

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ, КОМПЮТЕКНИХ НАУК ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ

методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи
здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти ОПП
«Харчові технології» спеціальності 181 «Харчові технології» денної
форми здобуття вищої освіти



Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 24.04.2025 року протокол № 8.

Укладачі:

- О. В. Шибаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- О. Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- В. О. Крайній – канд. екон. наук, старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Гиль М.І. - доктор сільськогосподарських наук, професор, член НААН України, академік НАНВО України, декан факультету ТВПШТСБ, Миколаївський національний аграрний університет

Трибрат Р.О. - заступник завідувача кафедри переробки продукції тваринництва та харчових технологій, кандидат сільськогосподарських наук, доцент, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Перелік практичних занять та їх обсяг	5
Практична робота №1. Розв’язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з відмовами	6
Практична робота №2. Розв’язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням	9
Практична робота №3. Розв’язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням	13
Практична робота №4. Детерміновані моделі систем управління запасами з розривами цін	15
Практична робота №5. Економетрична модель з двома змінними	18
Практична робота №6. Задача оптимального використання ресурсів	27
Практична робота № 8. Моделювання гідродинамічних процесів.	67
Практична робота № 9. Моделювання теплообмінних процесів.	74
Практична робота № 10 Моделювання масообмінних процесів.	93
Практична робота № 11 Моделювання хімічних та біохімічних процесів.	97
САМОСТІЙНА РОБОТА	102
Теми та завдання обов’язкового самостійного опрацювання	103
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	105

ВСТУП

Дисципліна “Моделювання технологічних систем харчових виробництв” для магістрів факультету ТВППТСБ Миколаївського національного аграрного університету спеціальності 181 – «Харчові технології» денної форми навчання викладається у третьому семестрі навчання.

Протягом вивчення дисципліни здобувачі вищої освіти знайомляться з важливими методами математичного моделювання і використання їх в сільському господарстві.

Мета дисципліни – розкриття значення математичних методів для управління господарством, виявлення наявних резервів виробництва.

Основна мета вивчення дисципліни – опанування теорії та набуття практичних навичок в застосуванні методики моделювання в практичній діяльності.

Практична ціль дисципліни – ознайомити магістрів з різноманітними математичними методами для підвищення ефективності технологічних процесів.

У результаті засвоєння даної дисципліни здобувач вищої освіти повинен: дістати уявлення та засвоїти основні категорії кібернетики, освоїти основні прийоми моделювання в сільському господарстві, навчитися ефективно планувати сільськогосподарське виробництво, оптимізувати технологічні процеси. Для моделювання на ПЕОМ кожному здобувачу вищої освіти необхідно проводити послідовну аналітичну роботу, визначати критерії оптимальності, вивчати системи показників і методики їх розрахунку; основні етапи і методи моделювання.

Перелік практичних занять та їх обсяг

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. «Теоретичні основи моделювання та оптимізації основних процесів харчових виробництв»

Практична робота №1. Розв'язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з відмовами

Практична робота №2. Розв'язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням

Практична робота №3. Розв'язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням

Практична робота №4. Детерміновані моделі систем управління запасами з розривами цін

Практична робота №5. Економетрична модель з двома змінними

Практична робота №6. Задача оптимального використання ресурсів

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. «Математичні моделі основних процесів та обладнання харчових виробництв»

Практична робота № 7. Моделювання механічних процесів.

Практична робота № 8. Моделювання гідродинамічних процесів.

Практична робота № 9. Моделювання теплообмінних процесів.

Практична робота № 10 Моделювання масообмінних процесів.

Практична робота № 11 Моделювання хімічних та біохімічних процесів.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №1 .

Розв'язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з відмовами

Мета: навчитись розв'язувати задачі моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з відмовами.

Завдання 1

Виробнича система складається з двох технологічних ліній, які випускають однакову продукцію. Друга технологічна лінія у даній системі має продуктивність вдвічі більшу, ніж перша. Перша лінія приносить прибуток за одиницю часу 50 грн., а друга – 100 грн. Відмови (поломки) другої лінії відбуваються у середньому вдвічі частіше, ніж першої, тому інтенсивності відмов: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. Інтенсивності потоків закінчень ремонтів: $\mu_1=2$, $\mu_2=1$.

Передбачена раціоналізація системи, яку можна застосувати тільки до однієї лінії, яка дає змогу вдвічі скоротити час ремонту обраної лінії. Користуючись теорією масового обслуговування, потрібно прийняти рішення яку саме з двох ліній вибрати для раціоналізації.

Варіанти завдань

№ варі-анта	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_1	2,8	1,5	1,78	3,89	1,75	1,8	2,85	1,9
λ_2	5,0	2,5	4,56	6,5	1,45	2,6	5,76	3,56
μ_1	4,5	2,75	3,45	5,67	1,67	3,75	3,56	2,45
μ_2	5,2	3,5	5,3	6,8	1,2	4,4	7,23	5,34

№ варі-анта	9	10	11	12	13	14	15	16
λ_1	2,8	1,34	2,54	1,45	2,67	1,76	1,65	2,35
λ_2	5,56	2,46	5,76	2,79	5,94	3,47	3,46	4,36
μ_1	3,9	2,67	4,35	2,89	3,25	2,84	2,36	3,76
μ_2	6,34	3,23	6,46	3,46	6,76	4,85	4,74	5,12

№ варі-анта	17	18	19	20	21	22	23	24
λ_1	1,56	2,47	1,78	2,9	1,76	2,54	1,74	2,85
λ_2	3,45	4,28	3,56	5,84	3,73	5,95	3,46	5,45
μ_1	2,34	3,39	2,49	3,49	2,83	3,77	2,25	3,74
μ_2	4,3	5,15	4,5	6,67	4,15	6,36	4,28	6,4

Виконання завдання 1

Складемо граф станів системи. Така система має чотири стани:

Стан S1 – обидва пристрої працюють;

Стан S2 – перший пристрій ремонтується (після відмови), другий працює;

Стан S3 – другий пристрій ремонтується, перший працює;

Стан S4 – обидва пристрої ремонтуються.

Позначимо інтенсивність потоку відмов першого пристрою як λ_1 , інтенсивність потоку відмов другого пристрою – як λ_2 , інтенсивність потоку закінчень ремонтів першого пристрою – як μ_1 , інтенсивність потоку закінчень ремонтів другого пристрою – як μ_2 . Граф станів такої виробничої системи наведений на рис.1.

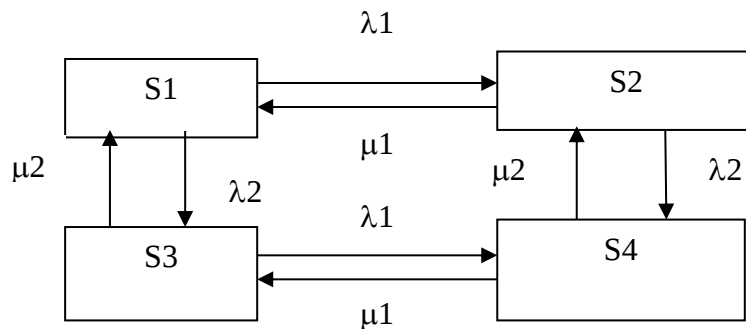


Рис.1. Граф станів виробничої системи

Використовуючи задані інтенсивності відмов пристроїв і потоків закінчень ремонтів, запишемо рівняння Колмогорова у такому загальному вигляді (1) та підставимо у систему рівнянь відомі значення інтенсивностей (2).

$$\begin{aligned} p_1(\lambda_1 + \lambda_2) &= p_2 \mu_1 + p_3 \mu_2 \\ p_2(\lambda_1 + \mu_1) &= p_1 \lambda_1 + p_4 \mu_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$p_3(\lambda_1 + \mu_2) = p_1 \lambda_2 + p_4 \mu_1$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Де p_1, p_2, p_3, p_4 ймовірності перебування системи у відповідних станах.

$$3p_1 = 2p_2 + 1p_3$$

$$4p_2 = p_1 + 1p_4$$

$$2p_3 = 2p_1 + 2p_4$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо $p_1=0,22$; $p_2=0,11$; $p_3=0,44$; $p_4=0,22$. Це означає, що в середньому 22 % часу обидві лінії працюють одночасно (стан S1), 11 % часу працює тільки друга лінія, а перша при цьому ремонтується (стан S2), 44 % часу працює тільки перша лінія, а друга при цьому ремонтується (стан S3), 22 % часу обидві лінії одночасно перебувають у стані ремонту (стан S4).

Розрахуємо прибуток, який дає система з двох ліній до початку раціоналізації за одиницю часу, позначивши як R – загальний прибуток системи, r_1 – прибуток від роботи 1-ї лінії, r_2 – прибуток від роботи 2-ї лінії.

$$R = (r_1 + r_2)p_1 + r_1p_2 + r_2p_3 \quad (3)$$

$$R=(50+100)0,2+100\cdot0,2+50\cdot0,27= 66,67 \text{ грн.}$$

Припустимо, що для раціоналізації обирається перша лінія, отже інтенсивність потоку закінчень ремонтів цієї лінії збільшується вдвічі ($\mu_1=4$), а інші інтенсивності залишаються такими самими: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\mu_2=1$. Система рівнянь Колмогорова набуває такого вигляду:

$$3p_1 = 4p_2 + 1p_3;$$

$$6p_2 = p_1 + 1p_4;$$

$$2p_3 = 2p_1 + 4p_4;$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $p_1=0,27$; $p_2=0,07$; $p_3=0,53$; $p_4=0,13$.

Прибуток розраховуємо за формулою (3):

$$R_1=(50+100)0,27+50\cdot0,53 +100\cdot0,07= 73,33 \text{ грн.}$$

Якщо ж вибрати для раціоналізації другу лінію, збільшується вдвічі інтенсивність потоку ремонтів другої лінії $\mu_2=2$; $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\mu_1=2$. Рівняння Колмогорова:

$$3p_1 = 2p_2 + 2p_3;$$

$$4p_2 = p_1 + 6p_4;$$

$$3p_3 = 2p_1 + 2p_4;$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Розв'язуємо цю систему: $p_1=0,33$ $p_2=0,17$; $p_3=0,33$; $p_4=0,17$.

$$R_2= (50+100)0,33+50\cdot0,33+100\cdot0,17 = 83,33 \text{ грн.}$$

Оскільки $R_1 < R_2$, слід застосувати раціоналізацію до другої лінії.

Розрахунки можна провести у середовищі MS Excel, використовуючи розв'язання системи рівнянь.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №2.

Розв'язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням

Мета: Навчитись розв'язувати задачі моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням.

Завдання

1) Потрібно визначити економічний розмір партії і точку замовлення.

Варіанти завдань

№ варіанта	Щодобовий попит	Витрати на розміщення замовлення	Щодобові витрати на збереження од. продукції	Термін виконання замовлення (днів)
1	80	50	0,5	15
2	100	45	0,1	23
3	90	80	0,2	8
4	95	60	0,4	10
5	110	100	1	7
6	120	90	1	11
7	80	95	0,3	20
8	110	75	0,5	9
9	90	70	0,2	24
10	95	100	0,5	22
11	120	95	1	14
12	115	110	0,8	18
13	120	110	0,7	15
14	130	95	0,6	25
15	100	80	0,5	9
16	130	110	0,4	21
17	95	80	0,5	28
18	98	88	0,2	7
19	90	90	0,7	17
20	85	80	0,6	16
21	80	70	0,8	19
22	95	90	0,6	26
23	100	95	0,4	6
24	98	75	0,5	27
25	85	80	0,6	5
26	95	75	0,8	30
27	80	75	0,5	28
28	90	85	0,3	29
29	100	95	0,4	31
30	110	100	0,5	34

2) Визначити точку замовлення, якщо щоденний попит описується нормальним розподілом з середнім 100 одиниць, а середньоквадратичне відхилення та ймовірність дефіциту задані у таблиці.

Варіанти завдань

Номер варіанту	Середньоквадрати чне відхилення	Ймовірніс ть дефіциту, %
1	30	2
2	20	3
3	25	4
4	25	5
5	10	6
6	30	7
7	25	8
8	20	2
9	10	3
10	25	4
11	25	5
12	30	6
13	10	7
14	25	8
15	20	9
16	15	2
17	15	3
18	15	4
19	10	5
20	20	4
21	10	3
22	10	2
23	20	7
24	25	6
25	20	5
26	25	4
27	30	3
28	25	2
29	30	4
30	25	3

Виконання завдання

1) Потрібно визначити економічний розмір партії і точку замовлення, якщо термін виконання замовлення – 13 діб а щодобовий попит на товар складає $\beta=100$ одиниць. Витрати на розміщення кожного замовлення постійні і дорівнюють

$k=100$ у.о. Щодобові витрати на збереження одиниці замовлення складають $h=0,02$ у.о.

За формулою Уілсона отримуємо

$$y^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 100}{0.02}} = 1000 (\text{одиниць})$$

Відповідний оптимальний термін циклу складає

$$t_0^* = \frac{y^*}{\beta} = \frac{1000}{100} = 10 (\text{днів})$$

Оскільки термін виконання замовлення складає 13 днів, а довжина циклу складає 10 днів, оновлення замовлення відбувається, коли рівень запасу достатній для задоволення попиту на три дні (13-10). Таким чином, замовлення у розмірі 1000 одиниць розміщується, коли запас досягає значення $100 \times 3 = 300$ одиниць.

2) Визначити точку замовлення, яка забезпечувала б ймовірність дефіциту на рівні менше 2%, якщо попит являє собою нормальний розподіл з середнім, рівним 220, та середньоквадратичним відхиленням, рівним 50.

На рис.4 показаний розподіл попиту протягом циклу замовлення. Розподіл – нормальний, з середнім $\mu=220$ та середньоквадратичним відхиленням $\sigma=50$. За точкою x знаходиться лише 2% попиту, і ділянка на графіку показує ймовірність (2%) вище значення x . Це значення і є ідеальною точкою замовлення, оскільки попит перевищує його лише у 2% випадків.

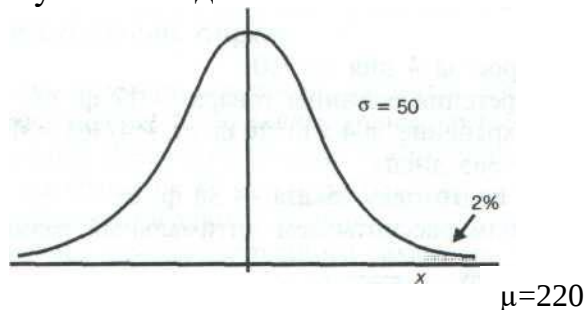


Рис.4. Графік нормального розподілу

За статистичною таблицею нормального розподілу (Додаток 1) знаходимо, що при значенні ймовірності, яка дорівнює 0,02018, $z=2,05$:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 220}{50} = 2.05.$$

$$\text{Отже, } x = 50 \times 2,05 + 220 = 322,5.$$

Таким чином, якщо точка замовлення дорівнює 323, то забезпечується ймовірність дефіциту менше ніж 2%.

**Статистична таблиця значень заштрихованої частини графіка
нормального розподілу при $\mu=0$**

<i>X</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,02275	0,02222	0,02169	0,02118	0,02068	0,02018	0,01970	0,01923	0,01876	0,01831
2,1	0,01786	0,01743	0,01700	0,01659	0,01618	0,01578	0,01539	0,01500	0,01463	0,01426
2,2	0,01390	0,01355	0,01321	0,01287	0,01255	0,01222	0,01191	0,01160	0,01130	0,01101
2,3	0,01072	0,01044	0,01017	0,00990	0,00964	0,00939	0,00914	0,00889	0,00866	0,00842
2,4	0,00820	0,00798	0,00776	0,00755	0,00734	0,00714	0,00695	0,00676	0,00657	0,00639
2,5	0,00621	0,00604	0,00587	0,00570	0,00554	0,00539	0,00523	0,00508	0,00494	0,00480
2,6	0,00466	0,00453	0,00440	0,00427	0,00415	0,00402	0,00391	0,00379	0,00368	0,00357
2,7	0,00347	0,00336	0,00326	0,00317	0,00307	0,00298	0,00289	0,00280	0,00272	0,00264
2,8	0,00256	0,00248	0,00240	0,00233	0,00226	0,00219	0,00212	0,00205	0,00199	0,00193
2,9	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00164	0,00159	0,00154	0,00149	0,00144	0,00139

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3.

Розв'язання задач моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням

Мета: навчитись розв'язувати задачі моделювання систем організації виробництва за допомогою теорії систем масового обслуговування з очікуванням

Завдання 2

Деяка ділянка випускає за одну годину 100 виробів, тобто інтенсивність потоку $\lambda = 1,7$ виробів за 1 хв. На цій ділянці працює 2 контрольні прилади, які вибірково перевіряють виготовлені вироби з інтенсивністю 0,5 кожний. Якщо в момент надходження чергового виробу контрольний прилад зайнятий, то цей виріб відразу передається на подальші операції без проміжного контролю. Виробництво неперервне і продовжується до знаходження дефекту в одному з виробів. У цьому випадку виробничий процес зупиняється і з'ясовуються причини браку.

Слід визначити, яка частина вироблюваної продукції за таких умов підлягає контролю і яка частина пропускається на подальші операції без контролю (тобто, яка частина отримує відмову від проходження контрольних операцій).

Варіанти завдань

№ варі-анта	1	2	3	4	5	6	7	8
λ	2,6	3,5	2,78	1,89	1,75	1,8	2,85	3,9
μ	0,9	1,15	0,86	0,5	0,45	0,6	0,76	1,56
№ варі-анта	9	10	11	12	13	14	15	16
λ	1,8	2,34	2,54	1,45	1,67	2,76	3,65	2,35
μ	0,56	0,86	0,76	0,39	0,94	1,47	1,46	0,76
№ варі-анта	17	18	19	20	21	22	23	24
λ	2,56	3,47	2,78	2,9	2,76	3,54	2,74	2,85
μ	0,85	1,28	0,46	1,14	1,73	1,95	0,96	1,45

Виконання завдання

Система належить до типу двоканальної системи масового обслуговування з відмовами (рис.2).

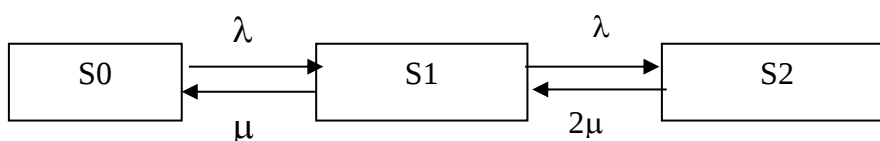


Рис.2. Граф двоканальної системи масового обслуговування

Стан S_0 – обидва канали вільні, стан S_1 – в СМО є одне замовлення і один канал зайнятий, а другий вільний, стан S_2 – обидва канали зайняті обслуговуванням замовлень і наступним замовленням буде даватися відмова. Зі стану S_0 у стан S_1 систему переводить потік замовлень інтенсивністю λ . Як тільки надходить перше замовлення, один канал стає зайнятим, той самий потік інтенсивністю λ переводить СМО з першого стану у другий, коли зайняті обидва канали.

Якщо у системі зайнятий один канал (стан S_1), то цей канал здійснює μ обслуговувань за одиницю часу, якщо система перебуває у стані S_2 , тобто в ній працюють два канали, сумарна інтенсивність потоку обслуговування дорівнюватиме 2μ .

Для стану S_0 баланс дій

$$\lambda p_0 = \mu p_1. \quad (4)$$

Звідси отримуємо:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0. \quad (5)$$

Для стану S_1 баланс дій визначається:

$$\lambda p_1 + \mu p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2.$$

З урахуванням того, що $\mu p_1 = \lambda p_0$ (з рівняння 4), отримуємо

$$2\mu p_2 = \lambda p_1,$$

або інакше:

$$p_2 = p_1 \frac{\lambda}{2\mu} = p_0 \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \frac{\lambda^2}{2\mu^2}. \quad (6)$$

Оскільки сума усіх ймовірностей має дорівнювати 1, отримуємо

$$p_0 + p_0 \frac{\lambda}{\mu} + p_0 \frac{\lambda^2}{2\mu^2} = 1$$

Звідси витікає:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}} \quad (7)$$

Відносна пропускна здатність q визначається ймовірністю того, що в момент надходження замовлення канал вільний, і воно буде обслуговуватись, тобто для двоканальної системи:

$$q = p_0 + p_1 = 0,43.$$

Ймовірність отримання відмови, тобто спрямування на подальшу обробку без контролю – p_2 . Отже,

$$P_{\text{відмови}} = p_2 = 1 - q \quad (8)$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні

$$P_{\text{відм}} = 0,57.$$

Середня кількість зайнятих каналів $N = \lambda \cdot q / \mu = 1,46$.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4.

Детерміновані моделі систем управління запасами з розривами цін

Мета: навчитись розв'язувати детерміновані та ймовірнісні моделі систем управління однопродуктовими запасами однопродуктову статичну модель з розривами цін за умовою: витрати на оформлення замовлення

Завдання 1

Побудувати однопродуктову статичну модель з розривами цін за умовою: витрати на оформлення замовлення K , витрати на збереження одиниці замовлення в одиницю часу $h=1$ у.о., інтенсивність попиту в одиницю часу β одиниць, ціна одиниці продукції $c_1=3$ у.о. при $y < q$, $c_2=2$ у.о. при $y \geq q$, де q – розмір замовлення, при якому отримується знижка.

Визначити y^* та сумарні витрати за цикл для значень q , K , h , β , заданих таблицею

Варіанти завдань

варіант	q	K	h	β
1	30	10	1	3
2	5	8	2	5
3	29	7	3	4
4	4	8	1	6
5	6	9	2	5
6	28	10	1	7
7	11	10	3	6
8	20	8	1	5
9	7	8	4	5
10	17	5	2	4
11	27	7	3	6
12	26	10	1	7
13	16	6	5	8
14	31	15	3	5
15	8	5	2	6
16	15	10	2	4
17	18	9	4	5
18	19	8	2	5
19	21	6	3	6
20	22	10	4	5
21	9	13	1	7
22	12	11	5	8
23	33	10	2	6
24	32	8	3	7
25	14	9	4	6
26	13	10	2	5
27	34	8	2	5
28	35	9	2	6
29	24	7	3	6
30	36	9	3	7

Виконання завдання 1

Побудувати однопродуктову статичну модель з розривами цін за умовою: витрати на оформлення замовлення $k = 10$ у.о, витрати на збереження одиниці замовлення в одиницю часу $h=1$ у.о., інтенсивність попиту в одиницю часу $\beta = 5$ одиниць, ціна одиниці продукції $C_1 = 2$ у.о. при $y < q$, $C_2 = 1$ у.о. при $y \geq q$, де q – розмір замовлення, при якому отримується знижка $q = 17$ од.

Визначити оптимальний рівень замовлення y^* та сумарні витрати за цикл.

Алгоритм визначення y^*

1. Визначити оптимальний рівень замовлення за формулою Уилсона:

$$y_m = \sqrt{\frac{2k\beta}{h}}. \quad (14)$$

Якщо $q < y_m$, то q належить зоні 1 (рис.5.), то оптимальний розмір замовлення прийняти $y^* = y_m$ і закінчити обчислення.

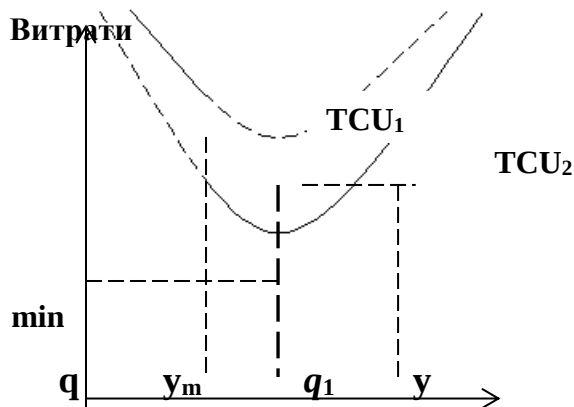


Рис.5. $q - y$ 1-й зоні.

Інакше, якщо $q \geq y_m$, то перейти до п.2.

2. Визначити q_1 з рівняння $TCU_1(y_m) = TCU_2(q_1)$ і встановити, у якій зоні знаходиться величина q .

Якщо $y_m \leq q \leq q_1$ (рис. 6), то оптимальний рівень замовлення прийняти $y^* = q$.

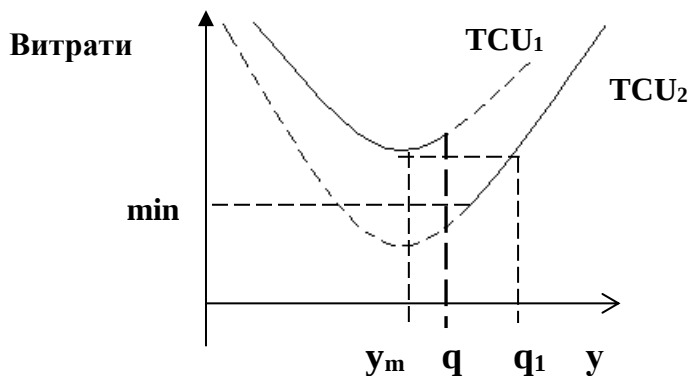


Рис. 6. $q - y$ 2-й зоні, $y^* = q$

3. Якщо $q \geq q_1$ (рис.7), то оптимальний рівень замовлення прийняти $y^* = y_m$.

