

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики



ВИЩА МАТЕМАТИКА

Елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри:

завдання та методичні рекомендації

для самостійної роботи здобувачів

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»

спеціальності G3 «Електрична інженерія»

для денної та заочної форм здобуття вищої освіти

**Миколаїв
2025**

УДК 514.12+514.742
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 3 від 17. 11. 2025 р.)

Укладач:

Є. Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ

Рецензенти:

Р. В. Дінжос – д.т.н., професор, проректор з наукової роботи ЧНУ ім. Петра Могили;

О. С. Садовий – к.т.н, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для здобувачів вищої освіти ступеня "Бакалавр" спеціальності 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка".

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, завдань для виконання на практичних заняттях, завдань для самостійного розв'язання. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв'язання. Пропонуються приклади розв'язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Лінійні операції над векторами.

Тема 2. Системи координат.

Тема 3. Скалярний добуток.

Тема 4. Веторний добуток.

Тема 5. Мішаний добуток.

.

.

Тема 1. Лінійні операції над векторами

1.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Вектором $\overrightarrow{AB}$ називається спрямований відрізок. Точку A називають початком вектора, а точку B його кінцем.

До векторів відносять і так званий *нульовий вектор*, у якого початок і кінець збігаються.

Окрім літерного позначення $(\overrightarrow{AB})$ для позначення вектора використовують латинські букви зі стрілкою над ними, наприклад: $\vec{a}$. Нульовий вектор будемо позначати: $\vec{0}$.

Відстань між початком і кінцем вектора називається його *довжиною* (*а також модулем і абсолютною величиною*). Довжина вектора позначається $|\overrightarrow{AB}|$ чи $|\vec{a}|$.

Означення. Вектори, розташовані на одній прямій чи на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Вектори, розташовані на прямих, паралельних однієї і тій же площині, називаються *компланарними*.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору. Довжина його вважається рівною нулю.

Означення. Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають рівні довжини.

Лінійними операціями називаються додавання векторів і множення вектора на число.

Означення 1. Сума двох векторів, що мають загальний початок, визначається вихідною з того ж початку діагоналлю паралелограма, побудованого на даних векторах (рис. 1).

Означення 2. Сума двох векторів визначається вектором, початок якого збігається з початком першого вектора, а кінець — з кінцем другого вектора, якщо початок другого вектора поміщено наприкінці першого (мал. 2).

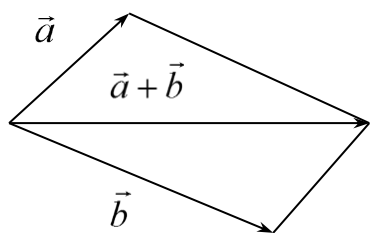


Рисунок 1

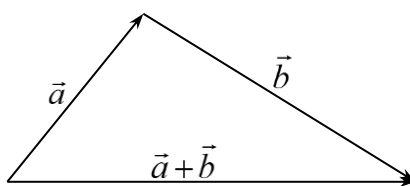


Рисунок 2

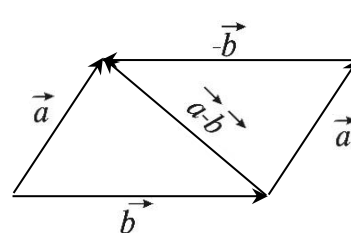


Рисунок 3

Означення. Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається будь-який вектор $\vec{b}$, задовольняючий наступним умовам:

1) $|\vec{b}| = |\alpha| |\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;

3) вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ спрямовані однаково, якщо $\alpha > 0$, і протилежно, якщо $\alpha < 0$.
Якщо ж $\alpha = 0$ чи $\vec{a} = \vec{0}$, то з першої умови випливає, що $\vec{b} = \vec{0}$.

Добуток вектора $\vec{a}$ на число α позначається $\alpha\vec{a}$.

Основні властивості лінійних операцій над векторами можна сформулювати наступним чином:

1) Додавання векторів комутативно, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконано $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2) Додавання векторів асоціативно, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконано $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

3) Додаток нульового вектора до будь-якого вектора $\vec{a}$ не змінює останнього: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4) Для будь-якого вектора $\vec{a}$ вектор $(-1)\vec{a}$ є протилежним, тобто $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$.

5) Множення вектора на число асоціативно, тобто для будь-яких чисел α і β і будь-якого вектора $\vec{a}$ виконано $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

6) Множення вектора на число дистрибутивно стосовно додавання чисел, тобто для будь-яких чисел α і β і будь-якого вектора $\vec{a}$ виконано $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

7) Множення вектора на число дистрибутивно стосовно додавання векторів, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і будь-якого числа α виконано $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

8) Множення вектора на одиницю не змінює цього вектора: $1\vec{a} = \vec{a}$.

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається сума вектора $\vec{a}$ і вектора, протилежного $\vec{b}$, тобто $\vec{a} + (-\vec{b})$ чи коротко $\vec{a} - \vec{b}$.

З цього визначення і рисунка 3 ясно правило побудови вектора $\vec{a} - \vec{b}$: якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають загальний початок, то різниця $\vec{a} - \vec{b}$ являє собою вектор, що з'єднує кінці і спрямований від від'ємника до зменшуваного.

Означення. Базисом на прямій називається будь-який ненульовий вектор на цій прямій.

Базисом на площині називаються два не колінеарних вектори на цій площині, взяті в визначеному порядку.

Базисом у просторі називаються три не компланарних вектори взяті в визначеному порядку.

Якщо вектор $\vec{b}$ представлений як лінійна комбінація деяких векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ (тобто $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k$), то говорять, що він розкладений по цих векторах. Звичайно розглядається розкладання вектора за базисом.

Означення Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис у просторі і

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3,$$

то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називаються *координатами* вектора $\vec{a}$ в даному базисі.

Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ - базис на площині і $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$,

то числа α_1, α_2 називаються *координатами* вектора $\vec{a}$ в даному базисі.

Якщо $\vec{e}_1$ - базис на прямій і $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1$, то число α називається *координатою* вектора $\vec{a}$ в даному базисі.

Компоненти вектора пишуть у дужках після літерного позначення вектора. Наприклад, $\vec{a}(1,0,2)$ означає, що компоненти вектора $\vec{a}$ у визначеному раніше обраному базисі рівні 1, 0 і 2.

Теорема 1. Кожен вектор, паралельний якій-небудь прямій, може бути розкладений за базисом на цій прямій.

Кожен вектор, паралельний якої-небудь площині, може бути розкладений за базисом на цій площині.

Кожен вектор може бути розкладений за базисом в просторі.

Координати вектора в кожнім випадку визначаються однозначно.

Нехай в деякому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ задані вектори $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тоді їх сума, різниця і множення вектора $\vec{a}$ на число λ визначаються формулами

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3,$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_1 + (a_2 - b_2)\vec{e}_2 + (a_3 - b_3)\vec{e}_3$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_1 \vec{e}_1 + \lambda a_2 \vec{e}_2 + \lambda a_3 \vec{e}_3.$$

Умова колінеарності векторів $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ має вид

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda = \text{const.}$$

1.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Дані $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$ та $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Розв'язання: На рисунку 4 позначено

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b},$$

$$\angle A = \varphi, \angle D = \pi - \varphi.$$

Із трикутника ABD за допомогою теореми косинусів знаходимо:

$$DB^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \varphi.$$

Враховуючі введні вище позначення цей вираз можна переписати у вигляді

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

Із трикутника ADC за допомогою теореми косинусів знаходим:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle D = \\ &= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot (-\cos(\varphi)) = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DC \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Враховуючі векторні позначення перепишемо цей вираз у вигляді

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi \quad (2)$$

Додаючи вираз (1) до виразу (2), знаходимо:

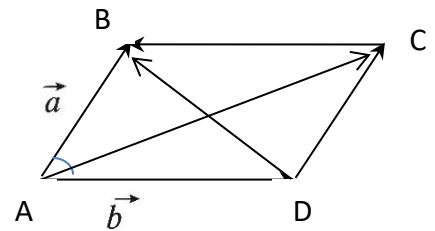


Рисунок 4

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2 \cdot (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2).$$

Тоді

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2 \cdot (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2 \cdot (11^2 + 23^2) - 30^2 = 400.$$

Отже, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{400} = 20.$

Приклад 2. Три вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$; $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$ є сторони трикутника. За допомогою $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ знайти вектори, що збігаються з медіанами трикутника: $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

Розв'язання:

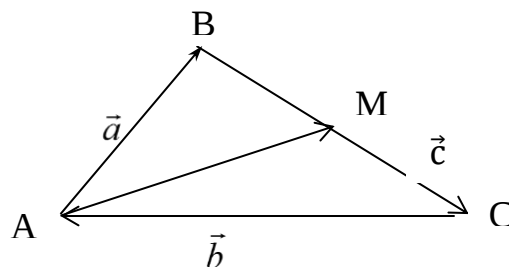


Рисунок 5

За правилом трикутника $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$. Оскільки точка М є серединою відрізка BC за визначенням медіани, то $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}$. Вектор $\overrightarrow{CB}$ є протилежним до вектора $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Тому $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2} \vec{c}$. Отже, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \vec{c}$ або

$$\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{c}.$$

Слід зауважити, що $\overrightarrow{AM}$ можна було б знайти і трикутника ABM . В цьому випадку $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ або

$$\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{c}.$$

Медіани $\overrightarrow{BN}$ та $\overrightarrow{CP}$ знаходяться аналогічно.

