

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІНЖЕНЕРНО-ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИКИ, ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ ТА
ЕЛЕКТРОМЕХАНІКИ

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Частина I та Частина II

конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» спеціальності
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» денної форми
здобуття вищої освіти

Миколаїв

2024

УДК 621.3

ТЗЗ

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією Інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 27.05.2024, протокол № 9.

Укладачі:

- Олександр Циганов – старший викладач кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.
- Андрій Руденко – асистент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

- Андрій Ставинський – доктор тех. наук, професор, зав. кафедрою кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.
- Володимир Рябенський – доктор тех. наук, професор, зав. кафедрою програмованої електроніки, електротехніки і телекомунікацій, Національний університет корабле будування імені адмірала Макарова.

© Миколаївський національний
аграрний університет, 2024

Зміст

ВСТУП	5
ЧАСТИНА I	7
Тема 1 «Історичний Екскурс»	7
Тема 2. «ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І СПІВВІДНОШЕННЯ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.»	13
Тема 3. « Елементи електричного кола. Лінійні та нелінійні ВАХ. Джерела енергії та їх схеми заміщення»	20
Тема 4. « Структура електричного кола. Закон Ома. Закони Кірхгофа»	25
Тема 5. «Метод рівнянь Кірхгофа».....	31
Тема 6. « Метод контурних струмів»	34
Тема 7. « Метод вузлових потенціалів»	39
Тема 8. « Еквівалентні перетворення пасивних елементів у лінійних електричних колах».....	43
Тема 9 «Метод двох вузлів. Метод еквівалентного генератора»	49
Тема 10. «Метод накладання. Принципи компенсації та взаємності. Еквівалентні перетворення активних і пасивних елементів. Передача енергії активним двополюсником»	54
Тема 11. « Основи теорії однофазного синусоїдного струму. Періодичні та синусоїдні величини, їх параметри»	64
Тема 12. « Векторні та аналітичні методи опису синусоїдних величин. Діюче та середнє значення. Зосереджені параметри в колах змінного струму».....	68
Тема 13. « Основи роботи резистора, котушки індуктивності та конденсатора в колах синусоїдного струму. Фазові співвідношення та енергетичні процеси».....	74
Тема 14. « Робота ідеальної індуктивної котушки та конденсатора в колах синусоїдного струму. Індуктивний та ємнісний опір. Енергетичні процеси та реактивна потужність»	79
Тема 15 « Розрахунок кіл синусоїдного струму з послідовним та паралельним з'єднанням R, L, C»	83
Тема 16. «Енергетичні процеси в колах змінного струму. Пасивні двополюсники та їх еквівалентні параметри»	89
Тема 17 « Основні положення символічного методу. Комплексні числа та їх використання в електротехніці»	94
Тема 18. «Застосування символічного методу для розрахунку кіл синусоїдного струму. Комплексний опір та провідність».....	97

Тема 19. «Топографічна діаграма електричних кіл синусоїдного струму»..	101
Тема 20. «Розрахунок кіл синусоїдного струму символічним методом»	103
Тема 21. «Методи побудови топографічних діаграм та їх застосування для аналізу електричних кіл».....	106
Тема 22. « Практичні приклади побудови та аналізу топографічних діаграм у розгалужених колах синусоїдного струму».....	109
ЧАСТИНА II	122
Тема 23. « Резонансні явища в електричних колах».....	122
Тема 24. «Електричні кола з взаємною індукцією»	130
Тема 25. « Магнітні кола та властивості феромагнітних матеріалів».....	136
Тема 26. «Основи трифазних систем»	145
Тема 27. «Схеми з'єднання трифазних кіл».....	147
Тема 28. «Трифазні схеми "зірка–зірка" та "трикутник–трикутник"».....	150
Тема 29. «Аварійні режими в трифазних колах»	158
Тема 30. «Потужність у трифазних колах і методи її вимірювання».....	161
Тема 31. « Періодичні несинусоїдні струми».....	163
Тема 32. «Ряди Фур'є та спектральний аналіз несинусоїдних сигналів»	166
Тема 33. « Основи розкладання періодичних несинусоїдних функцій у ряд Фур'є».....	170
Тема 34. «Графоаналітичний метод розкладання кривих у ряд Фур'є»	175
Тема 35. «Розрахунок електричних кіл з несинусоїдними джерелами»	177
Тема 36. «Резонансні явища при несинусоїдних струмах і напругах».....	181
Тема 37. «Потужності в колах несинусоїдного струму».....	183
Тема 38. «Вищі гармоніки у трифазних системах. Биття та модульовані коливання»	187
Список використаних джерел	195

ВСТУП

Електротехніка — це галузь техніки, що вивчає електромагнітні явища та їх застосування для отримання, передачі, перетворення і використання електричної енергії.