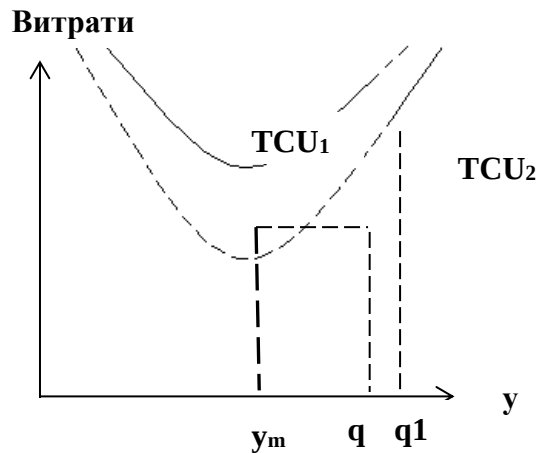


Рис. 7. $q - y$ 3-й зоні, $y^* = y_m$

Проводимо розрахунки за алгоритмом.

$$y_m = \sqrt{\frac{2k\beta}{h}} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 5} = 10(\text{од.})$$

Оскільки $q > y_m$, необхідно визначити, де знаходиться q : в зоні 2 або 3. Значення q_1 обчислюється з рівняння:

$$TCU_1(y_m) = TCU_2(q_1) \quad (15)$$

або

$$C_1\beta + k\beta/y_m + hy_m/2 = C_2\beta + k\beta/q_1 + hq_1/2.$$

В результаті підстановки отримуємо:

$$2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 / 10 + 1 \cdot 10 / 2 = 1 \cdot 5 + 10 \cdot 5 / q_1 + 1 \cdot q_1 / 2,$$

або

$$q_1^2 - 30q_1 + 100 = 0.$$

Розв'язання рівняння: $q_1 = 26,18$ або $q_1 = 3,82$. Вибираємо більше значення $q = 26,18$, тому що $q > y_m$. Оскільки отримане значення відповідає умові $y_m < q < q_1$, то величина q знаходиться у другій зоні. Отже, оптимальний рівень замовлення $y^* = q = 17$.

Сумарні витрати за одиницю часу визначаються так: $TCU(y^*) = TCU_2(17) = C_2\beta + k\beta/17 + h \cdot 17/2 = 1 \cdot 5 + 10 \cdot 5 / 17 + 1 \cdot 17 / 2 = 20$ (у.о./день).

Практична робота № 5.

Економетрична модель з двома змінними

Згідно з вибіркою статистичних даних побудувати лінійну модель залежності Y від X виду: $Y = a_0 + a_1 \cdot X$.

Мета роботи: визначити аналітичну залежність між дослідними даними із застосуванням методу найменших квадратів (знайти параметри моделі);

1. Основні положення теми

Серед багаточисленних зав'язків між економічними показниками завжди можна виділити такий показник, вплив якого на результативну ознаку є основним, найбільш важливим. Щоб виміряти цей зв'язок кількісно, необхідно побудувати економетричну модель з двома змінними (просту модель). Загальний вигляд такої моделі:

$$Y = f(X, u),$$

де Y — залежна змінна (результативна ознака); X — незалежна змінна (фактор); u — стохастична складова.

Аналітична форма цієї моделі може бути різною залежно від економічної сутності зв'язків. Найбільш поширені форми залежностей:

$$Y = a_0 + a_1 X;$$

$$Y = a_0 e^{a_1 X};$$

$$Y = a_0 X^{a_1};$$

$$Y = a_0 + \frac{a_1}{X},$$

де a_0, a_1 — невідомі параметри моделі.

Неважко переконатись, що наведені нелінійні форми залежностей за допомогою елементарних перетворень приводяться до лінійних. Якщо припустити, що економетрична модель з двома змінними є лінійною:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

в якій стохастична складова (залишки) має нульове математичне сподівання та постійну дисперсію, то параметри моделі можна оцінити на основі звичайного методу найменших квадратів (1МНК). В основі методу 1МНК лежить принцип мінімізації суми квадратів залишків моделі. Реалізація цього принципу дає можливість отримати систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} na_0 + \sum_i x_i a_1 = \sum_i y_i \\ \sum_i x_i a_0 + \sum_i x_i^2 a_1 = \sum_i x_i y_i \end{cases}$$

В даній системі n — кількість спостережень, $\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i x_i y_i$ — величини, які можна розрахувати на основі вихідних спостережень над змінними Y і X .

Розв'язавши систему нормальних рівнянь, одержимо оцінки невідомих параметрів моделі $\hat{a}_0$ і $\hat{a}_1$:

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X.$$

Достовірність побудованої економетричної моделі можна перевірити, користуючись елементами дисперсійного аналізу. Перш за все слід розрахувати залишки моделі

$$u_i = y_i - \hat{y}_i$$

та знайти їх дисперсію:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_i u_i^2}{n-m},$$

де m — кількість змінних моделі ($m=2$).

$$S\hat{a}_j = \sigma_u \sqrt{c_{jj}}$$

необхідно визначити стандартну помилку кожного параметра моделі. c_{jj} в цій формулі характеризує відповідний діагональний елемент матриці помилок (матриці, оберненої до матриці системи нормальних рівнянь).

На основі коефіцієнта детермінації

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2}$$

можна зробити висновок про ступінь значущості вимірюваного зв'язку на основі економетричної моделі

$$R^2 \in]0,1[.$$

Оскільки коефіцієнт детермінації R^2 характеризує, якою мірою варіація залежної змінної визначається варіацією незалежної змінної, то чим ближче R^2 до одиниці, тим суттєвішим є зв'язок між цими змінними. Коефіцієнт кореляції $R = \sqrt{R^2}$ характеризує тісноту зв'язку між змінними моделі. Він може

знаходиться на множині $R \in]-1,1[$. Чим ближче R до одиниці по модулю, тим тіснішим є зв'язок. Від'ємний знак свідчить про обернений зв'язок, додатний — про прямий.

Якщо прийняти відповідну гіпотезу про закон розподілу залишків економетричної моделі, то параметри її можна оцінити на основі метода максимальної правдоподібності.

Нехай залишки моделі розподіляються за нормальним законом, тоді функція правдоподібності запишеться так:

$$F = \frac{1}{(\tilde{\sigma}_u^2 2\pi)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2 \right]$$

$$\ln F = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \tilde{\sigma}_u^2 - \frac{1}{2\tilde{\sigma}_u^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2$$

Продиференціюємо цю функцію за невідомими параметрами $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ і $\tilde{\sigma}_u^2$ і, прирівнявши похідні до нуля, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} n\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \sum_i x_i = \sum_i y_i \\ \sum_i x_i \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i y_i \\ \frac{1}{n} \sum_i (y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i)^2 = \tilde{\sigma}_u^2 \end{cases}$$

Підставимо в цю систему величини $\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i x_i y_i$, які розраховуються на основі вихідних даних, і розв'яжемо її відносно параметрів $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$ і $\tilde{\sigma}_u^2$. В результаті отримаємо оцінки параметрів моделі $\tilde{a}_0$ і $\tilde{a}_1$, а також оцінку дисперсії залишків.

2. Економетрична модель з двома змінними: побудова та аналіз

Приклад 1. На основі даних про роздрібний товарообіг і доходи населення побудувати економетричну модель роздрібного товарообігу. Дати загальну характеристику достовірності моделі та зробити висновки.

Вихідні дані та елементарні перетворення цих даних для побудови моделі наведені в табл. 1.

Таблиця 1

N п/п	Y	X	X^2	XY	$\hat{Y}$	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X - \bar{X})^2$	$(X - \bar{X})^*$ $(Y - \bar{Y})$	$u = Y - \hat{Y}$	u^2	$(Y - \bar{Y})^2$
1	17	18	324	306	16.67	-6.5	-5	42.25	32.5	0.33	0.1089	25
2	18	20	400	360	18.31	-4.5	-4	20.25	18.0	-0.31	0.0961	16
3	19	21	441	399	19.31	-3.5	-3	12.25	10.5	-0.13	0.0169	9
5	21	24	576	504	21.59	-0.5	-1	0.25	0.5	-0.59	0.3481	1
6	23	25	625	575	22.41	0.5	1	0.25	0.5	0.59	0.3481	1
7	24	27	729	648	24.05	2.5	2	6.25	5.0	-0.05	0.0125	4
8	25	28	784	700	24.87	3.5	3	12.25	10.5	0.13	0.0169	9
9	26	29	841	754	25.69	4.5	4	20.25	18.0	0.31	0.0961	16
10	27	31	961	837	27.33	6.5	5	42.25	32.5	-0.33	0.1089	25
$\sum_{i=1}^{10}$	220	245	6165	5523	-----	-----	--	162.5	133.	-----	1.145	110

Розв'язання:

1. Ідентифікуємо змінні:

Y — роздрібний товарообіг (залежна змінна);

X — доходи населення (незалежна змінна).

2. Нехай специфікація моделі $Y = f(X, u)$ визначається лінійною функцією; вона має такий вигляд:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

де a_0, a_1 — параметри моделі;

u — стохастична складова, залишки.

3. Оцінимо параметри моделі $\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X$ за методом 1МНК. Для цього запишемо систему нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \sum_i x_i \hat{a}_1 = \sum_i y_i & (i = \overline{1, n}); \\ \sum_i x_i \hat{a}_0 + \sum_i x_i^2 \hat{a}_1 = \sum_i x_i y_i & (i = \overline{1, n}); \end{cases}$$

$n = 10$ — кількість спостережень.

Підставимо в цю систему величини n , $\sum_i x_i$, $\sum_i y_i$, $\sum_i x_i^2$, $\sum_i x_i y_i$, які розраховані на основі вихідних даних табл. 1.1; тоді система набуде такого вигляду:

$$\begin{cases} 10\hat{a}_0 + 245\hat{a}_1 = 220 \\ 245\hat{a}_0 + 6165\hat{a}_1 = 5523 \end{cases}.$$

Розв'яжемо цю систему відносно невідомих параметрів $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$.

$$\begin{array}{r} + \begin{cases} -245 \hat{a}_0 - 6002,5 \hat{a}_1 = -5390 \\ 245 \hat{a}_0 + 6165 \hat{a}_1 = 5523 \end{cases} \\ \hline 162,5 \hat{a}_1 = 133 \\ \hat{a}_1 = 0,82; \\ \hat{a}_0 = \frac{220 - 0,82 \cdot 245}{10} = \frac{220 - 200,9}{10} = 1,91. \end{array}$$

Таким чином, економетрична модель запишеться так:

$$\hat{Y} = 1,91 + 0,82X.$$

4. Знайшовши відхилення кожної змінної від своєї середньої арифметичної, розрахуємо параметри моделі альтернативним способом:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} = \frac{133}{162,5} = 0,82;$$

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x} = 22 - 0,82 \cdot 24,5 = 22 - 20,9 = 1,91.$$

5. Розрахуємо дисперсії залежної змінної та залишків:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{110}{9} = 12,2;$$

$$\sigma_U^2 = \frac{\sum_i u_i^2}{n-2} = \frac{1,145}{8} = 0,14.$$

6. Визначимо коефіцієнти детермінації та кореляції:

$$R^2 = \frac{\sigma_Y^2 - \sigma_u^2}{\sigma_Y^2} = \frac{12,2 - 0,14}{12,2} \approx 0,99;$$

$$R = \sqrt{R^2} = \sqrt{0,99} = 0,994.$$

Оскільки коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,99$, це свідчить, що варіація обсягу роздрібного товарообігу на **99%** визначається варіацією доходів

населення. Коефіцієнт кореляції $R=0,994$ характеризує тісний зв'язок між цими соціально-економічними показниками. Величини R^2 і R для парної економетричної моделі свідчать про її достовірність, якщо вони наближаються до одиниці.

7. Знайдемо матрицю помилок C (матрицю, обернену до матриці системи нормальних рівнянь):

$$\begin{pmatrix} 10 & 245 \\ 245 & 6165 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 245 & 1 & 0 \\ 245 & 6165 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3,79 & -0,15 \\ 0 & 1 & -0,15 & 0,006 \end{array} \right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 3,79 & -0,15 \\ -0,15 & 0,006 \end{pmatrix} \text{ — матриця помилок.}$$

8. Визначимо стандартні помилки оцінок параметрів моделі, враховуючи дисперсію залишків:

$$S_{\hat{a}_0} = \sqrt{\sigma_u^2 * c_{00}} = \sqrt{0,14 * 3,79} = \sqrt{0,53} = 0,73 ;$$

$$S_{\hat{a}_1} = \sqrt{\sigma_u^2 * c_{11}} = \sqrt{0,14 * 0,006} = \sqrt{0,0008} = 0,028$$

Порівняємо стандартні помилки оцінок параметрів моделі з величиною цих оцінок. В результаті визначимо, що стандартна помилка оцінки параметра $\hat{a}_1$ становить **3,4%** абсолютного значення цієї оцінки (**0,82**), що свідчить про незміщеність даної оцінки параметра моделі. Стандартна помилка оцінки параметра $\hat{a}_0$ становить **38%** абсолютного значення цієї оцінки (**1,91**), а це означає, що даний параметр може мати зміщення, яке зумовлюється невеликою сукупністю спостережень (**n = 10**).

9. Висновки. Економетрична модель $\hat{Y} = 1,91 + 0,82X$ кількісно описує зв'язок роздрібного товарообігу і доходів населення.

Параметр $\hat{a}_1 = 0,82$ характеризує граничну величину витрат на купівлю товарів у роздрібній торгівлі, коли дохід збільшується на одиницю, тобто при збільшенні доходів на одиницю обсяг роздрібного товарообігу зростає на **0,82**

одиниці $\left(\hat{a}_1 = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} \right)$.

Визначимо коефіцієнт еластичності роздрібного товарообігу залежно від доходів населення:

$$E_{Y/X} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} : \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0,82 : \frac{2,0}{24,5} = 0,82 : 0,898 = 0,91 .$$

На основі коефіцієнта еластичності можна стверджувати, що при збільшенні доходів населення на один процент роздрібний товарообіг зросте на **0,91%**.

3. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. На основі даних вибірки побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між Y та X. Проаналізувати достовірність моделі та її параметрів. Зробити висновки. Вихідні дані наведені в табл. Варіант 1-30.

Варіант 1

Y	X
12,3	9,6
14,7	8,1
15,8	6,3
16,3	5,5
17,1	4,1
20,9	2,8
21,4	1,6
22,8	0,9
23,9	0,8
24,1	0,4

Варіант 2

Y	X
16,1	12,2
16,3	10
17,8	8,1
17,6	8
18,5	7,6
18,9	7,4
20,1	6,1
24,3	5,3
25,8	2,7
26,7	2,6

Варіант 3

Y	X
12,7	12,4
12,9	10,3
13,3	10,1
14,7	8,4
16,9	6,3
20,1	6,2
23,4	5,4
24,5	5,3
28,4	5
30,7	4,8

Варіант 4

Y	X
15,8	12,3
19,4	12
20,3	6,1
27,8	6,2
29,3	5,1
24,4	4,3
31,3	3,8
32,8	3
32,9	2,7
34,7	2,5

Варіант 5

Y	X
16,9	19,3
17,7	18,7
18,3	8,9
18,4	6,3
19,7	6
20,8	5,5
21,3	4
22,9	2,9
25,4	1,3
26,9	0,7

Варіант 6

Y	X
10,9	12,4
11,3	10,1
12,8	8,4
13,8	6
14,9	7,9
15,6	5,4
18,1	6,1
19,4	3,1
19	3
21,3	2,1

Варіант 7

Y	X
16,3	10,3
16,7	8,1
18,1	6,4
18,9	5
19,3	4,1
20,4	3,3
21,5	3,3
24,6	2,7
27,8	2,1
27,9	0,9

Варіант 8

Y	X
16,7	15,1
17,3	14
18,4	12,4
19,5	9,3
20,3	8,6
21,4	5,1
25,5	3,3
26,9	3,2
27,8	4
30,1	2,1

Варіант 9

Y	X
15,9	6,3
16,1	6
17,4	6,1
18,3	5,5
18,9	5
20,4	4,3
21,3	4
22,8	4
23,4	3,5
25,7	3,1

**Варіант
10**

Y	X
12,8	6,3
12,9	5,1
13,1	5
14,4	4,2
15,8	3,3
16,3	2,1
17,9	2
18,1	1,9
19,3	1,7
20,4	1,1

**Варіант
11**

Y	X
10,4	12,7
11,5	11,8
12,7	10,3
13,8	9,1
14,3	9
14,9	8,5
15,1	7,4
16,3	7
17,9	6,3
18,4	5,1

**Варіант
12**

Y	X
10,7	9,1
11,8	8,6
13,8	8,6
14,9	8
15,1	7,4
16,3	7,1
17,1	6,9
18,7	6,2
18,9	5,3
19,3	4,2

**Варіант
13**

Y	X
15,6	12,3
15,8	10,1
16,3	8,7
16,9	6,5
20,1	3,1
21,3	2
24,9	2,1
25,8	1,5
26,9	1,4
27,3	0,9

**Варіант
14**

Y	X
12,3	12,3
12,5	10,1
13,7	8,8
13,9	7,3
14,7	6,9
15,1	5,1
16,3	4
17,4	4,1
18,1	3,2
18,9	3,1

**Варіант
15**

Y	X
12,3	6,3
12,9	6
13,4	6
14,7	5,8
15,1	5,3
16,9	5,1
17,3	5
18,7	4,1
19,8	3,2
20,1	2,7

**Варіант
16**

Y	X
10,3	6,7
10,9	6,5
11,7	6
12,8	5,9
13,9	4,1
14,7	4
15,1	3,8
16,9	2,7
21,9	1,9
18,7	0,8

**Варіант
17**

Y	X
15,1	10,7
15	8,1
15,6	8
15,9	6,7
16,1	6,6
16,3	7
17,8	6,5
17	6
9	5,1
18,4	4,3

**Варіант
18**

Y	X
12,7	10
12,8	9,1
12	8,7
13,9	8,8
14,1	8,6
15,8	7,1
16,1	6,3
17,3	5,1
18,9	4,2
18,9	2,8

**Варіант
19**

Y	X
20,8	5,1
21,9	5
21,9	4,9
23,4	4,9
25,7	3,1
26,8	3
27,1	2,8
28,1	2,1
30,3	1,8
31,4	0,9

**Варіант
20**

Y	X
6,9	10,1
10,3	9,4
12,5	6,5
12,4	5,1
13,7	4
16,8	4,2
19,3	3,1
20,1	2,8
21,7	2
25,8	1,9

**Варіант
21**

Y	X
19,8	10,5
20,3	9,4
21,4	8,3
22,9	6,1
24,6	5,4
27,8	2,2
29,3	2
30,1	1,9
33,4	0,7
35,8	0,6

**Варіант
22**

Y	X
5,6	7,9
5,6	7,8
5,8	7,6
5,9	6,1
6,7	6
7,9	5,8
8,3	5,5
8,7	5,4
10,1	4,1
15,4	4

**Варіант
23**

Y	X
15,6	9,1
15,8	9
16,1	7,1
18,4	7
18	6,8
19,1	6,3
20,3	6,3
21,7	6
29,8	6,1
30,3	5,8

**Варіант
24**

Y	X
10,7	6,1
10	6
10,9	7
11,5	6,3
11,9	5,8
11	5,7
13	6
13,7	5,4
14,1	5,1
14,8	5

**Варіант
25**

Y	X
10,1	6,7
10	5,1
10,7	6,9
11,3	6,9
11,8	5,4
12,4	7,1
15,7	6,3
15,8	6,5
16,1	6,1
16	5,8

**Варіант
26**

Y	X
12,9	3,3
12	3
12,7	3,1
13,4	3,1
14,7	2,8
15,1	2,5
15,8	2,3
16,3	2,1
17,4	2
18,1	1,5

**Варіант
27**

Y	X
15,4	7,7
15,6	7
16,1	7,9
17,3	7,1
17,5	6,8
18,1	5,3
18,6	5,1
18,9	4,2
20,3	2
21,4	1,9

**Варіант
28**

Y	X
19,1	7,3
19,3	7
19	7,1
19,4	6,9
20,5	6,5
21,6	5,5
22,8	5,7
23,7	5
24,1	4,1
25,6	3,1

**Варіант
29**

Y	X
18,1	4,5
18	4
17,6	4,1
18,4	4,6
19,1	3,7
19,9	3,1
20,1	3
20,3	2,8
21,4	2,5
22,5	2

**Варіант
30**

Y	X
13,1	8,3
13,4	8
13	8,7
12,8	8,1
14,5	7,5
14,8	6,5
15,1	6
15,4	5,9
15,9	5,4
16,3	5,1

Практична робота № 6.

Задача оптимального використання ресурсів

Основні теоретичні відомості

Загальна модель задачі лінійного програмування повинна відповідати наступним вимогам:

1) Модель повинна мати лінійну цільову функцію, екстремальне значення якої знаходиться у процесі рішення задачі.

2) Математичні рівняння та тотожності, які входять до складу моделі повинні теж бути лінійними (тобто невідомі змінні, які входять в модель можуть мати тільки першу ступінь).

3) Змінні, які входять в модель не можуть бути від'ємними.

Модель записується у такому виді:

I. Цільова функція (критерій оптимальності)

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_j x_j \rightarrow \max(\min) \quad (2.1)$$

$$\text{або: } F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min), \quad j=1, \dots, n$$

c_j – коефіцієнти при невідомих шуканих змінних x_j в цільовій функції (оптові ціни за одиницю продукції; собівартість одиниці продукції; питомий прибуток окремих видів продукції; питома рентабельність окремих видів продукції).

x_j – шукані змінні більшою частиною означають обсяги випуску j виду продукції;

j – види продукції.

II. Система обмежень.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3j}x_j + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (2.2.)$$

$$m \succ n$$

a_{ij} – коефіцієнти при невідомих змінних x_j в рівняннях та тотожностях (можуть бути: норми витрат сировини, матеріалів на одиницю продукції; оптові ціни за одиницю продукції та ін.);

x_j – невідомі змінні;

b_j – рівень обмежень у рівняннях та тотожностях (рівень ресурсів: матеріальних, сировинних, трудових і т.д.).

$$x_j \geq 0 \quad (j=1, 2, \dots, n)$$

До методів вирішення задач ЛП відносяться **симплекс-метод, графічний метод.**

Як правило, задачу зводять до канонічної форми. Вважають, що задача лінійного програмування записана в канонічній формі, якщо вона має вигляд

[illegible]

Щоб перевести задачу лінійного програмування з загальної форми (2.1–2.2) до канонічної форми (2.3) необхідно зробити такі кроки.

1-й крок. До кожної лівої частини нерівностей (2.2) додаємо нову невід'ємну невідому змінну x_{n+i} ($i = 1, 2, \dots, l-k$), яка дорівнює:

$$x_{n+i} = b_{k+i} - (a_{k+i,1}x_1 + a_{k+i,2}x_2 + \dots + a_{k+i,n}x_n)$$

або:

$$x_{n+i} = (a_{k+i,1}x_1 + a_{k+i,2}x_2 + \dots + a_{k+i,n}x_n) - b_{k+i}$$

Тоді група нерівностей (2.2) перетвориться на рівняння.

Введені нові змінні, $x_{n+i}, \dots, x_{m-k}$ будемо вважати базовими, а змінні $x_1, \dots, x_n$ — вільними.

Дістаємо однорідну систему основних обмежень задачі:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,n}x_n + x_{n+1} &= b_{k+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \dots + a_{ln}x_n + x_{n+l-k} &= b_l, \\ a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + \dots + a_{l+1,n}x_n - x_{n+l-k+1} &= b_{l+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m-k} &= b_m. \end{aligned}$$

2-й крок полягає у зведенні до однорідної системи обмежень на знак. Умови недостатності легко перетворюються в умови невід'ємності за допомогою заміни змінних

$$x'_j = -x_j \geq 0 \quad (j=r+1, \dots, s)$$

Змінну, на знак якої не накладено обмежень, подають у вигляді різниці двох невід'ємних змінних:

$$x_j = x_j'' - x_j', \quad \text{де } x_j'' \geq 0; \quad x_j' \geq 0 \quad (j=s+1, t)$$

Ранг сумісної системи обмежень (1.3) r можна вважати таким, що дорівнює m , оскільки в іншому разі частину, а саме $m - r = k$ рівнянь треба було б відкинути, бо вони були б лінійними комбінаціями r базових рівнянь. Однак на практиці

інколи такі зайві рівняння можуть включати в систему обмежень на стадії формування реальної задачі. Такі обмеження називають *неістотними* і їх відкидають, що звичайно відбувається при побудові довільного базового розв'язку системи рівнянь. Отже, знайти множину планів задачі – означає знайти множину невід'ємних розв'язків системи лінійних рівнянь.

Означення. Задачу лінійного програмування вважають записаною у *канонічній формі*, якщо вона задовольняє такі умови:

1. Система обмежень зведена до системи рівнянь виду (2.3).

2. Система рівнянь зображена в такому вигляді, де кожна базова невідома входить тільки в одне рівняння системи з коефіцієнтом рівним одиниці, при чому немає рівнянь, в які не входила хоча б одна базова невідома. Якщо деякі рівняння системи поміняти місцями так, щоб нумерація базових невідомих була строго зростаючою, то базовий мінор в цьому випадку складає одиничну матрицю.