Приклад 3. У трикутнику ABC сторона AB точками M і N поділена на три рівні частини: $AM = MN = NB$. Знайти вектор $\overrightarrow{CM}$, якщо $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Розв'язання:

Маємо, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$. Отже, $\overrightarrow{AM} = (\vec{b} - \vec{a}) / 3$. Оскільки $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$, то $\overrightarrow{CM} = \vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) / 3 = (2\vec{a} + \vec{b}) / 3$.

Приклад 4. У трикутнику ABC пряма AM є бісектрисою кута BAC , а точка M лежить на стороні BC . Знайти $\overrightarrow{AM}$, якщо, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

Розв'язання:

Маємо $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$. Із властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника випливає, що $BM : MC = |\vec{b}| : |\vec{c}|$, тобто $BM : MC = |\vec{b}| : (|\vec{b}| + |\vec{c}|)$. Звідси

отримаємо $\overrightarrow{BM} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|} (|\vec{c}| - |\vec{b}|)$. Оскільки $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, то

$$\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}| + |\vec{c}|} (|\vec{c}| - |\vec{b}|) = \frac{|\vec{b}| \cdot \vec{c} + |\vec{c}| \cdot \vec{b}}{|\vec{b}| + |\vec{c}|}.$$

Приклад 5. Яку властивість повинні мати вектори, щоб виконувалися співвідношення:

$$1) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|; \quad 2) \vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b}); \quad 3) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Розв'язання:

1) Якщо розмістити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ так, щоб вони мали спільний початок (рис.4), то $\vec{a} + \vec{b}$ задає одну діагональ паралелограма, а $\vec{a} - \vec{b}$ іншу. За умовою вони рівні зв довжиною: $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Це можливо тільки, якщо паралелограм є прямокутником. Це означає, що $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2) Із умови $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$ випливає, що $\vec{a} - \lambda\vec{a} = -\vec{b} - \lambda\vec{b}$ або $(1 - \lambda)\vec{a} = -(1 + \lambda)\vec{b}$. Отже, $\vec{b} = \frac{\lambda - 1}{1 + \lambda} \vec{a}$. Це означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають бути колінеарними.

2) Умову $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ можна переписати як $\vec{a} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b}$. Це означає, що

вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають однаковий напрям.

Приклад 6. Дані два вектори $\vec{a} = (3; -2; 6)$ і $\vec{b} = (-2; 1; 0)$. Визначити координати наступних векторів:

$$1) \vec{a} + \vec{b}, 2) \vec{a} - \vec{b}, 3) 2\vec{a}, 4) -\frac{1}{2}\vec{b}, 5) 2\vec{a} + 3\vec{b}, 6) \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}.$$

Розв'язання:

Використовуючи правила знаходження координат суми (різниці) двох векторів та множення вектора на число, знаходимо:

$$1) \vec{a} + \vec{b} = (3 - 2; -2 + 1; 6 + 0) = (1; -1; 6);$$

$$2) \vec{a} - \vec{b} = (3 - (-2); -2 - 1; 6 - 0) = (5; -3; 6);$$

$$3) 2\vec{a} = (2 \cdot 3; 2 \cdot (-2); 2 \cdot 6) = (6; -4; 12);$$

$$4) -\frac{1}{2}\vec{b} = (-\frac{1}{2} \cdot (-2); -\frac{1}{2} \cdot 1; -\frac{1}{2} \cdot 0) = (1; -\frac{1}{2}; 0);$$

$$5) 2\vec{a} + 3\vec{b} = (2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2); 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1; 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0) = (0; -1; 12);$$

$$6) \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b} = (\frac{1}{3} \cdot 3 - (-2); \frac{1}{3} \cdot (-2) - 1; \frac{1}{3} \cdot 6 - 0) = (3; -\frac{5}{3}; 2).$$

Приклад 7. Пререверити колінеарність векторів $\vec{a} = (2; -1; 3)$ і $\vec{b} = (-6; 3; -9)$. З'ясувати, який з них довший і у скільки разів, як вони спрямовані – в одну чи в різні сторони.

Розв'язання:

Розглянемо відношення відповідних координат векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$:

$$\frac{-6}{2} = \frac{3}{-1} = \frac{-9}{3} = -3. \quad (3)$$

Умова колінеарності векторів виконується. Тому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Крім того із (3) випливає, що $\vec{b} = -3\vec{a}$. Із означення множення вектора на число випливає, що вектор $\vec{b}$ в три рази довший за вектор $\vec{a}$, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ спрямовані в різні сторони.

Приклад 8. На площині дані два вектори $\vec{p} = (2; -3)$, $\vec{q} = (1; 2)$. Знайти розклад вектора $\vec{a}(9, 4)$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}$.

Розв'язання:

Позначимо базисні вектори на площині $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Тоді

$$\vec{p} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \quad \vec{q} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{a} = 9\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2. \quad (4)$$

Розкладання вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}$ запишеться у вигляді

$$\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}.$$

Для того, щоб знайти координати α, β вектора $\vec{a}$ у базисі $\vec{p}, \vec{q}$ підставимо в останній вираз розкладання (4) векторів $\vec{p}, \vec{q}, \vec{a}$ за базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Маємо

$$9\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 = \alpha \cdot (2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) + \beta \cdot (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) = (2\alpha + \beta) \cdot \vec{e}_1 + (-3\alpha + 2\beta) \cdot \vec{e}_2. \quad (5)$$

Два вектора рівні тільки тоді, коли їх відповідні координати співпадають. Прирівнюючи відповідні координати у виразі (5), отримаємо систему лінійних рівнянь для знаходження α, β :

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 9 \\ -3\alpha + 2\beta &= 4, \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $\alpha = 2, \beta = 5$. Таким чином, розкладання вектора $\vec{a}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}$ має вигляд: $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

1.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$. Визначити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Завдання 2. У паралелограмі $ABCD$ позначено: $\vec{AC} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}$ і $\vec{MD}$, де M — точка перетину діагоналей паралелограма.

Завдання 3. Дано $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{BC} = -4\vec{a} - \vec{b}, \vec{CD} = -5\vec{a} - 3\vec{b}$. Довести, що $ABCD$ — трапеція.

Завдання 4. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = (-2; 3; \beta)$ і $\vec{b} = (\alpha; -6; 2)$ колінеарні.

Завдання 5. Яку властивість повинні мати вектори, щоб виконувалися співвідношення:

$$1) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|; \quad 2) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|; \quad 3) |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|?$$

Завдання 6. На площині дані три вектори $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1)$, $\vec{c} = (7; -4)$. Знайти розклад кожного з цих трьох векторів за базисом, який складається з двох інших.

Тема 2. Системи координат.

2.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Декартовою системою координат у просторі називається сукупність точки і базису (рис. 6).

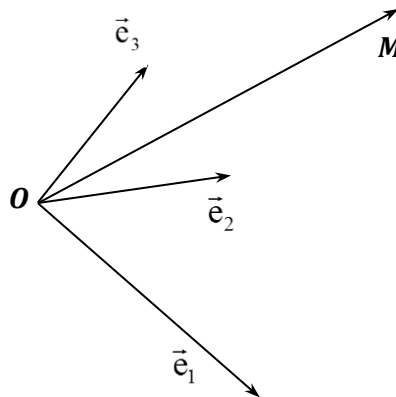


Рисунок 6

Точка **O** має назву - *початок координат*; прямі, що проходять через початок координат у напрямку базисних векторів, називаються *вісями координат*. Перша – віссю *абсцис*, друга – віссю *ординат*, а третя – віссю *аплікату*. Площини, що проходять через вісі координат, називають *координатними площинами*.

Радіусом-вектором точки *M* відносно точки *O* називається вектор $\vec{OM}$.

Означення. Компоненти радіуса-вектора точки *M* стосовно початку координат називаються *координатами* точки *M* в розглянутій системі координат.