Дисципліна «Теоретичні основи електротехніки» (ТОЕ) є фундаментальною для всіх електротехнічних спеціальностей, оскільки забезпечує розуміння закономірностей поведінки електричних і магнітних кіл, а також є основою для вивчення подальших фахових курсів з електромеханіки, електроенергетики та електротехнологій.

Мета курсу — оволодіння фундаментальними поняттями і законами електричних, магнітних та електромагнітних явищ, а також засвоєння методів аналізу лінійних та нелінійних електричних кіл у стаціонарних та перехідних режимах.

Завдання курсу:

засвоїти основні закони теорії електричних кіл (Ома, Кірхгофа, енергетичний баланс);

навчитися будувати математичні моделі електричних кіл та здійснювати їх розрахунок методами контурних струмів, вузлових потенціалів, накладання;

вивчити фізичну сутність усталених та перехідних процесів у колах з постійним, синусоїдним та несинусоїдним струмом;

оволодіти теорією трифазних систем, взаємним індуктивним зв'язком і резонансними явищами;

ознайомитися з методами аналізу нелінійних електричних та магнітних кіл;

сформувати навички використання вимірювальних приладів і застосування математичних пакетів моделювання (наприклад, MATLAB/Simulink) для розв'язання практичних задач.

Студент повинен знати:

- основні величини та поняття електротехніки (струм, напруга, потужність, енергія, індукція, потік);

- методи аналізу лінійних і нелінійних кіл у стаціонарних і нестаціонарних режимах;

- принципи дії основних елементів електричних систем.

- Студент повинен уміти:

- формувати математичну модель кола;

- розраховувати усталені та перехідні процеси;

- визначати енергетичні баланси та параметри споживачів;

- аналізувати взаємодію елементів електричних і магнітних кіл.

Вивчення дисципліни спирається на знання фізики (електрики і магнетизму) та математики (лінійна алгебра, диференціальні рівняння, комплексні числа, інтегральні перетворення Лапласа, векторна алгебра).

ЧАСТИНА I

ТЕМА 1 «ІСТОРИЧНИЙ ЕКСКУРС»

Метою лекції є формування у студентів цілісного уявлення про розвиток електромеханіки та електротехніки, ознайомлення з фундаментальними фізичними поняттями електричного заряду та електромагнітного поля, а також з розумінням їх ролі у формуванні сучасних електротехнічних систем. Лекція забезпечує базу для подальшого вивчення електричних явищ, технічних процесів і роботи електричних пристроїв.

План лекції:

1. Основні етапи розвитку електромеханіки та електротехніки.
2. Поняття про електричний заряд.
3. Поняття про електромагнітне поле.

Ключові слова: розвиток електромеханіки й електротехніки, електричний заряд, електрон, ядро атома, вільні електрони, провідники першого роду, закон Кулона, електричне поле, напруженість електричного поля, потенціал електричного поля, різниця потенціалів, електрична напруга, електромагнітне поле, електростатичне поле, магнітне поле, прямі та непрямі перетворення енергії, електромеханічні перетворювачі, джерела електричної енергії, електростанції.

Keywords: development of electromechanics and electrical engineering, electric charge, electron, atomic nucleus, free electrons, conductors of the first kind, Coulomb's law, electric field, electric field strength, electric field potential, potential difference, electric voltage, electromagnetic field, electrostatic field, magnetic field, direct and indirect energy conversions, electromechanical converters, sources of electrical energy, power plants.

Технічні переваги електричної енергії над іншими видами енергії добре відомі. Основними з них є: можливість виробництва її з неявих енергоносіїв з достатньою ефективністю та передача на великі відстані; досить просте керування та автоматизація процесів її виробництва; розподіл та подальше перетворення у будь-який інший вид енергії. Основним обладнанням для виробництва електричної енергії, її передачі та використання на місцях споживання є електромеханічні пристрої різних видів і цільового призначення.

1. Основні етапи розвитку електромеханіки та електротехніки.