3. Вільні члени системи обмежень невід'ємні;

4. Оптимізуюча форма залежить тільки від вільних невідомих.

Отже, для того, щоб задачу лінійного програмування можна було розв'язувати симплексним методом потрібно **загальну форму** (2.1–2.2) **звести до канонічної форми**. Іншими словами її потрібно певним способом записати в такій формі, щоб система рівнянь була з базисом.

$$z = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots + \gamma_k x_k \rightarrow \max(\min) \quad (2.4)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + x_{k+1} = \beta_1,$$

.....

$$a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sk}x_k + x_{k+s} = \beta_s, \quad (2.5)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Для того, щоби базовий план системи обмежень (2.4) був *опорним*, необхідно і достатньо, щоб всі вільні члени (2.5) були невід'ємні. Отже, для зведення задачі до канонічної форми потрібно так підібрати базові невідомі, щоб у загальному розв'язку системи обмежень не було від'ємних вільних членів.

Приклад.

Для виготовлення двох видів продукції **А і В** використовують три види сировини: **І, II та III.**

На виробництво одинці продукції А знадобиться витратити:

сировини I виду – 15 кг,

сировини II виду – 12 кг,

сировини III виду – 3 кг.

На виробництво одиниці продукції В знадобиться витратити:

сировини I виду – 2 кг,

сировини II виду – 6 кг,

сировини III виду – 12 кг.

Запаси сировини:

I виду – 300 кг,

II виду – 306 кг,

III виду – 360 кг

Прибуток від реалізації одиниці продукції виду А становить 9 грн., виду В – 6 грн.

Скласти план виробництва продукції, який забезпечить максимальний прибуток від реалізації при наявності даних запасів сировини.

Розв'язування

Позначимо кількість виготовленої продукції першого виду А через x_1 , другого – x_2 . Враховуючи витрати сировини I, II та III виду на виготовлення одиниці продукції видів А та В, а також обмежені запаси сировини, запишемо систему обмежень (6.1). Прибуток, одержаний з виготовлення продукції у вигляді функції мети (6.2).

$$\begin{aligned}15x_1 + 2x_2 &\leq 300 \\12x_1 + 6x_2 &\leq 306 \\3x_1 + 12x_2 &\leq 360\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$f = 9x_1 + 6x_2 \rightarrow \max\tag{2.7}$$

Зведемо задачу лінійного програмування (2.6, 2.7) до канонічної форми додавши невідомі x_3 , x_4 та x_5 до лівої сторони двох нерівностей відповідно:

$$\begin{aligned}15x_1 + 2x_2 + x_3 &= 300 \\12x_1 + 6x_2 + x_4 &= 306 \\3x_1 + 12x_2 + x_5 &= 360 \\x_1 &\geq 0 \\x_2 &\geq 0\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\max f = -\min F = 9x_1 + 6x_2;$$

$$\min F = -9x_1 - 6x_2.$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гаусса-Джордана, тому запишемо систему обмежень (2.8) у вигляді початкової розрахункової таблиці, яку назовемо **ітерацією 1**.

Для знаходження початкового базового плану розділимо змінні на дві групи – базові і вільні. Для вибору базових змінних доцільно скористатися таким правилом: в якості *базових змінних* ітерації симплекс-таблиці необхідно вибрати такі змінні (їх кількість визначається числом основних обмежень), кожна з яких тільки раз входить у рівняння основних обмежень. Решту змінних будемо вважати вільними.

Запишемо цільову форму f у вигляді рівняння

$$f - 9x_1 - 6x_2 = 0$$

Таблиця заповнюється формально за вибраною канонічною формою.

1. Заповнюємо базові стовпчики: на перетині однойменних рядків і стовпчиків ставимо 1, а в усіх інших клітинках будуть нулі.

2. В інших рядках виписуємо коефіцієнти, що стоять біля відповідних невідомих. Нульовий рядок відповідає оптимізуючій формі і служить для визначення ступеня оптимальності опорного плану.

$$\begin{pmatrix} 15 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ітерація 1

f	0	0	-9	-6	0	0	0
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	1	300	15	2	1	0	0
x_4	2	306	12	6	0	1	0
x_5	3	360	3	12	0	0	1

Критерій оптимальності. Якщо задача максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком хіба що стовпчика "опорний розв'язок (план)"), то опорний план є оптимальним (при мінімізації задачі для оптимальності плану достатньо відсутності додатних чисел у нульовому рядку, за винятком, можливо, опорного розв'язку).

Коефіцієнт рядка "0" можна інтерпретувати як приріст функції f при збільшенні вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним – якщо коефіцієнт додатний.

В нашому випадку є два від'ємні числа (-9) , (-6) , беремо найбільше за модулем від'ємне число (-9) (при мінімізації задачі – найбільше додатне), тоді стовпчик " x_1 " будемо називати ключовим стовпчиком.

Для вибору *ключового елемента* складемо відношення вільних членів (чисел стовпчика "опорний розв'язок") до відповідних додатних чисел ключового стовпчика (усі інші відношення будемо вважати рівними нескінченності):

$$\min \left\{ \frac{300}{15}; \frac{306}{12}; \frac{360}{3} \right\} = \{20; 25.5; 120\} = 20.$$

Перше відношення менше, тому число (15) першого рядка буде ключовим елементом. Ключовий елемент в таблиці позначаємо рамкою і переходимо до другої ітерації.

Ітерація 2

f	0	180	0	$-\frac{24}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	20	1	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	0
x_4	2	66	0	$\frac{22}{5}$	$-\frac{4}{5}$	1	0
x_5	3	300	0	$\frac{58}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1

Послідовність заповнення другої та наступних ітерацій така (використовуємо метод Гаусса-Жордана):

1. Замість базової невідомої x_3 (ключовий рядок), вводимо нову базову невідому x_1 (невідому ключового стовпчика),
2. Формально заповнюємо базові стовпчики (пункт 1 ітерації 1).
3. Ключовий рядок одержуємо від ділення його елементів попередньої ітерації на ключовий елемент.
4. Усі інші комірки ітерації заповнюємо за правилом прямокутника:

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{qs} - a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}, \quad b'_{ij} = \frac{b_ja_{qs} - a_{is}b_q}{a_{qs}}, \quad (2.9)$$

де a'_{ij} , b'_i відповідно шукані елементи нової ітерації, а a_{ij} , b_i – попередньої,

a_{qs} – ключовий елемент.

$$\text{Рядок 0: } \frac{0 \cdot (15) - 300 \cdot (-9)}{15} = 180; \frac{-6 \cdot 15 - (-9) \cdot 2}{15} = -\frac{24}{5}; \frac{0 \cdot 15 - (-9) \cdot 1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Рядок 2: } \frac{306 \cdot 15 - 12 \cdot 300}{15} = 66; \frac{6 \cdot 15 - 12 \cdot 2}{15} = \frac{22}{5}; \frac{0 \cdot 15 - 12 \cdot 1}{15} = -\frac{4}{5}; \frac{1 \cdot 15 - 12 \cdot 0}{15} = 1.$$

$$\text{Рядок 3: } \frac{360 \cdot 15 - 3 \cdot 300}{15} = 300; \frac{12 \cdot 15 - 3 \cdot 2}{15} = \frac{58}{5}; \frac{0 \cdot 15 - 3 \cdot 1}{15} = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5}; \frac{1 \cdot 15 - 3 \cdot 0}{15} = 1.$$

Після заповнення таблиці 2-ої ітерації перевіряємо її опорний план на оптимальність. Бачимо, що потрібно перейти до наступного опорного плану, оскільки в нульовому рядку стовпчика " x_2 " маємо від'ємне число ($-\frac{24}{5}$).

$$\min \left\{ \frac{20}{2}, \frac{66}{22}, \frac{300}{58} \right\} = \{150; 15; 25,8\} = 15.$$

За ключовий елемент слід взяти число " $\frac{22}{5}$ ".

Ітерація 3

f	0	252	0	0	$-\frac{3}{11}$	$\frac{12}{11}$	0
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	18	1	0	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{33}$	0
x_2	2	15	0	1	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{22}$	0
x_5	3	126	0	0	$\frac{21}{11}$	$-\frac{29}{11}$	1

В ітерації 3 замість базової змінної x_4 тепер буде нова базова x_2 , ключовим буде рядок 2. Над таблицею виконуємо ті ж операції, що й під час другої ітерації.

Після III-ої ітерації перевіряємо опорний план на оптимальність. Бачимо, що потрібно перейти до наступного опорного плану, оскільки в нульовому рядку стовпчика " x_3 " знаходиться від'ємне число ($-\frac{3}{11}$).

$$\min \left\{ \frac{18}{1}, \frac{15}{-\frac{2}{11}}, \frac{126}{21} \right\} = \{198; 82,5; 66\} = 66.$$

За ключовий елемент слід взяти число " $\frac{21}{11}$ ".

Ітерація 4

f	0	270	0	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{7}$
Базові невідомі	№ рядка	План (опорний розв'язок)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	12	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{21}$
x_2	2	27	0	1	0	$-\frac{1}{42}$	$\frac{2}{21}$
x_3	3	66	0	0	1	$-\frac{29}{21}$	$\frac{11}{21}$

В рядку 0 вже немає від'ємних чисел, тому опорний план останньої таблиці оптимальний і виписуємо його із стовпчика "опорний розв'язок"

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 27, \quad x_3 = 66, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad f_{\max} = 270.$$

***Зауваження 1.** Кожній таблиці відповідає своя канонічна форма стандартного запису. Так, наприклад, за останньою таблицею можна записати таку канонічну форму:

$$z = 270 - \frac{5}{7}x_1 - \frac{1}{7}x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{1}{21}x_5 = 12 \\ x_2 - \frac{1}{42}x_4 + \frac{2}{21}x_5 = 27 \\ x_3 - \frac{29}{11}x_4 + \frac{11}{21}x_5 = 66 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

***Зауваження 2.** Контролювати правильність обчислення опорних планів і оптимального значення можна за значенням функції мети:

$$f = 9 \cdot 12 + 6 \cdot 27 = 270$$

***Зауваження 3.** При розв'язуванні задачі для зручності ітерації послідовно записують одну під одною.

Економічна інтерпретація математичного розв'язку.

Аналіз системи обмежень і цільової функції показує, що подальше збільшення прибутку неможливе, розв'язок $\vec{x}^{(4)} = (270; 12; 27; 66; 0)$ є оптимальний, найбільший прибуток при даних запасах сировини становить $f_{\max} = 270$ одиниць, а об'єми виготовленої продукції видів A_1 і A_2 дорівнюють відповідно 12 та 27 одиниць.

Завдання.

Для виготовлення двох видів продукції A_1 і A_2 використовують три види сировини **I, II і III**. Запаси сировини, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції задано у таблиці.

Знайти розмір максимального прибутку, який можна одержати за наявності даних запасів сировини.

Варіанти асортименту обрати з таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

№	Затрати ресурсів на одиницю продукції						Наявність ресурсів			Прибуток	
	I		II		III						
	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂	I	II	III	Π ₁	Π ₂
1.	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2.	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3.	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4.	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5.	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6.	14	15	1	2	9	5	400	49	220	21	18
7.	11	6	1	2	15	14	324	60	500	10	7
8.	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9
9.	3	8	7	2	1	1	187	143	29	10	6
10.	2	7	1	1	6	1	126	30	120	20	15
11.	9	4	3	2	2	2	175	65	60	15	10
12.	2	3	2	2	3	2	80	58	75	10	12
13.	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	30
14.	3	2	4	1	7	8	65	70	235	30	20
15.	2	2	7	2	3	8	58	143	197	15	21
16.	1	1	12	5	1	4	37	360	100	12	9
17.	2	1	2	5	3	4	34	105	91	9	7
18.	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
19.	14	15	2	1	6	11	500	60	324	14	10
20.	14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18
21.	3	2	2	2	2	3	75	58	80	15	18
22.	5	2	4	3	3	6	98	84	91	18	10
23.	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
24.	2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12
25.	18	15	5	11	13	4	591	335	379	12	22
26.	2	1	1	5	4	15	48	100	225	12	9
27.	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	30
28.	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
29.	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
30.	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8

Приклад розв'язування задачі лінійного програмування симплекс методом та за допомогою надбудови Excel «Поиск решения».

Приклад 1.1. Знайти найбільше значення функції

$$F = -5x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 \leq -18 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -30 \\ -7x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс методом та за допомогою надбудови Excel «Поиск решения».

Розв'яжемо дану задачу симплекс методом.

Так як задача направлена на знаходження максимального значення, то ліва частина системи обмежень (1.1) повинна бути менша або рівною правій. Помножимо обидві частини кожної з нерівностей системи (1.1) на (-1). Маємо:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 \leq -18 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -30 \\ -7x_1 + 10x_2 + 5x_3 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Систему обмежень нерівностей (1.2) зведемо до системи обмежень-рівностей. Для цього до лівої частини кожної нерівності додаємо відповідну невід'ємну невідому.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + y_1 = -18 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + y_2 = -30 \\ -7x_1 + 10x_2 + 5x_3 + y_3 = 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Виражаємо невід'ємну невідому з системи (1.3):

$$\begin{cases} y_1 = -18 + 2x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = -30 + x_1 + 3x_2 + x_3 \\ y_3 = 50 + 7x_1 - 10x_2 - 5x_3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Умови задачі запишемо в вигляді симплекс-таблиці

Таблиця 1.1.

	-2	1	-1	-18
	-1	-3	-1	-30
	-7	10	5	50
<i>F</i>	5	3	1	0

Перевіримо даний план на опорність. Розглянемо стовпець вільних членів. Оскільки $b_{1,2} \leq 0$, то опорний розв'язок не знайдено, менше серед b_1 та b_2 – (-30) розташовано у другому рядку, тому цей рядок – ключовий. Розглянемо ключовий рядок.

$$\min \left(\frac{-30}{-1}, \frac{-30}{-3}, \frac{-30}{-1} > 0 \right) = \frac{-30}{-3}$$

звідси (-3) – ключовий елемент, а другий стовпчик – ключовий. Виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень. Результати записуємо до наступної симплекс таблиці (табл. 1.2).

Таблиця 1.2.

	-2,333	-1/-3	-1,333	-28
	-1/-3	1/-3	-1/-3	-30/-3
	-10,333	-10/-3	1,667	-50
<i>F</i>	4	3/-3	0	-30

Перевіримо даний план на опорність. Розглянемо стовпець вільних членів. Оскільки $b_{1,2} \leq 0$ то опорний розв'язок не знайдено, менше серед b_1 та b_3 – (- 50) знаходиться у третьому рядку, тому цей рядок – ключовий. Розглянемо рядок.

$$\min \left(\frac{-50}{-10,333}, \frac{-50}{3,333}, \frac{-50}{1,667} > 0 \right) = \frac{-50}{-10,333}$$

звідси

(-10,333) – ключовий елемент, а перший стовпчик – ключовий. Виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень. Результати записуємо до наступної симплекс таблиці (табл. 1.3).

Таблиця 1.3.

	-0,226	-0,42	-1,709	-16,711
	0,032	-0,226	0,387	8,389
	-0,097	-0,323	-0,161	4,839
<i>F</i>	0,387	2,29	0,645	-49,355

Перевіримо даний план на опорність. Розглянемо стовпець вільних членів. Оскільки $b_1 \leq 0$, тому перший рядок – ключовий. Розглянемо ключовий рядок. $\min \left(\frac{-16,711}{-0,226}; \frac{-16,711}{-0,42}; \frac{-16,711}{-1,709} > 0 \right) = \frac{-16,711}{-1,709}$, звідси (-1,709) – ключовий елемент, а третій стовпчик – ключовий. Виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень. Результати записуємо до наступної симплекс таблиці (табл. 1.4).

Таблиця 1.4.

	0,132	0,246	-0,585	9,778
	-0,019	-0,321	0,226	4,605
	-0,076	-0,283	-0,094	6,413
<i>F</i>	0,302	2,131	0,377	-55,62

Розглядаємо стовпець вільних членів. Усі $b_i \geq 0$, тому опорний розв'язок знайдено. Розглянемо рядок *F*. Так як всі коефіцієнти *F* - рядка невід'ємні, то знайдений розв'язок і буде оптимальним: $x_1 = 6,413$; $x_2 = 4,605$; $x_3 = 9,778$;

Відповідь: $x_1 = 6,413$; $x_2 = 4,605$; $x_3 = 9,778$;

Розв'язання за допомогою засобів Excel.

Заповнимо робочий лист наступним чином (рис. 1.1):

- занесемо до робочого листа коефіцієнти системи обмежень даної задачі, її праву частину та коефіцієнти цільової функції;
- відведемо комірки B8, C8 та D8 під значення змінних ;
- вираз для визначення цільової функції помістимо до комірки E5;
- у комірки B11:B13 введемо ліві частини обмежень: $\{=B2*\$B\$8+C2*\$C\$8+D2*\$D\$8\}$, $\{=B3*\$B\$8+C3*\$C\$8+D3*\$D\$8\}$, $\{=B4*\$B\$8+C4*\$C\$8+D4*\$D\$8\}$, а в комірки D11:D13 – праві частини, так як в поля діалогового вікна не можна вводити формули.

	A	B	C	D	E	F
1		Коефіцієнти системи обмежень				
2	I	2	-1	1	18	
3	II	1	3	1	30	
4	III	-7	10	5	50	
5	F	-5	-3	-1	0	
6						
7		x1	x2	x3		
8						
9						
10		Ліва частина	Знак	Права частина		
11		0	>=	18		
12		0	>=	30		
13		0	<=	50		
14						

Рис.1. 1. Умова задачі.

Активізуємо діалогове вікно **Поиск решения** і заповнимо як показано на рис. 1.2.

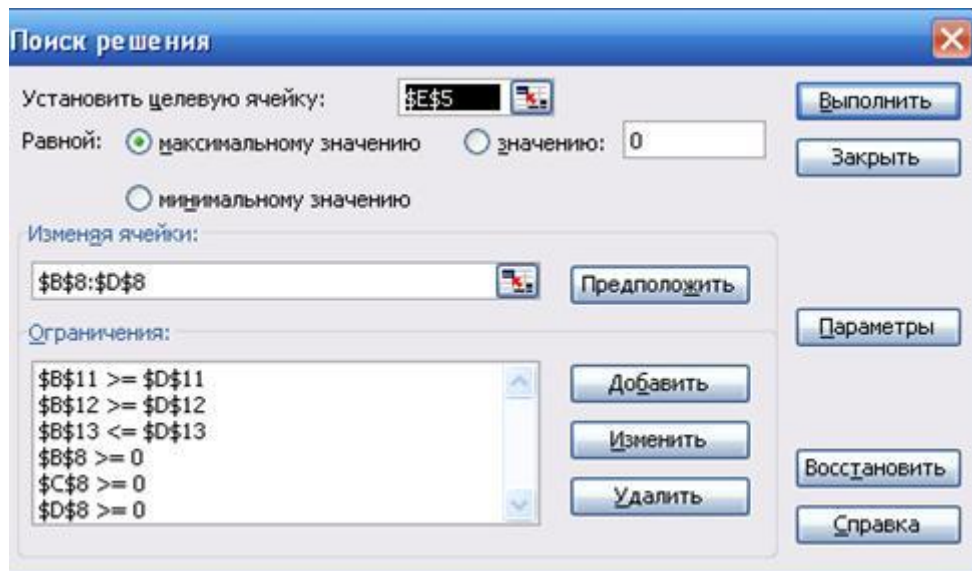


Рис.1.2. Діалогове вікно Поиск решения задачі

Результати розрахунку задачі представлені на рис. 1.3: $x_1 = 6,415$; $x_2 = 4,603$; $x_3 = 9,773$.

Microsoft Excel - Книга1					
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно					
Arial Cyr 10 Ж К Ч					
E5 fx =B5*B8+C5*C8+D5*D8					
	A	B	C	D	E
1		Коефіцієнти системи обмежень			
2	I	2	-1	1	18
3	II	1	3	1	30
4	III	-7	10	5	50
5	F	-5	-3	-1	-55,6604
6					
7		x1	x2	x3	
8		6,41509434	4,603774	9,773584906	
9					
10		Ліва частина	Знак	Права частина	
11		18	>=	18	
12		30	>=	30	
13		50	<=	50	
14					

Рис.1. 3. Результаты розрахунку за допомогою Поиска решений задачі.

Примітка. Поиск решения викликається з меню Сервис і пропонує однойменне діалогове вікно, представлене на рис.1.4.

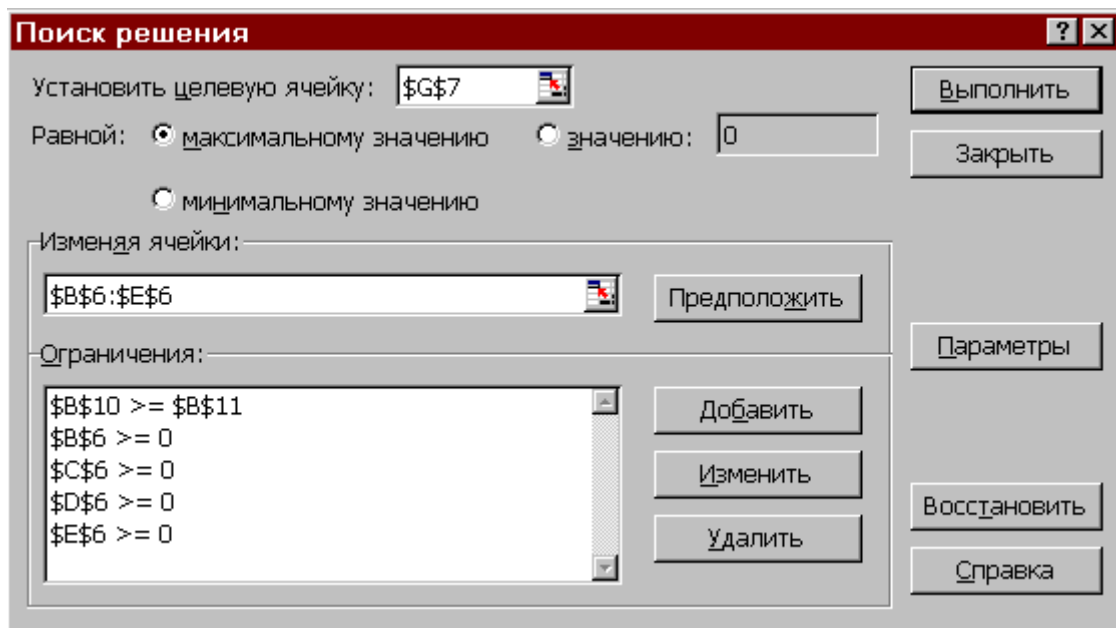


Рис.1. 4. Діалогове вікно Поиска решения.

Нижче перераховані основні поля і органи управління діалогового вікна **Поиск решения** та їх призначення.

- v Поле **Установить целевую ячейку**. Служить для вказівки цільової комірки, значення якої необхідно максимізувати, мінімізувати або встановити рівним заданому числу. Ця комірка повинна містити формулу.
- v Перемикач **Равной**. Служить для вибору варіанта оптимізації значення цільової комірки (максимізація , мінімізація або підбір заданого значення). Щоб встановити задане значення, введіть його в поле, розташоване праворуч від елемента **Значение**.
- v Поле **Изменяя ячейки**. Служить для вказівки комірок, значення яких змінюються в процесі пошуку рішення до того часу, поки не будуть виконані накладені обмеження й умова оптимізації значення комірки, зазначеної в полі **Установить целевую ячейку**.
- v Кнопка **Предположить**. Використовується для автоматичного пошуку комірок, що впливають на формулу, посилання на яку дано в полі **Установить целевую ячейку**. Результат пошуку відображається в полі **Изменяя ячейки**.
- v Список **Ограничения**. Служить для відображення списку граничних умов поставленої задачі.
- v Кнопка **Добавить**. Служить для відображення діалогового вікна **Добавить ограничение**, за допомогою якого записуються вирази, що визначають обмеження.
- v Кнопка **Изменить**. Служить для відображення діалогового вікна **Изменить ограничение**, яке дозволяє редагувати вибраний вираз зі списку обмежень.

v Кнопка **Параметры**. Служить для відображення діалогового вікна **Параметры поиска решения**, в якому можна завантажити або зберегти модель, яка оптимізується і вказати передбачені варіанти пошуку рішення. Під моделлю розуміється діапазон клітинок аркуша, в яких містяться вихідні дані, формули і цільова комірка, які описують задачу, що розв'язується.

v Кнопка **Восстановить**. Служить для очищення полів вікна діалогу і відновлення значень параметрів пошуку рішення, які використовуються за умовчуванням.

Опис обмежень, властивих оптимізаційній задачі, виконується за допомогою двох однотипних діалогових вікон **Добавление** обмеження і **Изменение ограничения**, одне з яких представлено на рис.1.5.

Нижче перераховані основні поля і органи управління названих діалогових вікон.

v Поле **Ссылка на ячейку**. Служить для вказівки клітинки або діапазону, на значення яких необхідно накласти обмеження.

