

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ, КОМПЮТЕКНИХ НАУК ТА
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

методичні рекомендації для практичних занять та самостійної роботи
здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти ОПП
«Біотехнології та біоінженерія» спеціальності G21 «Біотехнології та
біоінженерія» денної форми здобуття вищої освіти



Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 24.04.2025 року протокол № 8.

Укладачі:

- О. В. Шибаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- О. Ю. Пархоменко – канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- В. О. Крайній – канд. екон. наук, старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет;
- І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики, комп'ютерних наук та інформаційних технологій, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Гиль М.І. - доктор сільськогосподарських наук, професор, член НААН України, академік НАНВО України, декан факультету ТВПІТСБ, Миколаївський національний аграрний університет

Каратєєва О.І. - канд. сільськогосподарських наук, в.о. завідувача кафедри біотехнології та біоінженерії, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Перелік практичних занять та їх обсяг	5
Практичне заняття № 1. Основні поняття математичного моделювання	6
Практичне заняття № 2. Моделювання біологічних процесів	9
Практичне заняття № 3. Моделювання динаміки біологічних систем ...	12
Практичне заняття № 4. Конкурентне виключення особин	19
Практичне заняття № 5. Складання схем структурної організації біосистем різного рівня	25
Практичне заняття № 6. Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних	27
Практичне заняття №7. Моделювання та прогнозування розвитку процесу в часі	38
Практичне заняття №8. Дослідження технічної системи за допомогою повного факторного експерименту	82
САМОСТІЙНА РОБОТА	95
Теми та завдання обов'язкового самостійного опрацювання	96
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	97

ВСТУП

Дисципліна “Математичне моделювання технічних і технологічних процесів” для магістрів факультету ТВППТСБ Миколаївського національного аграрного університету спеціальності G21 – «Біотехнології та біоінженерія» денної форми навчання викладається у другому семестрі навчання.

Протягом вивчення дисципліни здобувачі вищої освіти знайомляться з важливими методами математичного моделювання і використання їх в сільському господарстві.

Мета дисципліни – розкриття значення математичних методів для управління господарством, виявлення наявних резервів виробництва.

Основна мета вивчення дисципліни – опанування теорії та набуття практичних навичок в застосуванні методики моделювання в практичній діяльності.

Практична ціль дисципліни – ознайомити магістрів з різноманітними математичними методами для підвищення ефективності технологічних процесів.

У результаті засвоєння даної дисципліни здобувач вищої освіти повинен: дістати уявлення та засвоїти основні категорії кібернетики, освоїти основні прийоми моделювання в сільському господарстві, навчитися ефективно планувати сільськогосподарське виробництво, оптимізувати технологічні процеси. Для моделювання на ПЕОМ кожному здобувачу вищої освіти необхідно проводити послідовну аналітичну роботу, визначати критерії оптимальності, вивчати системи показників і методики їх розрахунку; основні етапи і методи моделювання.

Перелік практичних занять та їх обсяг

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. «СКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ОБ'ЄКТІВ АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ»

Практична робота №1. Основні поняття математичного моделювання. 2 год.

Практична робота №2. Моделювання біологічних процесів. 2 год.

Практична робота №3. Моделювання динаміки біологічних систем. 2 год.

Практична робота №4. Конкурентне виключення особин. 2 год.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. «МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА ТЕХНОЛОГІЙ»

Практична робота №5. Приклади моделей, заданих системами диференціальних рівнянь 2 год.

Практична робота №6. Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних 2 год.

Практична робота №7. Моделювання та прогнозування розвитку процесу в часі 2 год.

Практична робота №8 Дослідження технічної системи за допомогою повного факторного експерименту 2 год.

Практична робота №1

Тема: «Основні поняття математичного моделювання»

Мета: формування умінь та навичок практичного застосування знань через виконання студентами завдань та вправ.

Зміст заняття

1. Актуалізація знань.

Перевірка засвоєних знань з теми за допомогою опитування.

Викладач: Моделювання як метод дослідження відоме дуже давно і з розвитком суспільства воно знаходить усе нові й нові застосування. В даний час навряд чи знайдеться така наука, серед математичних засобів якої не було б моделей, створених на основі математики та інформатики.

Застосування методів моделювання часто дає змогу отримати більш точні відомості про поведінку й характеристики досліджуваних систем і процесів, ніж при їх безпосередньому вивченні, витрачаючи при цьому менше часу та коштів.

При застосуванні математики до вирішення задачі центральним є переклад завдання на математичну мову, іншими словами - побудова такої моделі, вивчення якої може дати правильну відповідь на поставлене запитання, тобто модель повинна бути адекватною даній задачі.

Математична модель повинна бути також простою, щоб отримана математична задача піддавалася вирішенню. Ці дві вимоги - адекватності і простоти - знаходяться в постійному протиріччі одне з одним: чим математична модель більш адекватна досліджуваному реальному об'єкту або явищу, тим вона менш проста.

Побудова математичної моделі істотно спирається на гіпотези: про форму розглянутого реального тіла, про пропорційність розглянутих величин. Вибір гіпотези - дуже відповідальна справа, тому що саме їм визначається ступінь адекватності моделі.

Викладач: Назвіть основні етапи математичного моделювання.

Здобувачі: Можна виділити три основних етапи математичного моделювання.

I етап - етап формалізації (складання математичної моделі);

II етап - дослідження математичної моделі (робота з математичною моделлю);

III етап - етап інтерпретації (відповідь на питання завдання).

3. Відпрацювання практичних навичок.

ЗАДАЧІ І ЗАВДАННЯ.

1. Наведіть приклад біологічної системи. Наведіть параметри, за якими буде характеризуватися біологічна компонента системи.
2. Наведіть приклад ергатичної системи. Наведіть параметри, за якими буде характеризуватися людська компонента системи.
3. Наведіть приклад біологічної системи, виділяючи та описуючи її функціональне середовище, її компоненти та елементи, структуру та границю системи.
4. Наведіть приклад моделі, яка відповідає функції певної біологічної та для ергатичної системи.
5. Наведіть приклад моделі, яка відповідає самому об'єкту для біологічної та для ергатичної системи
6. Опишіть певну біологічну та певну ергатичну системи, використовуючи процес аналізу.
7. Опишіть певну біологічну та певну ергатичну системи, використовуючи процес синтезу.
8. Наведіть приклади методик та технологій для стискання інформації при переході від Реального Світу до Світу Модельного.
Підказка. Найбільш повно такі способи розвинуті в рамках фізики.
9. Наведіть приклади методик та технологій для розширення інформації при переході від Світу Модельного до Реального Світу.
Підказка. Найбільш повно такі способи розвинуті в рамках фізики.

4. Питання для перевірки засвоєння знань :

1. Дайте визначення поняття модель і моделювання.
2. В чому відмінність між моделлю та математичною моделлю?
3. Як класифікують математичні моделі?
4. Які етапи побудови моделей?
5. Яке практичне завдання математичного моделювання?

Практична робота 2.

Моделювання біологічних процесів

Мета: ознайомитися з використанням диференціальних рівнянь для моделювання біологічних систем і процесів.

Короткі теоретичні відомості

Розглянемо моделі, за допомогою яких можна краще зрозуміти наслідки прогресії розмноження і її обмежень. Ці нескладні математичні моделі застосовуються в еволюції, генетиці, екології, біофізиці, демографії, медицині і так далі. Для розгляду прогресії розмноження у простих ситуаціях можна не враховувати генетичну структуру популяції, а сконцентрувати усю увагу на зміні чисельності популяції N у часі t . Це перше спрощувальне припущення моделі. Основний показник, що характеризує популяцію певного виду – швидкість природного збільшення популяції (r). Це середнє число нащадків, що виникають від однієї особини популяції за одиницю часу: $r = b - d$,

де b – середня народжуваність на одну особину за одиницю часу; d – середня смертність у перерахунку на одну особину за одиницю часу.

Приклад. На початку спостереження популяція складалася з 800 особин. За рік народилося 150 особин (ос./год), а померло 50. Оцінити швидкість природного збільшення популяції (r).

Розв’язання: $r = 150 \text{ (ос./год)}/800 \text{ (ос.)} - 50 \text{ (ос./год)}/800 \text{ (ос.)} = 0,125 \text{ 1/рік.}$

Зміну чисельності популяції в часі можна виразити через швидкість. Сама швидкість, також як і чисельність, може змінюватися у часі. Наприклад, природним є таке припущення: чим більша чисельність популяції в цей момент, тим вища швидкість збільшення чисельності.

Біологічний метод боротьби з небажаним видом. Необхідно визначити мінімальну швидкість n^* для поступового зниження до нуля чисельності 7 нормальних самців, тобто достатню, щоб $x(t) \rightarrow 0$. Можна скласти рівняння зміни чисельності нормальних і стерильних самців:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = rx - \delta x^2 - \delta xy \\ \frac{\partial y}{\partial t} = n \times \delta y^2 - \delta xy \end{cases} \quad (1.1)$$

де $r = b-d$ – це постійна швидкість природного збільшення щільності нормальних самців; δx^2 – зниження швидкості зростання щільності через конкуренції між нормальними самцями; δy^2 – зниження швидкості зростання щільності через конкуренції між стерильними самцями; δxy – зниження швидкості зростання щільності через конкуренції між нормальними і стерильними самцями. Розв’язання цієї системи рівнянь показало, що $x(t) \rightarrow 0$, якщо .

Приклад. Скільки стерильних самців необхідно вводити в популяцію комах за одиницю часу на одиницю площі, щоб $x(t) \rightarrow 0$, якщо $r = 1$, $n^* \geq r^2/\delta$ а $\delta = 0,01$ 1/год.? Для розв’язання досить підставити ці значення у попередню формулу: $n \geq 1/0,01 = 100$ особин за годину, тобто не менше 2400 особин за добу на одиницю площі.

Завдання.

Завдання 1. Надати характеристику швидкості природного приросту популяції.

Завдання 2. Описати біологічний метод з небажаним видом.

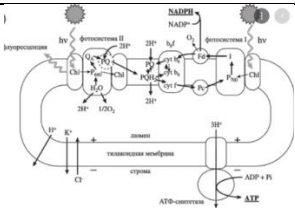
Завдання 3. Як визначити середнє число нащадків, що виникають від однієї особини популяції за одиницю часу?

Завдання 4. Інструктивна картка до виконання

1. Дати коротку характеристику поняття " Моделювання біологічних процесів ".
2. У вигляді таблиці сформувати до 10 візуальних прикладів математичних моделей з РІЗНИХ галузях (напрямках) біології. Напр., математичні моделі в цитології, імунології, екології, біотехнології тощо.

- Дати їхні функціональні та практичні характеристики і, за можливості, вказати переваги та недоліки.

Приклад

Назва моделі	Галузь використання	Зображення	Характеристика	Переваги	Недоліки
Фотосинтез	Фізіологія рослин		Математично описує процес взаємодії елементів та структур у процесі фотосинтезу		
Продовжити до 10 прикладів					

- Виконану роботу прикріпити для перевірки до середовища МУДЛ.

Контрольні питання

- Через яку зміну можна виразити зміну чисельності популяції?
- У яких галузях застосовують математичні моделі?
3. У чому полягає суть природного припущення?

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

Завдання № 1

Динаміка біологічних популяцій. Модель Мальтуса

Мета: Знайти чисельне рішення рівняння Мальтуса, що описує динаміку біологічної популяції.

Теоретичні відомості

Популяційна динаміка – один з розділів математичного моделювання, що має застосування в біології, екології, демографії, економіці.

Модель Мальтуса. Розглянемо окремий біологічний вид, у якого немає ворогів, а кормова база мається у достатку. Позначимо чисельність виду x . Тоді швидкість приросту (зміна числа особин в одиницю часу) dx/dt буде пропорційна числу особин, що вже є у наявності.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x, \quad (1.1)$$

де $\alpha > 0$ – коефіцієнт приросту.

Аналітичний розв'язок рівняння (1.1):

$$x = x_0 e^{\alpha \cdot t}, \quad (1.2)$$

де x_0 – чисельність популяції у початковий момент часу.

Порядок виконання: Для того щоб знайти чисельний розв'язок рівняння (1.1), необхідно записати його в кінцево-різницевого вигляді. Задати значення чисельності популяції x_0 у початковий момент часу ($t = 0$), крок за часом Δt і коефіцієнт α . Розв'язати рівняння (1.1) явним методом Ейлера

$$x_i = x_{i-1} + \alpha \cdot x_{i-1} \cdot \Delta t, \quad (1.3)$$

де i – номер часового шару.

Далі розв'язати рівняння (1.1) неявним методом Ейлера

$$x_i = x_{i-1} + \alpha \cdot x_i \cdot \Delta t, \quad (1.4)$$

звідси

$$x_i = \frac{x_{i-1}}{1 - \alpha \cdot \Delta t}. \quad (1.5)$$

Побудувати графіки залежності величини x (чисельності популяції) від часу t . Порівняти чисельні розрахунки, одержані двома методами, з аналітичним розв'язком (1.2). Для цього необхідно побудувати графік функції (1.2) при тих самих значеннях x_0 , Δt і α .

Завдання

Знайти аналітичне и чисельне рішення рівняння Мальтуса для періоду часу від 0 до 10 с. при різних значеннях чисельності популяції x_0 , коефіцієнта приросту α і кроку за часом Δt . Виконати графічне порівняння одержаних результатів.

Варіанти завдання

Номер варіанту	Крок за часом	Початкове значення чисельності популяції x_0 і значення коефіцієнту приросту α
1	2	3
1	$\Delta t = 0.1$	$x_0 = 1$ і $\alpha = 0.1$
2	$\Delta t = 0.01$	$x_0 = 2$ і $\alpha = 0.5$
3	$\Delta t = 0.001$	$x_0 = 0.5$ і $\alpha = 0.5$
4	$\Delta t = 0.5$	$x_0 = 3$ і $\alpha = 1$
5	$\Delta t = 0.05$	$x_0 = 2$ і $\alpha = 0.8$
6	$\Delta t = 0.005$	$x_0 = 10$ і $\alpha = 0.3$
7	$\Delta t = 0.1$	$x_0 = 5$ і $\alpha = 1.5$
8	$\Delta t = 0.5$	$x_0 = 1$ і $\alpha = 2$
9	$\Delta t = 0.01$	$x_0 = 2$ і $\alpha = 10$
10	$\Delta t = 0.05$	$x_0 = 15$ і $\alpha = 5$

Контрольні запитання

1. Які значення може приймати початкове значення чисельності популяції x_0 ?
2. Чим відрізняється чисельне рішення від аналітичного?
3. В чому відмінність неявного метода Ейлера від явного метода?
4. В яких випадках краще використовувати неявний метод Ейлера?

Завдання № 2

Динаміка біологічних популяцій. Модель Ферхюльста

Мета: Знайти чисельний розв'язок рівняння Ферхюльста, що описує динаміку біологічної популяції.

Теоретичні положення

Логістичне рівняння. Зробимо модель Мальтуса більш реалістичною, обмеживши зростання чисельності особин. У випадку, коли популяція живе на

обмеженій території, то неухильно виникає конкуренція за життєвий простір. Зустріч особин одна з одною призводить також до розповсюдження захворювань. Зменшення популяції, пов'язана з цими факторами, пропорційна частоті зустрічей особин одна з одною, тобто x^2 . Тоді рівняння динаміки популяції має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta x), \quad (2.1)$$

де $\beta > 0$ – коефіцієнт, що описує зменшення популяції. Рівняння (2.1) називається *рівнянням Ферхюльста* або *логістичним рівнянням*.

Аналітичний розв'язок рівняння (2.1):

$$x = \frac{x_0 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}}{\alpha - \beta x_0 + \beta x_0 e^{\alpha t}}. \quad (2.2)$$

Порядок виконання: записати рівняння (2.1) в кінцево-різницевого вигляді. Задати значення чисельності популяції x_0 у початковий момент часу ($t = 0$), крок за часом Δt і коефіцієнти α та β . Розв'язати рівняння явним і неявним методами Ейлера (по аналогії з рівнянням Мальтуса у завданні №1).

Побудувати графіки залежності величини x від часу t . Порівняти одержані числові розрахунки з аналітичним рішенням (2.2). Для цього необхідно побудувати графік функції (2.2) при тих же значеннях x_0 , Δt і коефіцієнтів α і β .

Завдання

Знайти аналітичне і числове рішення рівняння Ферхюльста для періоду часу від 0 до 10 с. при різних значеннях чисельності популяції x_0 , коефіцієнту приросту α , коефіцієнту убудання β і кроку за часом Δt . Виконати графічне порівняння одержаних результатів.

Варіанти завдання

Номер варіанту	Крок за часом	Початкове значення чисельності популяції x_0 і значення коефіцієнту приросту α
1	$\Delta t = 0.1$	$x_0 = 1, \alpha = 0.1$ и $\beta = 0.1$
2	$\Delta t = 0.01$	$x_0 = 2, \alpha = 0.5$ и $\beta = 0.1$
3	$\Delta t = 0.001$	$x_0 = 0.5, \alpha = 0.5$ и $\beta = 0.5$
4	$\Delta t = 0.5$	$x_0 = 3, \alpha = 1$ и $\beta = 5$
5	$\Delta t = 0.05$	$x_0 = 2, \alpha = 8$ и $\beta = 0.8$
6	$\Delta t = 0.005$	$x_0 = 10, \alpha = 0.1$ и $\beta = 1$
7	$\Delta t = 0.1$	$x_0 = 1, \alpha = 2$ и $\beta = 5$
8	$\Delta t = 0.5$	$x_0 = 25, \alpha = 0.001$ и $\beta = 0.1$
9	$\Delta t = 0.01$	$x_0 = 15, \alpha = 0.1$ и $\beta = 0.001$
10	$\Delta t = 0.05$	$x_0 = 0.01, \alpha = 0.3$ и $\beta = 3$

Контрольні запитання

1. Які значення може приймати коефіцієнт приросту і коефіцієнт убавання популяції у рівнянні Ферхюльста?
2. Кого виду набуде рівняння Ферхюльста при значенні $\beta = 0$?
3. В чому різниця неявного методу Ейлера від явного методу?

Завдання № 3

Динаміка біологічних популяцій. Модель Вольтерра

Мета: Знайти чисельний розв'язок рівняння моделі хижак - жертва.

Теоретичні положення

У 1931 р. Віто Вольтерра запропонував модель хижак – жертва. Нехай на деякій замкненій території існують два види: вегетаріанці-жертви, що живляться підніжним кормом, якого вдосталь, и хижаки, що полюють на жертв. У якості пари хижак-жертва можуть виступати вовки і вівці, щуки і карасі, рисі и зайці...