Перша координата називається *абсцисою*, друга – *ординатою*, а третя – *аплікатою*.

Аналогічно визначаються декартові координати на площині і на прямій лінії. Зрозуміло, точка на площині має тільки дві координати (абсцису й ординату), а точка на прямій лінії – одну.

Координати точки звичайно пишуть у дужках після літери, що позначає точку.

Означення. Базис називається *ортонормованим*, якщо його вектори попарно ортогональні і по довжині дорівнюють одиниці, тобто якщо

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \quad \text{і} \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1.$$

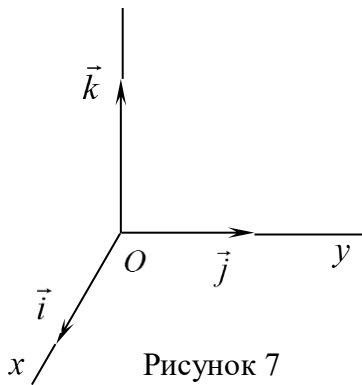


Рисунок 7

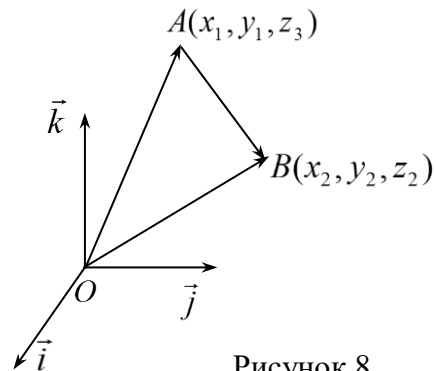


Рисунок 8

Декартова система координат, базис якої ортонормований, називається *декартовою прямокутною системою координат*.

Базисні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ прямокутної системи координат називаються *ортами* і позначаються $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ відповідно (рис. 7). Абсцису, ординату й аплікату точки в прямокутній системі координат позначають літерами x, y і z відповідно; а осі абсцис, ординат і аплікат – відповідно Oх, Oу, Oz.

Координати точки відносно декартової прямокутної системи координат у просторі по абсолютній величині дорівнюють відстаням від цієї точки до відповідних координатних площин. Вони мають знак плюс чи мінус у залежності від того, лежить точка по ту ж сторону, чи по іншу сторону від координатної площини, що і кінець орта, перпендикулярного цієї площини.

Координати точки відносно декартової прямокутної системи координат на площині по абсолютній величині дорівнюють відстаням від цієї точки до відповідних координатних осей. Вісі координат розбивають площину на чотири частини, їх називають *чвертями*, *квадрантами* чи *координатними кутами* і нумерують римськими цифрами I, II, III, IV так, як показано на рис. 9. На рис. 9 зазначені знаки координат точок в залежності від їхнього розташування в тій чи іншій чверті.

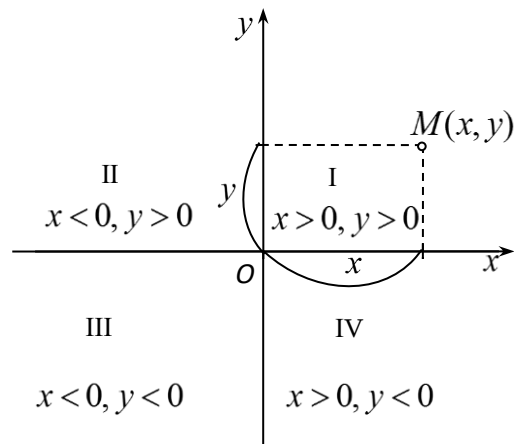


Рисунок 9

Нехай у прямокутній системі координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задані точки $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$. Мають місце наступні твердження.

Твердження 1. Щоб знайти координати вектора, потрібно з координат його кінця відняти координати його початку, тобто вектор $\overrightarrow{AB}$ має координати $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Твердження 2. Координати точки $M(x, y, z)$ на відрізку AB , що поділяє цей відрізок у відношенні λ , тобто задовольняє умові $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda, \lambda > 0$ знаходяться за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (6)$$

Ці формули відомі за назвою *формул розподілу відрізка в заданому відношенні*.

В окремому випадку, при $\lambda=1$ з формул (6) виходять формули для координат середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (7)$$

Полярна система координат складається з деякої точки площини O , яка називається *полюсом*, променя OA , що виходить з цієї точки і називається *полярною віссю*. Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.

Полярними координатами точки M називаються числа ρ — відстань від полюса O до точки M і ϕ — кут, на який треба повернути полярну вісь OA до її збігу з OM , проти годинникової стрілки.

Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \leq \rho < \infty$, полярний кут, як правило, змінюється в межах $0 \leq \phi < 2\pi$.

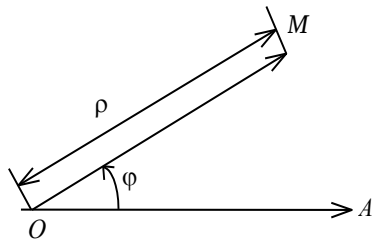


Рисунок 10

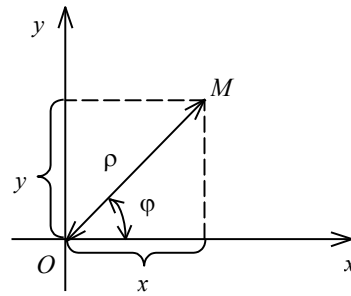


Рисунок 11

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки (рис. 11) встановлюють формули:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, & y &= \rho \sin \phi, \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg} \phi &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (8)$$

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Перевірити, що чотири точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ є вершинами трапеції.

Розв'язання:

Розглянемо чотирикутник $ABCD$. Введемо вектори

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 3, 2 - (-1), -1 - 2) = (-2, 3, -3);$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1 - 1, 1 - 2, -3 - (-1)) = (-2, -1, -2);$$

$$\overrightarrow{CD} = (3 - (-1), -5 - 1, 3 - (-3)) = (4, -6, 6);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1 - 3, 1 - (-1), -3 - 2) = (-4, 2, -5).$$

Обчислимо відношення відповідних координат векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$:

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}.$$

Отже, для координат векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ виконується умова колінеарності, тому вони колінеарні.

Умова колінеарності для векторів $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ не виконується, бо координати цих векторів не пропорційні: $\frac{-4}{-2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-5}{6}$, тобто ці вектори не колінеарні.

Таким чином, показано, що в чотирикутнику $ABCD$ дві протилежні сторони паралельні, а дві інші не паралельні. Це означає, що чотирикутник $ABCD$ є трапеція.

Приклад 2. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(3; -2)$, $N(1; 6)$, $P(-4; 2)$.

Розв'язання:

Нехай координати вершин трикутника (рис.12) є $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Використовуючи формули для координат середини відрізка, отримаємо наступні системи лінійних рівнянь для визначення координат вершин трикутника:

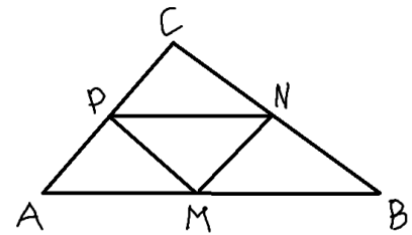


Рисунок 12

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 3, & \frac{x_1 + x_3}{2} = 4, & \frac{x_2 + x_3}{2} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y_1 + y_2}{2} = -2, & \frac{y_1 + y_3}{2} = 2, & \frac{y_2 + y_3}{2} = 6. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи знаходимо $x_1 = -2$, $x_2 = 8$, $x_3 = -6$, $y_1 = -6$, $y_2 = 2$, $y_3 = 10$. Таким чином, вершинами трикутника є точки $A(-2; -6)$, $B(8; 2)$, $C(-6; 10)$.

Приклад 3. Нехай задано координати вершин деякого трикутника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (рис. 13). Знайти площу цього трикутника.