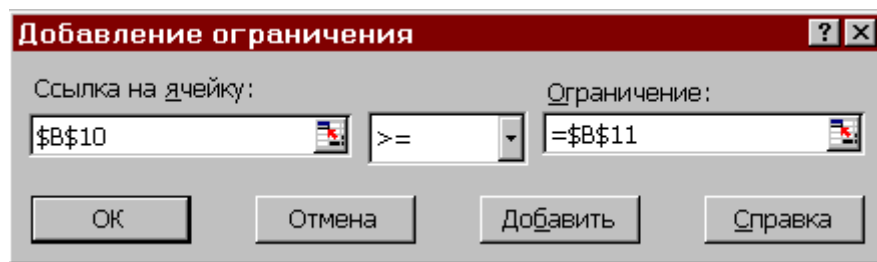


Рис.1. 5. Діалогове вікно **Добавление ограничения**.

v **Раскрывающийся список**. Призначений для вибору умови (відносини), що визначає обмеження.

v Поле **Ограничение**. Служить для задання числа, формули, посилання на клітинку або діапазон, що визначають обмеження.

v Кнопка **Добавить**. Використовується для того, щоб, не повертаючись у вікно діалогу **Параметры поиска решения**, накласти нову умову на пошук рішення задачі.

Управління алгоритмом пошуку та визначення його параметрів (швидкості збіжності, точності тощо) виконується за допомогою діалогового вікна **Параметры поиска решения**, представленого на рис.1.6. У цьому вікні можна змінювати умови і варіанти пошуку рішення для лінійних і нелінійних задач, а також завантажувати і зберігати оптимізаційні моделі. Значення і стан елементів управління, що використовуються за умовчуванням, підходять для розв'язання більшості задач.

v Поле **Максимальное время**. Служить для обмеження часу, що відпускається на пошук рішення задачі. У полі можна ввести час (у секундах), що не перевищує

32767; значення 100, що використовується за умовчужанням, підходить для розв'язання більшості простих задач.

v Служить для управління часом розв'язання задачі шляхом обмеження числа проміжних обчислень. У полі можна ввести кількість ітерацій, що не перевищує 32767; значення 100, що використовується за умовчужанням, підходить для розв'язання більшості простих задач.

v Поле **Относительная погрешность**. Служить для задання точності, з якою визначається відповідність комірки цільовому значенню чи наближення до вказаних меж. Поле має містити число з інтервалу від 0 (нуля) до 1 . Низька точність відповідає введеному числу , що містить меншу кількість десяткових знаків, ніж число, що використовується за замовчужанням , наприклад 0,0001 . Висока точність збільшить час, що потрібно для того, щоб зійшовся процес оптимізації .

v Поле **Допустимое отклонение**. Служить для задання допуску на відхилення від оптимального рішення, якщо множина значень, комірки що впливає обмежено множиною цілих чисел. При вказівці більшого допуску пошук рішення закінчується швидше.

v Поле **Сходимость**. Коли відносна зміна значення в цільовій комірці за останні п'ять ітерацій стає менше числа, зазначеного у полі **Сходимость**, пошук припиняється. Збіжність застосовується тільки до нелінійних задачах , умовою служить дріб з інтервалу від 0 (нуля) до 1 . Кращу збіжність характеризує більшу кількість десяткових знаків, наприклад 0,0001 - це менша відносна зміна, ніж 0,01. Краща збіжність вимагає більше часу на пошук оптимального рішення .

v Прапорець **Линейная модель**. Служить для прискорення пошуку рішення лінійної задачі оптимізації або лінійної апроксимації нелінійної задачі.

v Прапорець **Показывать результаты итераций**. Служить для призупинення пошуку рішення для перегляду результатів окремих ітерацій.

v Прапорець **Автоматическое масштабирование**. Вмикає автоматичну нормалізацію вхідних і вихідних значень, що якісно розрізняються за величиною, наприклад, максимізація прибутку у відсотках відносно до вкладень, що обчислюється в мільйонах умовних одиниць.

v Прапорець **Значения не отрицательны**. Дозволяє встановити нульову нижню межу для тих комірок, для яких вона не була зазначена в полі **Ограничение** діалогового вікна **Добавить ограничение**.

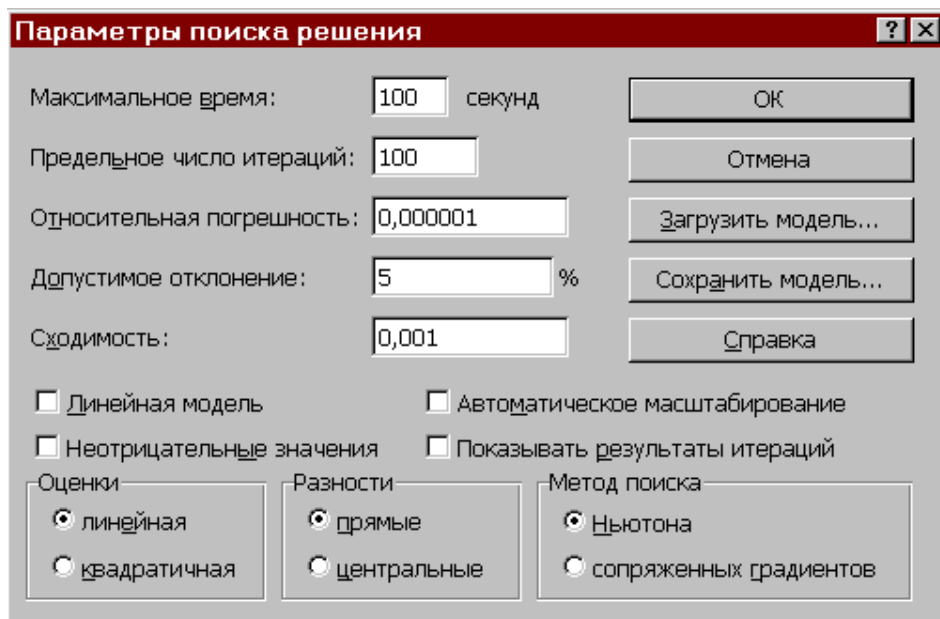


Рис.1. 6. Діалогове вікно Параметри пошуку рішення.

- v Перемикач **Оценки**. Служить для вказівки методу екстраполяції (лінійна або квадратична), яка використовується для отримання вихідних оцінок значень змінних у кожному одновимірному пошуку .
- v Значення перемикача **Линейная**. Служить для використання лінійної екстраполяції вздовж дотичного вектору .
- v Значення перемикача **Квадратичная**. Служить для використання квадратичної екстраполяції, яка дає кращі результати при розв'язанні нелінійних задач.
- v Перемикач **Производные**. Служить для вказівки методу чисельного диференціювання (прямі або центральні похідні), який використовується для обчислення часткових похідних цільових і обмежуючих функцій.
- v Значення перемикача **Прямые**. Використовується для гладких безперервних функцій.
- v Значення перемикача **Центральные**. Використовується для функцій, що мають розривну похідну. Незважаючи на те, що даний спосіб вимагає більше обчислень, він може допомогти при отриманні підсумкового повідомлення про те, що процедура пошуку розв'язку не може поліпшити поточний набір комірок, що впливають.
- v Перемикач **Метод**. Служить для вибору алгоритму оптимізації (метод Ньютона або метод сполучених градієнтів) для вказівки напряму пошуку.
- v Значення перемикача **Ньютона**. Служить для реалізації "квазіньютонівського" методу, в якому запитується більше пам'яті, але виконується менше ітерацій, ніж у методі сполучених градієнтів .

v Значення перемикача **Сопряженных градиентов**. Служить для реалізації методу сполучених градієнтів, в якому запитується менше пам'яті, але виконується більше ітерацій, ніж у методі Ньютона. Даний метод слід використовувати, якщо задача досить велика, і необхідно економити пам'ять, а також, якщо ітерації дають занадто малу відмінність у послідовних наближеннях.

v Служить для відображення на екрані діалогового вікна **Загрузить модель**, в якому можна задати посилання на область комірок, що містять модель, яка загрузається.

v Служить для відображення на екрані діалогового вікна **Сохранить модель**, в якому можна задати посилання на область комірок, призначену для зберігання моделі оптимізації. Даний варіант передбачений для зберігання на аркуші більше однієї моделі оптимізації, перша модель зберігається автоматично.

Слід мати на увазі, що **Поиск решения** - це потужний і дуже складний інструмент, що вимагає хорошої математичної підготовки в області чисельних методів і чіткого розуміння того, як зміна певного параметра алгоритму відіб'ється на підсумкових результатах. Найчастіше починаючі користувачі відчують серйозні труднощі при використанні даного інструменту. Допомогти їм розібратися в характері проблем, що виникають можуть підсумкові повідомлення процедури пошуку рішення. Особливо корисні ці повідомлення у випадках, коли пошук припинений, але рішення не отримано. Нижче наведені найбільш важливі підсумкові повідомлення процедури пошуку рішення.

Якщо пошук рішення успішно завершений, в діалоговому вікні **Результаты поиска решения** виводиться одне з таких повідомлень.

Розв'язок знайдено. Всі обмеження і умови оптимальності виконані.

Всі обмеження дотримані зі встановленою точністю і знайдено задане значення цільової комірки.

Пошук звівся до поточного рішення.

Всі обмеження виконані. Відносна зміна значення в цільовій комірці за останні п'ять ітерацій стала менше встановленого значення параметра **Сходимость** в діалоговому вікні **поиска решения**. Щоб знайти більш точне рішення, встановіть менше значення параметра **Сходимость**, але це займе більше часу.

Якщо пошук не може знайти оптимальне рішення, в діалоговому вікні **Результаты поиска решения** виводиться одне з повідомлень, що пояснюють ймовірну причину невдачі.

v *Пошук не може покращити поточне рішення. Всі обмеження виконані.*

У процесі пошуку рішення не можна знайти такий набір значень, що впливають на комірки, який був би кращим поточного рішення. Змініть похибку на менше число і запустіть процедуру пошуку розв'язку знову.

v Пошук зупинений (минув заданий на пошук час).

Час, відпущений на розв'язання задачі, вичерпано, але досягнути задовільного рішення не вдалося. Щоб при наступному запуску процедури пошуку рішення не повторювати виконані обчислення, встановіть перемикач **Сохранить найденное решение** або **Сохранить сценарий**.

v Пошук зупинений (досягнуте максимальне число ітерацій).

Виконано дозволене число ітерацій, але досягти задовільного рішення не вдалося.

v Значення цільової комірки не сходяться.

Значення цільової комірки необмежено збільшується (або зменшується), навіть якщо всі обмеження дотримані.

v Пошук не може знайти відповідного рішення.

У процесі пошуку рішення не можна зробити ітерацію, яка задовольняла б всім обмеженням при заданій точності. Ймовірно, обмеження суперечливі.

v Пошук зупинений на вимогу користувача.

Натиснута кнопка **Стоп** в діалоговому вікні **Текущее состояние поиска решения** після переривання пошуку рішення в процесі виконання ітерацій.

v Умови для лінійної моделі не задовольняються.

Встановлено прапорець **Линейная модель**, однак підсумковий перерахунок породжує такі значення, які не узгоджуються з лінійною моделлю .

v При пошуку рішення виявлено помилкове значення в цільовій комірці або в комірці обмеження.

При перерахунку значень комірок виявлена помилка в одній формулі або в декількох відразу. Знайдіть цільову клітинку або клітинку обмеження, що породжує помилку, і змініть їх формули так, щоб вони повертали підходяще числове значення .

v Мало пам'яті для розв'язання задачі.

Система не змогла виділити пам'ять, необхідну для пошуку рішення. Закрийте деякі файли або програми і спробуйте знову виконати процедуру пошуку рішення. Або запущено кілька копій MS Excel, в одному з яких використовується файл solver.dll.

Зауваження.

Доступ до даних засобів у версії 2007, 2010 відбувається через кнопки закладки **Данные**. Якщо інструмент Пошук рішення не відображається, виконайте команди Системна кнопка **Ms Office - Параметры Excel – Надстройки** – відмітити прапорцем надбудову **Поиск решений**.

Практична робота № 7.

Розрахунок оптимальної виробничої програми карамельного цеху

Задача. У карамельному цеху випускають декілька видів продукції (табл.7.2). Продуктивність ліній визначається по варочному апарату. Кількість варильних апаратів – 1.

Задано: оптова ціна, собівартість продукції і попит, річна продуктивність апаратів по карамелі.

Потрібно:

1. Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент (табл. 7.3).
2. Побудувати модель оптимального річного плану підприємства у загальному вигляді по критерію оптимізації – **максимальний прибуток**.
3. За допомогою отриманих нерівностей чи рівнянь побудувати та записати матрицю коефіцієнтів і функцію цілі.
4. Вирішити задачу за допомогою функції "Поиск решения" табличного процесора Microsoft Excel.
5. Заповнити вихідну таблицю та дати економічний аналіз.

Варіанти асортименту обрати з таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅
Варіант 1	1	2	3	4	5
Варіант 2	6	7	8	9	1
Варіант 3	2	3	4	5	6
Варіант 4	7	8	9	1	2
Варіант 5	3	4	5	6	7
Варіант 6	8	9	1	2	3
Варіант 7	4	5	6	7	8
Варіант 8	9	1	2	3	4
Варіант 9	5	6	7	8	9
Варіант 10	1	3	5	7	9

Таблиця 7.2

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Одиниці виміру	Вид карамелі								
		Апельсин	Фруктово-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина
1.Шуканий випуск продукції	т	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉
2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3
3.Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136
4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63

Таблиця 7.3.

Потреба у сировині, кг/т карамелі

Показники	Вид карамелі									
	Апельсин	Фруктово-ягідний	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Ціна 1 т сировини,
Цукор-пісок	633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750
Патока в/г	317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
Пюре фруктове	153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
Есенція	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
Кислота молочна 40% кр.	6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
Кислота лимонна	3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100
Вартість сировини на 1 т (тис.грн/т)										—

Згідно варіанту завдання обрати продуктивність ліній з таблиці 7.4.

Обрати обмеження по попиту з таблиці 7.5.

Таблиця 7.4

	Продуктивність ліній (т/рік)	
	Непарні варіанти	Парні варіанти:
Варіант 1	1075	1075
Варіант 2	1075	1000
Варіант 3	1000	800
Варіант 4	800	2150
Варіант 5	1075	800
Варіант 6	1075	2150
Варіант 7	1000	2150
Варіант 8	800	1075
Варіант 9	800	1075
Варіант 10	2150	1000

Таблиця 7.5

Обмеження по попиту (т/рік)

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉
max	89	110	80	99	102	99	104	105	114
min	59	71	51	80	67	74	66	67	72

Приклад виконання практичної роботи.

У карамельному цеху випускають декілька видів продукції. Продуктивність ліній визначається по варочному апарату. Кількість варильних апаратів – 1.

Вихідні дані для побудування робочої моделі маємо в таблиці 7.6. Грошові витрати на сировину для виробництва асортименту карамелі – в таблиці 3.7. Річна продуктивність лінії – в таблиці 7.8.

Розв'язування**Робоча модель задачі**

1. Цільова функція – отримати максимальний прибуток від випуску карамелі при визначених обмеженнях по продуктивності обладнання, собівартості, попиту, загальному випуску.

$$F(x) = 278,33x_1 + 424,37x_2 + 583,21x_3 + 346,7x_4 + 400x_5 + 566,67x_6 + 245x_7 + 341,4x_8 + 190,37x_9 \rightarrow \max$$

2. Обмеження:**1) По ведучому обладнанню:**

$$A_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 4230$$

2) По выпуску товарної продукції:

$$A_2 = 1958,33x_1 + 2546,26x_2 + 2175x_3 + 2175x_4 + 2100x_5 + 2166,7x_6 + \\ + 1815x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \geq 1603605,25$$

3) По собівартості продукції:

$$A_3 = 1680x_1 + 2121,89x_2 + 1591,79x_3 + 1828,3x_4 + 1700x_5 + 1600x_6 + \\ + 1570x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \leq 1323928,07$$

4) По максимальному та мінімальному попиту:

$A_4 = x_1 \leq 89$	$A_5 = x_1 \geq 59$
$A_6 = x_2 \leq 110$	$A_7 = x_2 \geq 71$
$A_8 = x_3 \leq 80$	$A_9 = x_3 \geq 51$
$A_{10} = x_4 \leq 99$	$A_{11} = x_4 \geq 80$
$A_{12} = x_5 \leq 102$	$A_{13} = x_5 \geq 67$
$A_{14} = x_6 \leq 67$	$A_{15} = x_6 \geq 74$
$A_{16} = x_7 \leq 104$	$A_{17} = x_7 \geq 66$
$A_{18} = x_8 \leq 105$	$A_{19} = x_8 \geq 67$
$A_{20} = x_9 \leq 114$	$A_{21} = x_9 \geq 72$

5) По выпуску продукції

$$A_{22} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 748,5$$

6) По фінансовим можливостям

$$A_{23} = 831,63x_1 + 851,75x_2 + 860,27x_3 + 868,17x_4 + 890,02x_5 + \\ + 847,93x_6 + 890,05x_7 + 836,76x_8 + 830,88x_9 \leq 641314,28$$

Для реалізації задачі на ПК будемо робочу матрицю (табл. 7.9), використовуючи вище наведену робочу модель.

Таблиця 7.6

Вихідні дані для побудови робочої моделі

Показники	Один. виміру	Вид карамелі									Напрямок	Всього
		Апельсин	Фрукт.- ягідний	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина		
1. Шуканий випуск продукції	т	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉		
2. Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	≥	748,5
3. Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	≥	1603605,25
4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	≤	1323928,07
5. Питомий прибуток 1т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	→	290005,44
6. Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	≤	641314,28
7. Попит max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114		
min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72		
8. Товарна продукція	тис.грн.	143,15	229,60	153,12	189,66	172,26	195,22	161,72	178,81	180,06	≥	1603,605

Таблиця 7.7

Потреба у сировині, кг/т карамелі

Показники	Вид карамелі									Ціна 1 т сировини, грн.
	Апельсин	Фрукт.- ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	
Цукор-пісок	633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750
Патока в/г	317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153
Пюре фруктове	153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800
Есенція	0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400
Кислота молочна 40% кр.	6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980
Кислота лимонна	3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100
Вартість сировини на 1 т (тис.грн/т)	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	–

Таблиця 7.8

Річна продуктивність ліній

	Апельсин	Фрукт.-ягідний	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т
Лінія 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4230

Таблиця 7.9

Робоча матриця

	Показники	Вид карамелі								
		Апельсин	Фрукт.-ягідн. десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина
		X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9
	Функція цілі	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37
	Обмеження:									
1	По обладнанню	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	Товарна продукція	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,7	1815	2178	2136
3	Собівартість	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,6
4	По попиту	1								
5		1								
6			1							
7			1							
8				1						
9				1						

Продовження табл. 7.9

		X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	знак	величина
10					1						≤	99
11					1						≥	80
12						1					≤	102
13						1					≥	67
14							1				≤	99
15							1				≥	74
16								1			≤	104
17								1			≥	66
18									1		≤	105
19									1		≥	67
20										1	≤	114
21										1	≥	72
22	Випуск продукції	1	1	1	1	1	1	1	1	1	≥	748,5
23	По фінансовим можливостям	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	≤	641314,28

Отримані результати оптимізації виробничої програми лінії виробництва карамелі з фруктово-ягідними наповнювачами зводимо в таблицю 7.10.

Таблиця 7.10

Результати оптимізації

Показники	Од . виміру	Величина		Відхилення	
		до оптимізації	після оптимізації	абсолютне +, –	відносне %
1	2	3	4	5	6
1. Обсяг випуску карамелі, всього	т	748,5	748,5	0	0
в т.ч. "Апельсин"	т	73,1	59	–14,1	–19,29
"Фруктово-ягідний букет"	т	90,17	89,88	–0,29	–0,32
"Десертна"	т	70,4	80	9,6	13,64
"Яблуко"	т	87,2	80	–7,2	–8,26
"Абрикос"	т	82,03	100,67	18,64	22,72
"Вікторія"	т	90,1	99	8,9	9,88
"Слива"	т	89,1	66	–23,1	–25,93
"Лимон"	т	82,1	101,95	19,85	24,18
"Малина"	т	84,3	72	–12,3	–14,59

2. Використання потужності	%	17,7	17,7	0	0
3. Собівартість товарної продукції	тис. грн.	1323,9	1323,9	0	0
4. Товарна продукція	тис. грн.	1603,6	1613,9	10,3	0,64
5. Прибуток від реалізації	тис. грн.	279,67	290,00	10,33	3,69
6. Витрати на 1 грн. товарної продукції	коп.	82,56	82,03	–0,53	–0,64
5. Рентабельність	%	21,1	21,9	0,78	–

Аналіз результатів

Аналіз попиту на продукцію в асортименті дозволив оптимізувати обсяги виробництва з метою збільшення прибутку від реалізації.

В результаті оптимізації прибуток від реалізації карамелі збільшився на 10332,53 грн. без зміни обсягу виробництва.

В межах попиту збільшився випуск карамелі: "Абрикос" – на 18,64 тонни, або на 22,72 %; "Десертна" – 6,9 тонн, або на 13,64 %; "Вікторія" – на 8,9 тонн, або на 9,88 %; "Лимон" – на 19,85 тони, або на 24,18 %.

Знизився випуск карамелей: "Апельсин" – на 14,1 тонн, або на 19,29 %; "Фруктово-ягідний букет" – на 0,29 тонни, або на 0,32 %; "Яблуко" – на 7,2 тонн, або на 8,26 %; "Слива" – на 23,1 тонн, або на 25,93 %; "Малина" – на 12,3 тонни, або на 14,59 %.

Витрати на 1 грн. товарної продукції зменшились на 0,53 коп. (0,63 %). Рентабельність випуску карамелі збільшилась на 0,78 %.

Послідовність розв'язування задачі «Оптимізація виробничої програми карамельного цеху» за допомогою табличного процесора Microsoft Excel.

I.

1. Створюємо таблиці похідних даних (рис. 7.4) де розраховуємо питомий прибуток, товарну продукцію, потребу і вартість сировини.

M9	fx =СУММПРОИЗВ(D\$6:L\$6;D9:L9)												
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	Таблиця 1 Вибірні дані для побудови робочої моделі												
2													
3	Показники	Один.вим.	Вид карамелі									Всього	
4			Апельс н	Фрукт- лігдний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина		
5	1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9		
6	2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5	
7	3.Оптова ціна	грн.	1958,3	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	1603605,25	
8	4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	1323928,07	
9	5.Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677	
10	6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28	
11	7.Полит												
12	max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114		
13	min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72		
14	Товарна продукція	тис.грн.	143,15	229,60	153,12	189,66	172,26	195,22	161,72	178,81	180,06	1603,61	
15													
16	Таблиця 2. Потреба у сировині, кг/т карамелі												
17	Показники		Вид карамелі									Ціна 1 т сировини, грн.	
18			Апельси н	Фрукт- лігдний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина		
19	Цукор-пісок		633,72	637,79	640,37	643,31	643,18	645,3	643,18	637,69	615,67	750	
20	Патока в/г		317,82	320,75	322,17	321,66	323,95	324,53	324,14	319,81	309,99	153	
21	Пюре фруктове		153,07	163,65	164,72	165	180,98	165,58	180,98	154,03	161,46	1800	
22	Есенція		0,96	0,95	0,96	0,96	0,96	0	0,96	0,96	0,92	14400	
23	Кислота молочна 40% кр.		6,03	6	6,03	6,04	6,07	6,07	6,07	6,07	5,5	1980	
24	Кислота лимонна		3,06	2	4,02	6,52	3,08	2,02	3,08	3,08	3,3	2100	
25	Вартість сировини (на 1 т)	тис.грн/т	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	-	
26													
27	Таблиця 3. Річна продуктивність ліній												
28			Апельси н	Фрукт- лігдний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т	
29	Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	4230	
Вихідні дані Базовий варіант Оптимізація													

Рис. 7.4

Розраховуємо по формулах питомий прибуток 1 т продукції, товарну продукцію.

Грошові витрати на сировину розраховуємо в таблиці 2 і робимо посилку з таблиці 1 на підсумковий рядок таблиці 2.

2. Запишемо задачу лінійного програмування в аналітичному вигляді:

$$F(x) = 278,33x_1 + 424,37x_2 + 583,21x_3 + 346,7x_4 + 400x_5 + 566,67x_6 + 245x_7 + 341,4x_8 + 190,37x_9 \rightarrow \max \quad (7.1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 4230, \quad (7.2)$$

$$143,15x_1 + 229,60x_2 + 153,12x_3 + 189,66x_4 + 172,26x_5 + 195,22x_6 + 161,72x_7 + 178,81x_8 + 180,06x_9 \geq 1603,605, \quad (7.3)$$

$$1680x_1 + 2121,89x_2 + 1591,79x_3 + 1828,3x_4 + 1700x_5 + 1600x_6 + 1570x_7 + 2178x_8 + 2136x_9 \leq 1323928,07, \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 89; & x_1 &\geq 59; \\ x_2 &\leq 110; & x_2 &\geq 71; \\ x_3 &\leq 80; & x_3 &\geq 51; \\ x_4 &\leq 99; & x_4 &\geq 80; \\ x_5 &\leq 102; & x_5 &\geq 67; \\ x_6 &\leq 67; & x_6 &\geq 74; \\ x_7 &\leq 104; & x_7 &\geq 66; \\ x_8 &\leq 105; & x_8 &\geq 67; \\ x_9 &\leq 114; & x_9 &\geq 72. \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \geq 748,5, \quad (7.6)$$

$$831,63x_1 + 851,75x_2 + 860,27x_3 + 868,17x_4 + 890,02x_5 + 847,93x_6 + 890,05x_7 + 836,76x_8 + 830,88x_9 \leq 641314,28 \quad (7.7)$$

3. Для рішення задачі на аркуші **Microsoft Excel** створюємо «Базовий варіант» (рис. 7.5).