Якби не було хижаків, то жертви розмножувалися б безмежно і їх чисельність описувалася б рівнянням Мальтуса (1.1). Якби не було жертв, то хижаки від бескормиці поступово вимирали б

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma \cdot y, \quad (3.1)$$

де $\gamma > 0$ – коефіцієнт убування хижаків, y – їх чисельність у даний момент часу. Зростанню чисельності жертв, проте, перешкоджають їх зустрічі з хижаками, частота яких пропорційна як числу жертв, так і числу хижаків – x . Тоді швидкість зміни чисельності жертв описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \quad (3.2)$$

де $\beta > 0$ – коефіцієнт убування жертв при зустрічі з хижаками. Аналогічно, зустріч хижака з жертвою збільшує ймовірність виживання хижака, тобто сприяє приросту популяції хижаків

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x), \quad (3.3)$$

де $\delta > 0$ – коефіцієнт, що залежить від того, як часто зустріч хижака з жертвою завершується трапезою.

Порядок виконання: Записати рівняння (3.2) і (3.3) у кінцево-різницевого вигляді. Задати значення коефіцієнтів α , β , γ і δ ; крок за часом Δt і значення x_0 і y_0 у початковий момент часу ($t = 0$). Розв'язати рівняння (3.2) і (3.3) явним и неявним методами Ейлера і порівняти одержані розрахунки. Побудувати графіки залежності x і y від t .

Завдання

Знайти чисельне рішення системи рівнянь Вольтерра для періоду часу від 0 до 10 с. при різних значеннях x_0 , y_0 , α , β , γ і δ і кроку за часом Δt . Подати одержаний розв'язок у вигляді графіків.

Варіанти завдання

Номер варіанту	Крок за часом	Початкове значення чисельності популяції жертв x_0 , початкове значення чисельності популяції хижаків y_0 і значення коефіцієнтів α , β , γ , δ
1	$\Delta t = 0.1$	$x_0 = 1, y_0 = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 1, \delta = 0.1$
2	$\Delta t = 0.01$	$x_0 = 2, y_0 = 1, \alpha = 1, \beta = 0.1, \gamma = 1, \delta = 0.1$
3	$\Delta t = 0.001$	$x_0 = 2, y_0 = 3, \alpha = 0.1, \beta = 1, \gamma = 0.1, \delta = 1$
4	$\Delta t = 0.5$	$x_0 = 5, y_0 = 2, \alpha = 0.5, \beta = 5, \gamma = 2, \delta = 2$
5	$\Delta t = 0.05$	$x_0 = 3, y_0 = 5, \alpha = 5, \beta = 0.5, \gamma = 5, \delta = 0.5$
6	$\Delta t = 0.005$	$x_0 = 0.5, y_0 = 2, \alpha = 0.3, \beta = 3, \gamma = 3, \delta = 3$
7	$\Delta t = 0.1$	$x_0 = 1, y_0 = 1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 0.3, \delta = 3$
8	$\Delta t = 0.5$	$x_0 = 2, y_0 = 2, \alpha = 2, \beta = 2, \gamma = 2, \delta = 2$
9	$\Delta t = 0.01$	$x_0 = 10, y_0 = 15, \alpha = 0.8, \beta = 0.5, \gamma = 0.4, \delta = 0.1$
10	$\Delta t = 0.05$	$x_0 = 3, y_0 = 7, \alpha = 20, \beta = 10, \gamma = 5, \delta = 10$

Практична робота 4.

Конкурентне виключення особин

Мета роботи: побудова математичної моделі міжвидової взаємодії і фазового портрета отриманого рішення кінетичних рівнянь. Інтерпретація графічних даних.

Вступ

У підтримці чисельності організмів беруть участь ультимативні («неминучі») і сигнальні («застережливі заздалегідь») чинники.

Будь-який вид випробовує пряму, непряму і неминучу дію абіотичних - ультимативних чинників (вологості, освітленості, температури та ін.), які роблять тим більший вплив, чим більше їх відхилення від значень, оптимальних для організмів.

Коливання чисельності відбуваються як при звичайних періодичних змінах погодних умов, так і при несподіваних, екстремальних відхиленнях (наприклад, внаслідок повеней, посух, заморозків, ожеледиці) від норми.

Між видами, що використовують однакові ресурси середовища виникає конкуренція, тим більше гостра, чим ближче їх екологічні ніші.

Екологічна ніша виду - це комплекс оптимальних для нього умов середовища і необхідних взаємодій з іншими популяціями і видами. Екологічна ніша визначає функції виду в екосистемі, «професія» виду в співтоваристві.

Вплив міжвидової конкуренції на чисельність популяції був експериментально досліджений Г. Ф. Гаузе (1910-1985). Він показав, що види, близькі за походженням, з схожими вимогами до середовища, не можуть довго жити разом в одному місці життя. Починається витіснення одного виду іншим. Це явище увійшло до літератури під назвою теореми Гаузе (правила Гаузе). Сьогодні воно відоміше як принцип конкурентного виключення.

КОНКУРЕНЦІЯ (від лат. concurrentia), суперництво, будь-яке антагоністичне відношення, пов'язане з боротьбою за існування, за домінування, за їжу, простір та інші ресурси між організмами (видами, особинами), що потребують одних і тих же ресурсів. Забезпечується еволюцією і пристосовністю організмів, служить інструментом популяційного і біоценотичного відбору. Конкуренція — це ситуація, при котрій для двох особин або двох видових популяцій немає достатньої кількості ресурсів

середовища. Математична модель конкуренції побудована на основі рівнянь Лотки-Вольтерри:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - a_1 N_2}{K_1} \right)$$
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - a_2 N_1}{K_2} \right)$$

де N_1 і N_2 — чисельність конкуруючих видів 1 і 2; r_1 і r_2 — швидкості їх зростання;

K_1 і K_2 — допустимі чисельності цих видів; a_1 і a_2 — коефіцієнти конкуренції.

Просторові, харчові і інші життєво важливі ресурси в природі обмежені. У міру росту чисельності популяцій посилюється її тиск на довкілля. Між особинами посилюється конкуренція і зростає їх невідомо загибель. Якщо в цих умовах чисельність популяції не обмежується, під загрозою виявляється існування усієї сукупності особин - ріст чисельності популяцій може привести до виснаження ресурсів, спалахів масових захворювань, до безповоротного погіршення місця існування і вимирання. У природі цього, як правило, не відбувається. При перенаселенні включаються особливі механізми регуляції чисельності (щільності), придбані видом в ході еволюції.

Коли кількість особин відхиляється від оптимального рівня у велику або меншу сторону включається дія сигнальних чинників, непрямым чином популяцій, що регулюють чисельність. У відповідь на дію сигнальних чинників кількісні показники популяції (народжуваність, смертність, щільність і інші) приходять у відповідність з біологічною місткістю середовища, існуючого на даний момент часу.

Авторегуляція (саморегуляція) чисельності і щільності популяції - загально біологічне явище.

Авторегуляція властива видам, що знаходяться на різних рівнях еволюційного розвитку. Найбільш вивченою вона являється у птахів і ссавців.

Серед сигнальних чинників одним з найважливіших є сигнальний рівень чисельності популяції. Якщо частота зустрічей дорослих особин перевищує певний поріг, то в популяції починають діяти механізми, спрямовані на зниження чисельності або обмеження її росту.

Відбувається зміна морфологічних, фізіологічних. поведінкових особливостей. Наприклад, виселення (вигнання) особин з популяції,

канібалізм, розвиток стресу, виділення в середу речовин, що пригнічують ріст, розвиток і розмноження особин і збільшують їх смертність.

Для тварин, що ведуть груповий спосіб життя, характерна певна оптимальна щільність, при якій популяція найраціональніше використовує ресурси середовища і забезпечує стійке відтворення чисельності. Оптимальна щільність регулюється генетично закріпленими адаптивними механізмами. Сигнальним чинником при зниженні чисельності є ефект групи. Вимушена самотність або недостатня чисельність групи призводять до того, що тварини не в змозі ефективно реалізувати свою харчову і статеву поведінку (перестають розмножуватися, добувати їжу і так далі). Іншим важливим сигнальним чинником є ефект маси, який виражається в несприятливій зміні місця існування при надмірному збільшенні щільності популяції. Збіднення кормової бази, погіршення якості їжі, накопичення продуктів життєдіяльності, як правило, негативно позначаються на плодючості, швидкості зростання, тривалості життя тварин.

У Природі ефект групи і ефект маси важко розрізнити, оскільки вони проявляються одночасно. Спостерігаючи цю універсальну закономірність, американський зоолог і еколог У. До. Оллі (1885 - 1955) сформулював положення, яке носить назву принцип Оллі :

- для кожного виду тварин існує оптимальний розмір групи і оптимальна щільність популяції.

Завдання: побудувати модель, що відбиває зміну чисельності двох видів - конкурентів аналітичним способом або з використанням електронних таблиць; виявити конкурентоздатніший вид при оцінці 15- 25 поколінь (таблиця. 1). Для цього:

- скласти кінетичні рівняння для заданої системи, пояснити сенс змінних величин (аргументів, параметрів, функцій), що входять в них;
- підібрати метод рішення системи диференціальних рівнянь;
- побудувати графічну залежність;
- інтерпретувати отримані дані про характер зміни чисельності популяцій.

Приклад виконання

Початкові дані:

Рівняння, що відбивають зміну чисельності кожного з видів - конкурентів (у спрощеній формі) :

$$x_2 = \gamma_1 x_1 \cdot \frac{x_{\max} - x_1 - \alpha y_1}{x_{\max}} + x_1$$

$$y_2 = \gamma_2 y_1 \cdot \frac{y_{\max} - y_1 - \beta x_1}{y_{\max}} + y_1$$

де

- x_1 - початкова чисельність конкуруючих особин 1 і -го виду;
- x_2 - чисельність дочірнього покоління конкуруючих особин 1;
- y_1 - початкова чисельність конкуруючих особин 2 і -го виду;
- y_2 - чисельність дочірнього покоління конкуруючих особин 2;
- $x_{\max}$ - найбільше можливе число особин 1 при наявній біологічній місткості середовища;
- $y_{\max}$ - найбільше можливе число особин 2 при наявній біологічній місткості середовища;
- γ_1 - коефіцієнт народжуваності конкуруючих особин 1;
- γ_2 - коефіцієнт народжуваності конкуруючих особин 2;
- α - коефіцієнт боротьби за існування особин 1 (показує який вплив роблять особини 1 на особини 2);
- β - коефіцієнт боротьби за існування особин 2 (показує який вплив роблять особини 2 на особини 1).

Задані значення параметрів (таблиця.1) :

Таблиця 1

x_1	$x_{\max}$	α	y_1	$y_{\max}$	γ_1	γ_2	β
5	105	0,5	5	64	1,12	0,79	1

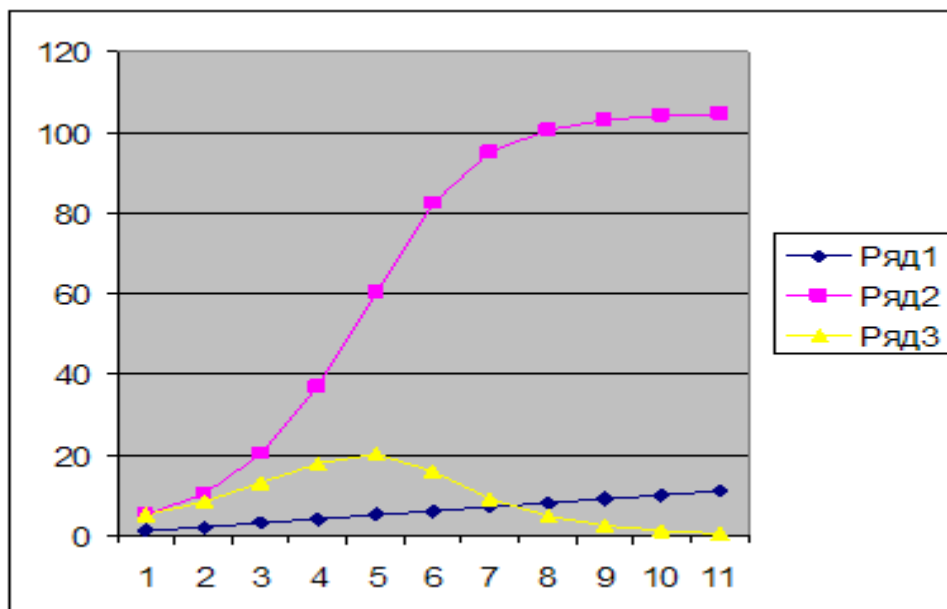
Вибираємо число поколінь - 11.

Побудова електронної таблиці в Excel:

- ❖ задати три стовпці: перший - «№ покоління», другий - «чисельність особин 1», третій - «чисельність особин 2»;
- ❖ заповнити перший стовпець даними, помістивши формулу =A3+1 до комірок A4 і розширивши сфери застосування цієї формули на комірки стовпця A до A13 включно (11 поколінь);
- ❖ потім вказати у відповідних стовпцях початкову чисельність кожної з популяцій;
- ❖ до комірок B4 слід ввести формулу для обчислення чисельності дочірнього покоління особин 1: =1,12·B3·(105-B3-0,5·C3)/105 + B3 і розширити сферу застосування формули до B13 включно;

- ❖ формулу для обчислення чисельності дочірнього покоління особин 2 $=0,79 \cdot C3 \cdot (64 - C3 - 1 \cdot B3) / 64 + C3$ помістити до комірок С4 і розширити її сферу застосування до С13 включно (дані стовпця В при цьому змінюються, оскільки обидві популяції взаємодіють).

За даними стовпців В і З побудувати графік (мал. 1) і розмістити його на окремому листі. Зробити аналіз отриманого графіку.



Мал. 1. Два види (ряд 1 і ряд 2) з схожими вимогами до ресурсів

Висновок: особини 1 (ряд 2) - активніші і витісняють з екологічної ніші особин 2 (ряд 1) - (витіснення ілюструє ряд 3). Максимальна чисельність особин 1 досягається до 9-го покоління.

Варіанти завдань

Варіанти популяцій, що конкурують за ресурси

№	Популяції	x1	xmax	γ 1	α	y1	ymax	γ 2	β
1	Миші	5	60	1,5	0,3	8	50	1,12	0,8
2	Бактерії	10	120	1,18	0,5	14	110	0,82	0,95
3	Комахи	230	500	0,80	0,2	180	400	0,65	1,0
4	Риби	65	250	0,14	0,55	38	120	0,22	0,85
5	Водорості	78	100	0,02	1,0	102	140	0,05	0,4
6	Прості	4	150	1.55	0,25	3	120	0,95	0,55
7	Інфузорії	3	65	0,85	0,80	5	100	1,25	1,20
8	Хімічні процеси	1	10	0,2	1,50	1	12	0,18	1,65
9	Примати	12	35	0,12	0,80	15	40	0,065	0,80

10	Рослини	30	80	0,46	0,77	22	80	0,55	1,25
11	Бактерії	8	115	0,78	0,58	4	120	0,54	1,20
12	Хижі птахи	40	80	0,045	0,80	34	70	0,022	0,65
13	Хижаки	30	60	0,035	0,75	36	75	0,027	0,6
14	Гризуни	10	100	1,6	0,35	12	100	1.25	0,9
15	Біологічні процеси	1	8	0,25	1,50	1	10	0,22	1,6

Питання для самоконтролю

1. Що таке екологічна ніша популяції біологічного виду?
2. Що таке сигнальний рівень популяції?
3. Як розраховується чисельність дочірнього покоління конкуруючих особин 1?
4. Які чинники враховують взаємний вплив двох популяцій на розвиток один одного у використовуваній моделі?
5. Як можна за результатами розрахунку моделі встановити яка з популяцій є такою, що розвивається, а яка пригніченою?

Практична робота №5

Тема. Складання схем структурної організації біосистем різного рівня

Мета: застосувати знання про біосистеми різних рівнів організації живої природи для складання схем їх структурної організації

Довідкова інформація

Біосистеми є складними, багатокомпонентними, просторово структурованими утвореннями.

При складанні схем структурної організації біосистеми слід дотримуватись таких правил.

1. У разі використання для елементів біосистеми умовних позначень, слід навести їх інтерпретацію.

2. При розташуванні на схемі елементів системи враховувати їх рівень в ієрархічній структурі біосистеми (позначати певним чином елементи одного рівня та супідрядні).

3. Елементи біосистеми слід з'єднувати стрілками, що вказують на взаємозв'язки між ними.

Хід роботи

1. Складіть схему еукаріотичної клітини як біосистеми, користуючись власними умовними позначеннями її елементів та стрілками, що ілюструють зв'язки між ними і з навколишнім середовищем (у підписах розшифруйте позначення).

2. Складіть схему рослинного організму як біосистеми, користуючись власними умовними позначеннями її елементів та стрілками, що ілюструють зв'язки між ними і з навколишнім середовищем (у підписах розшифруйте позначення).

3. Складіть схему екосистеми як біосистеми, користуючись власними умовними позначеннями її елементів та стрілками, що ілюструють зв'язки між ними і з навколишнім середовищем (у підписах розшифруйте позначення).

Зробіть висновок, що спільного та чим відрізняється структура розглянутих біосистем.

Завдання для самостійної роботи

1. Використовуючи різні джерела інформації, порівняйте властивості живих організмів з подібними проявами у неживій природі: рух, подразливість, живлення, виділення, ріст, розмноження, народження та смерть. (оформлення виконаної роботи можна зробити у вигляді таблиці).
2. На основі отриманої інформації напишіть есе на тему: «Умови існування окремих видів живих істот», в якому розкрийте особливості взаємодії різних видів організмів між собою.

Практична робота 6.

Лінійні рівняння математичної фізики в частинних похідних

Мета: ознайомитися з моделями кінетики біомаси, проаналізувати типові та найчастіше використовувані на практиці моделі. Зазначити математичні аспекти моделей.

Короткі теоретичні відомості

Моделювання кінетики біомаси

Підгрунтя біотехнологічного процесу – розвиток популяції мікроорганізмів у часі. За відсутності обмежень на зростання популяції мікроорганізмів, його динаміку можна описати найпростішим диференціальним рівнянням зі структурою:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = rx, \quad (3.1)$$

де x – щільність (або біомаса) популяції, r – швидкість її збільшення, t – час.

Розв’язання цього рівняння: $x = x_0 e^{rt}$, де x_0 – початкова щільність популяції; e – основа натурального логарифма.

Якщо параметр r більше нуля і постійний в часі, то зростання чисельності (або біомаси, щільності популяції) не обмежений. Але в біореакторі величина r не постійна, вона залежить від мінливих, частково контрольованих умов.

Пояснимо, що при $r > 0$ щільність популяції (x) зростає тим швидше, чим більше r , при $r = 0$ щільність постійна, а при $r < 0$ – знижується (рис. 3.1).

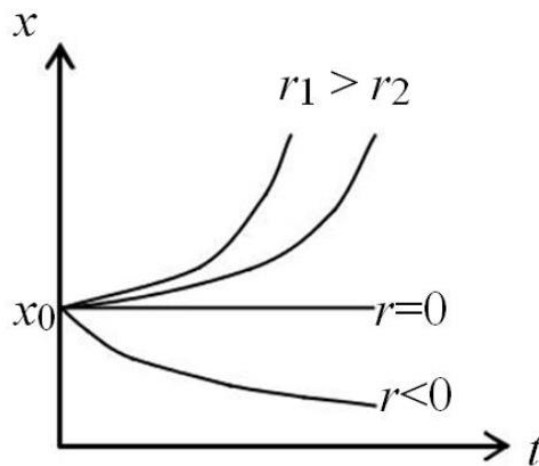


Рисунок 3.1 – Залежність x від t за різних значень r .

