчислення визначників n -го порядку.....	10
Тема 4. Обернена матриця.....	16
Тема 5. Ранг матриці.....	18
Тема 6. Правило Крамера.....	22
Тема 7. Матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	24
Тема 8. Дослідження системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими.....	26
Список рекомендованої літератури.....	36

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Елементи лінійної алгебри

Методичні рекомендації

Укладачі: **Борчик Євген Юрійович**

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 2
Тираж 10 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.