A1																			
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O				
2	Таблиця 1 Вихідні дані для побудови робочої моделі																		
3	Показники	Один.вим.	Вид карамелі									Всього	Напрямок	Базовий варіант					
4			Апельсин	Фрукт-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина								
5	1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9								
6	2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5	≥	748,5					
7	3.Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	1603605,25		1603605,25					
8	4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	1323928,07	≤	1323928,07					
9	5.Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677,19		279677,19					
10	6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28	≤	641314,28					
11	7.Попит																		
12	max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114								
13	min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72								
14	Товарна продукція	тис.грн.	143,154	229,596	153,12	189,66	172,263	195,217	161,717	178,814	180,065	1603,61	≥	1603,61					
15	Річна продуктивність ліній																		
16			Апельсин	Фрукт-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна потужність, т	Напрямок	Базовий варіант					
17	Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	748,5	≤	4230					
18																			
19																			
20																			
21																			
22																			

Рис. 7.5

В комірки електронних таблиць заносимо вихідні дані: базовий випуск, оптову ціну, максимальний та мінімальний попит.

Цільова функція (7.1) і обмеження (7.2 – 7.7) у вигляді формул заносяться у комірки колонки «Всього» (рис. 7.6, 7.7 та 7.8).

В останню колонку за допомогою «Спеціальної вставки» вставляємо копію колонки «Всього» для аналізу результатів розрахунку.

M13		fx																		
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M		N	O				
1		Таблиця 1																		
2				Вихідні дані																
3																				
4		Показники	Одн. вим.	Вид карамелі									Всього	Напрямок	Базовий варіант					
5				Апельсин	Фрукт-ягідний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина								
6		1.Шукаємий випуск продукції	т	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9								
7		2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	=СУММ(D7:L7)	>=	748,5					
8		3.Оптова ціна	грн.	1958,33	2546,26	2175	2175	2100	2166,67	1815	2178	2136	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D8:L8)		1603605,25					
9		4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,89	1591,79	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,63	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D9:L9)	<=	1323928,07					
10		5.Питомий прибуток 1 т	грн.	=D8-D9	=E8-E9	=F8-F9	=G8-G9	=H8-H9	=I8-I9	=J8-J9	=K8-K9	=L8-L9	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D10:L10)		279677,187					
11		6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	=D25	=E25	=F25	=G25	=H25	=I25	=J25	=K25	=L25	=СУММПРОИЗВ(D\$7:L\$7;D11:L11)	<=	641314,278					
12		7.Попит																		
13		max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114								
14		min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72								
15		Товарна продукція	тис.грн.	=D8*D7/1000	=E8*E7/1000	=F8*F7/1000	=G8*G7/1000	=H8*H7/1000	=I8*I7/1000	=J8*J7/1000	=K8*K7/1000	=L8*L7/1000	=СУММ(\$D\$15:\$L\$15)	>=	1603,60525					

Потреба у сировині, кг/т карамелі (формули розрахунку)

D16 Потребa у сировині, кг/т карамелі					
A	B	C	D	E	F
16	Таблиця 2		Потреба у сировині, кг/т карамелі		
17				Вид карамелі	
18	Показники		Апельсин	Фрукт-ягідний десерт	Десерт на
19	Цукор-пісок		633,72	637,79	640,37
20	Патока в/г		317,82	320,75	322,17
21	Пюре фруктове		153,07	163,65	164,72
22	Есенція		0,96	0,95	0,96
23	Кислота молочна 40% кр.		6,03	6	6,03
24	Кислота лимонна		3,06	2	4,02
25	Вартість сировини (кг/т)	тис.грн/т	=СУММПРОИЗВ(D19:D24;\$M\$21:\$M\$26)*1000	=СУММПРОИЗВ(E19:E24;\$M\$21:\$M\$26)*1000	=СУММПРОИЗВ(F19:F24;\$M\$21:\$M\$26)*1000

D16 Потребa у сировині, кг/т карамелі				
G	H	I	J	
16				
17				
18	Яблуко	Абрикос	Вітерн	Слива
19	643,31	643,18	645,3	643,18
20	321,66	323,95	324,53	324,14
21	165	180,98	165,58	180,98
22	0,96	0,96	0	0,96
23	6,04	6,07	6,07	6,07
24	6,52	3,08	2,02	3,08
25	=СУММПРОИЗВ(G19:G24;\$M\$21:\$M\$26)*1000	=СУММПРОИЗВ(H19:H24;\$M\$21:\$M\$26)*1000	=СУММПРОИЗВ(I19:I24;\$M\$21:\$M\$26)*1000	=СУММПРОИЗВ(J19:J24;\$M\$21:\$M\$26)*1000

D16 Потребa у сировині, кг/т карамелі				
K	L	M	N	
16				
17				
18	Лімон	Малина	Ціна іт сировини, грн.	
19	637,69	615,67	750	
20	319,81	309,99	153	
21	154,03	161,46	1800	
22	0,96	0,92	14400	
23	6,07	5,5	1980	
24	3,08	3,3	2100	
25	=СУММПРОИЗВ(K19:K24;\$M\$21:\$M\$26)*1000	=СУММПРОИЗВ(L19:L24;\$M\$21:\$M\$26)*1000		

Рис. 7.7

Річна продуктивність ліній (формули розрахунку)

C28 Річна продуктивність ліній														
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
28	Таблиця 3	Річна про												
29			Апельсин	Фрукт-ягідний десерт	Десерт на	Яблуко	Абрикос	Вітерн	Слива	Лімон	Малина	Річна продуктивність, т	Напрямок	Базовий варіант
30	Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	=СУММПРОИЗВ(D30:L30;D7:L7)	<=	4230
31														
32														
33														

Рис. 7.8

II.

Після введення формул всіх обмежень і цільової функції для розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою табличного процесора Microsoft Excel потрібно виконати такі дії:

1. Створити новий лист – «Оптимізація» і скопіювати в нього лист «Базовий варіант».

Можна створити лист «Оптимізація» за допомогою наступної операції: відкрити лист «Базовий варіант», натиснути кнопку **Ctrl** і мишкою потягнути за лист вправо й відпустити спочатку клавішу мишки, а потім кнопку **Ctrl**. Одержимо новий лист із назвою «**Базовий варіант (2)**», змінимо назву на «**Оптимізація**».

На листі «Оптимізація» проведемо обчислення для завдання.

2. В головному меню виберіть пункт «Сервис», далі – «Поиск решения» (рис.7.9).

[illegible]

Рис. 7.9

3. У поле «**Установить целевую ячейку**» введіть адресу або ім'я комірки, в якій знаходиться формула функції, що досліджується на екстремум. В нашому випадку ввести **\$M\$9**.

Щоб максимізувати значення цільової комірки шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач «Равной» у положення **максимальному значенню (Max)**.

Щоб мінімізувати значення цільової комірки шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач у положення **мінімальному значенню (Min)**.

Щоб знайти значення в цільовій комірці, яке дорівнює деякому числу шляхом зміни значень комірок шуканих невідомих змінних, встановіть перемикач у положення «**значенню**» і введіть у відповідне поле необхідне число.

В нашому випадку встановлюємо перемикач у положення **максимальному значенню (Max)**.

4. У поле «**Изменяя ячейки**» введіть імена чи адреси комірок шуканих невідомих змінних, розділяючи їх комами або за допомогою мишки вказати необхідні комірки. Допускається встановлення до 200 змінюваних комірок. В нашому випадку введемо **\$D\$6:\$L\$6**. Щоб автоматично знайти всі комірки, що впливають на цільову функцію, натисніть кнопку «**Предположить**».
5. У поле «**Ограничения**» введіть всі обмеження, що накладаються на пошук розв'язку. Для цього натисніть кнопку «**Добавить**». Відкриється вікно «**Добавление ограничения**» (рис. 7.10).

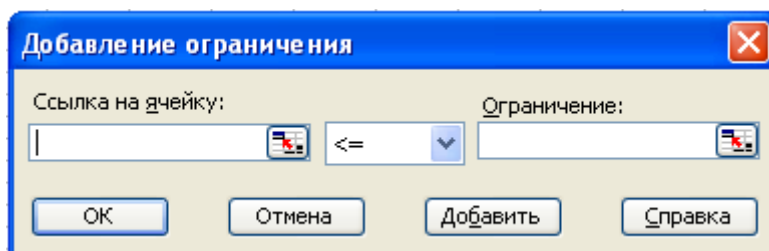


Рис. 7.10

У поле «**Ссылка на ячейку**» ввести комірку чи діапазон, на значення яких необхідно накласти обмеження. Поле «**Ограничение**» служить для завдання умови, що накладається на значення комірки чи діапазону, зазначеного в полі «**Ссылка на ячейку**». Виберіть необхідний умовний оператор ($\leq$, $=$, $\geq$, цел або двоич) (рис. 7.11).

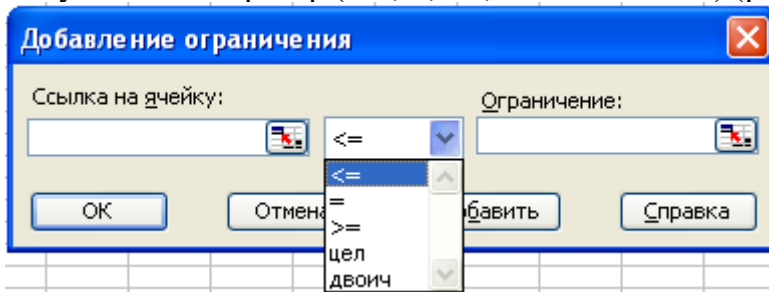


Рис. 7.11

Введіть обмеження – число, формулу, посилання на діапазон – у поле праворуч від списку, що розкривається. Натисніть на кнопку «**Добавить**», щоб, не повертаючись у вікно діалогу «**Параметры поиска решения**», накласти нову умову на пошук розв'язку задачі. В нашому випадку потрібно ввести (рис. 7.12):

$\$D\$13 \leq \$D\$6,$
 $\$D\$6 \leq \$D\$12,$
 $\$E\$13 \leq \$E\$6,$
 $\$E\$6 \leq \$E\$12,$
 $\$F\$13 \leq \$F\$6,$
 $\$F\$6 \leq \$F\$12,$
 $\$G\$13 \leq \$G\$6,$

$$\begin{aligned} \$G\$6 & \leq \$G\$12, \\ \$H\$13 & \leq \$H\$6, \\ \$H\$6 & \leq \$H\$12, \\ \$I\$13 & \leq \$I\$6, \\ \$I\$6 & \leq \$I\$12, \\ \$J\$13 & \leq \$J\$6, \\ \$J\$6 & \leq \$J\$12, \\ \$K\$13 & \leq \$K\$6, \\ \$K\$6 & \leq \$K\$12, \\ \$L\$13 & \leq \$L\$6, \\ \$L\$6 & \leq \$L\$12, \\ \$M\$10 & \leq \$O\$10, \\ \$M\$14 & \geq \$O\$14, \\ \$M\$18 & \leq \$O\$18, \\ \$M\$6 & \geq \$O\$6, \\ \$M\$8 & \leq \$O\$8. \end{aligned}$$

M9		=СУММПРОИЗВ(D\$6:L\$6;D9:L9)													
	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1												Таблиця 1			
2	Вихідні дані для побудови робочої моделі														
3	Показники	Одиниця	Вид карамелі									Всього	Напрямок	Базовий варіант	
4			Апельсин	Фрукт-лінійний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина				
5	1.Шукаемый випуск продукції	т	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉				
6	2.Базовий випуск	т	73,1	90,17	70,4	87,2	82,03	90,1	89,1	82,1	84,3	748,5	≥	748,5	
7	3.Оптова ціна	грн.	1958,3	2546,3	2175	2175	2100	2166,7	1815	2178	2136	1803605,25	≥	1603605,25	
8	4. Собівартість 1 т	грн.	1680	2121,9	1591,8	1828,3	1700	1600	1570	1836,6	1945,6	1323928,07	≤	1323928,07	
9	5.Питомий прибуток 1 т	грн.	278,33	424,37	583,21	346,7	400	566,67	245	341,4	190,37	279677,19	≥	279677,19	
10	6.Грошові витрати на сировину	тис.грн.	831,63	851,75	860,27	868,17	890,02	847,93	890,05	836,76	830,88	641314,28	≤	641314,28	
11	7.Попит														
12	max	т/рік	89	110	80	99	102	99	104	105	114				
13	min	т/рік	59	71	51	80	67	74	66	67	72				
14	8. Товарна продукція	тис.грн.	143,15	229,6	153,12	189,66	172,26	195,22	161,72	178,81	180,06	1603,61	≥	1603,61	
15	Річна продуктивність ліній											Таблиця 3			
16			Апельсин	Фрукт-лінійний десерт	Десертна	Яблуко	Абрикос	Вікторія	Слива	Лимон	Малина	Річна продуктивність, т	Напрямок	Базовий варіант	
17			1	1	1	1	1	1	1	1	1	748,5	≤	4230	
18	Лінія 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	748,5	≤	4230	

Поиск решения

Установить целевую ячейку: \$M\$9

Выполнить

Закреть

Равной:

☒ максимальному значению

☐ значению: 0

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$D\$6:\$L\$6

Предположить

Ограничения:

\$D\$13 <= \$D\$6

\$D\$6 <= \$D\$12

\$E\$13 <= \$E\$6

\$E\$6 <= \$E\$12

\$F\$13 <= \$F\$6

\$F\$6 <= \$F\$12

Добавить

Изменить

Удалить

Восстановить

Справка

Параметры

Вихідні дані

Базовий варіант

Оптимізація

Рис. 7.12

6. Натисніть кнопку «**Выполнить**».

7. В результаті виконання програми повинно з'явитися повідомлення про коректність моделі і правильності розрахунків.

За допомогою цього діалогового вікна можна викликати звіти трьох типів: «Результаты», «Устойчивость», «Пределы» (рис. 7.13).

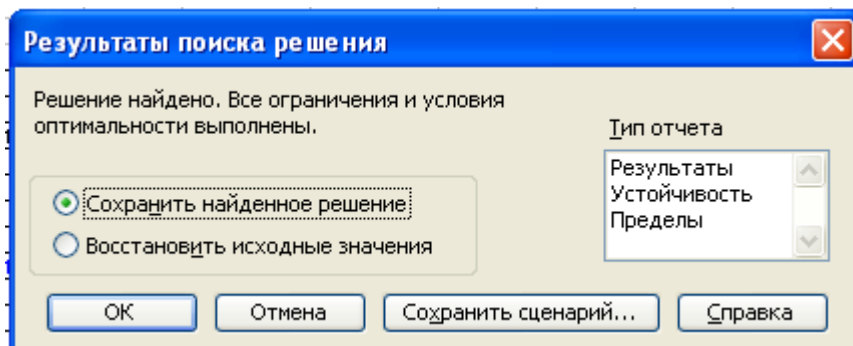


Рис. 7.13

Щоб зберегти знайдений розв'язок, встановіть перемикачу діалоговому вікні «Результаты поиска решения» в положення «Сохранить найденное решение».

8. Отже, оптимальний розв'язок лінійної задачі програмування має вигляд:

$$x_1=59; x_2=89,87; x_3=80; x_4=80; x_5=100,65; x_6=99;$$

$$x_7=66; x_8=101,98; x_9=72; F(x)_{\max} = 290005,44.$$

9. Більш детальну інформацію по результатам оптимізації дозволяють отримати звіт по результатам, звіт по стійкості, звіт по границям.

Звіт за результатами

Звіт складається із трьох таблиць (рис. 7.14):

Таблиця 1 наводить відомості про цільову функцію.

У колонці «Исходно» наведені значення цільової функції до початку обчислень.

Таблиця 2 наводить значення шуканих змінних, отриманих в результаті рішення задачі.

Таблиця 3 показує результати оптимального рішення для обмежень і для граничних умов.

A1		Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам							
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам								
2	Рабочий лист: [Оптимізація_карамель.XLS]Оптимізація								
3	Отчет создан: 17.05.2007 19:07:35								
4									
5									
6	Целевая ячейка (Максимум)								
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат					
8	\$M\$9	грн. Всього	279677,19	290005,44					
9									
10									
11	Изменяемые ячейки								
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат					
13	\$D\$6	т x1	73,1	59					
14	\$E\$6	т x2	90,17	89,87000085					
15	\$F\$6	т x3	70,4	80					
16	\$G\$6	т x4	87,2	80					
17	\$H\$6	т x5	82,03	100,651583					
18	\$I\$6	т x6	90,1	99					
19	\$J\$6	т x7	89,1	66					
20	\$K\$6	т x8	82,1	101,9784161					
21	\$L\$6	т x9	84,3	72					
22									
23									
24	Ограничения								
25	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница			
26	\$M\$6	т Всього	748,5	\$M\$6>=\$O\$6	связанное	0			
27	\$M\$8	грн. Всього	1323928,07	\$M\$8<=\$O\$8	связанное	0			
28	\$M\$10	тис.грн. Всього	641314,28	\$M\$10<=\$O\$10	связанное	0			
29	\$M\$14	тис.грн. Всього	1613,93	\$M\$14>=\$O\$14	не связан	10,33			
30	\$M\$18	Линія 1 Річна потужність,	748,5	\$M\$18<=\$O\$18	не связан	3481,5			
31	\$D\$13	т/рік x1	59	\$D\$13<=\$D\$6	связанное	0			
32	\$E\$13	т/рік x2	71	\$E\$13<=\$E\$6	не связан	18,8700009			
33	\$F\$13	т/рік x3	51	\$F\$13<=\$F\$6	не связан	29			
34	\$G\$13	т/рік x4	80	\$G\$13<=\$G\$6	связанное	0			
35	\$H\$13	т/рік x5	67	\$H\$13<=\$H\$6	не связан	33,651583			
36	\$I\$13	т/рік x6	74	\$I\$13<=\$I\$6	не связан	25			
37	\$J\$13	т/рік x7	66	\$J\$13<=\$J\$6	связанное	0			
38	\$K\$13	т/рік x8	67	\$K\$13<=\$K\$6	не связан	34,9784161			
39	\$L\$13	т/рік x9	72	\$L\$13<=\$L\$6	связанное	0			
40	\$D\$6	т x1	59	\$D\$6<=\$D\$12	не связан	30			
41	\$E\$6	т x2	89,87000085	\$E\$6<=\$E\$12	не связан	20,1299991			
42	\$F\$6	т x3	80	\$F\$6<=\$F\$12	связанное	0			
43	\$G\$6	т x4	80	\$G\$6<=\$G\$12	не связан	19			
44	\$H\$6	т x5	100,651583	\$H\$6<=\$H\$12	не связан	1,34841695			
45	\$I\$6	т x6	99	\$I\$6<=\$I\$12	связанное	0			
46	\$J\$6	т x7	66	\$J\$6<=\$J\$12	не связан	38			
47	\$K\$6	т x8	101,9784161	\$K\$6<=\$K\$12	не связан	3,0215839			
48	\$L\$6	т x9	72	\$L\$6<=\$L\$12	не связан	42			
49									
50	Базовый вариант Отчет по результатам Отчет по устойчивости								

Рис. 7.14

Для **Обмежень** у графі «Формула» наведені залежності, які були введені в діалогове вікно «Поиск решения»; у графі «Значение» наведені величини використаного ресурсу; у графі «Разница» показана кількість невикористаного ресурсу. Якщо ресурс використовується повністю, то в графі «Статус» вказується «зв'язане»; при неповному використанні ресурсу в цій графі вказується «не зв'язаний».

Для **Граничных умов** приводяться аналогічні величини з тією лише різницею, що замість величини невикористаного ресурсу показана різниця між значенням змінної в знайденому оптимальному рішенні й заданим для неї граничною умовою.

Отже, у звіті по результатам порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана.

Звіт по стійкості

Звіт по стійкості (рис.7.15) складається із двох таблиць.

A1								Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости							
A		B		C		D		E		F		G		H	
1		Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости													
2		Рабочий лист: [Оптимізація карамель.XLS]Оптимізація													
3		Отчет создан: 17.05.2007 19:07:35													
4															
5															
6		Изменяемые ячейки													
7															
8		Ячейка		Имя		Результ. значение		Нормир. стоимость		Целевой Коэффициент		Допустимое Увеличение		Допустимое Уменьшение	
9		\$D\$6		т x1		59		0		278,33		22,5601936		1E+30	
10		\$E\$6		т x2		89,8700009		0		424,37		43,0207005		66,48370401	
11		\$F\$6		т x3		80		253,840877		583,21		1E+30		253,8408773	
12		\$G\$6		т x4		80		0		346,7		44,0964108		1E+30	
13		\$H\$6		т x5		100,651583		0		400		236,314152		83,68737167	
14		\$I\$6		т x6		99		255,688705		566,67		1E+30		255,6887046	
15		\$J\$6		т x7		66		0		245		128,348705		5,83915E+17	
16		\$K\$6		т x8		101,978416		0		341,4		54,6793853		15,31363159	
17		\$L\$6		т x9		72		0		190,37		163,845444		1E+30	
18															
19		Ограничения													
20															
21		Ячейка		Имя		Результ. значение		Теневая Цена		Ограничение Правая часть		Допустимое Увеличение		Допустимое Уменьшение	
22		\$M\$6		т Всього		748,5		-1397,18		748,5		0,1182513		0,110080135	
23		\$M\$8		грн. Всього		1323928,07		0,21		1323928,066		6516,49364		1361,065582	
24		\$M\$10		тис.грн. Всього		641314,28		1,63		641314,2785		81,4922932		123,4850292	
25		\$M\$14		тис.грн. Всього		1613,93		0,00		1603,605254		10,3282488		1E+30	
26		\$M\$18		Лінія 1 Річна потужність, т		748,5		0		4230		1E+30		3481,5	
27		\$D\$13		т/рік x1		59		22,5601936		0		2,05102063		23,74299558	
28		\$E\$13		т/рік x2		71		0		0		1E+30		18,87000085	
29		\$F\$13		т/рік x3		51		0		0		1E+30		29	
30		\$G\$13		т/рік x4		80		44,0964108		0		2,55906249		19	
31		\$H\$13		т/рік x5		67		0		0		1E+30		33,65158305	
32		\$I\$13		т/рік x6		74		0		0		1E+30		25	
33		\$J\$13		т/рік x7		66		128,348705		0		1,21101491		30,22252784	
34		\$K\$13		т/рік x8		67		0		0		1E+30		34,9784161	
35		\$L\$13		т/рік x9		72		163,845444		0		3,34994814		7,017564743	
36															
37		Базовый вариант / Отчет по результатам / Отчет по устойчивости / Отчет по пределам													

Рис. 7.15

У таблиці 1 приводяться наступні значення для змінних:

- результат рішення задачі;
- нормована вартість, тобто додаткові двоїсті змінні V_j , які, показують, наскільки змінюється цільова функція при примусовому включенні одиниці цієї продукції в оптимальне рішення;
- коефіцієнти цільової функції;
- граничні значення приросту коефіцієнтів ΔC_j цільової функції, при яких зберігається набір змінних, які входять в оптимальне рішення.

У таблиці 2 приводяться аналогічні значення для обмежень:

величина використаних ресурсів;

тіньова ціна, тобто двоїсті оцінки z_i , які показують, як зміниться цільова функція при зміні ресурсів на одиницю;

значення приросту ресурсів Δb_j , при яких зберігається оптимальний набір змінних, які входять в оптимальне рішення.

Задачі аналізу, які можна вирішувати за допомогою приведених величин ΔC_j й Δb_j

Коротко за звітом по стійкості:

показник «Нормована вартість», показує як зміниться цільова функція при примусовому випуску одиниці j -го виду продукції. Цей звіт показує, яка продукція є вигідною.

В нашому випадку є вигідним збільшення обсягів виробництва карамелі «Десертна» і «Вікторія».

Звіт по границям

Цей звіт наведений на рис. 7.16. У ньому показано, у яких межах може змінюватися випуск продукції, що увійшла в оптимальне рішення, при збереженні структури оптимального рішення:

приводяться значення x_j в оптимальному рішенні;

приводяться нижні межі зміни значень x_j .