У моделях біотехнологічних процесів замість параметра r , який зазвичай вважається постійним, часто використовують позначення μ , питому швидкість зростання щільності (біомаси) популяції мікроорганізмів. Під час моделювання кінетики біомаси передбачається, що на зростання впливають, найперше, зміни μ . Отже, основне рівняння зростання популяції запишемо у вигляді:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mu x. \quad (3.2)$$

Найпростіший приклад – абіотичне обмеження на прогресію розмноження, викликане кінцевим об'ємом біореактора. У цьому разі можна взяти: $\mu = r (1 - x/K_{\max})$, де $K_{\max}$ – максимально допустима щільність популяції, яка визначається цим обсягом. Параметр μ в процесі росту популяції змінюється від $\mu_0 = r (1 - x_0/K_{\max})$ до $\mu = 0$. Розв'язання рівняння з такою зміною μ – це S-подібна крива зростання x .

Обговоримо різні причини зміни параметра μ і їх вплив на кінетику щільності популяції.

Вплив концентрації живильного середовища – субстрату

Залежно від конкретного біотехнологічного процесу, штаму мікроорганізмів і субстрату залежність μ від s – концентрації конкретного

субстрату може мати найрізноманітніший модельний характер. Наприклад, відповідно до найпростішої моделі Кобоз'єва питома швидкість росту μ прямо пропорційна концентрації субстрату, доступного популяції мікроорганізмів. Тобто $\mu = Ks$ (рис. 3.2), де K – константа, характерна для конкретних умов біотехнологічного процесу.

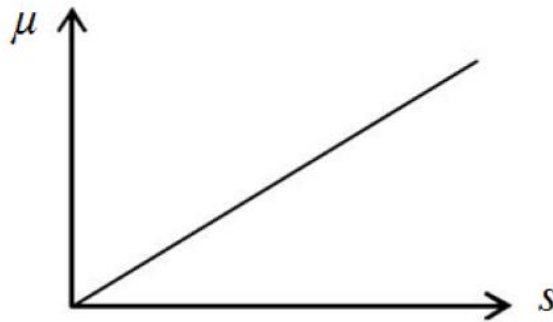


Рисунок 3.2 – Залежність $\mu(s)$ за моделлю Кобоз'єва

Отже, збільшуючи концентрацію (s) субстрату, можна домогтися різкого прискорення зростання біомаси (x) або навпаки – зі зниженням s , що впливає з рівняння:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \mu x = Ksx. \quad (3.3)$$

В іншій моделі Блекмана з невеликими концентраціями s модельна залежність та ж, що в моделі Кобоз'єва ($\mu = Ks$), але з s , більших певного порога s^* , питома швидкість росту μ вже не змінюється:

$$\mu = \begin{cases} Ks & \text{при } s < s^* \\ Ks^* & \text{при } s \geq s^* \end{cases} \quad (3.4)$$

Для конкретного процесу значення порога підбирається емпірично – на підставі досвідчених даних. Графічно модель Блекмана зображена на рис. 3.3.

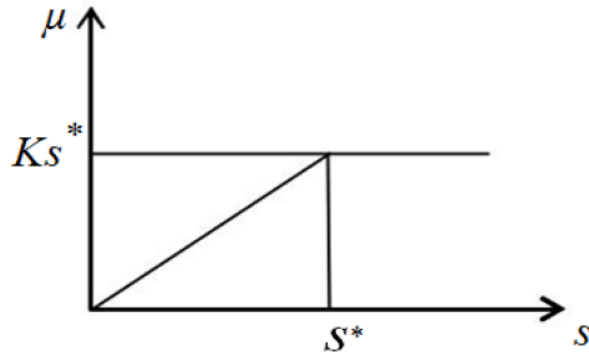


Рисунок 3.3 – Залежність $\mu(s)$ за моделлю Блекмана

Найчастіше застосовуються більш складні моделі залежностей $\mu(s)$:

– модель Моно:

$$\mu = \frac{\mu_m s}{K_s + s}, \quad (3.5)$$

у якій передбачається, що зі збільшенням s відбувається поступове наближення питомої швидкості росту μ до порога «насичення» μ_m (рис. 3.4а);

– модель Мозера:

$$\mu = \frac{\mu_m s^k}{K_s + s^k}, \quad (3.6)$$

передбачає S-образну залежність $\mu(s)$ (рис. 3.4б);

– модель Андрюса:

$$\mu = \frac{\mu_m s}{K_s + s + s^2 / K}, \quad (3.7)$$

ураховує можливість інгібувального впливу на популяцію завищених концентрацій субстрату (рис. 3.4в) та інші моделі, які описані, наприклад, у роботі Д. С. Дворецького з співавторами (2005 р.).

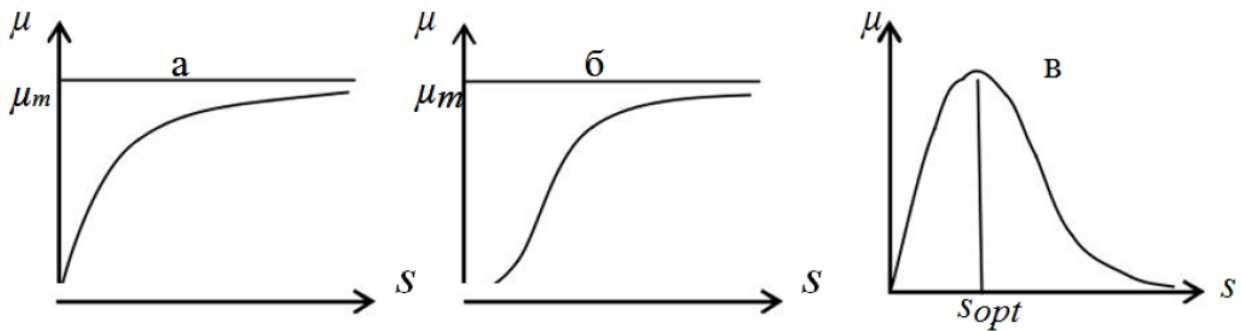


Рисунок 3.4 – Залежність $\mu(s)$ за моделями Моно (а), Мозера (б) і Андрюса (в)

Насправді на питому швидкість росту популяції часто впливає не один, а кілька субстратів. Використовують різні багатосубстратні модельні залежності. Найчастіше доводиться урахувати вплив двох субстратів (наприклад, вуглецевого і азотного, вуглецевого та кисневого). Добирають один з чотирьох основних типів рівнянь для параметра μ :

– мультиплікативні моделі, де загальна функція впливу на μ є похідна однофакторних впливів субстратів, причому кожен фактор автономний та може мати свою власну залежність f :

$$\mu = f_1(s_1)f_2(s_2). \quad (3.8)$$

Наприклад, вплив одного субстрату описується залежністю за Моно, а другого – з пригніченням за Андрюсом:

$$\mu = \frac{\mu_m s_1}{K_1 + s_1} \frac{\mu_m s_2}{K_2 + s_2 + s_2^2 / K}; \quad (3.9)$$

– адитивні моделі, де багатофакторна функція є сумою однофакторних. Такі залежності зустрічаються досить рідко, частіше для двох субстратів одного призначення (наприклад, два вуглецевих субстрату: глюкоза і лактоза, глюкоза та крохмаль і т. д.):

$$\mu = \frac{\mu_1 s_1}{K_1 + s_1} + \frac{\mu_2 s_2}{K_2 + s_2}; \quad (3.10)$$

– альтернативні моделі, де залежність μ від декількох (k) субстратів підпорядковується принципу кінетичного мінімуму:

$$\mu = \min_{i=1} \mu_i s_i . \quad (3.11)$$

Це рівняння передбачає, що для кожного субстрату існує своя залежність $\mu_i(s_i)$. Саме вона діє, якщо лімітуючим фактором є цей субстрат. Тобто мікроорганізми ростуть зі швидкістю, нижчою з k можливих залежностей $\mu_i(s_i)$;

– моделі з неподільними змінними. Три попередні типи моделей, незважаючи на удавану відмінність, схожі в одному. Вони формуються з однофакторних залежностей. Однак можливі й складніші випадки, якщо багатфакторну залежність важко поділити на однофакторні. Наприклад, існує рівняння «конкурентного гальмування» другим субстратом:

$$\mu = \frac{\mu_m s_1}{K_s + s_1 + s_2 / K} . \quad (3.12)$$

Особливий інтерес являє собою модель Контуа, що враховує дію на питому швидкість росту популяції одночасно стимулювального впливу концентрації субстрату і пригнічення росту самої біомаси (x) мікроорганізмів;

– модель Моно:

$$\mu = \frac{\mu_m s}{Kx + s} . \quad (3.13)$$

Підбір (ідентифікація) тієї чи іншої моделі для опису кінетики конкретного біотехнологічного процесу, а також її настроювання (підбір значень констант K , s^* , μ_m , k та ін.), проводиться на підставі літературних відомостей та власних експериментальних даних. Конкретні ситуації наведені, наприклад, у роботі Т. Г. Волового зі співавторами (2008 р.). При цьому зазвичай використовують метод найменших квадратів. Потім проводять перевірку адекватності отриманої моделі. Тільки після цього її можна застосовувати для прогнозу і підбору контрольованих впливів на процес. Приклад буде наведений наприкінці розділу.

Вплив концентрації основного продукту метаболізму

Зростання мікроорганізмів часто залежить не тільки від концентрації субстрату s в біореакторі, але також і від p – концентрації продукту метаболізму. До того ж зазвичай накопичення продуктів знижує (пригнічує) швидкість росту. Так, у процесі утворення етанолу дріжджами під час накопичення спирту в культурі починає наростати процес інгібування клітин.

Інгібування ураховується моделями різних типів, які підбираються за даними експериментів. Найбільш простою є модель Хіншельвуда, яка описується рівнянням:

$$\mu = \mu_m - K_p . \quad (3.14)$$

Графічне зображення цього рівняння подано на рис. 3.5.

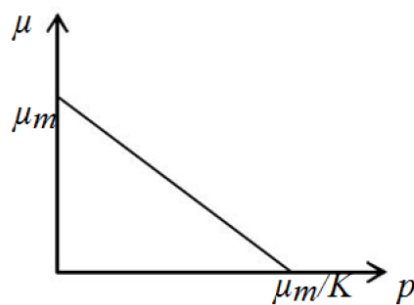


Рисунок 3.5 – Інгібування питомої швидкості росту мікроорганізмів

продуктом метаболізму за моделлю Хіншельвуда

Складніша модель Єрусалимського (рис. 3.6) описується рівнянням:

$$\mu = \frac{\mu_m K_p}{p + K_p} , \quad (3.15)$$

де K_p – константа інгібування продуктом, μ_m – максимальна питома швидкість росту.

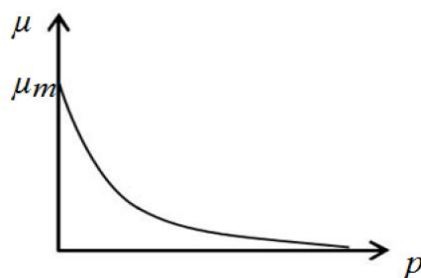


Рисунок 3.6 – Залежність μ (p) за моделлю Єрусалимського

Модель частково інгібувального продукту. Іноді продукт частково інгібує швидкість росту мікроорганізмів – не до нуля, а до певного нижнього порога μ_0 . Це графічно виражено на рис. 3.7 (порівняйте з рис. 3.6).

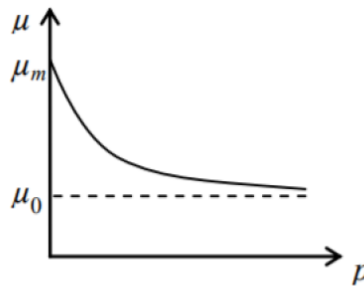


Рисунок 3.7 – Вплив частково інгібувального продукту на питому швидкість росту мікроорганізмів

Модель стимулювального продукту. Зрідка трапляються процеси, у яких продукт метаболізму, що виділяється клітинами, не пригнічує, а стимулює зростання культури. Продукт є по суті, стимулювальним субстратом або ферментом. Це відображено на рис. 3.8.

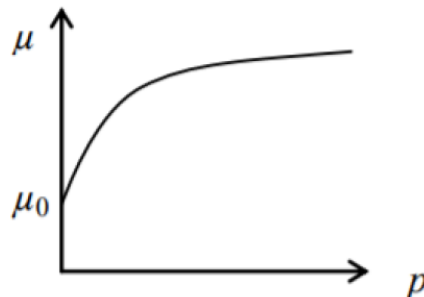


Рисунок 3.8 – Вплив стимулюювального продукту на питому швидкість росту мікроорганізмів

Вплив відмирання мікроорганізмів

Усі розглянуті раніше моделі стосувалися власне розмноження мікроорганізмів. Однак існує уявлення про те, що у процесі розвитку будь-якої популяції одночасно зі зростанням відбувається дисиміляція, тобто відмирання мікроорганізмів. Зазначене уявлення добре узгоджується з експериментальними даними біотехнології. Тому моделі зростання біомаси мають ураховувати вплив

на μ не тільки b – питомої швидкості народжуваності (розмноження), але і d – питомої швидкості смертності (дисиміляції) мікроорганізмів:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (b - d)x . \quad (3.16)$$

Крім найпростіших припущень про слабкий вплив дисиміляції ($d = 0$) або з постійним значенням $d = K_d$, у рівняннях кінетики біомаси використовують складніші моделі:

– модель Ферхюльста, де питома швидкість відмирання біомаси прийнята пропорційною щільності (біомасі) популяції:

$$d = K_d x ; \quad (3.17)$$

– модель Рамкрішні, де відображена динаміка взаємодії продукту і біомаси мікроорганізмів, а саме, питома швидкість дисиміляції біомаси пропорційна p – концентрації продукту метаболізму:

$$d = K_d p ; \quad (3.18)$$

– модель Колпикова, яка пов’язує питому швидкість дисиміляції з впливом s – концентрації субстрату:

$$d = \frac{\mu_d}{1 + s / K_d} , \quad (3.19)$$

де μ_d – максимальна питома швидкість дисиміляції з нульовою концентрацією субстрату, K_d – константа інгібування процесу дисиміляції.

Ця модель надає змінну швидкість відмирання під час процесу. Поки субстрату багато, відбувається зростання, а відмирання майже немає. Зі зменшенням концентрації субстрату швидкість відмирання біомаси плавно підвищується. Така картина вважається правдоподібною.

Для ілюстрації спільного впливу значень b і d безпосередньо на $x(t)$ – щільність (біомасу) використовуємо модель Ферхюльста: $d = K_d x$. Рівняння набуває вигляду, що є окремим випадком рівняння Бернуллі:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (b - K_d x)x . \quad (3.20)$$

Розв'язання цього рівняння: $x(t) = (Ce^{-bt} + K_d/b)^{-1}$, де $C = x(0)^{-1} - K_d/b$. Хід кривої $x(t)$ істотно залежить від співвідношення $x(0)$ – початкової щільності (біомаси) і K_d/b . Якщо $x(0) > (K_d/b)^{-1}$, то щільність поступово знижується до рівня, рівного $(K_d/b)^{-1}$ (крива а на рис. 3.9), якщо $x(0) < (K_d/b)^{-1}$ – навпаки підвищується до того ж рівня (крива б).

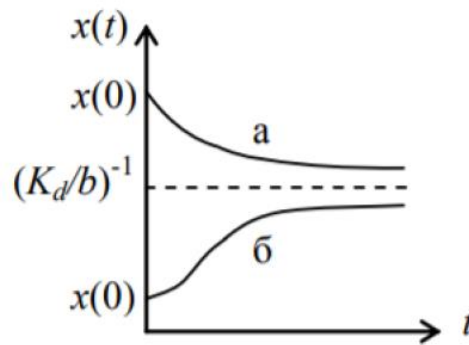


Рисунок 3.9 – Зміна щільності (біомаси) популяції

Окрім зазначених чинників на кінетику росту мікроорганізмів впливає температура, рН середовища. Як і в будь-якій кінетиці, ці параметри впливають на константи в кінетичних моделях зростання мікроорганізмів. Загалом будь-яка з констант не є постійною, тому в певній мірі може бути схильна до їх впливу. Однак у кінетичних рівняннях для росту популяції найчастіше вважають, що, наприклад, температура істотно впливає на μ_m – максимальну питому швидкість росту, а на інші константи – в меншій мірі. Для обліку подібного впливу в наведених вище моделях добирають значення констант, відповідних конкретним умовам процесу, або вносять функції – залежності констант від умов середовища у явному вигляді. Потім, як уже зазначалося, отримані експериментальні дані обробляють методом найменших квадратів і перевіряють адекватність отриманої моделі.

Завдання до теми

1. Надати визначення моделі Кобз'єва з графіком.
2. Які складніші моделі залежностей $\mu(s)$ застосовуються найчастіше?
3. Описати основні типи рівнянь, якщо є кілька типів субстратів.

4. Які моделі застосовуються для визначення швидкості відмирання біомаси?

Контрольні питання

1. Які чинники впливають на кінетику росту мікроорганізмів?
2. Від чого залежить зростання мікроорганізмів у біореакторі?
3. Як проводиться добір тієї чи іншої моделі для опису кінетики конкретного біотехнологічного процесу, а також її налаштування?
4. Який параметр у біотехнологічних процесах вважається постійним?

Практична робота №7.

Математичне моделювання оптимізаційних задач

7.1 Завдання 1

Математичне програмування займається дослідженням властивостей та розробкою методів розв'язку задач виду: знайти значення змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, які належать заданій множині X і перетворюють в екстремум функцію $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ цих змінних. Джерелом такого роду задач є кожна галузь практичної діяльності людини і у тому числі сфера біотехнологій.

Згідно з прийнятою у математичному програмуванні термінологією, елементи множини X називають допустимими розв'язками (планами). Функцію $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка підлягає максимізації (мінімізації), називають цільовою. Допустимий розв'язок, який перетворює в екстремум цільову функцію, називається оптимальним розв'язком задачі.

Множина X допустимих розв'язків задається як множина розв'язків системи рівнянь і (або) нерівностей. Система рівнянь і нерівностей, яка визначає множину X , називається системою обмежень задачі.

При розгляді задач математичного програмування будемо розрізняти два етапи: постановку задачі та її розв'язання. Математика, як відомо, досліджує не реальні об'єкти і відношення, а їх абстракції. Однією з таких абстракцій є математична модель, яка формально описує математичними співвідношеннями явище, що вивчається, і відтворює найбільш суттєві його риси.

На прикладах покажемо, звідки виникають задачі математичного програмування.