Розв'язання:

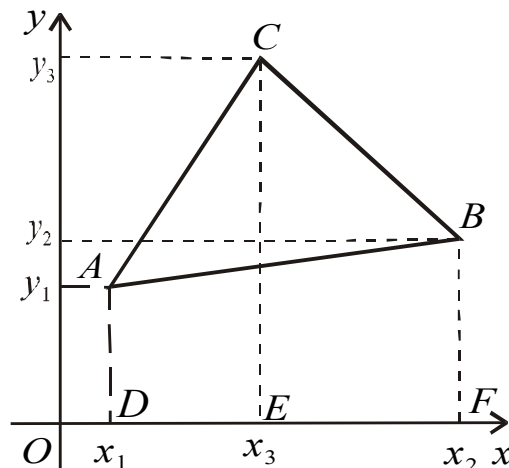


Рисунок 13

З рисунка бачимо, що площу трикутника ABC можна знайти як $S_{\triangle ABC} = S_{ADEC} + S_{BCEF} - S_{ABFD}$. У правій частині формули стоять площі відповідних трапецій, які подаються формулами:

$$S_{ADEC} = |DE| \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2};$$

$$S_{BCEF} = |EF| \frac{|EC| - |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)}{2};$$

$$S_{ABFD} = |DF| \frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)}{2}$$

Підставивши знайдені площі у вираз для площі трикутника, дістанемо:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)| =$$

$$= \frac{1}{2} |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_3 - y_1)|.$$

Записавши останній вираз у вигляді визначника, дістанемо остаточну формулу:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Приклад 4. Нехай задано дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 14). Знайти відстань між цими точками M_1M_2 .

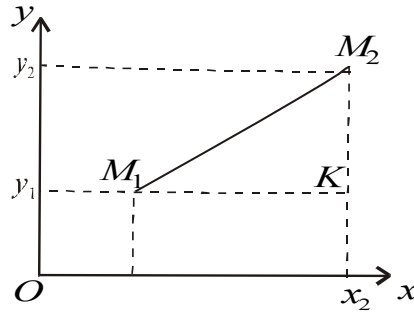


Рисунок 14

Розв'язання:

Із рис. 14 видно, що $M_1K = |x_2 - x_1|$, $M_2K = |y_2 - y_1|$.

Трикутник M_1M_2K — прямокутний, тому за теоремою Піфагора маємо:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (10)$$

Приклад 5. Дано трикутник $A(4, 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$. Знайти площу трикутника, вершини якого містяться в точках перетину бісектрис трикутника зі сторонами (рис. 15).

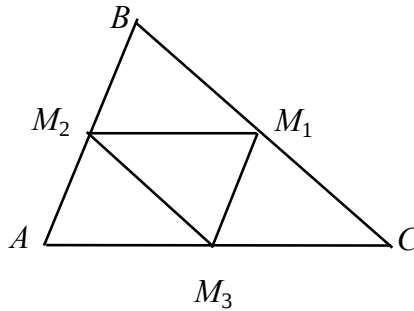


Рисунок 15

Розв'язання:

Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам. Знайдемо довжину відрізків AB , BC і AC за формулою (10).

$$AB = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(7+4)^2 + (5+7)^2} = 15,$$

$$AC = \sqrt{(4+4)^2 + (1-7)^2} = 10.$$

Знайдемо відношення, в яких основи бісектрис точки M_1 , M_2 , M_3 (рис. 15) поділяють відповідні відрізки:

$$\frac{|BM_1|}{|M_1C|} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}; \quad \frac{|AM_2|}{|M_2B|} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}; \quad \frac{|AM_3|}{|M_3C|} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}.$$

Скориставшись формулами (7), знайдемо відповідно координати точок $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$.

$$x_1 = \frac{7-4 \cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}; \quad y_1 = \frac{5+7 \cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{17}{3}; \quad M_1\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right);$$

$$x_2 = \frac{4+7 \cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{26}{5}; \quad y_2 = \frac{1+5 \cdot \frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{13}{5}; \quad M_2\left(\frac{26}{5}; \frac{13}{5}\right);$$

$$x_3 = \frac{4 - 4 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = 2; \quad y_3 = \frac{1 + 7 \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}; \quad M_3 \left(2; \frac{5}{2} \right).$$

Площу трикутника $M_1 M_2 M_3$ обчислимо за формулою (9):

$$S = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} \frac{26}{5} - \frac{10}{3} & 2 - \frac{10}{3} \\ \frac{13}{2} - \frac{17}{3} & \frac{5}{2} - \frac{17}{3} \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc} \frac{28}{15} - \frac{4}{3} \\ -\frac{46}{15} - \frac{19}{6} \end{array} \right\| = 50 \text{ кв. од.}$$

Приклад 6. Знайти полярні координати точки $M(2, 2)$.

Розв'язання:

З формули (8) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$, або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M \left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right)$.

Приклад 7. У полярній системі координат дані точки $A(8, -\frac{2}{3}\pi)$, $B(6, \frac{\pi}{3})$ (рис. 16). Обчислити полярні координати середини відрізка AB .

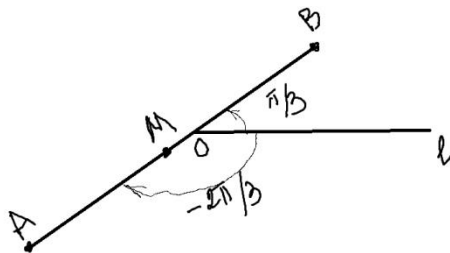


Рисунок 16

Розв'язання:

Із рис.16 видно, що $\angle BOl + \angle AOl = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \pi = \pi$ або 180° . Це означає, що точки A і B є кінцями відрізка, що проходить через полюс O . Позначемо через M середину відрізка AB . Тоді

$$AM = BM = \frac{AO + BO}{2} = \frac{8+6}{2} = 7.$$

Тоді полярний радіус точки M рівний

$$r_M = OM = BM - BO = 7 - 6 = 1.$$

Як видно із рис. 16 полярний кут $\varphi_M = -\frac{2\pi}{3}$. Отже точка M має такі полярні координати $M(1, -\frac{2}{3}\pi)$.

. **Приклад 8.** У подярній системі координат дані точки $M_1(r_1, \varphi_1)$, $M_2(r_2, \varphi_2)$ (рис. 17). Обчислити відстань d між ними.

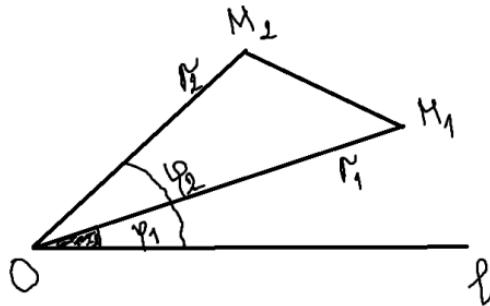


Рисунок 17

Розв'язання:

Розглянемо трикутник OM_1M_2 . Враховуючи, що кут $\angle M_1OM_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, із теореми косинусів знаходимо:

$$M_1M_2^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2 \cdot OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \text{ тобто}$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Дані точки $A(-1, 5, -10)$, $B(5, -7, 8)$, $C(2, 2, -7)$, $D(5, -4, 2)$.

Перевірити, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, який з них довший і у скільки разів, як вони спрямовані – в одному напрямку чи в протилежних.

Завдання 2. Дано вершини трикутника $A(3, 2)$; $B(-1, -1)$; $C(11, -6)$. Знайти довжини його сторін і точку перетину медіан.

Завдання 3. Дано три вершини паралелограма $A(4; 2)$, $B(5; 7)$, $C(-3; 4)$. Знайти четверту вершину D , яка протилежна вершині B .

Завдання 4. Відрізок між точками $A(3; 2)$; $B(15; 6)$ поділити на п'ять рівних частин. Знайти координати точок ділення.

Завдання 5. Обчислити периметр і площу трикутника, якщо $A(-2; 1)$; $B(2, -2)$; $C(8, 6)$.

Завдання 6. Дано трикутник $A(4; 1)$, $B(7, 5)$, $C(-4, 7)$. Знайти точку перетину бісектриси кута A з протилежною стороною BC .

Завдання 7. У полярній системі координат дані дві вершини $A(3, -\frac{4}{9}\pi)$;

$B(5, \frac{3}{14}\pi)$ паралелограма $ABCD$. Точка перетину діагоналей цього паралелограма співпадає з полюсом. Знайти дві інші його вершини.

Завдання 8. У полярній системі координат дані точки $M_1(5, \frac{\pi}{4})$, $M_2(8, -\frac{\pi}{12})$.

Обчислити відстань d між ними.

Завдання 9. У полярній системі координат дані дві суміжні вершини квадрата $M_1(12, -\frac{\pi}{10})$, $M_2(3, \frac{\pi}{15})$. Обчислити його площу.

Тема 3. Скалярний добуток

3.1 Основні теоретичні відомості

Під кутом між векторами розуміють кут між векторами, рівними даним, які мають загальний початок. При цьому кут між векторами вважають той, що не перевищує π . Якщо кут прямий, то вектори називаються ортогональними.

Означення. Скалярним добутком двох векторів називається число, рівне добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоч один з векторів нульовий, то кут не визначений, і скалярний добуток по визначенню вважають рівним нулю.