А1

Разрыв страницы

Excel 11.0 Отчет по пределам

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам								
2	Рабочий лист: [Оптимізація карамель.XLS]Отчет по пределам 2								
3	Отчет создан: 17.05.2007 19:07:35								
4									
5									
6									
7	Целевое								
8	Ячейка	Имя	Значение						
9	\$M\$9	грн. Всього	290005,44						
10									
11									
12	Изменяемое			Нижний предел		Целевой результат	Верхний предел		Целевой результат
13	Ячейка	Имя	Значение						
14	\$D\$6	т x1	59	59		290005,437	59		290005,437
15	\$E\$6	т x2	89,8700009	89,8700009		290005,437	89,8700009		290005,437
16	\$F\$6	т x3	80	80		290005,437	80		290005,437
17	\$G\$6	т x4	80	80		290005,437	80		290005,437
18	\$H\$6	т x5	100,651583	100,651583		290005,437	100,651583		290005,437
19	\$I\$6	т x6	99	99		290005,437	99		290005,437
20	\$J\$6	т x7	66	66		290005,437	66		290005,437
21	\$K\$6	т x8	101,978416	101,978416		290005,437	101,978416		290005,437
22	\$L\$6	т x9	72	72		290005,437	72		290005,437
23									
24									
25									
26									

Базовый вариант

Отчет по результатам

Отчет по устойчивости

Отчет по пределам

Оптимізація

Рис. 7.16

Крім цього, у звіті зазначені значення цільової функції при випуску даного типу продукції на нижній межі. Так, що

$$F = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4 + C_5 x_5 + C_6 x_6 + C_7 x_7 + C_8 x_8 + C_9 x_9 = 290005,437$$

Далі приводяться верхні межі зміни x_j і значення цільової функції при випуску продукції, що увійшла в оптимальне рішення на верхніх межах.

На цьому ми закінчуємо опис звітів аналізу оптимального рішення.

Практична робота № 8

Оптимізація виробничої програми ковбасного виробництва

Задача

У табл. 9.1 дані асортимент виробів, що випускаються в розрізі основних показників роботи підприємства.

Побудувати модель оптимальної річної програми підприємства в загальному, табличному та аналітичному вигляді за критерієм оптимізації – максимум прибутку.

Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент, який задається варіантом.

Побудувати матрицю коефіцієнтів.

Виконати розв'язання задачі на ПК.

Виконати економічний аналіз отриманих результатів.

Таблиця 9.1

Вихідні дані для оптимізації ковбасного виробництва

Асортимент продукції, найменування ковбаси	Норми витрат сировини, т/т		Оптова ціна 1 тонни, грн	Собівар тість 1 тонни, грн	Трудомі скість 1 тонни люд./ год.	Норми часу роботи обладна ння, год./т	Попит	
	ялови чина	свинина					мінімаль ний	максимал ьний
1.Останкінська	0,7	0,25	5170	4500	57,5	3,8	500	700
2.Лікарська	0,7	0,25	4870	4320	57,5	3,8	600	900
3.Шахтарська	0,7	0,25	3850	3360	57,5	3,8	1000	1200
4.Чайна	0,7	0,25	3320	3010	57,5	3,8	300	500
5.Сосиски молочні	0,5	0,5	4160	3865	55,5	5,2	100	200
6.Сосиски яловичі	0,7	0,25	4050	3800	55,5	5,2	400	500
7.Сосиски шкільні	0,5	0,5	3980	3750	55,5	5,2	300	400
8.Сардельки яловичі	0,7	0,25	4240	3970	55,7	5,2	120	160
9.Одеська п/к	0,3	0,3	6600	5400	74,2	42,4	500	700
10.Московська в/к	0,3	0,3	10270	8500	74,2	42,4	700	800
11.Сервелат в/к	0,3	0,3	10500	8950	74,2	42,4	450	550
12.Московська с/к	0,2	0,5	21000	15600	81,0	158,3	50	70

Варіант визначається за допомогою табл. 9.2. Варіант задається чотирма цифрами, якими позначено номери асортименту виробів, на основі яких здобувач буде будувати свою модель.

Врахувати обсяг ресурсів на свій асортимент. Наявність на підприємстві ресурсів така: яловичини – 2000 т; свинини – 750 т; загальна трудомісткість – 190000 люд-год.; час роботи обладнання – 20000 год. на рік.

Таблиця 9.2

	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
Варіант 1	1	2	3	4
Варіант 2	5	6	7	8
Варіант 3	9	10	11	12
Варіант 4	2	3	4	5
Варіант 5	6	7	8	9
Варіант 6	10	11	12	1
Варіант 7	3	4	5	6
Варіант 8	7	8	9	10
Варіант 9	1	3	5	7
Варіант 10	2	4	6	8

Приклад виконання задачі оптимізації виробничої програми підприємства (цеху, дільниці)

Для побудови плану виробництва різних видів продукції на підприємстві потрібно керуватись наявністю, обсягами і нормами використання різних видів ресурсів на одиницю продукції. Також потрібно враховувати розмір попиту на окремі види продукції і ефективність їх виробництва (ціна, прибуток, рентабельність або собівартість одиниці продукції).

Формулювання моделі задачі розрахунку оптимальної виробничої програми підприємства: потрібно визначити оптимальну виробничу програму підприємства по випуску різних видів продукції на основі наявних ресурсів з метою досягнення максимального ефекту від випуску продукції.

Для побудови економіко-математичної моделі задачі введемо такі позначення:

x_j – обсяг виробництва j -того виду продукції.

i – індекс виду ресурсу, $i=1,2,\dots,n$;

j – індекс виду продукції, $j=1,2,\dots,m$;

a_{ij} – норма використання i -того виду ресурсу на одиницю j -того виду продукції;

A_i – обсяг запасів i -того виду ресурсу;

B_j – величина договірних поставок j -того виду продукції;

C_j – ефективність (ціна або прибуток, тоді функція цілі максимізується, або собівартість – тоді мінімізується) виробництва одиниці продукції j -того виду;

Враховуючи введені позначення, математична модель набуде вигляду:

$$F(x) = \sum_{j=1}^m c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

в залежності від вибору c_j .

Обмеження:

1) по використанню наявних ресурсів

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq A_i ;$$

2) по випуску деяких видів продукції

$$x_j < \text{або} \geq B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

3) умова невід'ємності даних

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Приклад № 1 виконання практичної роботи

Визначити оптимальний асортимент продукції ковбасного цеху з метою максимізації прибутку. Дані для розрахунку в табл. 9.3

Таблиця 9.3

Вихідні дані для оптимізації ковбасного виробництва

Асортимент продукції, найменування ковбаси	Норми витрат сировини, т/т		Оптова ціна 1 тонни, грн	Собівартість 1 тонни, грн	Трудомісткість 1 тонни люд./год.	Норми часу роботи обладнання год./т	Попит	
	яловичина	свинина					мінімальний	максимальний
1.Останкінська	0,7	0,25	5170	4500	57,5	3,8	500	700
2. Лікарська	0,7	0,25	4870	4320	57,5	3,8	600	900
3. Сосиски молочні	0,5	0,5	4160	3865	55,5	5,2	100	200
4.Московська с/к	0,2	0,5	21000	15600	81,0	158,3	50	70

Розв'язок

Спочатку побудуємо функцію цілі, для цього розрахуємо прибуток однієї тони кожного виду продукції.

Функція цілі – максимум прибутку – запишеться так:

$$P(x) = (5170 - 4500)X_1 + (4870 - 4320)X_2 + (4160 - 3865)X_3 + (21000 - 15600)X_4 = \\ = 670X_1 + 550X_2 + 295X_3 + 5400X_4 \rightarrow \max.$$

Запишемо всі можливі за таблицею обмеження. Для цього потрібно розрахувати обсяги ресурсів всіх видів на свій асортимент продукції.

Кількість яловичини на весь випуск продукції розраховується як сума добутків норми витрат яловичини на 1 т і максимальний попит на відповідну продукцію:

$$0,7 \cdot 700 + 0,7 \cdot 900 + 0,5 \cdot 200 + 0,2 \cdot 70 = 490 + 630 + 100 + 14 = 1234 \text{ т.}$$

Аналогічно розрахуємо кількість свинини на весь випуск:

$$0,25 \cdot 700 + 0,25 \cdot 900 + 0,5 \cdot 200 + 0,5 \cdot 70 = 535 \text{ т.}$$

Аналогічно розрахуємо загальну трудомісткість продукції на весь випуск продукції:

$$57,5 \cdot 700 + 57,5 \cdot 900 + 55,5 \cdot 200 + 81,0 \cdot 70 = 108770 \text{ люд./год.}$$

Аналогічно розрахуємо загальний час роботи обладнання:

$$3,8 \cdot 700 + 3,8 \cdot 900 + 5,2 \cdot 200 + 158,3 \cdot 70 = 18201 \text{ год.}$$

Тепер запишемо систему обмежень задачі:

1)За яловичиною:

$$0,7X_1 + 0,7X_2 + 0,5X_3 + 0,2X_4 \leq 1234;$$

2)За свининою:

$$0,25X_1 + 0,25X_2 + 0,5X_3 + 0,5X_4 \leq 535;$$

3)За трудовими ресурсами (трудомісткість):

$$57,5X_1 + 57,5X_2 + 55,5X_3 + 81,0X_4 \leq 108770;$$

4)За часом роботи обладнання:

$$3,8 \cdot X_1 + 3,8X_2 + 5,2X_3 + 158,3X_4 \leq 8201.$$

5)За попитом:

$$X_1 \leq 700; \quad X_1 \geq 500;$$

$$X_2 \leq 900; \quad X_2 \geq 600;$$

$$X_3 \leq 200; \quad X_3 \geq 100;$$

$$X_4 \leq 70; \quad X_4 \geq 50.$$

Розв'язавши задачу за допомогою симплекс-метода на ПК дістанемо таке рішення:

$$X_1 = 700\text{т};$$

$$X_2 = 900\text{т};$$

$$X_3 = 200\text{т};$$

$$X_4 = 70\text{т}.$$

Проведемо аналіз отриманих результатів за табл. 9.4

Таблиця 9.4

Вплив оптимізації асортиментної програми на основні техніко-економічні показники роботи підприємства

№ п/п	Назва показника	До оптимізації	Після оптимізації	Відхилення
1.	Випуск продукції, т:			
	Останкінська	500	700	+200
	Лікарська	600	900	+300
	Сосиски молочні	100	200	+100
	Московська с/к	50	70	+20
2.	Вартість продукції, тис. грн.	6973	10304	+3331
3.	Собівартість, тис. грн. грн. продукції, тис.	6008,5	8903	+2894,5
4.	Прибуток, тис. грн.	964,5	1401	+436,5
5.	Рентабельність продукції, %	16,05	15,73	-0,32
6.	Витрати на 1 грн. продукції, коп./грн.	86,17	86,40	+0,23

Кількість продукції до оптимізації записуємо за мінімальним попитом, а після – той що отримали внаслідок рішення задачі.

Вартість продукції до і після оптимізації розраховуємо, як суму добутків оптової ціни 1 т і відповідної кількості продукції до і після оптимізації.

До оптимізації :

$$5170 \cdot 500 + 4870 \cdot 600 + 4160 \cdot 100 + 21000 \cdot 50 = 6973 \text{ тис. грн.}$$

Після оптимізації:

$$5170 \cdot 700 + 4870 \cdot 900 + 4160 \cdot 200 + 21000 \cdot 70 = 10304 \text{ тис. грн.}$$

Аналогічно розраховуємо собівартість випуску продукції до і після оптимізації як суму добутків собівартості 1 т продукції і відповідної кількості продукції до і після оптимізації.

До оптимізації:

$$4500 \cdot 500 + 4320 \cdot 600 + 3865 \cdot 100 + 15600 \cdot 50 = 6008,5 \text{ тис. грн.}$$

Після оптимізації:

$$1500 \cdot 700 + 4320 \cdot 900 + 3865 \cdot 200 + 15600 \cdot 70 = 8903 \text{ тис. грн.}$$

Прибуток розраховуємо як різницю між вартістю і собівартістю продукції. Рентабельність продукції розраховується як відношення прибутку до собівартості продукції помножене на 100%. Витрати на 1 грн. продукції розраховуються як відношення собівартості до вартості продукції.

Висновок: проведену оптимізацію виробничої програми підприємства не можна вважати доцільною через те, що рентабельність продукції падає, а витрати на одну гривню зростають.

Приклад № 2 виконання практичної роботи

В табл. 9.5 подано дані щодо асортименту виробів, який випускається, в розрізі основних показників роботи підприємства.

Потрібно: побудувати модель оптимальної виробничої річної програми підприємства за критерієм – максимум прибутку; врахувати обсяг ресурсів на свій асортимент. Наявність ресурсів така: яловичини – 2000 т; свинини – 750 т; загальна трудомісткість – 190000 люд.-год.; час роботи обладнання – 20000 год. на рік.

Таблиця 9.5

Вихідні дані для оптимізації ковбасного виробництва

Найменування ковбаси	Норми витрат сировини, т/т		Ціна 1 тонни грн.	Витрати на 1 т, грн.	Трудомісткість 1 т, люд./год.	Норми часу роб. облад., год./т	Випуск продукції до оптимізації, т	Максимальний попит
	Яловичина	Свинина						
1.Останкінська	0,6	0,35	5170	4500	58,4	4,0	500	700
2.Лікарська	0,5	0,45	4870	4320	54,6	4,0	600	900
3.Шахтарська	0,7	0,25	3850	3360	55,2	3,8	1000	1200
4.Чайна	0,8	0,15	3320	3010	57,5	3,8	300	500

Розв'язок

Спочатку побудуємо математичну модель задачі, для цього визначимо спочатку змінні: X_j – випуск продукції j -того виду. В даній моделі чотири змінні X_1 , X_2 , X_3 і X_4 – це відповідно випуск ковбас “Останкінська”, “Лікарська”, “Шахтарська” і “Чайна”.

Для того, щоб побудувати функцію цілі – максимум річного прибутку – потрібно визначити прибуток з виробітку 1 т всіх видів продукції:

$$\text{“Останкінська”}: 5170 - 4500 = 670 \text{ грн.};$$

“Лікарська”: $4870 - 4320 = 550$ грн.;

“Шахтарська”: $3850 - 3360 = 490$ грн.;

“Чайна”: $3320 - 3010 = 310$ грн.

Функція цілі максимум прибутку запишеться так:

$$F(x) = 670X_1 + 550X_2 + 490X_3 + 310X_4 \rightarrow \max$$

Обмеження задачі:

– за яловичиною:

$$0,6X_1 + 0,5X_2 + 0,7X_3 + 0,8X_4 \leq 2000;$$

– за свининою:

$$0,35X_1 + 0,45X_2 + 0,25X_3 + 0,15X_4 \leq 750;$$

– за трудомісткістю:

$$58,4X_1 + 54,6X_2 + 55,2X_3 + 57,2X_4 \leq 190000;$$

– за часом роботи обладнання:

$$4X_1 + 4X_2 + 3,8X_3 + 3,8X_4 \leq 20000;$$

– за попитом:

$$X_1 \leq 700; X_2 \leq 900; X_3 \leq 1200; X_4 \leq 500;$$

– умова невід’ємності даних:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0.$$

Вирішуємо задачу за допомогою симплекс-методу в Excel з використанням інструменту “Пошук рішення” в меню “Сервіс”. Для цього побудуємо на листі Excel табл. 9.6.

Таблиця 9.6

Матриця коефіцієнтів для рішення задачі оптимізації
виробничої програми підприємства

Найменування змінних	Значення змінних	Функція цілі	Обмеження							
			За яловичиною	За свининою	За трудомісткістю	За часом роботи обладнання	За попитом на			
							X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
X ₁	500	670	0,6	0,35	58,4	4,0	1			
X ₂	600	550	0,5	0,45	54,6	4,0		1		
X ₃	1000	490	0,7	0,25	55,2	3,8			1	
X ₄	300	310	0,8	0,15	57,5	3,8				1
Формули обмежень і функції цілі										
Знак обмеження		max	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤	≤
Запас ресурсу			2000	750	190000	20000	700	900	1200	500

Отримали таке рішення задачі: $X_1=700$ т; $X_2=280$ т; $X_3=1200$ т; $X_4=500$ т.

Після того як рішення отримано, потрібно надрукувати звіт про результати. Звіт про результати – це один із варіантів подання рішення задачі за допомогою інструменту “Пошук рішення” в меню “Сервіс”.

Проведемо аналіз результатів за допомогою табл. 9.7.

Таблиця 9.7

Економічна ефективність оптимального рішення

Найменування показника	Значення показника		Відхилення	
	До оптимізації	Після оптимізації	Абсолютне	Відносне
1. Випуск продукції, т				
“Останкінська”	500	700	200	40
“Лікарська”	600	280	–320	–53,33
“Шахтарська”	1000	1200	200	20
“Чайна”	300	500	200	66,67
2. Вартість випущеної продукції, грн.	10353000	11262600	909600	8,79
3. Вартість витрат на випущену продукцію, грн.	9105000	9896600	791600	8,69
4. Прибуток, грн.	1248000	1366000	118000	9,46
5. Рентабельність продукції, %	13,7	13,8	0,10	–
6. Витрати на одиницю продукції, грн.	0,8795	0,8787	–0,0008	–0,09
7. Використання ресурсів:				
– яловичина, т	2000	1800	–200	–10,00
– свинина, т	750	750	0	0,00
– трудомісткість, люд-год.	190000	151158	–38842	–20,44
– час роботи обладнання, год.	20000	10380	–9620	–48,10

Вартість продукції до і після оптимізації розраховуємо, як суму добутків ціни 1 т і відповідної кількості продукції до і після оптимізації. Аналогічно розраховуємо собівартість випуску продукції до і після оптимізації як суму добутків собівартості 1 т продукції і відповідної кількості продукції до і після оптимізації.

Економічний аналіз отриманих результатів

Дану оптимізацію виробничої програми можна вважати доцільною, так як прибуток зростає на 9,6% і складе 1366 тис. грн., також рентабельність продукції зросте на 0,1 %, а витрати на одиницю продукції знизяться на 0,008 коп., що говорить про підвищення ефективності виробництва.

Серед ресурсів повністю використовується лише свинина, тобто цей ресурс є лімітним на підприємстві. Якщо збільшити запас свинини, то можливо збільшити випуск продукції на підприємстві.

Практична робота № 9

Оптимізація виробничої програми хлібозаводу

Задача. На хлібозаводі випускається 10 сортів хлібобулочних виробів.

Види продукції визначаються за допомогою табл. 10.1 та 10.2.

Кількість печей – за варіантом (табл.10.2).

Річна продуктивність печі – за варіантом (табл.10.3).

Ціна на сировину – в таблиці 10.4.

Рецептура за асортиментом – в таблиці 10.5.

Згідно варіанту потрібно:

1. Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент
2. Побудувати модель оптимального річного плану підприємства у загальному вигляді по критерію оптимізації - **максимальний прибуток**.
3. За допомогою отриманих нерівностей чи рівнянь побудувати та записати матрицю коефіцієнтів і функцію цілі. Вирішити задачу за допомогою програми MS Excel та функції "Поиск решения".
5. Заповнити вихідну таблицю та дати економічний аналіз.

№ варіанту	Номери видів продукції									
1	1	5	7	11	12	32	33	42	43	44
2	1	6	8	11	13	32	34	42	45	47
3	1	4	9	11	14	32	35	42	48	49
4	2	5	10	11	15	32	36	42	50	51
5	2	6	11	16	17	32	37	43	45	48
6	2	4	12	13	18	32	38	43	46	49
7	3	5	12	14	19	32	39	43	47	50
8	3	6	12	15	20	32	40	44	45	49
9	3	4	12	16	21	32	41	44	47	51
10	1	5	13	14	22	33	36	45	50	52

Таблиця 10.2

№	Види продукції	Ціна 1 т, грн.	Собівар- тість 1 т, грн.	Попит, т				№ печі
				Мін.	Мак с.	Серед.	План	
1	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
2	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
3	Батон дорожній	866,67	715	50	500	275	400	1,3
4	Батон дорожній в уп.	950	783,75	50	500	275	400	1,3
5	Батон святковий в уп.	1300	957,5	50	500	275	400	1,3
6	Батон святковий	1100	907,5	50	500	275	400	1,3
7	Булка дніпровська	15000	1267,5	0	50	25	10	2
8	Булка дніпровська в уп.	1650	1394,25	0	50	25	5	2
9	Булка дніпровська в уп.	1650	1394,25	0	50	25	5	2
10	Булка Завиток	1111	938,89	0	50	25	10	2
11	Булочка родзинка	2000	1700	25	75	50	70	2
12	Булочка Світанок	2083	1770,83	25	75	50	70	6
13	Булочка столична	1666,67	1416,67	25	75	50	70	6

14	Булочка столична в уп.	1833,33	1558,33	25	75	50	35	6
15	Булочка харківська	2000	1700	25	75	50	70	6
16	Булочка харківська в уп.	2250	1912,50	25	75	50	35	6
17	Вироби здібні з повидлом	1666,67	1408,34	0	50	25	0	9, 10
18	Витушка київська	1766,67	1492,84	0	50	25	0	9, 10
19	Здоба з повидлом	2300	1943,5	0	50	25	5	9, 10
20	Здоба столична	2500	2112,5	0	50	25	10	9, 10
21	Здоба столична в уп.	2700	2281,5	0	50	25	5	9, 10
22	Калач український	2100	1774,5	0	100	50	0	7, 8
23	Калач український в уп.	2185,72	1846,93	0	100	50	0	7, 8
24	Паляниця столична	1055,83	892,18	0	500	250	100	5, 6
25	Паляниця столична в уп.	1094,44	924,8	0	500	250	50	5, 6
26	Плетінка з маком	941,67	795,71	0	50	25	25	4
27	Плетінка з маком	1041,67	880,21	0	50	25	25	4
28	Плетінка з маком в уп.	1300	1098,50	0	50	25	10	4
29	Плетінка українська	2000	1690	0	50	25	25	4
30	Плюшка московська	2300	1943,5	0	50	25	0	7, 8
31	Плюшка московська в уп.	2493,72	2107,19	0	50	25	0	7, 8
32	Ріжки дніпровські	1530	1338,75	10	150	80	140	9, 10
33	Ріжки з повидлом	1840	1610	10	150	80	140	9, 10
34	Ріжки з повидлом	2100	1837,5	10	150	80	140	9, 10
35	Ріжки з повидлом	2080	1820	10	150	80	125	9, 10
36	Ріжки з повидлом в уп.	1993	1743,88	10	150	80	60	9, 10
37	Ріжки з повидлом в уп.	1666,67	1458,34	10	150	80	50	9, 10
38	Рогалик маковий	2750	2406,25	10	150	80	100	7, 8
39	Рогалі козацькі	1184,3	1036,26	10	150	80	75	7, 8
40	Рогалі козацькі в уп.	1335	1168,13	10	150	80	30	7, 8
41	Ріжки з маком	2033	1779,05	10	150	80	75	7, 8
42	Хліб білий	950	855,	100	500	300	300	4, 5
43	Хліб висівковий	750	675	100	500	300	300	4, 5
44	Хліб гірчичний	916,67	825	100	500	300	300	4, 5
45	Хліб пшеничний	826,67	744	100	500	300	300	4, 5
46	Хліб пшеничний	890	801	100	500	300	300	4, 5
47	Хліб святошинський	650	585	100	500	300	300	6
48	Хліб святошинський в уп.	712,5	641,25	100	500	300	150	6
49	Хліб хотинський	541,67	487,5	100	500	300	300	6
50	Хліб хотинський в уп.	593,75	534,38	100	500	300	300	6
51	Хлібці з висівками	940	846	100	500	300	300	6
52	Хлібці з висівками в уп.	1040	936	100	500	300	300	6

Таблиця 10.3

Річна продуктивність печей, т/рік.