Приклад 1. Цех випускає два види фарби: для внутрішніх (А) і зовнішніх (В) робіт. Для виробництва фарби використовують два види сировини: S_1 і S_2 . Початкові дані наведено у таблиці:

Вид сировини	Добові запаси сировини	Витрати сировини на 1 т продукції	
		А	В
S_1	6	1	2
S_2	8	2	1
Ціна 1 т продукції		3	2

Добовий попит на фарбу А не перевищує попиту на фарбу В більше ніж на 1 т, а попит на фарбу А ніколи не перевищує 2 т на добу. Яку кількість фарби кожного виду повинен виготовляти цех, щоб мати максимальний прибуток від реалізації продукції?

Щоб скласти математичну модель, необхідно:

- ідентифікувати змінні (величини даної задачі, що знаходимо);
- записати обмеження, які накладаються на змінні, щоб виконувались умови, характерні для системи, яка моделюється;
- сформулювати мету, для досягнення якої з допустимих значень змінних необхідно вибрати ті, що відповідають оптимальному (найкращому) розв'язанню задачі.

У нашому прикладі необхідно знайти обсяг виробництва кожної із фарб, щоб мати максимальний прибуток від реалізації продукції, враховуючи обмеження на попит та витрати сировини.

Змінні: x_1 - добовий обсяг (т) виробництва фарби А,

x_2 - добовий обсяг (т) виробництва фарби В.

Цільова функція: Якщо вартість 1 т фарби А дорівнює 3 умов. грош. од., то добовий прибуток від реалізації буде $3x_1$, а прибуток від реалізації фарби В - $2x_2$. Загальний прибуток: $L = 3x_1 + 2x_2$.

Обмеження:

1) витрати сировини не повинні перевищувати її запасів,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8; \end{cases}$$

2) обмеження на попит продукції мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 2; \end{cases}$$

3) природне обмеження полягає в тому, що обсяги виробництва продукції не можуть бути від'ємними:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Таким чином, математична модель задачі має наступний вигляд:

Знайти невід'ємний розв'язок системи нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 2, \end{cases}$$

при якому функція

$$L = 3x_1 + 2x_2$$

досягає свого максимального значення.

Приклад 2. Підприємство за певний час T повинне виконати або перевиконати план виробництва двох видів виробів P_1 і P_2 . Для виробництва кожного виду виробів може бути використане устаткування груп A_1 і A_2 . Продуктивність груп дорівнює a_{ij} , де i - індекс, відповідний виду устаткування, а j - виду продукції. Вартість одиниці часу роботи устаткування при виготовленні одиниці продукції дорівнює b_{ij} ($i, j=1, 2$). Знайти оптимальний план роботи групи устаткування, який забезпечує виконання плану випуску продукції з мінімальною собівартістю у заданий термін. Планова кількість виробів P_1 складає N_1 шт., а

$P_2 - N_2$ шт. Характеристики процесу виробництва групами устаткування (A_1 і A_2) подано в таблиці.

Група устаткування	Продуктивність устаткування		Ціна од. часу роботи устаткування	
	P_1	P_2	P_1	P_2
A_1	a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}	b_{21}	b_{22}

Змінні: x_{11} – кількість од. часу, протягом якого перша група устаткування буде виготовляти перший вид виробів, x_{12} – кількість од. часу, протягом якого перша група устаткування буде виготовляти другий вид виробів. Змінні x_{21} і x_{22} мають аналогічні значення.

Обмеження:

1) урахування планового терміну T :

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = T, \\ x_{21} + x_{22} = T; \end{cases}$$

2) урахування планового завдання з кожного виду виробів:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \geq N_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \geq N_2. \end{cases}$$

3) додаткові обмеження, які випливають з фізичного розуміння змінних:

$$x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad x_{21} \geq 0, \quad x_{22} \geq 0.$$

Цільова функція: вартість виготовленої продукції можна записати у вигляді функції:

$$L = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22}.$$

Остаточно задача формулюється так:

Знайти такий план $X = \{x_{ij}\}$ $i, j = 1, 2$, при якому функція

$$L = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 b_{ij} x_{ij}$$

досягає мінімального значення і виконуються такі обмеження:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 x_{ij} = T, & i = 1, 2, \\ \sum_{i=1}^2 a_{ij} x_{ij} \geq N_j, & j = 1, 2, \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

Контрольні запитання

1. Сформулюйте загальну задачу математичного програмування.
2. Сформулюйте задачу лінійного (нелінійного, цілочислового) програмування.
3. Математична модель економічної задачі, її типи та принципи побудови.

7.2 Завдання 2

Тема завдання – лінійне програмування; графічне розв’язування задач лінійного програмування.

Загальна задача лінійного програмування (ЛП) полягає у знаходженні максимального (мінімального) значення функції

$$L = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

за даних умов

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = 1, \dots, k) \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = k + 1, \dots, m)$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, l, l \leq n), \quad (3)$$

де c_j, a_{ij}, b_i – задані постійні і $k \leq m$.

Функція (1) – цільова функція, умови (2) – (3) – обмеження даної задачі.

Сукупність чисел $X = (x_1, \dots, x_n)$, які задовольняють обмеження задачі, називається допустимим розв’язком (або планом).

Допустимий план, при якому цільова функція досягає максимального (мінімального) значення, називається оптимальним:

$$X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*).$$

Область допустимих рішень являє собою опуклий багатогранник (у двовірному випадку – опуклий багатокутник). Оптимальне рішення. Якщо воно існує, досягається в одній із вершин багатогранника.

Задача ЛП, яка містить обмеження (2) тільки у вигляді рівностей ($k = 0; l = n$), називається основною або канонічною.. якщо обмеження (2) мають вигляд нерівностей (при $l = n$), то задачу ЛП називають стандартною.

Графічні методи ґрунтуються на геометричній інтерпретації задач ЛП і застосовується для розв’язання задач двовірного простору.

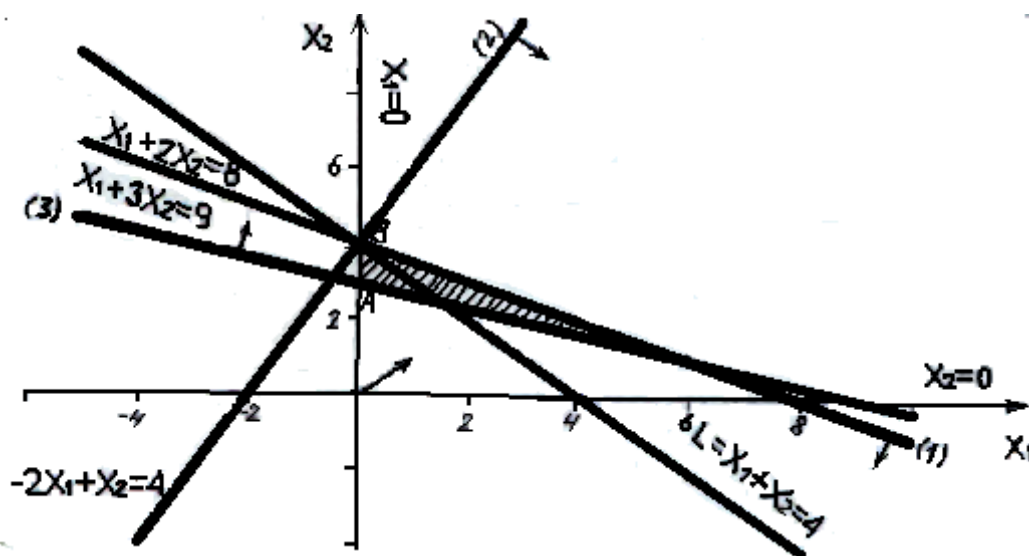
Приклад 1. Знайти максимальне та мінімальне значення функції $l = x_1 + x_2$ за даних умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Будуємо багатокутник розв'язків. Для цього в нерівностях системи обмежень змінимо знаки на знаки точних рівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, & (1) \\ -2x_1 + x_2 = 4, & (2) \\ x_1 + 3x_2 = 9, & (3) \\ x_1 = 0, \quad x_2 = 0. \end{cases}$$

Побудуємо отримані прямі, знайдемо відповідні нерівностям площини та їх перетин (рис. 1).



Багатокутником розв'язків задачі є трикутник ABC . Координати точок $\triangle ABC$ задовольняють умову невід'ємності та нерівностям – обмеженням задачі. Серед точок цього трикутника треба знайти такі, у яких функція $L = x_1 + x_2$ буде мати максимальне та мінімальне значення. Для цього побудуємо вектор $\text{grad } L = \{1; 1\}$ і пряму $x_1 + x_2 = 4$ (число 4 взято довільно).

Переміщуємо пряму $L = 4$ паралельно самій собі у напрямку градієнта і бачимо, що її останньою спільною точкою з багатокутником розв'язків буде т. С. таким чином у цій точці функція приймає максимальне значення. Точка С є точкою перетину двох прямих (1) і (3), її координати визначаються як розв'язок системи рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 , \\ x_1 + 3x_2 = 9 , \end{cases}$$

$x_1^* = 6$, $x_2^* = 1$. Отже, $\max L = 6 + 1 = 7$, $X^* = (6; 1)$.

Для знаходження мінімального значення функції переміщуємо пряму $x_1 + x_2 = 4$ в напрямку, протилежному градієнту. Останньою спільною точкою з багатокутником розв'язків буде т. **A**, координати якої визначаються як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9 , \\ x_1 = 0 . \end{cases}$$

Отже, т. **A** має координати $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$, і $\min L = 3$.

Контрольні запитання

1. Які види обмеження входять до задач ЛП?
2. Як перейти від нерівностей до рівнянь та навпаки у задачах ЛП?
3. Яка множина називається опуклою? Наведіть приклади.
4. Дайте визначення допустимого плану, оптимального плану у задачах ЛП.
5. Що називають багатогранником розв'язків?
6. Які задачі ЛП можна розв'язувати графічним методом?

7.3 Завдання 3

Тема завдання – симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування.

Розглянемо цей метод у застосуванні до канонічної задачі мінімізації:

$$\min L = \sum_{j=1}^n c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\dots,m),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (j=1,2,\dots,n) \quad (n > m).$$

Кількість рівнянь у системі обмежень дорівнює рангу системи, і тому число $k = n - m$ є кількість незалежних змінних. Виберемо змінні $x_1, x_2, \dots, x_k$ незалежними, а решту (базисні) - $x_{k+1}, \dots, x_n$ та цільову функцію виразимо через них. Переозначимо базисні змінні: $x_{k+1} = x'_1, x_{k+2} = x'_2, \dots, x_n = x'_m$. Отриману систему обмежень та цільову функцію запишемо у вигляді:

$$x'_1 = \beta_1 - (\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1k}x_k),$$

$$x'_2 = \beta_2 - (\alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2k}x_k),$$

.....

$$x'_m = \beta_m - (\alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mk}x_k),$$

$$L = \gamma_0 - (\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \dots + \gamma_kx_k),$$

і складемо симплекс-таблицю:

Базисні змінні	Вільні члени	Незалежні змінні				
		x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_k
x'_1	β_1	a_{11}	$\dots$	a_{j1}	$\dots$	a_{1k}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x'_i	β_i	a_{i1}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{ik}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x'_m	β_m	a_{m1}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mk}
L	γ_0	γ_1	$\dots$	γ_j	$\dots$	γ_k

Припустимо, що всі вільні члени $\beta_1, \dots, \beta_m$ невід’ємні. Тоді, якщо надати незалежним змінним нульові значення, отримуємо базисний (опорний) розв’язок: $x_1 = 0, \dots, x_k = 0, x'_1 = \beta_1, x'_m = \beta_m$ і $l = \gamma_0$. Якщо серед коефіцієнтів

цільової функції $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ додатні, то розв'язок не буде оптимальним і його можна поліпшити, тобто зменшити значення L .

Зменшення значення функції L пов'язане зі збільшенням значення незалежної змінної, для якої коефіцієнт в останньому рядку симплекс-таблиці більше за нуль. Виберемо її. Нехай це буде x_j . Змінну x_j необхідно ввести до складу базисних (додатних) змінних і одночасно якусь із базисних змінних $x_1', x_2', \dots, x_m'$ вивести до складу незалежних, тобто поміняти їх ролями. Визначення такої базисної змінної проводиться наступним чином: порівнюють між собою відношення вільних членів до додатних коефіцієнтів j -го стовпця таблиці і вибирають мінімальне, хай $-\beta_i/a_{ij}$. Це означає, що необхідно поміняти місцями змінні x_j і x_i' . Якщо додатних коефіцієнтів у j -му стовпці немає, то цільова функція необмежена на множині припустимих розв'язків.

Процедура заміни базисних змінних визначається коефіцієнтом a_{ij} , який називають розв'язувальним елементом, а рядок і стовпець, на перетині яких він знаходиться, - розв'язуючими.

Табличний алгоритм заміни змінних полягає у наступному:

1. Виділити в таблиці розв'язуючий елемент a_{ij} , обчислити $\lambda = 1/a_{ij}$ і записати значення λ у нижню частину тієї ж клітинки.
2. Елементи розв'язувального рядка помножити на λ , розв'язувального стовпця – на $-\lambda$ і знайдені значення записати до нижніх частин відповідних клітинок.
3. Підкреслити у розв'язувальному рядку верхні числа, а у розв'язувальному стовпці – нижні.
4. У нижні частини решти клітинок (що не належать до розв'язувальних рядка та стовпця) записати добуток підкреслених чисел, які розташовані у тому ж рядку і тому ж стовпці.
5. Перейти до нової симплекс-таблиці, в якій
 - поміняти місцями x_j і x_i' ;
 - в клітинки розв'язувальних рядка та стовпця записати числа з нижніх частин відповідних клітинок попередньої таблиці;
 - решту клітинок заповнити сумою чисел, розташованих у нижній та верхній частинах відповідних клітинок попередньої таблиці.

Приклад. Знайти максимум лінійної форми $L = 2x_1 - x_4$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_2 + 2x_4 \geq 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

Задача знаходження максимуму функції L еквівалентна задачі знаходження мінімуму функції $L_1 = L = -2x_1 + x_4$.

Введемо допоміжні змінні (x_5 і x_6) і запишемо обмеження у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_2 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Кількість змінних задачі - $n = 6$, кількість обмежень - $m = 3$, тоді кількість незалежних змінних - $n - m = 3$. Виберемо незалежними змінні x_3, x_4, x_5 і виразимо через них базисні змінні (x_1, x_2, x_6) та цільову функцію. Маємо:

$$x_2 = 5 - 2x_4 + x_5$$

$$x_1 = 15 - 5x_3 + 2x_4 - x_5$$

$$x_6 = 8 + x_1 + x_2 - x_3 = 28 - 6x_3$$

$$L_1 = -2(15 - 5x_3 + 2x_4 - x_5) + x_4 = -30 + 10x_3 - 3x_4 + 2x_5$$

Стандартний запис задачі:

$$x_2 = 5 - (2x_4 - x_5)$$

$$x_1 = 15 - (5x_3 - 2x_4 + x_5)$$

$$x_6 = 28 - (6x_3)$$

$$\min L_1 = -30 - (-10x_3 + 3x_4 - 2x_5)$$

Складаємо симплекс-таблицю:

Таблиця 3.3.1

Базисні змінні	Вільні члени	Незалежні змінні		
		x_3	x_4	x_5
x_1	15	5	-2	1
x_2	5	0	2	-1
x_6	28	6	0	0
L_1	-30	-10	3	-2

Таблиці 3.3.1 відповідає опорний розв'язок:

$x_1 = 15$; $x_2 = 5$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 28$ та $L_1 = 30$. Так як серед коефіцієнтів цільової функції є додатний, то розв'язок неоптимальний.

Виберемо розв'язувальний елемент. Розв'язувальним стовпцем буде стовпець коефіцієнтів при змінних x_4 , а розв'язувальним рядком – рядок коефіцієнтів при x_2 , розв'язувальний елемент - $\alpha_{24} = 2$.

Згідно з наведеним вище алгоритмом роботи з симплекс-таблицею, виділимо розв'язувальний елемент, обчислимо $\lambda = \frac{1}{2}$, помножимо на $\frac{1}{2}$ всі елементи розв'язувального рядка, та на $-\frac{1}{2}$ - всі елементи розв'язувального стовпця. Знайдені значення запишемо у нижні частини відповідних клітинок таблиці. Підкреслимо в розв'язувальному рядку верхні числа, а у розв'язувальному стовпці нижні. У нижній частині решти клітинок таблиці записуємо добуток підкреслених чисел, які розташовані у тому ж рядку і тому ж стовпці (див. табл. 3.3.2). Маємо:

Таблиця 3.3.2

Базисні змінні	Вільні члени	Незалежні змінні		
		x_3	x_4	x_5
x_1	15 5	5 0	-2 1	1 -1
x_2	5 5/2	0 0	2 1/2	-1 -1/2
x_6	28 0	6 0	0 0	0 0
L_1	-30 -15/2	-10 0	3 -3/2	-2 3/2

Перейдемо до нової симплекс-таблиці, керуючись правилами алгоритму, наведеного вище.

Таблиця 3.3.3

Базисні змінні	Вільні члени	Незалежні змінні		
		x_3	x_2	x_5
x_1	20	5	1	0
x_4	5/2	0	1/2	-1/2
x_6	28	6	0	0
L_1	-75/2	-10	-3/2	-1/2

Таблиці 3.3.3 відповідає розв'язок: $x_1 = 20$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = \frac{5}{2}$; $x_5 = 0$; $x_6 = 28$ та $L_1 = -\frac{75}{2}$. Так як серед коефіцієнтів цільової функції нема додатних, то знайдений розв'язок є оптимальним.

Таким чином, при тих же значеннях змінних досягається $\max L_1 = -\frac{75}{2}$.

Розглянутий алгоритм не є єдино можливим, у літературі наведена велика кількість його модифікацій.

Контрольні запитання.

1. У чому полягає ідея симплексного методу розв'язування задач ЛП?
2. Як знайти початковий опорний розв'язок задачі?
3. Як визначити розв'язувальний елемент у симплекс-таблиці?
4. Коли цільова функція необмежена на МПР?

7.4 Завдання 4

Тема завдання – двоїсті задачі лінійного програмування.

З кожною задачею лінійного програмування тісно пов'язана інша лінійна задача, яка називається двоїстою.

Так, для початкової задачі, яка полягає у максимізації функції

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n,$$

за умовами

[illegible]

двоїстою буде наступна задача:

знайти мінімум функції

$$\tilde{L}(y_1, y_2, \dots, y_m) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m$$

при обмеженнях

[illegible]

Двоїста пара задач ЛП може бути симетричною і несиметричною. В симетричних задачах система обмежень задається у вигляді нерівностей і на змінні накладаються умови невід’ємності (як у наведеному вище випадку). У несиметричних задачах система обмежень прямої задачі задається рівностями, а у двоїстій – нерівностями, причому змінні останньої можуть бути від’ємними.