Мають місце наступні властивості операції скалярного множення:

1. Скалярне множення комутативно, тобто для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ справедлива рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, тобто $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

3. Скалярний добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли співмножники ортогональні чи хоча б один з них дорівнює нулю.

4. Вектори ортонормированого базису задовольняють співвідношенням:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

5. Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і будь-яких чисел α і β виконана рівність

$$(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c}) = \alpha (\vec{a}, \vec{c}) + \beta (\vec{b}, \vec{c}).$$

Зокрема, $(\alpha \vec{a}, \vec{c}) = \alpha (\vec{a}, \vec{c})$ і $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$.

Використовуючи комутативність скалярного множення, із властивості 5 можна отримати тотожність

$$(\vec{a}, \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta (\vec{a}, \vec{b}) + \gamma (\vec{a}, \vec{c}).$$

Нехай у прямокутній системі координат Охуз задані вектори $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$. Має місце наступна

Теорема 1. У прямокутній системі координат скалярний добуток векторів виражається через їхні компоненти за формулою

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (11)$$

Теорема 1 дозволяє написати вираження довжини вектора $\vec{a}$ через його компоненти x, y, z у прямокутній системі координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (12)$$

а також вираження кута ϕ між векторами $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ через їхні компоненти:

$$\cos \phi = \frac{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}{|\vec{a}_1| |\vec{a}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (13)$$

За допомогою теореми 1 можна обчислити відстань між точками, якщо задані їх координати в прямокутній системі координат. Справді, нехай точки A_1 і A_2 мають відповідно координати (x_1, y_1, z_1) і (x_2, y_2, z_2) . Тоді відстань між ними дорівнює довжині вектора $\vec{A_1 A_2}$, координати якого відповідно до

твердження 1 п. 2.1 є $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Використовуючи формулу (12), одержимо

$$|A_1 A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (14)$$

Нехай у просторі задано вектор $\vec{a}$, деяку вісь l , яка колінеарна до $\vec{a}$ і вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Проведемо через точки B і C площини перпендикулярно до осі l . Позначимо точки перетину цих площин з віссю l відповідно B' і C' , а $\overrightarrow{B'C'} = \vec{b}'$.

Означення. Проекцією вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ називається довжина $|\vec{b}'|$ напрямленого відрізка $\vec{b}'$ на осі l , яка колінеарна до вектора $\vec{a}$. Слід зазначити, що $b' = |\vec{b}'|$, якщо напрям $\vec{b}'$ збігається з напрямом l і $b' = -|\vec{b}'|$, якщо напрям $\vec{b}'$ протилежний напрямку l .

Позначається проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ — $np_{\vec{a}} \vec{b}$. Формула знаходження проекції вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ має вигляд:

$$np_{\vec{a}} \vec{b} = \left| \vec{b} \right| \cos \varphi,$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Останню формулу легко переписати у вигляді:

$$np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}. \quad (15)$$

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}$ і

$$\vec{b} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Розв'язання:

Знаходимо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 = 0$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ і $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Приклад 2. Дані вектори $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

Розв'язання:

Знаходимо скалярний добуток цих векторів $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot m + 3 \cdot m - 28$.

Оскільки $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Тоді $7 \cdot m - 28 = 0$, тобто $m = 4$.

Приклад 3. Знайти $(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Розв'язання:

$$(5\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 10|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13.$$

Приклад 4. Дано три точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$ і $C(2, 1, 2)$. Знайти кут $\varphi = \angle BAC$.

Розв'язання:

Знайдемо вектори $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (1, 0, 1)$. Згідно з формулою (13) маємо:

$$\cos \phi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}, \text{ отже, } \phi = 60^\circ.$$

Приклад 5. Дано три вектора $\vec{a} = (1, -3, 4)$, $\vec{b} = (3, -4, 2)$, $\vec{c} = (-1, 1, 4)$. Обчислити $pr_{\vec{b} + \vec{c}} \vec{a}$.

Розв'язання:

Знайдемо вектор $\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6)$. Тоді згідно з формулою (15)

$$pr_{\vec{b} + \vec{c}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot 6}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{35}{7} = 5.$$

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{g}$; $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{g}$, коли відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{g}| = 3$, $\angle(\vec{p}, \vec{g}) = -\frac{\pi}{4}$.

Завдання 2. Знайти $3\vec{m}^2 - 2(\vec{m}\vec{n}) + 4\vec{n}^2$, якщо $|\vec{m}| = \frac{1}{3}$; $|\vec{n}| = b$; $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Завдання 3. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s}$, $\vec{g}$, якщо $\vec{a} = \vec{s} + 3\vec{g}$; $\vec{b} = 5\vec{s} - 4\vec{g}$ — взаємно перпендикулярні.

Завдання 4. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = 10\vec{m} - 2\vec{n}$ на напрям вектора $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ одиничні орти.

Завдання 5. Дано вершини трикутника $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(-3, 2, 1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B .

Тема 4. Векторний добуток

4.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо:

1) довжина вектора $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\phi$, де ϕ — кут між двома векторами;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ спрямований так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

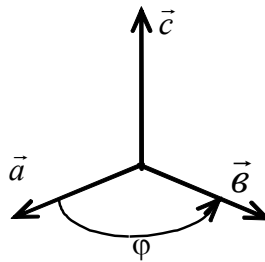


Рисунок 18

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Властивості векторного добутку:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} \neq 0$ і $\vec{b} \neq 0$ — колінеарні вектори.

2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

3. $(\lambda \vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

$$4. (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Знайдемо векторні добутки одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. З колінеарності векторів випливає: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$. З того, що одиничні вектори збігаються з напрямом осей прямокутної системи координат, маємо:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, якщо $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned} \quad (16)$$

або

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (5, 2, 7)$, $\vec{b} = (1, 2, 4)$ як на сторонах.

Розв'язання: Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{i} - 14\vec{j} + 8\vec{k}$$

.

Знайдемо $|\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 14^2 + 8^2} = 2\sqrt{74}$ кв. од.

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

Обчислити $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

Розв'язання: $(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} - 6\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b}$.

Враховуючи властивості векторного множення маємо $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0$, $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. Тоді

$$|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})| = |-5\vec{a} \times \vec{b}| = 5|\vec{a} \times \vec{b}| = 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 = 60.$$

Приклад 3. Обчислити синус кута φ , утвореного векторами $\vec{a}(2, -2, 1)$ і $\vec{b}(2, 3, 6)$.

Розв'язання: Із визначення векторного добутку маємо:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Обчислимо

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -15\vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}. \end{aligned}$$

Тоді $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{15^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$. Крім того,

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7. \text{ Отже,}$$

$$\sin \varphi = \frac{5\sqrt{17}}{3 \cdot 7} = \frac{5\sqrt{17}}{21}.$$

4.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$; $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 5$; $|\vec{n}| = 1$ і $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 30^\circ$.

Завдання 2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$.

Завдання 3. Обчисліть проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 12\vec{j} + 4\vec{k}$ на вектор $\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{k}) \times (\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k})$.

Тема 5. Мішаний добуток

5.1 Основні теоретичні відомості

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Позначається мішаний добуток так $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

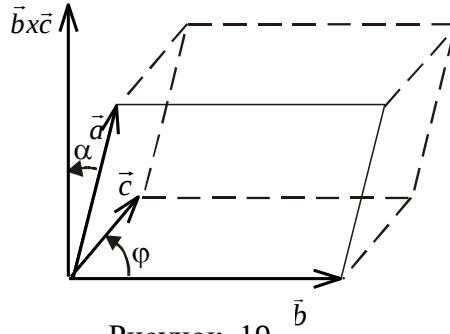


Рисунок 19

Для встановлення геометричного змісту мішаного добутку побудуємо на некопланарних векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ паралелепіпед (рис. 19).

Знайдемо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 19). Площа основи його дорівнює модулю векторного добутку векторів $|\vec{b} \times \vec{c}|$: $s = |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{c}| |\vec{b}| \sin \phi$. Висота дорівнює $|\vec{a}| \cos \alpha$. Отже, остаточно маємо:

$$V = |\vec{a}| \cos \alpha \cdot |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \phi = |\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}| \cos \alpha = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|. \quad (17)$$

З останнього випливає, що модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

З рівності (17) маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Ураховуючи формули (11) і (16) знаходження скалярного і векторного добутків, маємо:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} \vec{j} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

або

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

$$1. \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

$$2. \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Визначити, якою є трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правою чи лівою), якщо $\vec{a} = \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j}$.

Розв'язання: Координати ортів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot M_{11} - 0 \cdot M_{12} + 1 \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Оскільки значення мішаного добутку векторів більше нуля, то трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ права.

Приклад 2. З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 9, -11)$.