1	Піч БН-50 № 1	8970
2	Піч БН-50 № 2	8970
3	Піч БН-50 № 3	8970
4	Піч БН-50 № 4	8970
5	Піч БН-50 № 5	8970
6	Піч БН-50 № 6	8970
7	Піч БН-50 № 7	8970
8	Піч БН-50 № 8	8970
9	ПКЄ-9-03	547,2
10	ПКЄ-9-03	548,2

Таблиця 10.4

№ п/п	Назва сировини	Одиниця виміру	Ціна за одиницю
1	Борошно вищ.гат.	тн	516,67
2	Борошно 1 гат.	тн	413,98
3	Ванілін	кг	62,42
4	Висівки	тн	79,17
5	Дріжджі конц.	кг	0,91
6	Дріжджі прес.	кг	1,03
7	Мак	кг	5,67
8	Маргарин	кг	2,76
9	Масло гірчичне	кг	1,65
10	Меланж	кг	3,75
11	Молоко сухе	кг	2,94
12	Олія	кг	2,42
13	Оцет	л	0,87
14	Плівка	тн	1043,12
15	Повидло	кг	1,4
16	Сабза	кг	3,08
17	Сіль	тн	60
18	Цукор	тн	930
19	Цукрова пудра	тн	940

Таблиця 10.5

№	Види продукції	1	2	3	4
Вихід продукції, кг		131,7	131,7	131,7	131,7
Борошно вищ. гат.	1	100	100	100	100
Борошно 1 гат.	2				
Ванілін	3				
Висівки	4				
Дріжджі конц.	5	1,2		2,0	2,0
Дріжджі прес.	6		3,0		
Мак	7				
Маргарин	8		0,1		
Масло	9				
Меланж	10				
Молоко сухе	11				
Олія	12	2,125	2,125		
Оцет	13				
Плівка	14				7
Повидло	15				
Сабза	16				
Сіль	17	1,3	1,3	1,5	1,5
Цукор	18	2	2	6	6
Цукрова пудра	19				

16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
Булочка харківська в уп.	Булочка харківсь	Булочка столична в уп.	Булочка столичн	Булочка Світано	Булочка родзинк	Булка Завиток	Булка дніпропетро вська в уп.	Булка дніпропетро вська в уп.	Булка дніпропетро вська	Батон СВЯТКОВ	Батон СВЯТКОВИЙ в уп.
151,0	151,0	150,0	150,0	150,0	158,5	137,0	163,0	163,0	163,0	142,5	143,5
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0,020	0,050	0,050	0,050			0,020	0,020	0,020	0,020		
2,0	4,0	4,0	4,0	2,4	1,2	3,2	4,0	3,2	1,3	1,6	1,2
					1,5						
10,0	12,0	12,0	20,0	8,9		13,0	13,0	13,0			
3,0	3,0	3,0	3,0	5,0		0,8	0,8	0,8	0,8		
3,0	3,0	3,0	3,0	2,2			2,0	2,0	2,0	2,0	
					3,400					2,550	2,125
14		7					7	7			5
				15	15	12	12	12	12	7	7
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,4	1,4	1,3
15	20	20	15	14	6	5	17	17	17	5	8
1,0	1,0	2,0	2,0	1,0							

28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
Плетінка з маком в уп.	Плетінк а з	Плетінк а з	Паляниц я	Паляниц я	Калач українсь	Калач українсь	Здоба столична в уп.	Здоба столичн	Здоба з повидло	Витушк а	Вироби здібні з повидлом
135,0	135,0	135,0	129,0	129,0	136,5	136,5	150,0	150,0	165,3	131,0	155,0
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
			0,025	0,025	0,025	0,050	0,050	0,050		0,020	0,020
0,8	0,8	1,6	1,6	2,4	2,4	4,0	4,0	3,2	1,2	2,4	2,0
1,0	1,0	1,0									
				7,0	7,0	12,0	12,0	12,7		10,0	10,0
		1,5	1,5			3,0	3,0	4,0		3,0	3,0
			1,0	1,0	1,0	3,0	3,0	3,0			
2,125	2,125	0,850	0,850	0,850					2,125		
0,3	0,3									0,3	
7			7		9		14				
									20	10	15
					5	5					
1,5	1,5	1,5	1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,3	1,0	1,0
7	10	10	12	12	12	20	20	16	20	14	15
										1,5	1,0

40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29
Рогалі козацькі в уп.	Рогалі козацькі	Рогалик маковий	Ріжки з повидло	Ріжки з повидло	Ріжки з повидло	Ріжки з повидло	Ріжки з повидло	Ріжки дніпровс	Плюшка московс	Плюшка московс	Плетінк а
132,0	132,0	165,0	161,7	161,1	161,7	161,7	161,1	132,5	155,0	155,0	150,0
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0,050	0,050							0,025	0,025	0,025	
2,4	4,0	2,4		2,4	3,0		3,2	3,2	3,2		0,8
			3,0			3,0				3,2	
		20,0									1,0
5,0	8,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0		15,2	15,2	9,0	
								6,0	6,8	6,0	
			9,0	9,0	9,0	9,0	9,0	3,0	3,0	2,0	
2,000	2,000										2,125
0,3	0,3										
7			14	14					14		
			20	20	20	20	20				
1,5	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,5	1,0	1,0	1,0	1,5
2	28	15	15	15	15	15	15	22	22	17	4
	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0	2,0					

52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
Хлібці з висівкам	Хлібці з висівкам	Хліб хотинсь	Хліб хотинсь	Хліб святоши	Хліб святоши	Хліб пшенич	Хліб пшенич	Хліб гірчичн	Хліб висівков	Хліб білий	Ріжки з маком
131,5	132,5	131,5	131,5	132,5	132,5	129,2	127,0	140,0	132,5	129,5	153,3
50	50	100	100		90	100	100	100	100	100	100
									0,020		
50	50			10	10						
1,2	1,2	1,2	1,2	2,0	1,6	1,0	0,8	1,2	4,0	2,4	
											2,4
											10,0
									13,0	8,0	5,0
								6			
									0,8	3,0	
		1,700	1,700	3,000	3,000						2,000
				0,3	0,3	0,3	0,3	0,3			
6		6		7							
										12	
1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,3	1,3	1,3	1,0	1,0	1,5
				1	1				2	7	12

Приклад виконання практичної роботи

Робоча модель задачі.

Цільова функція – отримати оптимальний випуск хлібобулочних виробів, що забезпечить **максимальний прибуток** при певних обмеженнях по продуктивності ліній, попиту, ресурсах.

$$F(x) = \sum P_j X_j \rightarrow \max,$$

де P_j – прибуток по j -му виду хлібобулочних виробів, тис. грн.

X_j – оптимальний випуск j -го виду хлібобулочних виробів.

$$P_j = D_j - C_j,$$

де D_j - оптова ціна 1 т j -го виду виробів, грн.

C_j - собівартість 1 т j -го виду виробів, грн.

Оптимальні випуски, т:

X_1 – Батон степовий;

X_2 – Батон соціальний;

X_3 – Хліб новий пш.ф. I гат.;

X_4 – Хліб білий соціальний ф.;

X_5 – Хліб Дарницький подов.;

X_6 – Хліб селянський ф.;

X_7 – Хліб Дарницький подов. соц. 0,7;

X_8 – Хліб висівковий 0,3;

X_9 – Булка апетитна 0,3;

X_{10} – Булка смачна 0,5;

X_{11} – Булка калорійна 0,4;

X_{12} – Булка калорійна 0,4.

Хліб білий соціальний формовий – збитковий.

Вихідні дані до складання моделі оптимального плану наведені в таблицях 10.6, 10.7.

Таблиця 10.6

№	Види продукції	Обсяг виробництва	Ціна 1 т, грн.	Собівартість 1 т, грн.	Прибуток	Попит, т			№ печі
						Мінім.	Максим.	Серед.	
1	Батон степовий	99	3690	2760	930	50	200	125	3
2	Батон соціальний	13,2	3090	2760	330	10	100	55	3
3	Хліб новий пш.ф. I гат.	495	1970	1533	437	100	550	400	1
4	Хліб білий соціальний ф.	23,76	1530	1558	-28	20	30	25	1
5	Хліб Дарницький подов.	102,3	1830	1632	198	80	150	125	2
6	Хліб селянський ф.	204,6	1845	1532	313	150	200	225	2
7	Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	16,5	1750	1642	108	15	50	22,5	2
8	Хліб висівковий 0,3	18,0	3600	2830	770	10	50	22,5	3
9	Булка апетитна 0,3	29,0	4200	3796	404	10	50	32,5	3
10	Булка смачна 0,4	133,0	6600	4666	1934	10	200	140	3
11	Булка смачна 0,5	40,0	6600	4707	1893	15	100	42,5	3
12	Булка калорійна 0,4	52,0	7300	6216	1084	50	80	55	3

Таблиця 10.7

Річна продуктивність печей	
Піч № 1	3900
Піч № 2	3400
Піч № 3	2400

Використовуючи дані таблиці 10.6, визначимо прибуток по кожному виду:

$$P_1 = 930 \text{ грн.}$$

$$P_2 = 330 \text{ грн.}$$

$$P_3 = 437 \text{ грн.}$$

$$P_4 = -28 \text{ грн.}$$

$$P_5 = 198 \text{ грн.}$$

$$P_6 = 313 \text{ грн.}$$

$$P_7 = 108 \text{ грн.}$$

$$P_8 = 770 \text{ грн.}$$

$$P_9 = 404 \text{ грн.}$$

$$P_{10} = 1934 \text{ грн.}$$

$$P_{11} = 1893 \text{ грн.}$$

$$P_{12} = 1084 \text{ грн.}$$

Тоді **цільова функція** моделі оптимізації прийме наступний вигляд:

$$930 X_1 + 330 X_2 + 437 X_3 - 28 X_4 + 198 X_5 + 313 X_6 + \\ + 108 X_7 + 770 X_8 + 404 X_9 + 1934 X_{10} + 1893 X_{11} + 1084 X_{12} \rightarrow \max.$$

Обмеження:

по попиту:

$$T_j \min < X_j < T_j \max,$$

де $T_j \min$, $T_j \max$ – мінімальний та максимальний попит на j -й вид продукції.

по продуктивності ліній:

$$\sum_{I=j}^n X_j \cdot K_j \leq R_y,$$

де K_j – коефіцієнт використання потужності j -го виду продукції;

R_y – річна продуктивність y -тої лінії для кожного j .

по витратах на сировину:

$$B_0 \leq B$$

B , B_0 – вартість сировини в базовому і оптимальному варіанті.

БАЗОВИЙ ВАРІАНТ.

В базовому варіанті визначаються обсяги закупівлі сировинних ресурсів у вартісному виразі для забезпечення виробництва продукції в запланованих обсягах та одночасно розраховуються техніко-економічні показники: обсяг товарної продукції, витрати на виробництво, загальний прибуток, рентабельність, витрати на 1 грн. товарної продукції.

Вихідні дані представлені в таблиці 10.8.

Таблиця 10.8

ЗМІННІ ВЕЛИЧИНИ

	Батон степовий	Батон соціальний	Хліб новий пш.ф. І гат.	Хліб білий соціальний ф.	Хліб Дарницький подовий	Хліб селянський ф.	Хліб Дарницький подовий соціальний 0,7	Хліб висівковий 0,3	Булка апетитна 0,3	Булка смачна 0,4	Булка смачна 0,5	Булка калорійна 0,4	Загалом
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Обсяг виробництва	99	13,2	495	23,76	102,3	204,6	16,5	18	29	133	40,00	52,00	1226,36
Нижня межа попиту	50	10	100	20	80	150	15	10	10	10	15	50	
Верхня межа попиту	200	100	550	30	150	200	50	50	50	200	100	80	
Коефіцієнти цільової функції	930,00	330,00	437,00	-28,00	198,00	313,00	108,00	770,00	404,00	1934,00	1893,00	1084,00	813038,92
Оптова ціна 1 т	3690,00	3090,00	1970,00	1530,00	1830,00	1845,00	1750,00	3600,00	4200,00	6600,00	6600,00	7300,00	3719171,8
Собівартість випуску 1 т	2760,00	2760,00	1533,00	1558,00	1632,00	1532,00	1642,00	2830,00	3796,00	4666,00	4707,00	6216,00	2906132,88

Продовження таблиці 10.8

ОБМЕЖЕННЯ ПО СИРОВИННІ													Ліва частина	Напря мок	Вартість борошна	Ціна за 1 т	Вартість
Вихід продукції, кг	135,5	146,0	134,0	134,0	148,0	150,0	148,0	124,6	136,0	148,8	135,0	135,5					
Борошно 1 гатунку	100	100	0	0	0	0	0	0	100	100	100	100					
<i>К-ть борошна вищ. гат.</i>	73,06	9,04	0	0	0	0	0	0	21,32	89,38	29,63	38,38	260,815←			1300	339059,62
Борошно 1 гат.	0	0	100	100	40	40	40	88	0	0	0	0					
<i>К-ть борошна 1 гат.</i>	0	0	369,40	17,73	27,65	54,56	4,46	12,71	0	0	0	0	486,515			1700	827075,70
Борошно житнє	0	0	0	0	60	60	60	0	0	0	0	0					
<i>К-ть борошна житнього</i>	0	0	0	0	41,47	81,84	6,69	0	0	0	0	0	130,002←			1600	208003,46
Висівки	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0					
<i>К-ть висівоків</i>	0	0	0	0	0	0	0	1,7335	0	0	0	0	1,734←			340	589,41
Загальна кількість борошна	73,06	9,04	369,4	17,73	69,12	136,4	11,15	14,45	21,32	89,38	29,63	38,38	879,1 ←		1374728		
Сіль	1,3	1,5	1,5	1,5	1,3	1,3	1,5	1,3	1	1,4	1	1	12,06←			1,2	14,48
Дріжджі конц.	1	2	1,2	1,2	0,8	0	1,2	1,6	1,2	4	1,3	3,2	11,92←			5,6	66,75
Цукор	0	1	0	0	0	2	10	0	28	17	17	16	36,28←			6,5	235,79
Маргарин	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	9	12	8,43←			8,3	69,95
Яйце	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5	5	7,87←			16,25	127,88
Ванілін	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	1,73←			97	168,15
Ізюм	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	4,61←			17	78,29
Часник	0	0	0	0	0	0	0	0	2,3	0	0	0	0,49←			20	9,81
Олія	0	3	1,7	0	0	0	2,1	0,85	0	2	0	0	1197,05←			6,5	7780,83
Загальна вартість сировини	94986,78	12012,59	633486,3	30144,79	113363,6	223715,9	18517,21	22479,68	27770,89	118118,15	38599,98	50084,24	1383280		1383280	сума =	1383280
Витрати сировини на 1 т хлібобулочних виробів	959,46	910,04	1279,77	1268,72	1108,15	1093,43	1122,25	1248,87	957,62	888,11	965,00	963,16	1127,96				

ПРОДУКТИВНІСТЬ ЛІНІЙ

Піч № 1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	518,7 6	←	3900
Піч № 2	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	323,4	←	3400
Піч № 3	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	384,2	←	2400

При переході до оптимізаційного варіанту необхідно скопіювати вихідні дані з базового варіанту, при цьому в першій таблиці будуть вказані такі величини: оптимальний обсяг виробництва, нижня та верхня межа попиту, коефіцієнт цільової функції, оптова ціна 1т, собівартість 1 т продукції.

Друга таблиця – це обмеження, які ми вводимо. В нашому варіанті встановлені такі обмеження: по продуктивності ліній, по попиту на кожний вид продукції, по витратах на сировину.

Пакет EXCEL дозволяє обрахувати оптимізаційний варіант, коли введені всі обмеження. Ми заходимо в меню “Сервіс”, далі “Пошук рішення”. На моніторі з’являється діалогове вікно з трьома рамками. В першій рамці розміщуються адреси клітинок цільової функції, в другій – оптимального випуску продукції, в третій – наших обмежень. Після перевірки правильності адрес наших показників, запускаємо програму на виконання.

В результаті виконання програми повинно з’явитися повідомлення про коректність моделі і правильності розрахунків. Це повідомлення міститься у вікні, яке дозволяє додатково обрахувати три звіти: по результатам, по границям, по стійкості.

В результаті проведеної оптимізації підприємство отримає можливість збільшити випуск продукції на 86,7 т, або на 6,61 %.

Відбудуться зміни по асортименту (табл. 10.9).

Таблиця 10.9

Показники	Одиниця виміру	До оптим.	Після оптим.	+ –	%
1. Випуск продукції – всього	тонн	1226,4	1313,1	86,7	6,61%
в тому числі в асортименті:					
Батон степовий	т	99	200,0	101,0	50,5%
Батон соціальний	т	13,2	100,0	86,8	86,8%
Хліб новий пш.ф. І гат.	т	495	283,1	-211,9	-74,8%
Хліб білий соціальний ф.	т	23,76	10,0	-13,8	-137,6%
Хліб Дарницький подов.	т	102,3	80,0	-22,3	-27,9%
Хліб селянський ф.	т	204,6	150,0	-54,6	-36,4%
Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	т	16,5	10,0	-6,5	-65,0%
Хліб висівковий 0,3	т	18	50,0	32,0	64,0%
Булка апетитна 0,3	т	29	50,0	21,0	42,0%
Булка смачна 0,4	т	133	200,0	67,0	33,5%
Булка смачна 0,5	т	40	100	60,0	60,0%
Булка калорійна 0,4	т	52	80	28,0	35,0%
2. Обсяг товарної продукції	тис. грн.	3719,2	5014,7	1295,5	25,8%
3. Витрати на виробництво	тис. грн.	2906,1	3886,8	980,7	25,2%
4. Загальний прибуток	тис. грн.	813,0	1127,8	314,8	27,9%
5. Рентабельність продукції	%	28,0%	29,0%	1,04%	
6. Витрати на 1 грн. товарної продукції	коп.	78,1	77,5	-0,63	-0,8%
6. Потреба у сировині :					
потреба у борошні					
Борошно вищого ґатунку	т	260,8	520,4	259,57	49,9%
Борошно І ґатунку	т	486,5	318,4	-168,14	-52,8%
Борошно житнє	т	130,0	96,5	-33,52	-34,7%
Висівки	т	12,1	12,4	0,37	3,0%
Сіль	кг	11,9	15,3	3,38	22,08 %
Дріжджі конц.	кг	36,3	58,5	22,27	38,0%
Цукор	кг	8,4	17,0	8,53	50,3%
Маргарин	кг	7,9	13,4	5,51	41,2%
Яйце	л	1,7	4,8	3,08	64,0%
Ванілін	кг	4,6	7,1	2,48	35,0%
Ізюм	кг	0,5	0,8	0,36	42,0%
Часник	кг	1197,1	1244,8	47,73	3,8%
Олія	кг	1383,3	1383,3	0,0	0%
8. Загальна потреба у коштах	тис. грн.	1226,4	1313,1	86,7	6,61%

Після оптимізації асортименту збільшиться випуск на наступні види продукції: Батон степовий – на 50,5%, Батон соціальний – на 86,8%, Хліб висівковий 0,3 – на 64,0%, Булка апетитна 0,3 – на 42,0%, Булка смачна 0,4 – на 33,5%, Булка смачна 0,5 – на 60,0%, Булка калорійна 0,4 – на 35,0%.

Зменшиться випуск на наступні види продукції: Хліб новий пшеничний формовий I гатунку, Хліб білий соціальний формовий, Хліб Дарницький подовий, Хліб селянський формовий, Хліб Дарницький подовий соціальний 0,7.

Потреба у ресурсах теж зазнає певних змін. Збільшиться потреба у борошні вищого гатунку на 259,57 т (49,9%); у висівках на 0,37 т (3,0%).

Зменшиться потреба в борошні I гатунку на 168,14 т (–52,8%); у борошні житньому на 33,52 т (–4,7%).

З'явиться потреба у додатковій сировині.

Всі ці зміни пов'язані з тим, що програма оптимізації для досягнення мети – отримання максимального прибутку збільшує обсяги випуску більш рентабельних видів продукції та зменшує обсяги випуску менш рентабельних видів продукції. За рахунок цього відбудеться покращення основних техніко-економічних показників:

- обсяг товарної продукції зріс на 1295,5 тис. грн. (25,8%);
- збільшиться рентабельність продукції на 1,04%;
- зменшаться витрати на 1 грн. товарної продукції на 0,63 коп. (–0,8%).

Витрати на виробництво збільшаться за рахунок збільшення обсягу виробництва та за рахунок використання додаткової сировини на 86,7 тис. грн. (6,61%).

Більш детальну інформацію по результатам оптимізації дозволяють отримати звіт по результатам, звіт по границям, звіт по стійкості.

В звіті по результатах порівнюються базовий і оптимальний обсяги виробництва. Тут вказані коефіцієнти цільової функції загалом до і після оптимізації, а також обмеження. Навпроти кожного обмеження є статус. Якщо статус зв'язаний, то це означає що ресурс вже використаний повністю і немає можливості збільшити його. Якщо статус не зв'язаний, то це означає що

відповідного показника є більше, ніж потрібно, частина його не використана (рис. 10.1):

A1		Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам				
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Оптимізація					
3	Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$N\$7	Коефіцієнти цільової функції Загалом	1127826,632	1127826,632		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$B\$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	200		
14	\$C\$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	100		
15	\$D\$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. I гат.	283,1044202	283,1044202		
16	\$E\$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	10		
17	\$F\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	80		
18	\$G\$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	150		
19	\$H\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0	10	10		
20	\$I\$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	50		
21	\$J\$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	50		
22	\$K\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	200		
23	\$L\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	100,00		
24	\$M\$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	80,00		
25						
26						
27	Ограничения					
28	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
29	\$B\$5	Нижня межа попиту Батон степовий	50	\$B\$5<=\$B\$4	не связан.	150
30	\$C\$5	Нижня межа попиту Батон соціальний	10	\$C\$5<=\$C\$4	не связан.	90
31	\$D\$5	Нижня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	100	\$D\$5<=\$D\$4	не связан.	183,10442
32	\$E\$5	Нижня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	10	\$E\$5<=\$E\$4	связанное	0
33	\$F\$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.	80	\$F\$5<=\$F\$4	связанное	0
34	\$G\$5	Нижня межа попиту Хліб селянський ф.	150	\$G\$5<=\$G\$4	связанное	0
35	\$H\$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0	10	\$H\$5<=\$H\$4	связанное	0
36	\$I\$5	Нижня межа попиту Хліб висівковий 0,3	10	\$I\$5<=\$I\$4	не связан.	40
37	\$J\$5	Нижня межа попиту Булка апетитна 0,3	10	\$J\$5<=\$J\$4	не связан.	40
38	\$K\$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,4	10	\$K\$5<=\$K\$4	не связан.	190
39	\$L\$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,5	15	\$L\$5<=\$L\$4	не связан.	85
40	\$M\$5	Нижня межа попиту Булка калорійна 0,4	50	\$M\$5<=\$M\$4	не связан.	30
41	\$B\$6	Верхня межа попиту Батон степовий	200	\$B\$6>=\$B\$4	связанное	0
42	\$C\$6	Верхня межа попиту Батон соціальний	100	\$C\$6>=\$C\$4	связанное	0
43	\$D\$6	Верхня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	550	\$D\$6>=\$D\$4	не связан.	266,89558
44	\$E\$6	Верхня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	30	\$E\$6>=\$E\$4	не связан.	20
45	\$F\$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.	150	\$F\$6>=\$F\$4	не связан.	70
46	\$G\$6	Верхня межа попиту Хліб селянський ф.	250	\$G\$6>=\$G\$4	не связан.	100
47	\$H\$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0	50	\$H\$6>=\$H\$4	не связан.	40
48	\$I\$6	Верхня межа попиту Хліб висівковий 0,3	50	\$I\$6>=\$I\$4	связанное	0
49	\$J\$6	Верхня межа попиту Булка апетитна 0,3	50	\$J\$6>=\$J\$4	связанное	0
50	\$K\$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,4	200	\$K\$6>=\$K\$4	связанное	0
51	\$L\$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,5	100	\$L\$6>=\$L\$4	связанное	0
52	\$M\$6	Верхня межа попиту Булка калорійна 0,4	80	\$M\$6>=\$M\$4	связанное	0
53	\$N\$37	Піч № 1 Ліва частина	293,1044202	\$N\$37<=\$P\$37	не связан.	3606,8956
54	\$N\$38	Піч № 2 Ліва частина	240	\$N\$38<=\$P\$38	не связан.	3160
55	\$N\$39	Піч № 3 Ліва частина	780	\$N\$39<=\$P\$39	не связан.	1620
56	\$R\$33	сумма= Вартість	1383280,10	\$R\$33<=\$P\$33	связанное	0

Рис. 10.1.

В звіті по стійкості важливим показником є нормована вартість, яка показує як зміниться цільова функція при примусовому випуску одиниці j-го виду продукції. Цей звіт показує, яка продукція є вигідною (рис. 10.2):

A1		Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости						
A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по устойчивости							
2	Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Оптимізація							
3	Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34							
4								
5								
6	Изменяемые ячейки							
7								
8	Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
9	\$B\$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	0	930	1E+30	602,3747342	
10	\$C\$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	0	330	1E+30	19,24934737	
11	\$D\$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. I гат.	283,10442	0	437	27,0698218	70,65925857	
12	\$E\$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	0	-27,99999993	461,226784	1E+30	
13	\$F\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	0	198	180,396872	1E+30	
14	\$G\$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	0	313	60,3709755	1E+30	
15	\$H\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	10	0	108	275,213594	1E+30	
16	\$I\$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	0	770	1E+30	343,5510841	
17	\$J\$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	0	404	1E+30	77,00487033	
18	\$K\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	0	1934	1E+30	1630,740508	
19	\$L\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	0,00	1893	1E+30	1563,484013	
20	\$M\$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	0,00	1084	1E+30	755,1126651	
21								
22	Ограничения							
23								
24	Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение	
25	\$B\$5	Нижня межа попиту Батон степовий	50	0	0	1E+30	150	
26	\$C\$5	Нижня межа попиту Батон соціальний	10	0	0	1E+30	90	
27	\$D\$5	Нижня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	100	0	0	1E+30	183,1044202	
28	\$E\$5	Нижня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	10	461,226784	0	10	20	
29	\$F\$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.	80	180,396872	0	80	70	
30	\$G\$5	Нижня межа попиту Хліб селянський ф.	150	60,3709755	0	150	100	
31	\$H\$5	Нижня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	10	275,213594	0	10	40	
32	\$I\$5	Нижня межа попиту Хліб висівковий 0,3	10	0	0	1E+30	40	
33	\$J\$5	Нижня межа попиту Булка апетитна 0,3	10	0	0	1E+30	40	
34	\$K\$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,4	10	0	0	1E+30	190	
35	\$L\$5	Нижня межа попиту Булка смачна 0,5	15	0	0	1E+30	85	
36	\$M\$5	Нижня межа попиту Булка калорійна 0,4	50	0	0	1E+30	30	
37	\$B\$6	Верхня межа попиту Батон степовий	200	-602,374734	0	150	244,2321761	
38	\$C\$6	Верхня межа попиту Батон соціальний	100	-19,2493474	0	90	257,4946535	
39	\$D\$6	Верхня межа попиту Хліб новий пш.ф. I гат.	550	0	0	266,89558	1E+30	
40	\$E\$6	Верхня межа попиту Хліб білий соціальний ф.	30	0	0	20	1E+30	
41	\$F\$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.	150	0	0	70	1E+30	
42	\$G\$6	Верхня межа попиту Хліб селянський ф.	250	0	0	100	1E+30	
43	\$H\$6	Верхня межа попиту Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	50	0	0	40	1E+30	
44	\$I\$6	Верхня межа попиту Хліб висівковий 0,3	50	-343,551084	0	40	187,6347404	
45	\$J\$6	Верхня межа попиту Булка апетитна 0,3	50	-77,0048703	0	40	244,7028239	
46	\$K\$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,4	200	-1630,74051	0	190	263,8553248	
47	\$L\$6	Верхня межа попиту Булка смачна 0,5	100	-1563,48401	0	85	242,8308025	
48	\$M\$6	Верхня межа попиту Булка калорійна 0,4	80	-755,112665	0	30	243,294962	
49	\$N\$37	Піч № 1 Ліва частина	293,10442	0	3900	1E+30	3606,89558	
50	\$N\$38	Піч № 2 Ліва частина	240	0	3400	1E+30	3160	
51	\$N\$39	Піч № 3 Ліва частина	780	0	2400	1E+30	1620	
52	\$R\$33	сумма= Вартість	1383280,10	0,34	1383280,1	341565,036	234331,5985	

Рис. 10.2.