Пари двоїстих задач можуть бути записані так:

Симетричні

1) Пряма

$$\max L(X) = C^T X$$

$$AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

$$2) \min L(X) = C^T X$$

Двоїста

$$\min \tilde{L}(Y) = B^T Y$$

$$A^T Y \geq C$$

$$Y \geq 0$$

$$\max \tilde{L}(Y) = B^T Y$$

$$AX \geq B$$

$$X \geq 0$$

$$A^T Y \leq C$$

$$Y \geq 0$$

Несиметричні

$$\begin{aligned} 3) \max L(X) &= C^T X \\ AX &= B \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min L^*(Y) &= B^T Y \\ A^T Y &\geq C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \min L(X) &= C^T X \\ AX &= B \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max L^*(Y) &= B^T Y \\ A^T Y &\leq C \end{aligned}$$

$$\text{де } A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Наприклад, маємо задачу

$$\begin{cases} \min F = 3x_1 + 2x_2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - x_2 \geq -5, \\ -x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Запишемо її у вигляді (1)

$$\begin{cases} \max F' = -3x_1 - 2x_2, \\ x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \\ -3x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 - x_2 \leq -3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

тоді двоїсною буде задача:

$$\begin{cases} \min F'' = 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4, \\ y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_4 \geq -3, \\ -2y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 \geq -2, \\ y_i \geq 0, i=1,\dots,4. \end{cases}$$

Між розв'язками пари двоїстих задач існують важливі співвідношення: коли перша з пари двоїстих задач має оптимальний розв'язок, то друга також має оптимальний розв'язок, і значення цільових функцій задач при оптимальних планах співпадають.

Крім того, розв'язуючи симплекс-методом початкову задачу, можна отримати оптимальний розв'язок двоїстої. Нехай X^* - оптимальний план початкової задачі, а $x_k^*, \dots, x_m^*$ - базисні змінні в останній симплекс-таблиці. Позначимо через C^* - матрицю-рядок з коефіцієнтів цільової функції початкової задачі при цих базисних змінних, а через P - матрицю коефіцієнтів при цих змінних в системі обмежень початкової задачі. Тоді оптимальний розв'язок Y^* двоїстої задачі можна знайти формулою:

$$Y^* = C^* P^{-1},$$

де P^{-1} – матриця, обернена до матриці P .

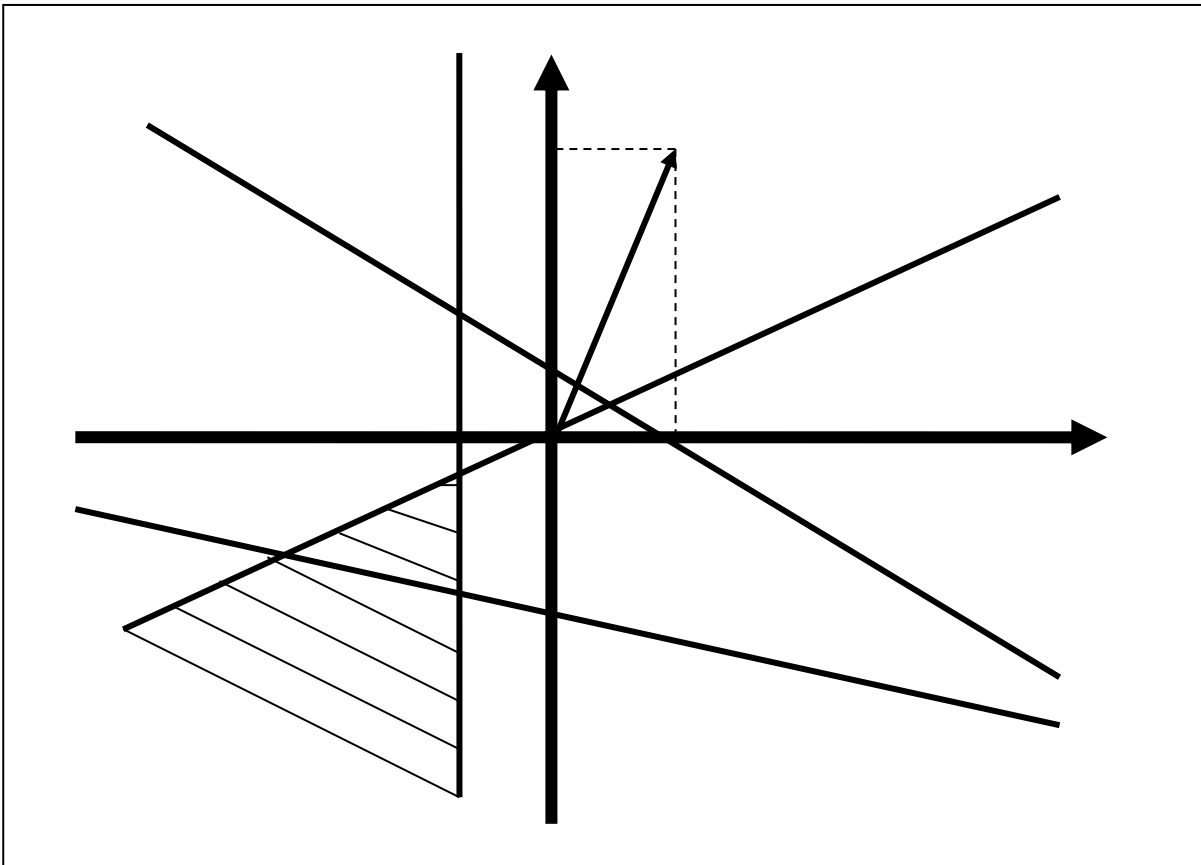
Приклад. Для даної задачі записати двоїсту і знайти її розв'язок.

$$\begin{cases} \min L = x_1 - x_3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 3, \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 4. \end{cases}$$

Розв'язання. Двоїста задача полягає в знаходженні максимального значення функції $L^* = y_1 + 3y_2$ за умовами

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \leq 1, \\ -2y_1 + 3y_2 \leq 0, \\ y_1 \leq -1, \\ y_2 \leq 0. \end{cases}$$

Оптимальний розв'язок цієї двоїстої задачі спочатку знайдемо графічним методом.



З малюнка видно, що максимального значення функція L^* досягає в т.А. Таким чином, $Y^* = (-1, -2/3)$ є ориганальним планом, при якому $L^* = -3$.

Розв'яжемо тепер двоїсту задачу іншим методом. По-перше, визначимо оптимальний план початкової задачі за допомогою симплекс-методу.

Запишемо початкову задачу у вигляді:

$$\begin{aligned} \min L &= -1 - (-2x_1 + 2x_2), \\ \begin{cases} x_3 = 1 - (x_1 - 2x_2), \\ x_4 = 3 - (x_1 + 3x_2), \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

та розв'яжемо її.

Базисні змінні	Вільні члени	Незалежні змінні	
		x_1	x_2
x_3	1 2	1 2/3	-2 <u>2/3</u>
x_4	<u>3</u> 1	<u>1</u> 1/3	3 1/3
L	-1 -2	-2 - 2/3	2 <u>2/3</u>

Базисні змінні	Вільні члени	Незалежні змінні	
		x_1	x_4
x_3	3	5/3	2/3
x_2	1	1/3	1/3
L	-3	- 8/3	- 2/3

Отже, $x_1^* = x_4^* = 0$; $x_3^* = 3$; $x_2^* = 1$. В останній симплекс-таблиці базисні змінні – x_3^*, x_2^* . Тоді з коефіцієнтів при цих змінних у цільовій функції L складаємо

$$C^* = (-1, 0), \text{ а з коефіцієнтів в системі обмежень } - P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю $P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тоді оптимальний розв'язок задачі

$$Y^* = C^* \cdot P^{-1} = \frac{1}{3}(-1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(-1, -\frac{2}{3}\right).$$

Контрольні запитання

1. В чому полягає суть двоїстості у лінійному програмуванні?
2. Нехай початкова задача полягає в оптимальному використанні ресурсів. Дайте економічну інтерпретацію двоїстої задачі?
3. Який існує зв'язок між розв'язками пари двоїстих задач?
4. Які задачі називають симетричними, несиметричними?

7.5 Завдання 5

Тема завдання – транспортна задача лінійного програмування.

Транспортна задача полягає в наступному: маємо m постачальників $A_1, A_2, \dots, A_m$ однотипної продукції у кількостях (відповідно) $a_1, a_2, \dots, a_m$ одиниць і n споживачів цієї продукції $B_1, B_2, \dots, B_n$, потреби яких у продукції становлять $b_1, b_2, \dots, b_n$ одиниць. Відомі витрати c_{ij} перевезення одиниці вантажу до j -го пункту споживання з i -го пункту постачання ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$). Визначити оптимальний план забезпечення споживачів $B_1, B_2, \dots, B_n$ з пунктів $A_1, A_2, \dots, A_m$, тобто визначити, скільки продукції з кожного пункту постачання треба вивезти в кожний пункт призначення, щоб сумарні витрати на перевезення були мінімальними.

Найбільш часто зустрічається випадок збалансованої задачі, коли $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Якщо $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводять фіктивного споживача, так щоб задача стала збалансованою, а при $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$ – фіктивного постачальника.

Так як задача збалансована, то маємо дві групи обмежень:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Процес розв'язування транспортної задачі складається з трьох основних етапів:

- 1) побудова початкового опорного плану;
- 2) перевірка оптимального плану;
- 3) перерозподіл вантажів для поліпшення плану.

Розглянемо ці етапи на прикладі:

$$A = \{10; 5; 5\}, \quad B = \{4; 8; 8\}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{ де елементи матриці } A - \text{запаси вантажу}$$

в постачальників, елементи B – попит споживачів на вантаж, а елементи C – тарифи перевезень.

За даними задачі складаємо таблицю 3.5.1.

Таблиця 3.5.1.

Споживчі Постачальники	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>1</u>	10
A_2	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>0</u>	5
A_3	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>2</u>	5
Потреби	4	8	8	20

Для побудови опорного плану перевезень найбільш простим і зручним у застосуванні є метод північно-західного кута. Згідно з цим методом розподіл продукції споживачам виконується в порядку розміщення їх у таблиці, яку починають заповнювати з лівого верхнього кута, рухаючись далі за рядком праворуч або за стовпцем донизу.

Опорний план має вигляд:

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{10; 4\} = 4, \text{ (в } A_1 \text{ лишилось 6 од. Вантажу)}$$

$$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}; b_2\} = \min\{6; 8\} = 6, \text{ (записи в } A_1 \text{ вичерпані).}$$

Потреби B_2 ще не задовільні, тому

$$x_{22} = \min\{a_2; b_2 - x_{12}\} = \min\{5; 2\} = 2,$$

Постачальник A_2 має тепер лише 3 од. Вантажу, які відправляють до пункту B_3 :

$$x_{23} = \min\{a_2 - x_{22}; b_3\} = \min\{3; 8\} = 3.$$

Записи A_3 складають 5 од. Вантажу, що забезпечує потреби B_3 .

$$x_{33} = \min\{a_3; b_3 - x_{23}\} = \min\{5; 5\} = 5.$$

Маємо план (табл. 3.5.2.):

Таблиця 3.5.2.

Споживчі Постачальники	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	<u>4</u> 4	<u>5</u> 6	<u>1</u>	10
A_2	<u>3</u>	<u>2</u> 2	<u>0</u> 3	5
A_3	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>2</u> 5	5
Потреби	4	8	8	20

Знайдений план не вироджений, тому що кількість ненульових перевезень дорівнює $m + n - 1$.

Оцінимо оптимальність плану методом потенціалів, в основу якого покладено знаходження спеціальних числових показників, приписаних кожному постачальнику і споживачу продукції за певним правилом, а саме: кожному постачальнику A_i приписуємо число α_i ($i=1, \dots, m$), а кожному споживачу β_j -число β_j ($j=1, \dots, n$) так, щоб для всіх заповнених клітинок таблиці мати рівність

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}.$$

Введені таким чином числа α_i та β_j називають потенціалами.

Визначивши потенціали, знаходять їх суму $c'_{ij} = \alpha_i + \beta_j$

для незаповнених клітинок таблиці. Критерій оптимальності стверджує, що оптимальним буде план, для якого $c'_{ij} \leq c_{ij}$ ($s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} \geq 0$). У протилежному

випадку план можна поліпшити, заповнюючи клітинку з від'ємною характеристикою ($s_{ij} < 0$). Для заповнення такої клітинки необхідно змінити обсяги перевезень, записаних у тих клітинках таблиці, які з вибраною клітинкою пов'язані циклом.

Циклом називається ламана лінія, одна з вершин якої розміщується у незаповненій клітинці, а інші - в заповнених; причому у кожній з вершин перетинаються тільки дві ланки, одна з яких знаходиться у рядку, а друга - у стовпці.

Кожна вершина циклу (відповідна клітинка таблиці) позначається так: Незаповнена клітинка - знаком "+", а решта - по черзі знаками "-" і "+". Вибирається найменша поставка з тих, що містяться у клітинках, позначених знаком "-". Здобуту поставку переміщують за циклом, додаючи її значення до поставок у клітинках з "+" і віднімаючи з поставок у клітинках з "-".

Продовжуємо розв'язування задачі. Знайдемо потенціали α_i та β_j як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \beta_1 &= 4, \\ \alpha_1 + \beta_2 &= 5, \\ \alpha_2 + \beta_2 &= 2, \\ \alpha_2 + \beta_3 &= 0, \\ \alpha_3 + \beta_3 &= 2.\end{aligned}$$

Нехай $\alpha_1 = 0$, тоді $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 5$, $\alpha_2 = -3$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_3 = -1$.

Таблиця 3.5.3

Споживачі Постачальники	B ₁	B ₂	B ₃	α_i
A ₁	<u>4</u> 4	5 6 -	<u>1</u> +	0
A ₂	<u>3</u>	<u>2</u> 2 +	<u>0</u> - 3	-3
A ₃	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	-1
β_j	4	5	3	

Знайдемо суму потенціалів для незаповнених клітинок:

$$c'_{13} = \alpha_1 + \beta_3 = 3, \quad s_{13} = 1 - 3 = -2,$$

$$c'_{21} = \alpha_2 + \beta_1 = 1, \quad s_{21} = 3 - 1 = 2,$$

$$c'_{31} = \alpha_3 + \beta_1 = 3, \quad s_{31} = 5 - 3 = 2,$$

$$c'_{32} = \alpha_3 + \beta_2 = 4, \quad s_{32} = 4 - 4 = 0.$$

Оскільки $s_{13} < 0$, то план можна поліпшити заповнивши клітинку (1,3). Будуємо для клітинки (1,3) цикл як показано у таблиці 3.5.3 і перерозподіляємо за цим циклом 3 од. вантажу ($\min\{3;6\}=3$). Результати заносимо до таблиці 3.5.4

Таблиця 3.5.4

Споживачі Постачальники	B ₁	B ₂	B ₃	α_i
A ₁	<u>4</u> 4	5 3 -	<u>1</u> + 3	0
A ₂	<u>3</u>	<u>2</u> 5	<u>0</u>	-3
A ₃	<u>5</u>	<u>4</u> +	<u>2</u> - 5	1
β_j	4	5	3	

Маємо новий план. Перевіримо його оптимальність.

Знайдемо потенціали і занесемо їх до таблиці 3.5.4. Для незаповнених клітинок маємо:

$$\begin{aligned}
c'_{21} &= 4 - 3 = 1, & s_{21} &= 3 - 1 = 2, \\
c'_{23} &= 1 - 3 = -2, & s_{23} &= 0 + 2 = 2, \\
c'_{31} &= 4 + 1 = 5, & s_{31} &= 5 - 5 = 0, \\
c'_{32} &= 5 + 1 = 6, & s_{32} &= 4 - 6 = -2.
\end{aligned}$$

Клітинка (3,2) має від'ємну характеристику, цикл для неї зображено в таблиці 3.5.4. Перерозподіляємо за циклом 3 одиниці вантажу і заносимо результати до таблиці 3.5.5.

Перевіримо оптимальність плану:

$$\begin{aligned}
c'_{12} &= 3 + 0 = 3, & s_{12} &= 3 - 3 = 0, \\
c'_{21} &= 4 - 1 = 3, & s_{21} &= 3 - 3 = 0, \\
c'_{23} &= 1 - 1 = 0, & s_{23} &= 0 - 0 = 0, \\
c'_{31} &= 4 + 1 = 5, & s_{31} &= 5 - 5 = 0.
\end{aligned}$$

План оптимальний, йому відповідають сумарні витрати на перевезення:

$$F = 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 48$$

Таблиця 3.5.5

Споживачі Постачальники	B ₁	B ₂	B ₃	α_i
A ₁	4 <u>4</u>	5	<u>1</u> 6	0
A ₂	<u>3</u>	2 5	<u>0</u>	-1
A ₃	<u>5</u>	<u>4</u> 3	<u>2</u> 2	1
β_j	4	3	1	

Контрольні запитання

1. Сформулюйте транспортну задачу і запишіть її математичну модель.
2. Яка модель транспортної задачі називається збалансованою?
3. Як будується початковий опорний план?
4. Який план називається невиродженим?
5. У чому полягає метод потенціалів розв'язування транспортної задачі?

Варіанти індивідуальних завдань

7.1 Завдання 1

Побудувати математичну модель оптимізаційної задачі.

1. З листового прокату необхідно виробити заготовку чотирьох видів. Один лист довжиною 184 см. можна розрізати на заготовки 45, 50, 65 і 85 см. Усього заготовок кожного виду необхідно відповідно 90, 96, 88, 56 шт. Способи розрізування одного листа на заготовки та величина відходів при кожному способі подані у таблиці.

Довжина заготовки (см)	Кількість заготовок з одного листа при розрізуванні способами					
	1	2	3	4	5	6
45	2	2	1	1	-	-
50	1	-	-	1	-	-
65	-	-	2	-	1	1
85	-	1	-	1	-	1
Відходи(см)	44	9	9	4	19	34

Визначити, яку кількість листів по кожному із способів необхідно розрізати, щоб мати необхідну кількість заготовок даного виду при мінімальних загальних відходах.

2. Для виробництва трьох видів виробів А, В та С використовують три різні види сировини. Кожний із видів сировини може бути використаний у кількості не більш ніж 180, 210, 244 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду і ціна одиниці продукції кожного виду подані в таблиці.

Види сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	А	В	С
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна од. продукції	10	14	12

Знайти план випуску продукції, при якому буде забезпечена її максимальна вартість.

3. Пароплав можна використовувати для перевезення 6 найменувань вантажу. Маса, обсяг і ціна одиниці кожного подано в таблиці.

Параметри одиниці вантажу	Номер вантажу					
	1	2	3	4	5	6
Маса(т)	60	81	83	86	65	83
Об'єм(м³)	80	114	60	106	114	86
Ціна	2,8	3,3	3,5	4,7	3,9	4,0

На пароплав може бути навантажено не більше 500 т вантажу загальним обсягом, який не перевищує 600 м³. Знайти, скільки одиниць кожного вантажу можна розмістити на пароплаві так, щоб загальна його вартість була максимальною.