Розв'язання: Обчислимо мішаний добуток:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2 \cdot M_{11} - 3 \cdot M_{12} - 1 \cdot M_{13} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = -2(11 - 27) - 3(-14) - 10 = 0$$

Приклад 3. У просторі задано чотири точки $A(1, 1, 1)$, $B(4, 4, 4)$, $C(3, 5, 5)$, $D(2, 4, 7)$. Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язання: З елементарної математики відомо, що об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 3, 3), \overrightarrow{AC} = (2, 4, 4), \overrightarrow{AD} = (1, 3, 6);$$

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \right| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ куб. од.}$$

5.3 Завдання для самостійного розв'язання

Завдання 1. Визначити, якою є трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правою чи лівою), якщо

- | | |
|--|--|
| 1) $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j}$; | 2) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{k}$; |
| 3) $\vec{a} = \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i}$, $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$; | 4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$; |
| 3) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{j}$; | 4) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{k}$. |

Завдання 2. З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо

- 1) $\vec{a} = (3, -2, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 2)$, $\vec{c} = (3, -1, -2)$
- 2) $\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, $\vec{c} = (3, -4, 7)$.

Завдання 3. Довести, що чотири точки $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 5)$, $C = (-1, 2, 1)$, $D = (2, 1, 3)$ лежать в одній площині.

Завдання 4. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

Завдання 5. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{i} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, якщо його основа побудована на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Завдання для виконання контрольної роботи

Завдання 1. В задачах 1-20 задано координати вершин піраміди **ABCD**.
Необхідно:

- 1) записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ в системі орт і знайти модулі (довжини) цих векторів;
- 2) записати кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків;
- 3) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
- 4) знайти площу грані **ABC**;
- 5) знайти об'єм піраміди **ABCD**.

№ задачі	Координати вершин піраміди			
1.	A (-3; 4; -3)	B (-2; 2; -1)	C (8; 6; 7)	D (5; 8; 5)
2.	A (-4; 5; -5)	B (-3; 3; -3)	C (7; 7; 5)	D (4; 9; 3)
3.	A (-8; 3; -1)	B (-7; 1; 7)	C (3; 5; 9)	D (0; 7; 7)
4.	A (0; 2; -10)	B (1; 0; -8)	C (11; 4; 0)	D (8; 6; -2)
5.	A (1; -4; 0)	B (2; -6; 2)	C (12; -2; 10)	D (9; 0; 8)
6.	A (4; -2; 5)	B (8; 2; 3)	C (6; 9; -5)	D (4; 0; 6)
7.	A (5; -1; -4)	B (9; 3; -6)	C (7; 10; -14)	D (5; 1; -3)
8.	A (-3; -6; 2)	B (1; -2; 0)	C (-1; 5; -8)	D (-3; -4; 3)
9.	A (-4; 2; -1)	B (0; 6; -3)	C (-2; 13; -11)	D (-4; 4; 0)
10.	A (-2; 0; -2)	B (2; 4; -4)	C (0; 11; -12)	D (-2; 2; -1)
11.	A (3; 3; -3)	B (7; 7; -5)	C (5; 14; 13)	D (3; 5; -2)
12.	A (0; 4; 3)	B (4; 8; 1)	C (2; 15; -7)	D (0; 6; 4)
13.	A (-1; 1; -5)	B (3; 5; -7)	C (1; 12; -15)	D (-1; 3; -4)
14.	A (1; -4; 0)	B (5; 0; -2)	C (3; 7; -10)	D (1; -2; 1)
15.	A (2; -3; 1)	B (6; 1; -1)	C (4; 8; -9)	D (2; -1; 2)
16.	A (-5; 0; 1)	B (-4; -2; 3)	C (6; 2; 11)	D (3; 4; 9)
17.	A (-1; -2; -8)	B (0; -4; -6)	C (10; 0; 2)	D (7; 2; 0)
18.	A (3; 1; -2)	B (4; -1; 0)	C (14; 3; 8)	D (11; 5; 6)
19.	A (-2; -3; 2)	B (-1; -5; 4)	C (9; -1; 12)	D (6; 1; 10)
20.	A (2; -1; -4)	B (3; -3; -7)	C (13; 1; 6)	D (10; 3; 4)

Завдання 2. В задачах 1–10 дано координати точок A , B , C , D і M . Потрібно знайти:

- 1) рівняння площини α , яка проходить через три точки A , B і C ;
- 2) канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку M перпендикулярно до площини α ;
- 3) відстані від точок M та D до площини α .

№ задачі	Координати вершин піраміди				
1.	A (0; 1; -1)	B (-1; 5; -4)	C (8; 3; 6)	D (13; -14; 12)	M (-2; 13; 18)
2.	A (6; 0; 5)	B (8; 2; 5)	C (3; 1; -8)	D (11; -6; -14)	M (-8; 7; 12)
3.	A (7; 9; 2)	B (5; 7; 0)	C (-3; -1; -9)	D (17; -10; -11)	M (-10; 9; 12)
4.	A (2; 1; 4)	B (4; 0; 7)	C (-5; 4; -2)	D (7; -1; 0)	M (-13; 13; 14)
5.	A (6; 7; 2)	B (5; -6; 5)	C (8; 9; 3)	D (10; -10; -14)	M (-11; 19; 11)
6.	A (6; 1; 1)	B (9; 3; 0)	C (4; 1; 3)	D (9; -2; -2)	M (-7; 11; 18)
7.	A (9; 1; 6)	B (5; 9; 0)	C (-4; 3; 4)	D (15; -10; 4)	M (-14; 15; 12)
8.	A (-3; 7; 3)	B (-3; 4; 7)	C (5; 7; 4)	D (16; -10; -14)	M (-6; 18; 14)

9.	A (9; 8; 3)	B (2; 3; 2)	C (7; 5; 2)	D (15; 2; 1)	M (1; 9; 8)
10.	A (-3; -2; 4)	B (14; -8; -7)	C (5; 3; 6)	D (13; 10; -13)	M (-9; 7; 8)

Завдання 3. В задачах 1–10 задано координати точок A , B та C . Потрібно:

- 1) записати канонічні рівняння прямої AB ;
- 2) записати рівняння площини α , яка проходить через точку C , перпендикулярно до прямої AB ;
- 3) знайти відстань від точки C до прямої AB .

№ задачі	Координати точок		
1	A (-4; 0; 8)	B (0; 2; 4)	C (-3; -1; 4)
2	A (2; 0; 8)	B (6; 2; 4)	C (3; -1; 4)
3	A (2; -3; 7)	B (6; -1; 3)	C (3; -4; 3)
4	A (-1; 2; -2)	B (3; 4; -6)	C (0; 1; -6)
5	A (-1; 4; 2)	B (3; 6; -2)	C (0; 3; -2)
6	A (2; -6; 7)	B (6; -4; 3)	C (3; -7; 7)
7	A (-3; 2; 0)	B (1; 4; -4)	C (-2; 1; -4)
8	A (1; 4; 5)	B (5; 6; 1)	C (2; 3; 1)
9	A (-3; 1; 2)	B (1; 3; -2)	C (-2; 0; -2)
10	A (5; 5; 4)	B (9; 7; 0)	C (6; 4; 0)

Зразок розв'язування варіанта контрольної роботи

Завдання 1. Задано координати вершин піраміди $ABCD$:

$A (6; 6; 5)$, $B (2; -2; 3)$, $C (12; 1; 9)$, $D (1; 2; 6)$.

Необхідно:

1. Записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ в системі орт і знайти модулі (довжини) цих векторів.
2. Записати кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків.

3. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.
4. Знайти площу грані ABC .
5. Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язок

1. Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати в системі орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ користуючись наступною формулою:

$$\vec{a} = \alpha_x \cdot \vec{i} + \alpha_y \cdot \vec{j} + \alpha_z \cdot \vec{k}, \quad (1)$$

де $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ – проекції вектора $\vec{a}$ (координати) на координатні осі OX, OY, OZ ; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, напрямки яких збігаються з напрямками координатних осей OX, OY, OZ .