В нашому випадку може бути вигідним збільшення обсягів виробництва Хліб новий пшеничний формовий I гатунку, Булка смачна 0,5 та Хліб селянський формовий.

Звіт по границям дає змогу проаналізувати, в яких межах будуть дійсні рекомендації по структурі випуску. Наприклад, якщо підприємство буде випускати Батон степовий в обсязі 50 тонн, то отриманий прибуток буде 988 тис. грн., а якщо 200 тонн – 1127,8 тис. грн. (рис. 10.3):

Microsoft Excel 12.0 Отчет по пределам									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Microsoft Excel 12.0 Отчет по пределам								
2	Рабочий лист: [Коннова (асорт. 12) .xls]Отчет по пределам 1								
3	Отчет создан: 10.10.2010 2:36:34								
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									

Целевое		
Ячейка	Имя	Значение
\$N\$7	Коефіцієнти цільової функції Загалом	1127826,632

Изменяемое			Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
Ячейка	Имя	Значение				
\$B\$4	Обсяг виробництва Батон степовий	200	50	988326,6316	200	1127826,632
\$C\$4	Обсяг виробництва Батон соціальний	100	10	1098126,632	99,99999997	1127826,632
\$D\$4	Обсяг виробництва Хліб новий пш.ф. I гат.	283,1044202	100	1047810	283,1044202	1127826,632
\$E\$4	Обсяг виробництва Хліб білий соціальний ф.	10	10	1127826,632	10	1127826,632
\$F\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.	80	80	1127826,632	80	1127826,632
\$G\$4	Обсяг виробництва Хліб селянський ф.	150	150	1127826,632	150	1127826,632
\$H\$4	Обсяг виробництва Хліб Дарницький подов.соц. 0,7	10	10	1127826,632	10	1127826,632
\$I\$4	Обсяг виробництва Хліб висівковий 0,3	50	10	1097026,632	50	1127826,632
\$J\$4	Обсяг виробництва Булка апетитна 0,3	50	10	1111666,632	50	1127826,632
\$K\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,4	200	10	760366,6316	199,9999999	1127826,631
\$L\$4	Обсяг виробництва Булка смачна 0,5	100,00	15,00	966921,63	100,00	1127826,63
\$M\$4	Обсяг виробництва Булка калорійна 0,4	80,00	50,00	1095306,63	80,00	1127826,63

Рис. 10.3.

Висновок: оптимізація асортименту продукції та обсягів її випуску дозволила поліпшити основні економічні показники без додаткових витрат на сировину. Так, обсяг випуску зріс в цілому на 86,7 тонн, або на 6,61%, товарна продукція зросла на 1295,5 тис. грн., або на 25,8%, збільшився прибуток від реалізації на 314,8 тис. грн. (на 27,9%), витрати на 1 грн. товарної продукції в оптимальному варіанті знизилась на 0,63 копійки (на 0,8%), рентабельність продукції зросла на 1,04%.

Таким чином, оптимізація виробничої програми виробництва на хлібозаводі дозволить поліпшити економічні показники його роботи та збільшити економічну ефективність виробництва.

Практична робота № 10

Модель оптимального використання потужності

Задача. Виробнича ділниця має в наявності три види взаємозв'язаного обладнання (M_1, M_2 і M_3). Фонд робочого часу відповідно становить A_i годин на місяць. Ділниці встановлено план випуску п'яти видів продукції (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) механізованим способом в обсязі V_j тонн.

Норми витрат часу за видами продукції і обладнання a_{ij} год. на тону подано в табл. 11.1 (i – індекс виду обладнання, j – індекс виду продукції).

Собівартість одиниці виробленої продукції відповідним видом обладнання c_{ij} гривень наведено в табл. 11.1.

Потрібно знайти оптимальний план розподілу продукції по видах обладнання, який забезпечить мінімальні витрати на виробництво.

Таблиця 11.1

Варіанти визначення a_{ij} і c_{ij} за видами продукції для побудови моделі

Номер виду продукції	a_{ij}			c_{ij}		
	a_{1j}	a_{2j}	a_{3j}	c_{1j}	c_{2j}	c_{3j}
1	0,22	0,33	0,50	30	45	28
2	0,23	0,34	0,45	25	36	41
3	0,25	0,25	0,44	29	38	35
4	0,26	0,29	0,42	31	24	27
5	0,27	0,35	0,56	25	50	39
6	0,29	0,45	0,52	26	39	41
7	0,21	0,40	0,51	34	26	25
8	0,20	0,32	0,44	48	37	35
9	0,30	0,35	0,43	26	28	45
10	0,32	0,36	0,40	34	52	29
11	0,25	0,27	0,39	25	49	34
12	0,29	0,21	0,37	27	29	40
13	0,32	0,26	0,52	27	36	35
14	0,28	0,38	0,54	35	34	39
15	0,26	0,34	0,52	36	42	27

Таблиця 11.2

Варіанти визначення A_i і B_j для побудови моделі оптимального завантаження обладнання

Варі- ант	Фонд робочого часу і-го обладнання A_i			Завдання по випуску j-го виду продукції B_j				
	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	800	400	500	320	150	400	640	520
2	900	800	600	180	650	700	220	300
3	600	400	450	220	450	800	740	350
4	700	300	850	140	160	190	100	200
5	500	700	750	600	500	700	450	580
6	900	900	260	350	480	620	330	310
7	1000	600	800	800	400	600	700	400
8	600	500	300	550	530	440	680	720
9	400	700	700	150	230	180	290	110
10	700	800	900	330	490	450	300	500
11	900	400	400	400	410	560	630	510
12	700	550	600	380	220	150	300	420
13	600	850	450	260	220	330	400	270
14	300	950	750	410	460	540	580	320
15	850	1100	800	590	600	450	640	280

Варіант визначається за допомогою табл. 11.3 і задається шести цифрами, перші п'ять цифр – визначають номери видів продукції, за якими будується модель із табл. 11.1 і остання цифра – варіанти визначення A_i і B_j із табл. 11.2.

Таблиця 11.3

Варіант	Номери варіантів за завданням	Варіант	Номери варіантів за завданням	Варіант	Номери варіантів за завданням
1	1,2, 3,4,5,12	11	10,11,12,13,14,1	21	1,5,10,12,13,3
2	2,3,4,5,6,11	12	7,8,13,14,15,2	22	2,4,9,11,12,2
3	3,4,5,6,7,10	13	1,2,5,14,15,1	23	3,7,8,10,11,1
4	4,5,6,7,8,9	14	1,3,5,6,8,9	24	2,5,9,13,15,12
5	5,6,7,8,9,8	15	1,7,9,11,12,8	25	4,8,6,8,9,13
6	7,8,9,10,11,7	16	2,4,8,10,11,9	26	2,3,8,9,10,14
7	2,4,5,12,13,6	17	4,6,8,12,13,10	27	7,9,10,14,15,15
8	3,6,9,11,12,5	18	4,3,8,9,10,11	28	6,8,10,11,14,2
9	9,10,11,12,15,4	19	5,6,11,1,2,14,5	29	2,5,6,9,12,3
10	2,4,6,12,13,3	20	2,7,9,10,15,4	30	2,4,8,10,11,9

Приклад виконання практичної роботи

Задача. Будівельна ділянка має в наявності три групи взаємопов'язаних механізмів (M_1, M_2, M_3). Фонд робочого часу відповідно становить 800, 900 і 600 машино-змін за місяць. Ділянці встановлено план виконання п'яти видів робіт (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) в такому обсязі 450, 320, 640, 520 і 280 м³. Норми витрат часу за видами робіт і групами механізмів наведено в табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Норми витрат часу на одиницю виконаної роботи

Група механізмів	Норми витрат часу на одиницю виконаної роботи відповідним механізмом, машино-змін				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	0,2	0,3	0,5	0,25	0,4
M_2	0,4	0,45	0,56	0,6	0,5
M_3	0,41	0,65	0,56	0,45	0,3

Собівартість одиниці роботи, виконаної відповідною групою механізмів наведено в табл. 11.5.

Таблиця 11.5

Собівартість одиниці виконаної роботи

Група механізмів	Собівартість одиниці виконаної роботи відповідним механізмом, грн.				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	20	30	40	35	45
M_2	30	25	35	40	40
M_3	35	20	30	30	55

Знайти оптимальний план завантаження будівельних механізмів, який забезпечить мінімальні витрати.

Розв'язок

Для побудови моделі введемо невідому величину x_{ij} – обсяг i -го виду роботи ($j = 1, 2, \dots, 5$), яка виконується i -им механізмом ($i = 1, 2, 3$).

Цільова функція мінімуму витрат набуде вигляду:

$$F(x) = 20x_{11} + 30x_{12} + 40x_{13} + 35x_{14} + 45x_{15} + 30x_{21} + \dots + 55x_{35} \rightarrow \min.$$

За такими обмеженнями:

1) по використанню наявного фонду робочого часу механізмів:

$$M_1: 0,2x_{11} + 0,3x_{12} + 0,5x_{13} + 0,25x_{14} + 0,4x_{15} \leq 800;$$

$$M_2: 0,4x_{21} + 0,45x_{22} + 0,56x_{23} + 0,6x_{24} + 0,5x_{25} \leq 900;$$

$$M_3: 0,41x_{31} + 0,65x_{32} + 0,56x_{33} + 0,45x_{34} + 0,3x_{35} \leq 600;$$

2) по виконанню гарантованого плану відповідних механізованих робіт:

$$P_1: x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 450;$$

$$P_2: x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 320;$$

$$P_3: x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 640;$$

$$P_4: x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 520;$$

$$P_5: x_{15} + x_{25} + x_{35} \geq 280;$$

3) умова невід'ємності змінних:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,3; \quad j=1,2,3,4,5.$$

Розв'язавши дану задачу, бачимо, що всі будівельні роботи будуть виконані в запланованих обсягах.

Висновок. Оптимальний план завантаження механізмів буде такий:

$$[X_{ij}] = \begin{bmatrix} 450 & 0 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 308,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11,7 & 640 & 520 & 0 \end{bmatrix}$$

Це свідчить про те, що для того щоб загальна собівартість робіт була мінімальною потрібно:

- на першому механізмі виконувати роботу P_1 в обсязі 450 одиниць і роботу P_5 в обсязі 280 одиниць;
- на другому механізмі – роботу P_2 – 308,3 одиниць;
- на третьому механізмі – роботу P_2 – 11,7; P_3 – 640 і P_4 – 520 одиниць продукції.

Практична робота № 11

Оптимізація виробничої програми молочного заводу

Задача. У табл. 8.1 дані асортимент виробів, що випускаються в розрізі основних показників роботи підприємства. Побудувати модель оптимальної річної програми підприємства в загальному, табличному та аналітичному вигляді за критерієм оптимізації – максимум прибутку.

Розрахувати обсяг ресурсів на свій асортимент, який задається варіантом. Побудувати матрицю коефіцієнтів. Виконати розв'язання задачі на ПК. Виконати економічний аналіз отриманих результатів.

Таблиця 8.1

Вихідні дані для оптимізації молочного виробництва

Асортимент продукції	Річна потужність обладнання, т за рік		Розцінка виробітку 1т, грн.	Оптова ціна 1 тони, грн.	Собівартість 1 тони, грн.	Норми витрат молока, т/т	Попит, т	
	тетрапак	пляшки					мінімальний	максимальний
1. Молоко тетрапак, з м.д.ж.3,2%	50000		3,5	3500	2700	0,975	1000	2000
2. Молоко тетрапак, з м.д.ж.2,5%	50000		3,5	2800	2400	0,922	2000	4000
3. Молоко 1л, з м.д.ж.2,5%		30000	15,4	3600	3000	0,922	1000	2000
4. Молоко 1л., з м.д.ж.3,2%		30000	15,4	2600	2500	0,975	1200	1500
5. Молоко 0,5л, з м.д.ж.2,5%		30000	15,4	2500	2100	0,922	600	800
6. Молоко 0,5л, з м.д.ж.3,2%		30000	15,4	2700	2200	0,975	850	1000
7. Молоко топлене 0,5л		30000	15,4	2900	2700	1,052	5000	6000
8. Кефір 1л, з м.д.ж.2,5%		30000	15,4	2700	2500	0,981	600	700
9. Кефір 1л, з м.д.ж.3,2%		30000	15,4	2800	2600	0,985	100	120
10. Ряжанка 1л		25000	15,4	2900	2500	1,044	150	200
11. Простокваша 1л		25000	15,4	3000	2800	1,038	800	900
12. Вершки 1л		25000	15,4	3900	3100	2,310	280	320

Товарна продукція (план) – 50000 тис грн.

Варіант визначається за допомогою табл. 8.2. Вибір варіанту визначається за завданням викладача. Варіант задається чотирма цифрами, якими позначено номери асортименту виробів, на основі яких студент буде будувати свою модель.

Таблиця 8.2

	X_1	X_2	X_3	X_4
Варіант 1	1	2	3	4
Варіант 2	5	6	7	8
Варіант 3	9	10	11	12
Варіант 4	2	3	4	5
Варіант 5	6	7	8	9
Варіант 6	10	11	12	1
Варіант 7	3	4	5	6
Варіант 8	7	8	9	10
Варіант 9	1	3	5	7
Варіант 10	2	4	6	8

Врахувати обсяг ресурсів на свій асортимент (табл. 8.3).

Таблиця 8.3.

	Можливі сировинні ресурси по закріпленій зоні заводу, т	Річний фонд оплати праці, тис. грн. на рік.	
Варіант 1	7100	250	
Варіант 2	6080	200	
Варіант 3	7085	210	
Варіант 4	6065	280	
Варіант 5	7115	300	
Варіант 6	6095	250	
Варіант 7	7095	200	
Варіант 8	6085	210	
Варіант 9	7118	180	
Варіант 10	6070	300	

Для виконання роботи потрібно обрати асортимент продукції для оптимізації. Після цього потрібно обрати мету рішення задачі на основі якої буде

будуватись функція цілі. Функцією цілі може бути максимізація вартості або кількості виробленої продукції або загального прибутку від виробництва або мінімізація витрат на виробництво продукції. Для побудови задачі також потрібно обрати ресурси за якими будуть будуватись обмеження і визначити максимальний можливий річний запас цього ресурсу на підприємстві. У вигляді ресурсів можна розглядати потужність, сировину, основні види матеріалів, фонд зарплати, фонд часу роботи обладнання або робочих, трудомісткість виконаних робіт тощо. В моделі потрібно враховувати також обмеження за попитом.

Для побудування моделі асортиментної задачі введемо наступні умовні позначення:

i – індекс виду продукції;

$i = 1, 2, \dots, n$ – кількість видів продукції;

X_i – оптимальний випуск продукції i -того виду;

a_{ij} – норма витрат i -того виду ресурсу на одиницю j -того виду продукції;

A_i – обсяг запасів ресурсу (молока);

j – індекс виду провідного обладнання;

$j = 1, 2, \dots, m$ – кількість одиниць провідного обладнання;

b_{ij} – потужність обладнання j -го виду для i -го виду продукції;

V_j – потужність обладнання j -го виду за плановий період (рік);

$D_i^{\min}, D_i^{\max}$ – відповідно верхня і нижня межа попиту на продукцію i -го

виду;

P_j – питомий прибуток від реалізації одиниці продукції i -го виду;

C_i – питома собівартість i -го виду продукції;

C – собівартість продукції звітного чи планового року;

S_i – оптово-відпускна ціна одиниці продукції i -го виду (діюча);

S – вартість порівняльної товарної продукції звітного чи планового року.

R_i – розцінка виробітку 1т, i -го виду продукції, грн.;

R – фонд оплати праці робочих-відрядників.

Робоча модель

1. Функція цілі – максимуми прибутку:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n P_i x_i \rightarrow \max.$$

Обмеження:

По провідному обладнанню:

$$\sum_{j=1}^m b_{ij} x_j \leq B_j; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

По випуску товарної продукції:

$$\sum_{i=1}^n S_i x_i \geq S; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

По попиту на окремі види продукції

$$x_j \leq D'_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$x_j \leq D_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

По фонду оплати праці робочих:

$$\sum_{i=1}^n R_i x_i \geq R; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

По собівартості продукції:

$$\sum_{j=1}^n C_j x_j \leq C_j; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Умови невід'ємності змінних:

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Отримані результати від оптимізації виробничої програми записуємо в таблицю 8.4.

Таблиця 8.4

Найменування показника	Значення показника		Відхилення	
	До оптимізації	Після оптимізації	Абсолютне	Відносне
1. Випуск продукції, т				
X_1				
X_2				
X_3				
X_4				
2. Товарна продукція, тис. грн.				
3. Собівартість випуску продукції, тис. грн.				
4. Прибуток, тис. грн.				
5. Рентабельність продукції, %				
6. Витрати на 1 грн. ТП, грн.				
7. Потреби в сировині (молоко), т				
8. Використання фонду оплати праці, тис. грн.				

Розрахунок моделі виконують за порядком, наведеним у практичній роботі № 7. У висновку треба описати як оптимізація дозволила поліпшити основні економічні показники, наведені в таблиці 8.4.

САМОСТІЙНА РОБОТА

Необхідним елементом успішного засвоєння навчального матеріалу дисципліни є самостійна робота здобувачів вищої освіти з вітчизняною та закордонною спеціальною літературою. Самостійна робота є основним засобом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових навчальних занять.

Самостійна робота включає:

Вивчення теоретичного курсу за конспектами, підручниками, іншою літературою, рекомендованою викладачем.

Виконання індивідуальних практичних занять. Аналіз окремих даних. Формування висновків та пропозицій.

Основні види самостійної роботи:

1. Вивчення лекційного матеріалу.
2. Робота з вивчення рекомендованої літератури.
3. Вивчення основних термінів та понять.
4. Підготовка до практичних занять та виконання індивідуальних завдань
5. Використання матеріалів, які знаходяться в оболонці Moodle – дистанційне навчання та проходження комп'ютерного тестування.
6. Контрольна перевірка кожним здобувачем особистих знань за запитаннями для самостійного поглибленого вивчення та самоконтролю.
7. Підготовка до заліку.

Самостійна робота оформляється у вигляді звіту. Форма контролю – тестування, захист індивідуальних завдань, рефератів та презентацій. При оцінюванні результатів самостійної роботи здобувачів вищої освіти враховується особистий внесок здобувача та коректність висновків. В методичних рекомендаціях для занять виділяються теми, які здобувачі вищої освіти повинні виконати самостійно, і наводяться варіанти завдань для самостійної роботи.

Теми та завдання обов'язкового самостійного опрацювання

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Тема 1. Методи дослідження та аналізу процесів харчових виробництв • Харчове підприємство – складна багаторівнева система • Основні методи моделювання та класифікація моделей	6
2	Тема 2. Фізичне моделювання • Критерії подібності • Переваги та недоліки методу фізичного моделювання	6
3	Тема 3. Математичне моделювання • Схема побудови математичних моделей процесів харчових виробництв • Методи математичного опису об'єкта • Аналітичні методи моделювання	6
4	Тема 4. Статистичні математичні моделі • Статистичні моделі на основі пасивного експерименту • Статистичні моделі на основі активного	6
5	Тема 5. Спеціальні методи моделювання • Моделювання основних реологічних властивостей харчових продуктів	8
6	Тема 6. Методи статичної оптимізації об'єктів дослідження • Метод градієнта • Метод симплексів	6
7	Тема 7. Моделювання механічних процесів • Моделювання процесів формоутворення	6

	• Моделювання процесів брикетування харчових продуктів	
8	Тема 8. Моделювання гідродинамічних процесів • Система рівнянь Нав'є–Стокса при моделюванні руху малих тіл • Система рівнянь Нав'є–Стокса у випадку моделювання руху рідини у приграничному шарі	8
9	Тема 9. Моделювання теплообмінних процесів • Методи моделювання теплообмінників • Моделювання процесів радіаційного нагрівання • Моделювання процесів охолодження та заморожування	8
10	Тема 10. Моделювання масообмінних процесів • Моделювання кінетики масоперенесення • Моделювання кінетики теплоперенесення • Моделювання кінетики високотемпературних методів сушіння	8
11	Тема 11. Моделювання хімічних та біохімічних процесів • Методи моделювання хімічних реакцій • Методи моделювання біохімічних реакцій	8
	Всього	76

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Артамонова М. В., Степанькова С. Г. Проектування хлібопекарських підприємств : навчальний посібник. Харків : ДБТУ, 2024. 123 с. URL: https://repo.btu.kharkov.ua/bitstream/123456789/55303/1/NP_PROYEKT_KHL_IBOPEKAR_PIDPRYYEMSTV_24.pdf.
2. Артамонова М. В., Шидакова-Каменюка О. Г. Технологічні розрахунки та контроль безпеки у хлібопекарському, макаронному, кондитерському та харчоконцентратному виробництві : навчальний посібник. Харків : ДБТУ, 2022. 173 с.
3. Кушніров П. В., Євтухов А. В., Дегтярьов І. М. Системно-структурне моделювання технологічних процесів і систем : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 134 с.
4. Математичне моделювання систем і процесів : конспект лекцій / уклад. Н. В. Богданова, О. В. Богданов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 85 с.
5. Математичне моделювання систем і технологічних процесів / В. Ю. Щербань, О. З. Колиско, Ю. Ю. Щербань та ін. Київ : ТОВ "Фастбінд Україна", 2023. 938 с. URL: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/robocha_programa_modelyuvannya_0.pdf
6. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв : опорний конспект лекцій. Дніпро : Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, 2020. 77 с. URL: <https://surl.li/cwqtlk>.
7. Свідло К. В. , Лазарева Т. А., Бачієва Л. О. Методологія і організація наукових досліджень в харчовій галузі : підручник. Харків : Світ Книг, 2020. 225 с.
8. Харчові технології. Практикум: навчальний посібник / О. В. Самохвалова, М. В. Артамонова, Г. В. Степанькова, К. Р. Касабова. Харків : ДБТУ, 2023. 417 с.
9. Моделювання технологічних процесів тваринництва : метод. реком. для

проведення практичних занять здобувачам вищої освіти ступеня "Магістр" освітньо-професійної та освітньо-наукової програм спеціальності 204 "ТВППТ" / уклад. Р. О. Трибрат. Миколаїв : МНАУ, 2019. 71 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/6362>.

10. Моделювання технологічних процесів у тваринництві : курс лекцій для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти ОПП «Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва» спеціальності 204 «ТВППТ» денної та заочної форми здобуття вищої освіти / уклад. М. О. Шалімов. Миколаїв : МНАУ, 2024. 166 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/17432>.
11. Трибрат Р.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв : конспект лекцій. Миколаїв : МНАУ, 2023. 85 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/2454>
12. Поперечний А.М. Моделювання процесів та обладнання харчових виробництв. Підручник / А.М. Поперечний, В.О. Потапов, В.Г. Корнійчук. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 312 с.
13. Потапов В.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв – Харків : ХДУХТ, 2009 – 148 с.
14. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. / Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко [та ін.]. Вінниця : ВНТУ, 2019. 235 с.

Додаткова література

1. Гліненко Л. К, Сухонос О. Г. Основи моделювання технічних систем: навчальний посібник. Львів : Бескид Біт, 2003. 176 с.
2. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. / Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та ін. Вінниця: ВНТУ, 2019. 235 с.
3. Луговський В. І. Математичне моделювання та застосування ЕОМ в хімічній технології: конспект лекцій. Одеса: Одеський національний політехнічний університет, 2003. 101 с.
4. Поперечний А. М., Потапов В. О., Корнійчук В. Г. Моделювання процесів

та обладнання харчових виробництв : підручник. Київ : Центр учбової літератури, 2012. 312 с.

5. Потапов В.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв. Харків : ХДУХТ, 2009 148 с.
6. Моделювання технологічних процесів тваринництва [Електронний ресурс] : метод. реком. для проведення практичних занять здобувачам вищої освіти ступеня "Магістр" освітньо-професійної та освітньо-наукової програм спеціальності 204 "ТВППТ" / уклад. Р. О. Трибрат. — Електрон. текст. дані. — Миколаїв : МНАУ, 2019. — 71 с.

Навчальне видання

Моделювання технічних систем харчових виробництв

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Тищенко Світлана Іванівна
Пархоменко Олександр Юрійович та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 6,75.

Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.