4. Маємо три ділянки землі, на яких можуть бути засіяні кукурудза, пшениця, ячмінь та просо. Площа кожної з ділянок відповідно дорівнює 600, 180 та 220 га. Враховуючи кількість насіння кукурудзи, пшениці, ячменю і проса слід відповідно засіяти 290, 280, 110 і 420 га. Урожайність кожної з культур для кожної ділянки подано матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 40 & 45 & 50 \\ 30 & 28 & 22 \\ 18 & 22 & 14 \\ 24 & 18 & 16 \end{pmatrix}$$

Знайти, скільки гектарів кожної культури на кожній ділянці необхідно засіяти, щоб загальний збір був максимальним.

5. Виготовлена на трьох цегельних заводах цегла поступає на чотири об'єкти. Повсякденне виробництво цегли і потреба в ній наведені в таблиці. В ній вказана ціна перевезення 1000 шт цегли з кожного із заводів до кожного об'єкту.

Завод	Ціна перевезення 1000 шт цегли				Виробництво цегли (тис.шт.)
	1	2	3	4	
I	8	7	5	10	240
II	13	8	10	7	360
III	12	4	11	9	180
Потреба у цеглі (тис.шт.)	230	220	130	170	

Скласти план перевезень, згідно з яким забезпечується потреба в цеглі на кожному об'єкті при мінімальній вартості перевезень.

6. Із 4-х видів сировини необхідно виготовити суміш, до складу якої повинно входити не менше 26 од. хімічної речовини А, 30 од. – речовини В та 24 од. речовини С. Кількість одиниць хімічної речовини, яка міститься у 1 кг кожного виду, подано в таблиці. В ній же наведено ціну 1 кг сировини кожного виду.

Речовина	Кількість од. речовини у 1 кг сировини виду			
	1	2	3	4
А	1	1	-	4
В	2	-	3	5
С	1	2	4	6
Ціна за 1 кг сировини	5	6	7	4

Скласти суміш, яка містить в собі не менше потрібної кількості речовини даного виду і має мінімальну вартість.

7. М'ясокомбінат складається з 4-х заводів, на кожному з яких виготовляється три види ковбасних виробів. Потужність кожного з заводів відповідно дорівнює 300, 280, 270 і 350 *т/добу*. Повсякденні потреби в ковбасних виробах кожного виду відомі і відповідно дорівнюють 450, 370 і 400т. Собівартість 1 т кожного виду ковбасних виробів на кожному заводі визначена матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Знайти такий розподіл випуску ковбасних виробів між заводами, при якому собівартість виготовленої продукції буде мінімальною.

8. У трьох пунктах зосереджено однорідний вантаж в кількостях, які відповідно дорівнюють 420, 380 та 400 т. Цей вантаж необхідно перевезти в три пункти призначення в кількостях, рівних 260, 520 і 420 т. Вартість перевезення 1 т вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення є відомими величинами і подані матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Знайти план перевезень, який забезпечує вивезення вантажу з пункту відправлення в ввіз необхідного вантажу в пункти призначення при мінімальній загальній вартості перевезень.

9. Сталевий прут довжиною 110 см необхідно розрізати на заготовки довжиною 45, 35 і 50 см. Потрібна кількість заготовок даного виду складає відповідно 40, 30 і 20 шт. Можливі варіанти розрізування та величина відходів при кожному з них наведені в таблиці. Знайти, скільки прутів за кожним з можливих варіантів потрібно розрізати, щоб отримати не менше потрібної кількості заготовок кожного виду при мінімальних відходах.

Довжина заготовки (см)	Варіант розрізування					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
30	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Кількість відходів	20	30	15	5	25	10

10. Пароплав може бути використано для перевезення 5 найменувань вантажу маса, обсяг і ціна одиниці кожного з яких наведено в таблиці.

На пароплав може бути навантажено не більше 800 т вантажу загальним обсягом, який не перевищує 600 м^3 . Знайти, скільки одиниць кожного вантажу необхідно помістити на пароплав так, щоб загальна вартість розміщення вантажу була максимальною.

Параметри од. вантажу	Номер вантажу				
	1	2	3	4	5
Маса (т)	80	62	92	82	90
Обсяг (м^3)	100	90	96	110	120
Ціна	4,4	2,7	3,2	2,8	2,7

11. З пункту А в пункт В кожного дня відправляються пасажирські та швидкі поїзди. В таблиці вказано кількість вагонів різних типів, з яких кожного дня можна комплектувати поїзди і кількість пасажирів на яку розраховано вагони. Знайти оптимальну кількість швидких і пасажирських поїздів, при якій кількість перевезених пасажирів буде максимальною.

Вагон	Парк вагонів	Поїзд		Кількість пасажирів
		Швидкий	Пасажирський	
Вантажний	12	1	1	-
Поштовий	18	1	-	-
Жорсткий	89	5	8	58
Купейний	79	6	4	40
М'який	35	4	2	32

12. Розв'язати задачу № 11 за умови, що пропускна здатність дороги обмежує кількість пасажирських поїздів до 6 в день.

13. Підприємство може працювати за п'ятьма технологічними процесами ($T_1, \dots, T_5$), причому кількість одиниць продукції, що випускається, за різними технологічними процесами за 1 од. Часу відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 шт. В пресі беруть участь такі виробничі фактори: сировина, електроенергія, платня і накладні витрати. Затрати відповідних факторів при роботі за різними технологіями за 1 од. Часу вказані в таблиці.

Виробничий фактор	Затрати при різних технологіях					Ліміт
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
Сировина	15	20	12	14	18	2000
Ел. Енергія	0,2	0,3	0,15	0,25	0,30	300
Накл. Витр.	4	5	6	3	2	1000
Зарплата	6	3	4	6	3	1600

Знайти план максимального випуску продукції.

14. Для виготовлення сплаву зі свинцю, цинку та олова певного складу використовується сировина з п'яти сплавів тих же металів, що відрізняються складом і вартістю за 1 кг. Дані наведено в таблиці.

Знайти, яку кількість сплаву кожного виду необхідно для того, щоб виготовити при мінімальній собівартості 1 т сплаву, який має 20% свинцю, 30% цинку, 50% олова.

Тип сплаву	Склад металу (%)			Питома вартість (грв./кг)
	Свинець	Цинк	Олово	
I	15	40	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

15. Розв'язати задачу № 14 при обмеженнях на склад сплаву: олова - від 40% до 60%, а цинку – від 20% до 30%.

16. . Розв'язати задачу № 14 при обмеженнях на склад сплаву: олова – не більше 40% і цинку не менше 20%.

17-18. Деталі А, В і С можна обробляти на трьох верстатах (І, ІІ, ІІІ). В таблиці вказані норми затрат часу на обробку верстатом відповідної деталі, вартість 1 год. роботи верстата і граничний час роботи верстата.

Припускаючи, що будь-яка деталь може обробляти на будь-якому з верстатів, знайти оптимальну виробничу програму за одним з критеріїв:

- максимум товарної продукції (варіант № 17);
- максимум сумарного прибутку (варіант № 18).

Верстат	Норма часу обробки			Вартість 1 год. роботи верстата	Час роботи верстата (год.)
	А	В	С		
І	0,3	0,1	0,2	30	50
ІІ	0,5	0,2	0,4	20	60
ІІІ	0,4	0,5	0,3	15	40

19-20. Три механізми І, ІІ, ІІІ можуть виконувати три види земляних робіт А, В і С. В таблиці вказано ресурси робочого часу кожного механізму, продуктивність механізмів при виконанні робіт і вартість однієї години робочого механізму.

Механізм	Продуктивність (m^3 /год.)			Питома Вартість (грн./год.)			Ресурс часу (год.)
	А	В	С	А	В	С	
І	30	30	40	2	4	3	400
ІІ	20	20	50	3	2	5	300
ІІІ	60	40	20	5	3	6	280

Знайти:

- оптимальне навантаження механізмів при максимальному сумарному обсязі виконаних робіт (варіант № 19);
- оптимальне навантаження обладнання, мінімізуючи сумарні витрати, при обсягах робіт: $a = 6000, b = 50000, c = 8000$ (варіант № 20).

21. Механічний завод при виготовленні трьох різних деталей І, ІІ, ІІІ використовує токарні, фрезерні та стругальні верстати. При цьому обробка кожної деталі можна вести трьома різними

технологічними способами T_1, T_2, T_3 , в таблиці вказані норми часу на обробку деталі на відповідному верстаті кожним технологічним способом, а також ресурси (станко/год.) кожної групи верстатів. Прибуток від продажу кожного виду виробів складає відповідно 22, 18 і 30 грн. Скласти оптимальний план навантаження виробничих потужностей, який забезпечить максимальний прибуток.

Тип верстата	Норма часу на обробку деталей (год.)									Ресурс часу (год.)
	I			II			III			
	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	
Токарний	1,0	0,9	1,1	1,2	1,5	-	0,9	-	-	200
Фрезерний	0,8	0,8	1,3	0,9	1,1	1,3	1,1	0,8	-	400
Стругальний	-	0,7	1,0	0,7	-	1,3	1,3	0,6	-	300

22. Розв'язати задачу № 21, враховуючи, що між кількістю виготовлених деталей повинно виконуватися співвідношення 1:2:1.

23. Розв'язати задачу № 21, якщо кількість деталей II не повинна перевищувати 100 од.

24. За допомогою трьох технологічних процесів з руди можна виділити дві речовини А і В. З кожної тони руди при використанні процесів I, II, III маємо, відповідно, 0.4 і 0.6, 0.6 і 0.4, 0.2 і 0.2 кілограмів речовини А і В, при цьому витрати дорівнюють: 5000 грн. для процесу I, 6000 грн. для II і 1000 грн. для процесу III. Знайти оптимальний розподіл 10 т руди за процесами I, II, III, мінімізуючий витрати, якщо необхідно одержати не менше 3 кг кожної речовини.

25. Для виготовлення виробів № 1 і № 2 склад може відпустити не більше 80 кг металу. На виріб № 1 витрачається 2 кг, а на виріб № 2 – 1 кг металу. Необхідно спланувати виробництво, щоб було забезпечено найбільший прибуток, якщо виробів № 1 треба виготовити не більше 30 шт., а виробів № 2 – 3 грн.

Цех випускає три види виробів (I, II, III), добовий плановий випуск яких становить: 90 одиниць виробу I, 70 – виробу II, 60 – виробу III. Добові ресурси на їх виготовлення такі: 780 одиниць виробничого устаткування, 850 одиниць сировини, 790 одиниць електроенергії. Витрати їх на одиницю виготовленої продукції подано в такій таблиці:

Ресурси	Витрати ресурсів на од. виробів		
	I	II	III
Виробниче устаткування	2	3	4
Сировина	1	4	5
Електроенергія	3	4	2
Вартість в грн.	8	7	6

Скільки виробів треба виготовити (якого типу і в якій кількості), щоб мати максимальний прибуток від випущеної понад плану продукції.

27. Господарство має 5 тваринницьких ферм, розміщених в різних місцях і на різних відстанях від полів сівозміни, Потреби в зелені масі для силосування на кожній з ферм становить 2200 т, 4500 т, 2000 т, 1800 т, 3000 т.

Кукурудза на силос вирощується на трьох полях сівозміни і збір становить: на першому полі – 6000т, на другому – 3500т і на третьому - 4000т. Транспортні витрати (в копійках за тонну) на перевезення зеленої маси з полів на ферми подано в такій таблиці:

Поля	Тваринницькі ферми				
	1	2	3	4	5
I	4	1	3	4	4
II	2	3	2	2	3
III	3	5	2	4	4

Треба спланувати перевезення силосної маси з полів на ферми так, щоб транспортні витрати були мінімальними.

28. Для підживлення посівів треба внести на 1 га 24 одиниці хімічної речовини A_1 , 30 одиниць речовини A_2 , 15 одиниць речовини A_3 .

Сільське господарство купує комбіновані добрива трьох видів: B_1 , B_2 , B_3 . У таблиці наведено вміст потрібних хімічних речовин в одиниці комбінованих добрив і ціну одиниці ваги кожного виду добрив.

Хімічні речовини	Норма внесення хім. речовини на 1 га	Вміст хім. речовин на од. ваги комбінованого добрива		
		B_1	B_2	B_3
A_1	24	1	4	3
A_2	30	2	5	3
A_3	15	-	3	2
Ціна добрива за од. ваги		5	2	4

Скільки треба закупити кожного виду комбінованих добрив, щоб ґрунт було внесено потрібну кількість хімічних речовин і щоб вартість закуплених добрив була мінімальною?

29. Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох видів B_1, B_2, B_3, B_4 . Для випуску цієї продукції потрібна сировина чотирьох видів: A_1, A_2, A_3, A_4 , яку завод щомісяця може одержувати в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, яка потрібна для виготовлення кожного виду продукції, а також щомісячне надходження сировини подано в таблиці:

Види сировини	Щомісячне надходження сировини (в ум. Од.)	Витрати сировини на од. кожного виробу			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одного виробу		8	10	12	18

Визначити, який асортимент продукції і в якій кількості повинен випускати завод, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

30. Для нормального проходження технологічного процесу в одному з цехів хімічного заводу потрібні хімічні речовини A_1, A_2, A_3 , місячна норма яких повинна бути не менша, відповідно, 48,60 і 80 вагових одиниць. Ці речовини містяться в сумішах B_1, B_2, B_3 . Вміст кожної з речовин у кожній із сумішей, а також ціну за 1л.суміші подано в таблиці:

Види речовини	Мінімальна потреба	Вміст хім. речовин у сумішах у вагових одиницях		
		B_1	B_2	B_3
A_1	48	1	0	2
A_2	60	2	3	0
A_3	80	0	2	4
Ціна суміші		5	3	4

Яку кількість суміші B_1, B_2, B_3 треба щомісяця купувати, щоб задовольнити потребу хімічного заводу в хімічних речовинах A_1, A_2, A_3 і щоб витрати на ці закупки були мінімальні?

7.2 Завдання 2

Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом.

1. $\min L = x_1 + 2x_2$ 2. $\max L = 50x_1 + 40x_2$

3. $\max L = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 < 1 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4. $\min L = 3x_1 + 4x_2$

5. $\max L = x_1 + x_2$

6. $\min L = 4x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7. $\max L = 3x_1 + 4x_2$

8. $\max L = 10x_1 + 12x_2$

9. $\max L = 3x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \leq 7, x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0.6x_1 + 0.8x_2 \leq 50000 \\ 0.4x_1 + 0.2x_2 \leq 30000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.5x_1 + 1.6x_2 \leq 141 \\ 0.5x_1 + 0.8x_2 \leq 63 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

10. $\max L = 5x_1 + 3x_2$

11. $\min L = x_1 + x_2$

12. $\max L = 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \leq 30, x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 \leq x_2 \leq 2 \\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq 3 \\ -1 \leq x_1 - x_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$$

13. $\min L = -2x_1 + 5x_2$

14. $\max L = 3x_1 - 2x_2$

15. $\min L = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 5x_1 + 6x_2 \geq 30 \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \geq 14 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 7x_1 + 6x_2 \leq 28 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ 0 \leq x_1 \leq 3 \\ 0 \leq x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$16. \max L = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$$17. \min L = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$18. \max L = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$19. \max L = 5x_1 + 32x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 \leq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$20. \min L = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ 6x_1 - 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 5x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$21. \max L = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$22. \min L = 5x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 7 \\ 0 \leq x_2 \leq 5 \\ 5x_1 + x_2 \geq 10 \end{cases}$$

$$23. \min L = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$24. \min L = 5x_1 - 10x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$25. \max L = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq -1 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 1.5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$26. \max L = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$27. \min L = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 - 3x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$28. \min L = 2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + x_2 \leq 45 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$29. \max L = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$30. \min L = -x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \geq -8 \\ 4x_1 - 3x_2 \geq -8 \\ -x_1 - 3x_2 \leq -9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

7.3 Завдання 3

Симплексним методом знайти максимум або мінімум функції при заданих умовах.

1. $L = 5x_1 - x_3 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

2. $L = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

3. $L = x_1 + x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_3 - x_4 \\ x_2 = 1 + x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 5 - x_3 + x_4 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

4. $L = 2x_3 - x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

5. $L = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 < 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

6. $L = 3x_1 - x_2 - x_3 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ -2x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

7. $L = x_1 + x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

8. $L = x_1 + 2x_2 + x_3 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_5 = 6 \\ 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_6 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

9. $Z = x_1 - 3x_2 \Rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4 \geq 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5 \geq 0 \\ -x_2 + 4x_3 + 2 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

10. $Z = 3x_1 - 5x_2 \Rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4 \geq 0 \\ -x_1 - 4x_3 + 1 \geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$11. Z = 3x_1 - 2x_2 - 4x_4 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6 \geq 0 \\ x_1 + 5x_2 \leq 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

$$12. Z = 2x_1 - 5x_2 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 7 \geq 0 \\ x_2 + 5x_3 - 3 \leq 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 3 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

$$13. Z = 4x_1 - x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 1 \leq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 2 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

$$14. Z = -7x_1 + 4x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - 4 \leq 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5 \geq 0 \\ x_1 + 6x_2 + 2 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

$$15. L = x_4 + x_2 - x_1 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 5 \end{cases}$$

$$16. Z = 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6 \geq 0 \\ x_1 + 2x_3 \leq 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 7 \geq 0 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

$$17. L = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2 \geq 0 \\ 3x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_3 \leq 3 \\ x_i \geq 0, i=1,2,3 \end{cases}$$

$$18. Z = 2x_3 - x_4 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ 2x_3 + x_5 \leq 10 \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 5 \end{cases}$$

$$19. Z = 2x_1 + x_2 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 5 \\ x_i \geq 0, i=1,2 \end{cases}$$

$$20. Z = x_1 - x_2 + x_3 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_3 + x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 10 \\ x_1 + x_6 = 0 \\ x_i \geq 0, i=1, \dots, 6 \end{cases}$$

$$21. Z = x_1 + x_2 + x_3 + 9x_6 - 15 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_5 + 2x_6 = 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

$$22. Z = 40x_1 + 20x_3 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 + x_6 = 1 \\ 7x_1 - 12x_2 + 4x_3 - 20x_4 = 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

$$23. L = 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 5 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

$$24. L = x_1 + 2x_2 - x_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$25. Z = -2x_1 - x_2 + x_3 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$26. Z = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ 2x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$27. Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq -1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$28. Z = -x_1 - 2x_2 + x_3 \Rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$29. Z = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 192 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 180 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$30. Z = 8x_2 + 7x_4 + x_6 \Rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12 \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12 \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

7.4 Завдання 4

Для даної задачі сформулювати двоїсту і знайти її розв'язок:

1) графічним методом;

2) використовуючи оптимальний розв'язок даної задачі, знайдений симплекс-методом.