Якщо задано дві точки простору $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$, то проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатні осі знаходяться за формулами:

$$\alpha_x = x_2 - x_1; \quad \alpha_y = y_2 - y_1; \quad \alpha_z = z_2 - z_1 \quad (2)$$

Тоді:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} \quad (3)$$

Підставляючи в (3) координати точок A і B , одержимо вектор $\overrightarrow{AB}$ в системі орт:

$$\overrightarrow{AB} = (2-6) \cdot \vec{i} + (-2-6) \cdot \vec{j} + (3-5) \cdot \vec{k} = -4 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}.$$

Аналогічно, підставляючи в (3) координати точок A і C , знаходимо вектор $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = (12-6) \cdot \vec{i} + (1-6) \cdot \vec{j} + (9-5) \cdot \vec{k} = 6 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}.$$

Підставляючи в (3) координати точок A і D , знаходимо вектор $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} = (1-6) \cdot \vec{i} + (2-6) \cdot \vec{j} + (6-5) \cdot \vec{k} = -5 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}.$$

Якщо вектор задано в системі орт, то його можна записати в координатній формі наступним чином:

$$\vec{a} = \{\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z\}. \quad (4)$$

Отже, знайдені вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ мають такі координати:

$$\overrightarrow{AB} = \{-4; -8; -2\}; \quad \overrightarrow{AC} = \{6; -5; 4\}; \quad \overrightarrow{AD} = \{-5; -4; 1\}.$$

Якщо вектор задано формулою (1) або (4), то його модуль (довжина) обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2} \quad (5)$$

Застосовуючи формулу (5), обчислюємо модулі знайдених векторів $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 64 + 4} = \sqrt{84} \approx 9,2 \text{ (лін. од.)}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 25 + 16} = \sqrt{77} \approx 8,8 \text{ (лін. од.)}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 14 + 1} = \sqrt{42} \approx 6,5 \text{ (лін. од.)}$$

2. Оскільки скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, то косинус кута φ між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (6)$$

Якщо координати векторів відомі: $\vec{a} = \{\alpha_x; \alpha_y; \alpha_z\}$; $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то їх скалярний добуток можна знайти за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_x \cdot b_x + \alpha_y \cdot b_y + \alpha_z \cdot b_z \quad (7)$$

Знаходимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ за формулою (7)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \cdot 6 + (-8) \cdot (-5) + (-2) \cdot 4 = -24 + 40 - 8 = 8 \text{ (лін. одиниць)}.$$

Модулі цих векторів вже знайдені:

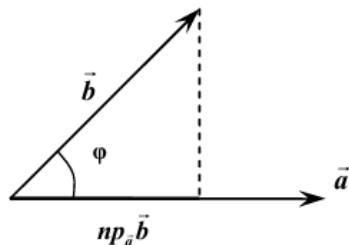
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{84} \text{ (лін. од.)}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{77} \text{ (лін. од.)}$$

За формулою (6) дістанемо:

$$\cos \varphi = \cos A = \frac{8}{\sqrt{84} \cdot \sqrt{77}} = \frac{8}{\sqrt{6468}} = \frac{8}{80,424} \approx 0,0995.$$

Оскільки $\cos A = 0,0995$, то $A \approx 84^\circ 17'$, або $A \approx 1,47$ (радіана).

3. Проекція вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$ (тобто на вісь, яка спрямована як вектор $\vec{a}$) знаходиться за формулою: $np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.



Застосовуючи формулу (6) для знаходження $\cos \varphi$ отримаємо:

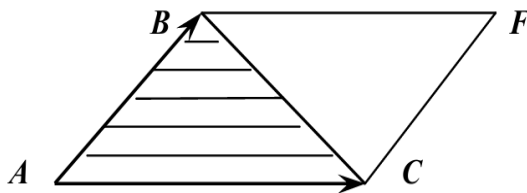
$$np_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ звідки } np_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad (8)$$

Отже, проекція вектора $\overrightarrow{AD}$ на $\overrightarrow{AB}$ дорівнює скалярному

добутку цих векторів, поділеному на модуль вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$np_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(-4) \cdot (-5) + (-8) \cdot (-4) + (-2) \cdot 1}{\sqrt{84}} \approx \frac{40}{9,165} \approx 4,4 \text{ (лін. од)}$$

4. Площа грані ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектора $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AM}$: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.



Виходячи з геометричного змісту модуля векторного добутку двох векторів, величина модуля вектора $\overrightarrow{AM}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, а площа грані ABC буде дорівнювати половині модуля вектора $\overrightarrow{AM}$:

$$S_{ABFC} = |\overrightarrow{AM}| \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AM}|.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -8 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -42\vec{i} + 4\vec{j} + 68\vec{k}.$$

Таким чином,

$\overrightarrow{AM} = \{-42; 4; 68\}$, а його модуль дорівнює:

$$|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(-42)^2 + 4^2 + 68^2} = \sqrt{1764 + 16 + 4624} = \sqrt{6404} \approx 80,02.$$

Отже, $S_{ABFC} \approx 80,02$ (кв. од), звідки:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{6404} \approx \frac{80,02}{2} = 40,01 \text{ (кв. од)}.$$

5. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некопланарних векторах, чисельно дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку:

$$V_{\text{пар.}} = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|,$$

а об'єм піраміди дорівнює шостій частині від об'єму паралелепіпеда:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$$

Обчислимо мішаний доток $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-4) \cdot (-5) \cdot 1 + (-8) \cdot 4 \cdot (-5) + 6 \cdot (-4) \cdot (-2) - (-5) \cdot (-5) \cdot (-2) - (-4) \cdot (-4) \cdot 4 - 6 \cdot (-8) \cdot 1 \\ &= 20 + 160 + 48 + 50 - 64 + 48 = 262 \end{aligned}$$

Отже, об'єм паралелепіпеда $V_{\text{пар.}} = 262$ (куб.од), а об'єм піраміди

$$V_{\text{піраміди.}ABCD} = \frac{262}{6} \approx 43,7 \text{ (куб.од)}.$$

Завдання 2. Дано координати точок:

A(1; -2; -1), B(3; 4; 2), C(3; 2; 1), D(10; -22; -12), M(-11; 8; 10)

Потрібно знайти

1. Рівняння площини **a**, яка проходить через три точки **A**, **B** і **C**;
2. Канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку **M** перпендикулярно до площини **a**;
3. Відстань від точок **M** та **D** до площини **a**.

Розв'язок

1. Рівняння площини, що проходить через три точки:

A(x₁; y₁; z₁), B(x₂; y₂; z₂), C(x₃; y₃; z₃):

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Підставивши координати точок **A**, **B** і **C**, дістанемо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 3-1 & 4+2 & -2+1 \\ 3-1 & 2+2 & 1+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Враховуючи, що всі числа третього рядка кратні числу 2, то його можна винести за знак визначника. Розділивши (скоротивши) ліву та праву частини останнього рівняння на 2, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Розкладемо отриманий визначник за елементами першого рядка:

$$(x-1) \cdot M_{11} - (y+2) \cdot M_{12} + (z+1) \cdot M_{13} = 0,$$

$$(x-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (y+2) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1) \cdot (6+2) - (y+2) \cdot (2+1) + (z+1) \cdot (4-6) = 0,$$

$$8(x-1) - 3(y+2) - 2(z+1) = 0,$$

$$8x - 8 - 3y - 6 - 2z - 2 = 0.$$

Остаточно рівняння площини **a** буде записано наступним чином:

$$\underline{8x - 3y - 2z - 16},$$

де $\vec{n} = \{8; -3; -2\}$ - нормальний вектор площини **a**.

Перевірка:

$$\text{Точка } A(1; -2; -1): \quad 8 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) - 16 = 0; \quad 8 + 6 + 2 - 16 = 0; \\ 16 - 16 = 0; \quad 0 = 0;$$

$$\text{точка } A(1; -2; -1) \in a$$

$$\text{Точка } B(3; 4; 2): \quad 8 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) - 16 = 0; \quad 24 - 12 + 4 - 16 = 0 \\ 16 - 16 = 0; \quad 0 = 0;$$

$$\text{точка } B(3; 4; 2) \in a$$

$$\text{Точка } C(3; 2; 1): \quad 8 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 16 = 0; \quad 24 - 6 - 2 - 16 = 0 \\ 16 - 16 = 0; \quad 0 = 0;$$

$$\text{точка } C(3; 2; 1) \in a.$$

Отже, загальне рівняння площини **a** знайдено вірно.

2. Канонічне рівняння прямої в просторі мають вигляд:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}, \quad (3)$$

де $(x_0; y_0; z_0)$ -координати точки, яка належить прямій (3), $l; m; n$ - координати напрямного вектора $\vec{s}$ цієї прямої.

За умовою, пряма проходить через точку $M(-11; 8; 10)$ та перпендикулярна до площини **a**. Отже, підставляючи в (3) замість $(x_0; y_0; z_0)$ координати точки M , та взявши $\vec{s} = \vec{n} = \{8; -3; -2\}$ тобто $l=8; m=-3; n=-2$ (коефіцієнти загального рівняння площини **a**).