1. $\min L = x_1 + 5x_2 - 7x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ 4x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

2. $\min L = x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

3. $\min L = x_1 + 3x_2 - 5x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,2,3 \end{cases}$$

4. $\max L = x_1 + x_2 + 2x_3 - 8x_4$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

5. $\min L = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \geq 1 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,5 \end{cases}$$

6. $\max L = \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,5 \end{cases}$$

7. $\max L = x_1 + x_2 - 2x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

8. $\max L = -4x_1 + 15x_2 + 12x_3 + 2x_4$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 \geq 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

9. $\min L = x_1 + 5x_2 + x_3 - 10x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 \geq 1 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

10. $\min L = x_1 + 5x_2 + x_3 - 10x_4$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 \geq 5 \\ x_i \geq 0, \quad i=1,\dots,4 \end{cases}$$

$$11. \max L = x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$12. \max L = x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 1 \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + 2x_4 \leq 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$13. \min L = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$14. \min L = 3x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 = -2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$15. \min L = 2x_1 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$16. \max L = -x_1 - 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq -1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$17. \min L = 2x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$18. \min L = 12x_1 + 5x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_2 - 9x_3 - 12x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$19. \max L = x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$20. \max L = x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$21. \min L = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 2x_4 = 5 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$22. \min L = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$23. \min L = 2x_1 + x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq -1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$25. \min L = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_4 \geq 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 \geq 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$27. \max L = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{1}{2}x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$29. \max L = x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 \leq 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \leq 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$24. \min L = 2x_1 + x_2 + 6x_3$$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$26. \min L = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$28. \min L = -4x_1 + 15x_2 + 8x_3 - 2x_4$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 + x_4 \geq 4 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 \geq 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$30. \min L = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{4}x_4$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

7.5 Завдання 5

Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, якщо відомі запаси вантажу в пунктах відправлення $A=(a_1, \dots, a_i, \dots, a_m)$, заявки на вантажі пунктів призначення $B=(b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)$ і матриця тарифів перевезень одиниці вантажу з i -го пункту відправлення у j -ий пункт призначення $C=\|C_{ij}\|$
 $i=1, \dots, m$
, $j=1, \dots, n$

1. $A=(28,42,30)$; $B=(48,18,34)$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 14 \\ 20 & 18 & 12 \\ 17 & 24 & 16 \end{pmatrix}$$

2. $A=(17,7,12,3)$; $B=(8,13,18)$

$$C = \begin{pmatrix} 33 & 25 & 23 \\ 12 & 26 & 23 \\ 10 & 30 & 20 \\ 45 & 26 & 50 \end{pmatrix}$$

3. $A=(120,40,70)$; $B=(50,75,45,60)$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 12 & 8 \\ 14 & 9 & 10 & 1 \\ 17 & 16 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

4. $A=(15,25,20)$; $B=(10,22,28)$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. $A=(30,40,20)$; $B=(10,25,32,13,10)$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 12 & 7 & 11 \\ 9 & 14 & 10 & 7 & 6 \\ 12 & 15 & 9 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

6. $A = (100, 120, 120)$; $B = (40, 50, 70, 90, 90)$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 & 9 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

7. $A = (100, 150, 50)$; $B = (75, 80, 60, 85)$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $A = (50, 40, 20)$; $B = (30, 25, 35, 20)$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

9. $A = (800, 250, 350)$; $B = (120, 210, 350, 240, 480)$

$$C = \begin{pmatrix} 18 & 13 & 11 & 15 & 14 \\ 10 & 22 & 18 & 14 & 13 \\ 12 & 16 & 14 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

10. $A = (10, 15, 10, 25)$; $B = (10, 20, 15, 15)$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

11. $A = (20, 15, 10, 25)$; $B = (20, 15, 15, 10, 10)$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

12. $A = (45, 38, 23, 84)$; $B = (70, 65, 55)$

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 12 \\ 4 & 6 & 8 \\ 24 & 21 & 5 \\ 12 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

13. $A = (50, 40, 20)$; $B = (30, 25, 35, 20)$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

14. $A = (30, 50, 20)$; $B = (15, 15, 40, 30)$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

15. $A = (30, 20, 40, 50)$; $B = (35, 20, 55, 30)$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$16. A = (60, 65, 70); B = (40, 60, 70, 25)$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$17. A = (15, 10, 15); B = (12, 8, 20)$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$18. A = (160, 140, 60); B = (80, 80, 60, 80)$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$19. A = (80, 140, 70); B = (80, 50, 50, 70)$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$20. A = (180, 190, 170); B = (45, 45, 100, 160)$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$21. A = (100, 150, 50); B = (75, 80, 60, 85)$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22. A = (110, 190, 90); B = (80, 60, 170, 80)$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$23. A = (175, 125, 140); B = (80, 110, 60, 40)$$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$24. A = (510, 90, 120); B = (270, 140, 200, 110)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$25. A = (115, 175, 130); B = (70, 220, 40, 30, 60);$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 7 & 3 \\ 0 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = (30, 40, 20); B = (20, 30, 30, 10);$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = (10, 15, 25); B = (5, 10, 20, 15);$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = (60, 80, 100); B = (40, 60, 80, 60);$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = (120, 40, 70); B = (50, 75, 45, 60);$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 15 & 12 & 8 \\ 14 & 9 & 10 & 1 \\ 17 & 16 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = (180, 90, 170); B = (45, 45, 100, 160);$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Практична робота №8

Дослідження технічної системи за допомогою повного факторного експерименту

Метою практичної роботи є вивчення методу повного факторного експерименту та його алгоритму для одержання математичної моделі (у вигляді лінійного полінома) і виявлення їх адекватності, а також вивчення методики складання матриць планування, набуття навичок обробки та аналізу результатів повного факторного експерименту для визначення оптимальних методів проведення біотехнологічних процесів.

ВСТУП

Велика кількість експериментальних задач в біотехнології сформулюються як екстремальні; до них відноситься визначення оптимальних умов процесу, оптимального складу композиції і т. д. Планування експерименту для рішення таких задач дозволяє знайти оптимальне місцезнаходження точок у факторному просторі і здійснити лінійне перетворення координат, завдяки чому забезпечується можливість подолати недоліки класичного регресійного аналізу, в тому числі кореляцію між коефіцієнтами рівняння регресії.

Вибір плану визначається постановкою задачі дослідження та особливостями об'єкта. Процес дослідження зазвичай розбивається на окремі етапи. Інформація, отримана після кожного етапу, визначає подальшу стратегію експерименту – таким чином виникає можливість оптимального управління експериментом. Планування експерименту дозволяє одночасно варіювати всі фактори та отримувати кількісні оцінки основних ефектів та ефектів взаємодії.

Ефекти, що цікавлять дослідника, визначаються зі значно меншою похибкою, ніж та, яка характерна для традиційних методів дослідження.

В кінцевому рахунку використання методів планування експерименту значно збільшує ефективність експерименту.

1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ

Суть метода повнофакторного експерименту (ПФЕ) полягає в одночасному змінюванні усіх факторів у досліді, одержані математичної моделі (рівняння регресії) у вигляді лінійного полінома та дослідженні останнього методами математичної статистики. Рівняння регресії, яке одержано згідно з результатами ПФЕ, має вигляд:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \quad (1.1)$$

Слід також відзначити, що у випадках можливої взаємодії між факторами рівняння регресії записують у формі неповного квадратичного полінома, наприклад, при $n=2$:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 \quad (1.2)$$

В рівняннях (1) та (2) b_0 – вільний член, b_i – лінійні ефекти ($i=1, 2, 3, \dots, n$) b_{ij} – ефекти взаємодії ($i, j=1, 2, 3, \dots, k$) $i \neq j$, k – кількість факторів.

Вибір області експерименту. Для проведення дослідження обирається так звана область експерименту, тобто певна область факторного простору, за межі якої не будуть виходити значення факторів при проведенні дослідів.

При виборі області експерименту враховуються наступні обмеження:

1. Обмеження на область визначення факторів, які не можуть бути порушені при будь-яких обставинах;
2. Обмеження, пов'язані з техніко-економічними показниками (наприклад, якщо у досліді використовується коштовний продукт, то його витрата повинна бути обмежена, інакше вартість експерименту буде дуже великою).
3. Обмеження, пов'язані з конкретними умовами проведення процесу (технологічні обмеження). Враховуючи усі ці обмеження, можна вибрати достатньо вдалу область експерименту.

Область експерименту визначається наступними параметрами:

- основним (нульовим) рівнем факторів;
- інтервалами варіювання факторів.

За основні рівні приймаються ті величини факторів, які згідно з результатами попередніх досліджень визначають найкраще значення змінної стану.

Основна вимога до інтервалу варіювання полягає у тому, щоб він був вищим за подвійну середню квадратичну помилку фактора:

$$\Delta z > 2 | S_{x_i} | \quad (1.3)$$

Ця вимога обумовлена тим, що фактори, які мають близькі значення (знаходяться на сусідніх рівнях), повинні невинновиковим чином впливати на змінну стану. Вдалиий вибір інтервалів варіювання гарантує достовірність математичної моделі.

Найбільше розповсюдження одержало планування факторів на двох рівнях, де як рівні використовуються верхня й нижня межі інтервалу варіювання.

Побудова матриці планування. Матриця планування вдає із себе план експерименту, що утримує запис усіх комбінацій факторів або частини з них у кодованій формі.

Кодування значень факторів здійснюється за формулою:

$$x_j = \frac{z_i - z_{i0}}{\Delta z_i} \quad (1.4)$$

dx_j – кодоване значення фактору;

z_{i0} – нульовий рівень натуральної змінної;

z_i – верхній або нижній рівень натуральної змінної;

Δz_i – інтервал варіювання натуральної змінної.

Верхньому рівню натуральної змінної відповідає кодоване значення (+1), а нижньому – (-1). В матрицю включається також стовпець x_0 що складається з (+1), який знадобиться при розрахунку вільного члена поліному.

Складання матриці планування проводиться на основі певних принципів оптимальності. В інженерній практиці широко використовуються принципи рототабельності та ортогональності.

1. Принцип ротатабельності передбачає мінімум дисперсії передбаченого значення змінної стану. У будь-якій точці факторного простору при рівності цих дисперсій на рівній відстані від центру плану;

2. Принцип ортогональності дозволяє при розрахунку коефіцієнтів рівняння регресії (математичної моделі) використати наступні властивості (див. матрицю планування, табл. 2.2):

$$\begin{aligned}\sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} &= 0; \\ \sum_{u=1}^N x_{iu} &= 0; \\ \sum_{u=1}^N x_{iu}^2 &= N; \\ i &\neq j; i, j = 1, 2, \dots, k\end{aligned}\tag{1.5}$$

де N – кількість дослідів ;

u – номер досліду ($u=1, 2, \dots, N$);

i – кількість факторів ($i=1, 2, \dots, k$).

Після побудови матриці планування приступають до проведення експерименту. Якщо попередньо було встановлено, що на зміну стану процесу значний вплив виявляють перешкоди (хімічні), то план експерименту реалізують декілька разів (паралельні досліди) і одержують m значень вихідного параметра, які потім усереднюють (u – номер паралельного досліду, $u'=1, 2, \dots, m$).

Звичайно, за початкове приймають кількість паралельних дослідів m (частіше від 2 до 4). При перевірці відтворення кількість паралельних дослідів уточнюються (якщо це необхідно). Після цього результати експериментів оброблюються та аналізуються.

Обробка та аналіз результатів повного факторного експерименту.

Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії та статистичний аналіз виявляються основними задачами обробки результатів активного експерименту. Алгоритм розв'язання цих задач може бути таким:

1) *Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії* проводиться згідно з формулами:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{0u} \overline{y_u} \tag{1.6}$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} \overline{y_u}, \quad (i = 1, 2, \dots, k) \tag{1.7}$$

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_{iu} x_{ju} \overline{y_u}, \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, k) \tag{1.8}$$

де b_{ij} – коефіцієнт регресії, який характеризує взаємодію факторів $x_i \cdot x_j$;

$\overline{y_u}$ – середнє значення y згідно з паралельними дослідями u -го рядка матриці планування.

2) *Перевірка однорідності дисперсій.* Перед розрахунком помилки досліду необхідно переконатися, що розсіяння дослідів у кожній точці факторного

простору не перевищує певної величини. Необхідно розрахувати порядкові дисперсії та перевірити їх однорідність.

Порядкові дисперсії S_u^2 розраховуються за формулою:

$$S_u^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^m (y_{uk} - \bar{y}_u)^2 \quad (1.9)$$

Перевірку однорідності дисперсій слід проводити згідно з критерієм Кохрена (G). Його розрахункове значення G_p визначають як відношення:

$$G_p = \frac{S_{u \max}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} \quad (1.10)$$

де $S_{u \max}^2$ – максимальна з розрахованих порядкових дисперсій;

$\sum_{u=1}^N S_u^2$ – сума усіх дисперсій з N -рядків матриці планування.

Якщо виконується умова:

$$G_p < G_T \quad (1.11)$$

то гіпотеза про однорідність дисперсій приймається. Табличне значення критерію Кохрена G_T знаходять у таблицях (Додаток А., табл. А.1) для чисел ступенів вільності $f_1 = m-1$; $f_2 = N$ та рівня значимості q (у технічних розрахунках приймається 5% рівня значимості, або $q=0.05$). Якщо умова (1.11) не виконується, то слід збільшити число паралельних дослідів, тобто ще раз, або кілька разів необхідно реалізувати матрицю планування.

При виконанні умови (1.11) про однорідність порядкових дисперсій їх усереднюють згідно з формулою:

$$S_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2 = \frac{1}{N(m-1)} \sum_{u=1}^N \sum_{k=1}^m (y_{uk} - \bar{y}_u)^2, \quad (1.12)$$

де $f_0 = N(m-1)$ – число ступенів свободи.

Таким чином одержують помилку досліду S_0^2 , яка для хімічних процесів не повинна перевищувати 5%.

Необхідно відмітити, що неоднорідні дисперсії усереднювати не можна.

3) *Перевірка значимості коефіцієнтів регресії.* Відомо, що один фактор більше впливає на зміну стану, а другий менше. Для оцінки його впливу використовують перевірку значимості кожного коефіцієнту двома рівноцінними способами. В обох випадках спочатку знаходять дисперсію коефіцієнтів регресії згідно з формулою:

$$S_{bi}^2 = \frac{S_0^2}{N \cdot m}, \quad (1.13)$$

так як дисперсії усіх коефіцієнтів рівні, оскільки залежать тільки від помилки досліду S_0^2 та кількості рядків матриці планування N .

За першим способом, оцінку значимості коефіцієнтів проводять згідно з формулою (1.14), та умовою (1.15):

$$t_{ip} = \frac{|b_i|}{S_{bi}}, \quad (1.14)$$

$$t_{ip} > t_T, \quad (1.15)$$

де $|b_i|$ – абсолютне значення i -того коефіцієнту регресії;

$S_{bi} = \sqrt{S_{bi}^2}$ – середньоквадратичне відхилення;

t_{ip} – розрахункове значення критерію Стюдента для кожного коефіцієнту;

t_T – табличне значення критерію Стюдента, який знаходиться для чисел ступенів вільності $f_0 = N(m-1)$ та рівня значимості $q=0,05$ (Додаток А, табл. А2).

За другим способом, для перевірки значимості коефіцієнтів регресії використовують довірчий інтервал Δb_i який унаслідок рівності S_{bi}^2 для усіх коефіцієнтів однаковий:

$$\Delta b_i = \pm t_t \cdot S_{bi} \quad (1.16)$$

В цьому випадку оцінку значимості проводять згідно з умовою порівняння значень коефіцієнтів та довірчого інтервалу (1.17):

$$|b_i| > \Delta b_i \quad (1.17)$$

Якщо виконуються умови (1.15) та (1.17), то i -тий коефіцієнт признається значимим. Якщо умова (1.15) або (1.17) не виконується для якого-небудь коефіцієнта, то відповідний фактор можна признати незначимим, і виключити його з рівняння регресії. Кількість значимих коефіцієнтів позначимо літерою l .

4) *Перевірка адекватності лінійного рівняння регресії.* Перевірка адекватності лінійного рівняння регресії реального процесу проводиться порівнянням дисперсій. Одна дисперсія характеризує розсіювання середніх дослідних даних змінної стану $\bar{y}_u$ відносно тих значень змінної стану $\hat{y}_u$, які передбачені одержаними лінійними рівняннями регресії. Ця дисперсія зветься дисперсією адекватності і знаходиться за допомогою формули (1.18):

$$S_{ad}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{u=1}^N \left(\bar{y}_u - \hat{y}_u \right)^2, \quad (1.18)$$

де m – кількість паралельних дослідів;

N – кількість рядків матриці планування;

l – кількість членів рівняння регресії, які залишилися після оцінки значення коефіцієнтів.

Друга дисперсія – це помилка досліду S_0^2 .

Перевірку адекватності проводять, оцінюючи відношення (1.19):

$$F_p = \frac{S_{ad}^2}{S_0^2} \quad (1.19)$$

Згідно з умовою:

$$F_p < F_T, \quad (1.20)$$

де F_p – розрахунковий критерій Фішера,

F_T – табличний критерій Фішера, який знаходиться в додатку А, для числа ступенів вільності. $f_1 = f_{ad} = N-l$; $f_2 = f_0 = N(m-1)$ та обраного рівня значимості $q=0,05$.

Якщо виконується умова (1.20), то лінійне рівняння регресії вважається адекватним. У випадку невиконання умови адекватності (1.20) припустима модель неадекватна. Потрібно повторити досліди усі або частково за інших умов (наприклад, збільшити кількість паралельних дослідів, зменшити інтервали

варіювання декількох факторів, врахувати нові фактори, тощо), або перейти до поліномів більш високих порядків.

2. ПРИКЛАД РОЗРОБКИ СТАТИСТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Процес іонообмінного вилучення і концентрування ртуті із відпрацьованого електроліту у виробництві їдкого натру і хлору здійснюється на аніоніті АВ-17.

Вибір змінної стану: як змінну стану у обирають ступінь очищення розчину від ртуті, %.

Вибір факторів: кінетичні дослідження показали, що значний вплив здійснюють наступні фактори: z_1 – термін контакту, год.; z_2 – кількість смоли, що завантажуються, г; z_3 – видаток відпрацьованого електроліту, л/год. Область зміни факторів визначалася відповідно до технологічних умов і представлено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Найменування	Інтервали зміни факторів		
	Фактори		
	z_1	z_2	z_3
Верхній рівень	5,5	12,5	1,5
Нижній рівень	4,5	9,5	1,0
Нульовий рівень	5,0	11,0	1,25
Інтервал варіювання	0,5	1,5	0,25

Таким чином, математична модель процесу у загальному вигляді будемо шукати у вигляді поліному:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + b_{13}x_1x_3, \quad (2.1)$$

Вибір матриці планування. Постановка задачі вимагає одержання математичної моделі. Скористаємося планом ПФЕ типу 2^3 –планування дворівневе, три фактори, 8 дослідів. Враховуючи невелике відтворення дослідів, була прийнята кількість паралельних дослідів рівною 2.

Матриця планування експерименту приведена в таблиці 2.2. Реалізація цього експерименту проводилася блоками по 8 дослідів за 2 дні без рандомізації.

Порядкові дисперсії розраховані згідно з формулою (1.9) і внесені у відповідний стовпець таблиці 2.2.