Таким чином, канонічні рівняння прямої в просторі будуть мати вигляд:

$$\frac{x+11}{8} = \frac{y-8}{-3} = \frac{z-10}{-2} \quad (4)$$

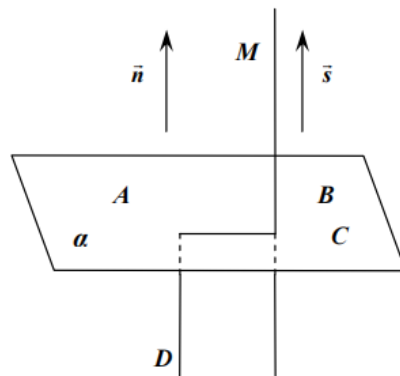
3. Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини, яка має загальне рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (5)$$

Підставивши замість $(x_0; y_0; z_0)$ координати точок D(10; -22; -12) та M(-11; 8; 10), а також значення $A=8, B=-3, C=-2, D=-16$ із загального рівняння (2) площини α , знайдемо відшукувані відстані d_1 від точки M до площини α від точки D до площини α :

$$d_1 = \frac{|8 \cdot (-11) - 3 \cdot (8) - 2 \cdot 10 - 16|}{\sqrt{8^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-88 - 24 - 20 - 16|}{\sqrt{64 + 9 + 4}} = \frac{148}{\sqrt{77}} \approx 16,87 \text{ (ліній. од.)}$$

$$d_2 = \frac{|8 \cdot 10 - 3 \cdot (-22) - 2 \cdot (-12) - 16|}{\sqrt{8^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{|80 + 66 + 24 - 16|}{\sqrt{64 + 9 + 4}} = \frac{154}{\sqrt{77}} \approx 17,55 \text{ (ліній. од.)}$$



Завдання 3. Дано координати точок A (9;9;8), B (10;7;0), C (12;9;7).

Потрібно

1. Записати канонічні рівняння прямої АВ;
2. Записати рівняння площини α , яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої АВ;
3. Знайти відстань від точки C до прямої АВ.

Розв'язок

1. Канонічне рівняння прямої в просторі, яка проходить через точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (1)$$

Підставляючи в (1) координати точок A і B, отримаємо:

$$\frac{x-9}{10-9} = \frac{y-9}{7-9} = \frac{z-8}{0-8}.$$

Остаточно канонічне рівняння прямої AB в просторі буде мати вигляд:

$$\frac{x-9}{1} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-8}.$$

Спрямовуючий вектор прямої $AB: \vec{s}_1(1; -2; -8)$

2. Запишемо рівняння площини a в загальному вигляді:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Якщо площина проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ то її координати можна записати наступним чином:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0, \quad (2)$$

де $\vec{n}(A; B; C)$ - нормальний вектор площини, який перпендикулярний до площини.

Оскільки відшукована площина перпендикулярна до прямої AB , то нормальний вектор $\vec{n}$ такої площини буде колінеарним спрямовуючому вектору $\vec{s}$ прямої AB , а тому можна взяти $\vec{n} = \vec{s}_1 = \{1; -2; -8\}$.

Замінімо коефіцієнти A, B, C в рівнянні (2) числами: 1, -2, -8, а замість $x_0; y_0; z_0$ підставимо координати точки $C(12; 9; 7)$:

$$1 \cdot (x-12) + (-2) \cdot (y-9) + (-8)(z-7) = 0$$

$$x - 12 - 2y + 18 - 8z + 56 = 0$$

Остаточно загальне рівняння площини a , яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB , буде записано наступним чином:

$$\underline{x - 2y - 8z + 62 = 0}.$$

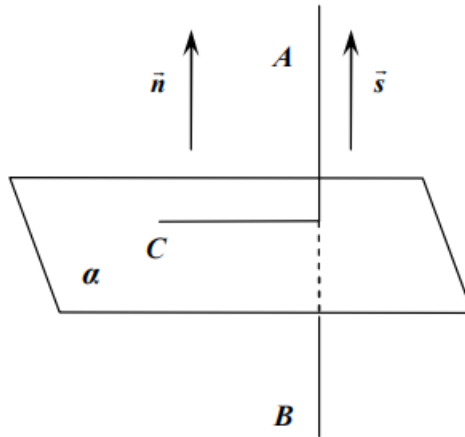
3. Для того, щоб визначити відстань від точки C до прямої AB , знайдемо спочатку координати точки M перетину площини a з прямою AB .

Для цього запишемо параметричне рівняння прямої AB . Нехай

$$\frac{x-9}{1} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-8} = t,$$

тобто

$$x = t + 9; \quad y = -2t + 9; \quad z = -8t + 8.$$



Підставляючи (4) в (3), знаходимо значення параметра t , при якому точка прямої AB буде належати площині a :

$$t+9-2(-2t+9)-8(-8t+8)+62=0,$$

$$t+9+4t-18+64t-64+62=0,$$

$$69t-11=0; 69t=11; t=\frac{11}{69}.$$

Підставляючи в (4) значення $t=\frac{11}{69}$, знаходимо координати точки M перетину прямої AB з площиною a :

$$x_M = \frac{11}{69} + 9 = \frac{11+621}{69} = \frac{632}{69} \approx 9,16;$$

$$y_M = (-2) \cdot \frac{11}{69} + 9 = \frac{22}{69} + 9 = \frac{-22+621}{69} = \frac{599}{69} \approx 8,68;$$

$$z_M = (-8) \cdot \frac{11}{69} + 8 = -\frac{88}{69} + 8 = \frac{-88+552}{69} = \frac{464}{69} \approx 6,72.$$

Отже, точка $M\left(\frac{632}{69}; \frac{599}{69}; \frac{464}{69}\right)$ або $M(9,16; 8,68; 6,72)$.

Знайдемо тепер відстань від точки C до прямої AB . Оскільки пряма AB перпендикулярна до площини a , то відшукувана відстань дорівнює довжині перпендикуляра CM ($CM \perp AB$).

Отже, маємо:

$$|CM| = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2 + (z_M - z_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{632}{69} - 12\right)^2 + \left(\frac{599}{69} - 9\right)^2 + \left(\frac{464}{69} - 7\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(-196)^2}{69^2} + \frac{(-22)^2}{69^2} + \frac{(-19)^2}{69^2}} = \frac{\sqrt{39261}}{69} \approx 2,87.$$

Література:

1. Дьоміна Н., Назарова О. Вища математика, частина 1. Елементи лінійної алгебри, векторної алгебри та аналітичної геометрії: навчально-методичний посібник для самостійної роботи. Мелітополь : ФОП Силаєва О.В., 2021, 124 с.
2. Іщенко О. А., Халанчук Л. В., Назарова О.П. Вища математика: конспект лекцій (частина 1). Мелітополь : ФОП Кузьмін В.А., 2021, 124 с.
3. Осадча Л. К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія : навч. посібник. Рівне: НУВГП, 2020. 205 с.
4. Сердюк І. В. Практикум з курсу "Алгебра і геометрія". Векторна алгебра : навч.-метод. посібник. Харків : НТМТ, 2022, 88 с.
5. Чікіна Н. О. Основи векторної алгебри і її застосування в геометрії [Електронний ресурс] : навч.-метод. посібник / Н. О. Чікіна, І. В. Антонова ; Нац. техн. ун-т "Харків. політехн. ін-т". – Електрон. текст. дані. – Харків, 2025. – 84 с. – URI: <https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/86555>.
6. Барковський В.М. Вища математика: практикум. Київ: Центр учбової літератури, 2023, 536 с.
7. Іщенко О.А., Халанчук Л.В. Вища математка: методичні вказівки до практичних робіт. Мелітополь: ТОВ “Колор Принт”, 2020, 160 с.
8. Корніль Т. Л. Вища математика у прикладах і задачах, Ч. 1. Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія на площині: навч.-метод. посібник. Харків: Мадрид, 2020, 80 с
9. Сердюк І.В., Ахієзер О. Б, Дунаєвська О. І. Практикум з курсу Алгебра і геометрія. Визначники та матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: навчальний посібник для студентів напрямів підготовки “Прикладна математика” та “Системний аналіз”. Харків: “НТМТ”, 2022, 112с.

Зміст

ВСТУП	3
Тема 1. Лінійні операції над векторами.....	4
Тема 2. Системи координат.....	12
Тема 3. Скалярний добуток.....	21
Тема 4. Векторний добуток.....	25
Тема 5. Мішаний добуток.....	27
Завдання для виконання контрольної роботи.....	30
Зразок розв’язування варіанта контрольної роботи.....	32
Література.....	42
Зміст.....	43

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Елементи аналітичної геометрії та векторної алгебри

Методичні рекомендації

Укладач: **Борчик Євген Юрійович**

Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 2,75
Тираж 10 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.