Перевірка однорідності дисперсій.

$$G_p = \frac{21,13}{722,87} = 0,58$$

$G_T=0,679$ при $f_1=1, f_2=8$ та $q=0.05$ (див. додаток А, табл. А.1.)

гіпотеза про однорідність дисперсій приймається.

Розрахунок помилки досліду. Згідно з формулою (1.12), одержуємо:

$$S_0^2 = \frac{1}{8} \cdot 36,17 = 4,521$$

Розрахунок коефіцієнтів лінійного рівняння регресії. Згідно з формулами (1.6) – (1.8) і даними таблиці 2.2 розраховані значення коефіцієнтів регресії представлені у таблиці 2.3.

Таблиця 2.2

Матриця планування експерименту

Досліди №	План експерименту							Експеримент			Розрахунок	
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	y_1	y_2	$\bar{y}$	S_u^2	$\hat{y}_u$
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	93,18	92,62	92,90	0,16	91,19
2	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	94,34	96,40	95,37	2,12	94,91
3	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	80,99	77,61	79,30	5,71	80,63
4	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	84,20	82,80	83,50	0,98	84,34
5	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	96,65	94,95	95,80	1,45	96,38
6	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	99,07	97,93	98,50	0,65	100,1
7	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	89,25	82,75	86,00	21,13	85,81
8	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	92,91	90,09	91,50	3,98	89,53

Перевірка значимості коефіцієнтів регресії. Дисперсія коефіцієнтів рівняння регресії розраховується згідно з формулою (1.13):

$$S_{ei}^2 = \frac{4,521}{8 \times 2} = 0,283;$$

$$S_{ui} = \sqrt{0,283} = 0,53$$

Розрахунковий критерій Стюдента для кожного коефіцієнту, визначений за формулою (1.14), представлений у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Значення коефіцієнтів регресії і оцінка їх значимості

Коефіцієнт	Значення	Розраховане значення критерія Стюдента, t_p	Табличне значення критерія Стюдента t_T	Висновок
b_0	90,36	169,99	$t_T=2,31$ при $f_o=N(m-l)=8 \cdot (2-1)=8$ та $q=0,05$.	значимий
b_1	-1,86	3,50		значимий
b_2	5,28	9,94		значимий
b_3	-2,59	4,87		значимий
b_{12}	0,57	1,07		незначимий
b_{13}	0,19	0,36		незначимий
b_{23}	1,08	2,04		незначимий

Згідно з умовою (1.15) значимі коефіцієнти b_0, b_1, b_2, b_3 ($l=4$).

Таким чином рівняння регресії :

$$\hat{y}_x = 90,36 - 1,86x_1 + 5,28x_2 - 2,59x_3, \quad (2.2)$$

де індекс x підкреслює той факт, що значення факторів для розрахунку використовуються у кодованій формі. За отриманим рівнянням регресії визначаємо значення $\hat{y}_u$, що наведені в останньому стовпчику таблиці 2.2.

Перевірка адекватності рівняння регресії. Дисперсію адекватності розрахуємо згідно з формулою (1.18) по відповідним значенням із таблиці 2.2:

$$S_{ad}^2 = \frac{2}{8-4} \times 12,397 = 6,199$$

Тоді, розраховане значення критерію Фішера за (1.19): $F_p = \frac{6,199}{4,521} = 1,37$

Перевірку адекватності проводимо за умовою (1.20), для чого знаходимо значення табличного критерію Фішера в Додатка А, таблиці А3 при числі ступенів вільності:

$$f_1 = f_{ad} = 4; f_2 = f_0 = 8 \text{ та } q = 0.05 \quad F_T = 3,84$$

Порівняємо обидва критерії: $F_p < F_T$.

Одержане лінійне рівняння (2.2) адекватно описує експериментальні дані.

Для отримання адекватної статистичної моделі необхідно перейти до значення факторів у натуральних одиницях виміру. Наведемо залежність для приведення факторів моделі до натуральних одиниць використовуючи залежність (1.4):

$$\begin{aligned} \hat{y}_x &= 90,36 - 1,86 \frac{z_1 - z_{1_0}}{\Delta z_1} + 5,28 \frac{z_2 - z_{2_0}}{\Delta z_2} - 2,59 \frac{z_3 - z_{3_0}}{\Delta z_3} = \\ &= 90,36 - 1,86 \frac{z_1 - 5,0}{0,5} + 5,28 \frac{z_2 - 11,0}{1,5} - 2,59 \frac{z_3 - 1,25}{0,25} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Після приведення подібних членів відносно факторів z_1, z_2, z_3 математична модель набуває вигляду (2.4):

$$\hat{y}_z = 83,19 - 3,72z_1 + 3,52z_2 - 10,36z_3, \quad (2.4)$$

де індекс z підкреслює той факт, що значення факторів для розрахунку використовуються у натуральних одиницях.

Самоперевірка здійснюється наступним чином: розраховують значення змінної стану за адекватним регресійне рівнянням при завданні набору факторів у кодованій формі і за статистичною моделлю при відповідних значеннях факторів у натуральних одиницях.

Так для отриманих результатів за прикладом, це представлено у таблиці 2.4.

Таким чином, можна зробити висновок про отримання адекватної статистичної математичної моделі, яка дає змогу розрахувати ступінь очищення розчину від ртуті (%) при іонообмінному вилученні ртуті із відпрацьованого електроліту у виробництві їдкою натру і хлору на аніоніті АВ-17 в залежності від терміну контакту, кількості смоли, що завантажується та видатку відпрацьованого електроліту.

Результати самоперевірки

Фактори:	в кодованій формі			в натуральних одиницях виміру		
	x_1	x_2	x_3	z_1	z_2	z_3
значення	+1	+1	+1	5,5	12,5	1,5
Вираз для визначення змінної стану	$\hat{y}_x = 90,36 - 1,86x_1 + 5,28x_2 - 2,59x_3$			$\hat{y}_z = 83,19 - 3,72z_1 + 3,52z_2 - 10,36z_3$		
Результат	91,19			91,19		

3. ЗАВДАННЯ

Для виконання практичної роботи необхідно опанувати матеріал відповідної лекції, матеріал для СРС відповідної теми (див. список літератури), на практичних заняттях послідовно зробити :

1. Проаналізувати матрицю експерименту прикладу п.2.
 2. Провести розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії.
 3. Здійснити перевірку однорідності дисперсій.
 4. Провести перевірку значимості коефіцієнтів регресії.
 5. Зробити перевірку адекватності лінійного рівняння регресії.
- Проаналізувати отримані результати.

4. ПИТАННЯ ДО САМОПЕРЕВІРКИ

1. Суть методу повного факторного експерименту?
2. Що зветься областю факторного простору ?
3. Якими параметрами визначається область експерименту?
4. Які вимоги пред'являються до інтервалу варіювання?
5. В чому полягає суть принципів рототабельності та ортогональності?
6. Що являє собою матриця планування експерименту?
7. Які існують переваги повного факторного експерименту?
8. Який алгоритм обробки та аналіз результатів ПФЕ?
9. Як виконується розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії?
10. Як виконується розрахунок помилки досліду?
11. Як виконується перевірка однорідності дисперсій?
12. Як виконується перевірка значимості коефіцієнтів регресії?
13. Як виконується перевірка адекватності рівняння регресії?
14. Які існують рекомендації у випадку неадекватної математичної моделі?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондарь А.Г. Математическое моделирование в химической технологии - Київ.: Вища школа, 1973.–280с.
2. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни “Математичне моделювання та застосування електронно-обчислювальних машин в хімічній технології /Уклад. Т.В.Бойко, О.С. Бондаренко, І.О.Потяженко, О.Т. Попович.– Київ.:Політехника, 2001.–64с.
3. Математичне моделювання та застосування ЕОМ в хімічній технології: Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт для студентів напряму підготовки «Хімічна технологія та інженерія» / Уклад.: Т.В. Бойко, В.І. Бендюг, І.О. Потяженко, О.М. Жигір, А.М. Шахновський, О.С.Бондаренко.– Київ.; НТУУ «КПІ», 2007. – 128с.
4. Бондарь А.Г.,Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технологии.-Київ.:Вища школа,1976.–262с.

ДОДАТКИ

Додаток А Статистичні критерії

Таблиця А.1

Критерій Кохрена (при $q=0,05$)

$f_1 \backslash f_2$	1	2	4	4	5	6	7	8	9	10	∞
2	0.9985	0.9750	0.9392	0.9057	0.8584	0.8534	0.8332	0.8159	0.8100	0.7880	0.500
3	0.9669	0.8709	0.7977	0.7457	0.7071	0.6771	0.6530	0.6333	0.6167	0.6025	0.3333
4	0.9065	0.7679	0.6841	0.6287	0.5895	0.5598	0.5365	0.5175	0.5017	0.4884	0.2500
5	0.8412	0.6838	0.5981	0.5440	0.5063	0.4783	0.4564	0.4387	0.4241	0.4118	0.2000
6	0.7808	0.6161	0.5321	0.4803	0.4447	0.4184	0.3980	0.3817	0.3682	0.3568	0.1667
7	0.7271	0.5612	0.4800	0.4807	0.3907	0.3726	0.3726	0.3555	0.3384	0.3254	0.1429
8	0.6788	0.5157	0.4377	0.3910	0.3595	0.3362	0.3185	0.3043	0.2926	0.2829	0.1250
9	0.6385	0.4775	0.4027	0.3584	0.3286	0.3067	0.2901	0.2768	0.2659	0.2568	0.1111
10	0.6020	0.4459	0.3733	0.3311	0.3029	0.2823	0.2666	0.2541	0.2439	0.2353	0.1000
12	0.5410	0.3924	0.2880	0.2624	0.2439	0.2299	0.2187	0.2098	0.2020	0.2020	0.0833
15	0.4708	0.3346	0.278	0.2419	0.2195	0.2034	0.1911	0.1815	0.1736	0.1671	0.0667
20	0.3894	0.2705	0.2205	0.1921	0.1735	0.1602	0.1501	0.1422	0.1357	0.1303	0.0500
24	0.3434	0.2354	0.1907	0.1656	0.1493	0.1374	0.1286	0.1216	0.1160	0.1113	0.0417
30	0.2929	0.1980	0.1593	0.1377	0.1237	0.1137	0.1061	0.1002	0.0958	0.0921	0.0333
40	0.2370	0.1576	0.1259	0.1082	0.0968	0.0887	0.0827	0.0780	0.0745	0.0713	0.0250
50	0.1737	0.1131	0.089	0.0766	0.0766	0.0623	0.0583	0.0552	0.0520	0.0497	0.0167
120	0.0998	0.0632	0.0496	0.0419	0.0371	0.0337	0.0312	0.0292	0.0297	0.0266	0.0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблиця А.2
Процентні точки розподілення Стьюдента.

q f_0	10%	5%	2%	1%
1	6.31	12.71	31.82	63.66
2	2.92	4.30	6.96	9.92
3	2.35	3.18	4.54	5.84
4	2.13	2.78	3.75	4.60
5	2.02	2.57	3.36	4.03
6	1.94	2.45	3.14	3.71
7	1.89	2.36	3.00	3.50
8	1.86	2.31	2.90	3.36
9	1.83	2.26	2.82	3.25
10	1.81	2.23	2.76	3.17
11	1.80	2.20	2.72	3.11
12	1.78	2.18	2.68	3.05
13	1.77	2.16	2.65	3.01
14	1.76	2.14	2.62	2.98
15	1.76	2.13	2.60	2.95
16	1.75	2.12	2.58	2.92
17	1.74	2.11	2.57	2.90
18	1.73	2.10	2.55	2.88
19	1.73	2.09	2.54	2.86
20	1.72	2.09	2.53	2.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83
22	1.72	2.07	2.51	2.82

Таблиця А.3
Критерій Фішера при $q=0.05$

$f_1 \backslash f_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.6	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.06	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.61	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.64	5.91	6.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.65	4.95	4.82	4.68	4.53	4.33
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.16	4.60	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.72	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.67	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.98
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.67	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.67	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13

САМОСТІЙНА РОБОТА

Необхідним елементом успішного засвоєння навчального матеріалу дисципліни є самостійна робота здобувачів вищої освіти з вітчизняною та закордонною спеціальною літературою. Самостійна робота є основним засобом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових навчальних занять. Самостійна робота включає: вивчення теоретичного курсу за конспектами, підручниками, іншою літературою, рекомендованою викладачем; виконання індивідуальних практичних занять; аналіз окремих даних; формування висновків та пропозицій.

Основні види самостійної роботи:

1. Вивчення лекційного матеріалу.
2. Робота з вивчення рекомендованої літератури.
3. Вивчення основних термінів та понять.
4. Підготовка до практичних занять та виконання індивідуальних завдань
5. Використання матеріалів, які знаходяться в оболонці Moodle – дистанційне навчання та проходження комп'ютерного тестування.
6. Контрольна перевірка кожним здобувачем особистих знань за запитаннями для самостійного поглибленого вивчення та самоконтролю.
7. Підготовка до заліку.

Самостійна робота оформляється у вигляді звіту. Форма контролю – тестування, захист індивідуальних завдань, рефератів та презентацій. При оцінюванні результатів самостійної роботи здобувачів вищої освіти враховується особистий внесок здобувача та коректність висновків. В методичних рекомендаціях для занять виділяються теми, які здобувачі вищої освіти повинні виконати самостійно, і наводяться варіанти завдань для самостійної роботи.

Теми та завдання обов'язкового самостійного опрацювання

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	сучасне уявлення про модель, особливості біотехнологічних моделей, вчені-дослідники біологічного моделювання (Пірсон, Госсет, Фішер, Шеннон, Симпсон)	6
2	теоретичні основи моделювання в біотехнології, практичні аспекти моделювання в біології, біометрія: поняття та основні напрямки, поняття системи та системності	8
3	поняття інформації та інформатики, теоретичні основи біоінформатики, біоінформатика в сучасній біотехнології, біоінформатика генома, нейроінформатика	8
4	теоретичні основи моделювання варіаційних параметрів, основні формули варіаційних розрахунків, комп'ютерне моделювання варіаційних параметрів за допомогою програми «Електронні таблиці», критерій Стюдента	8
5	теоретичні основи моделювання кореляційних залежностей, основні формули кореляційних розрахунків, комп'ютерне моделювання кореляційних залежностей за допомогою програми «Електронні таблиці», критерій Фішера	6
6	теоретичні основи моделювання регресійних залежностей, основні формули розрахунків лінійної регресійної залежності, комп'ютерне моделювання регресійних залежностей за допомогою програми «Електронні таблиці», рівень значущості статистичних розрахунків	8
7	історичні передумови розробки моделі, біотехнологічна складова моделі, математична складова моделі, розробка комп'ютерної моделі, практичне використання моделі	8
8	історичні передумови розробки моделі, біоінженерна складова моделі, математична складова моделі, розробка комп'ютерної моделі, практичне використання моделі	6
	Всього	58

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Артамонова М. В., Степанькова С. Г. Проектування хлібопекарських підприємств : навчальний посібник. Харків : ДБТУ, 2024. 123 с. URL: https://repo.btu.kharkov.ua/bitstream/123456789/55303/1/NP_PROYEKT_KHL_IBOPEKAR_PIDPRYYEMSTV_24.pdf.
2. Артамонова М. В., Шидакова-Каменюка О. Г. Технологічні розрахунки та контроль безпеки у хлібопекарському, макаронному, кондитерському та харчоконцентратному виробництві : навчальний посібник. Харків : ДБТУ, 2022. 173 с.
3. Кушніров П. В., Євтухов А. В., Дегтярьов І. М. Системно-структурне моделювання технологічних процесів і систем : навчальний посібник. Суми : Сумський державний університет, 2023. 134 с.
4. Математичне моделювання систем і процесів : конспект лекцій / уклад. Н. В. Богданова, О. В. Богданов. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 85 с.
5. Математичне моделювання систем і технологічних процесів / В. Ю. Щербань, О. З. Колиско, Ю. Ю. Щербань та ін. Київ : ТОВ "Фастбінд Україна", 2023. 938 с. URL: https://nubip.edu.ua/sites/default/files/robocha_programa_modelyuvannya_0.pdf
6. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв : опорний конспект лекцій. Дніпро : Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, 2020. 77 с. URL: <https://surl.li/cwqtlk>.
7. Свідло К. В. , Лазарева Т. А., Бачієва Л. О. Методологія і організація наукових досліджень в харчовій галузі : підручник. Харків : Світ Книг, 2020. 225 с.
8. Харчові технології. Практикум: навчальний посібник / О. В. Самохвалова, М. В. Артамонова, Г. В. Степанькова, К. Р. Касабова. Харків : ДБТУ, 2023. 417 с.
9. Моделювання технологічних процесів тваринництва : метод. реком. для

проведення практичних занять здобувачам вищої освіти ступеня "Магістр" освітньо-професійної та освітньо-наукової програм спеціальності 204 "ТВППТ" / уклад. Р. О. Трибрат. Миколаїв : МНАУ, 2019. 71 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/6362>.

10. Моделювання технологічних процесів у тваринництві : курс лекцій для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти ОПП «Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва» спеціальності 204 «ТВППТ» денної та заочної форми здобуття вищої освіти / уклад. М. О. Шалімов. Миколаїв : МНАУ, 2024. 166 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/17432>.
11. Трибрат Р.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв : конспект лекцій. Миколаїв : МНАУ, 2023. 85 с. URL: <https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/2454>
12. Поперечний А.М. Моделювання процесів та обладнання харчових виробництв. Підручник / А.М. Поперечний, В.О. Потапов, В.Г. Корнійчук. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 312 с.
13. Потапов В.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв – Харків : ХДУХТ, 2009 – 148 с.
14. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. / Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко [та ін.]. Вінниця : ВНТУ, 2019. 235 с.

Додаткова література

1. Гліненко Л. К, Сухонос О. Г. Основи моделювання технічних систем: навчальний посібник. Львів : Бескид Біт, 2003. 176 с.
2. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. / Р. Н. Кветний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та ін. Вінниця: ВНТУ, 2019. 235 с.
3. Луговський В. І. Математичне моделювання та застосування ЕОМ в хімічній технології: конспект лекцій. Одеса: Одеський національний політехнічний університет, 2003. 101 с.
4. Поперечний А. М., Потапов В. О., Корнійчук В. Г. Моделювання процесів

та обладнання харчових виробництв : підручник. Київ : Центр учбової літератури, 2012. 312 с.

5. Потапов В.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв. Харків : ХДУХТ, 2009 148 с.
6. Моделювання технологічних процесів тваринництва [Електронний ресурс] : метод. реком. для проведення практичних занять здобувачам вищої освіти ступеня "Магістр" освітньо-професійної та освітньо-наукової програм спеціальності 204 "ТВППТ" / уклад. Р. О. Трибрат. — Електрон. текст. дані. — Миколаїв : МНАУ, 2019. — 71 с.

Навчальне видання

Математичне моделювання технічних та технологічних процесів

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Тищенко Світлана Іванівна
Пархоменко Олександр Юрійович та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 6,25.
Тираж 50 прим. Зам. № ____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.