Технічні досягнення XVIII сторіччя заклали фундамент подальшого науково-технічного прогресу в усіх галузях виробництва. Відбулася інтенсивна заміна ручної ремісничо-мануфактурної праці машинним фабричним виробництвом. Для приводу верстатів і механізмів все ширше застосувалися водяні колеса й парові машини, які у відповідно модернізованих конструкціях й досі служать основними джерелами механічної енергії у вигляді гідравлічних та парових турбін.

У 1800 році А. Вольта створив перше хімічне джерело електричної енергії – вольтів стовп. Поява джерела електричного струму відкрила нове широке поле дослідження на базі якого протягом кількох наступних років були відкриті хімічні, теплові, світлові, магнітні прояви електричного струму; показано можливість універсального використання електричної енергії.

Для розвитку електромеханіки важливу роль зіграло спостереження Ерстедом у 1820 році взаємодії магнітної стрілки й провідника з електричним струмом. Досліди і фундаментальні узагальнення їх наслідків, проведені такими фізиками як – А. М. Ампером, Д. Ф. Араго, Ж.Б. Біо, Ф. Саваром та іншими, стали основою чітких кількісних законів електродинаміки.

Роботи В. В. Петрова, Г. Деві, Г. С. Ома та Г. Р. Кірхгофа дозволили сформулювати перші закони електричного кола. Після десятирічних пошуків у 1831 році М. Фарадей відкрив явище електромагнітної індукції. Воно стало основою фундаментального закону електротехніки – закону електромагнітної індукції. Найбільш узагальнене формулювання цього закону й математику моделі здійснив Д. К. Максвел. Правило Е. Х. Ленца дало змогу визначити в загальному випадку напрям індукованого струму і в подальшому, сформулювати принцип оборотності електромеханічних перетворювачів.

Розробки електричного телеграфу і особливо електричного освітлення дали поштовх для інтенсифікації роботи зі створення потужних і ефективних джерел електричної енергії. Оскільки постійних джерел електричної енергії у природі в чистому вигляді не існує, то необхідно було створити ефективні перетворювачі інших доступних видів енергії (механічної, хімічної, теплової, променевої) в електричну.

Роботи зі створення генераторів-перетворювачів інших видів природної енергії в електричну велися у всіх напрямках. Найефективнішими виявилися електромеханічні генератори, які перетворюють механічну енергію в електричну. Поява таких потужних генераторів обумовила створення ліній електропередачі, розподільних мереж, комутаційної та захисної апаратури.

Великі заслуги у розробці електромеханічних перетворювачів належать М. О. Доливо-Добровольському. Наприкінці XIX сторіччя він розробив трифазну систему змінних струмів, запропонував і побудував перші трифазні

трансформатори та асинхронні двигуни, а також трифазний синхронний генератор на базі машини постійного струму.

В наш час вже відомо багато типів перетворювачів видів енергії, дія яких базується на різних фізичних принципах. Існують джерела електричної енергії з прямим та непрямим перетворенням. Серед джерел електричної енергії з прямим перетворенням слід виділити такі:

- індуктивні – перетворення відбувається за рахунок енергії магнітного поля (індуктивні перетворювачі);
- ємнісні – перетворення відбувається за рахунок енергії електричного поля (ємнісні перетворювачі);
- хімічні – перетворення відбувається за рахунок хімічних перетворень (гальванічні елементи, хімічні акумулятори, паливні елементи);
- теплові – перетворення відбувається за рахунок термоелектричних проявів (магнітогідродинамічні генератори, термоелектричні спаї та інші);
- радіаційні – перетворення відбувається за рахунок променевої енергії сонця або радіоактивного випромінювання (сонячні та атомні батареї).

Окрім джерел електричної енергії з прямим перетворенням використовують і інші типи джерел електроенергії. При цьому використовується ряд послідовних перетворень, в результаті яких і здобувають електричну енергію. Саме на таких комплексних непрямих перетвореннях ґрунтується дія електростанцій. Це спеціалізовані підприємства по виробництву електричної енергії. На електростанціях в якості первинної використовується гідравлічна енергія водосховищ (гідроелектростанції), енергія природних органічних сполук (теплові електростанції), атомна енергія (атомні електростанції).

Перетворення цих видів енергії в електричну є непрямим. Воно складається з ряду послідовних перетворень, де передостаннім видом енергії є механічна на обертальному валу відповідної турбіни – гідравлічної чи парової.

Практика використання прямих і непрямих перетворень для виробництва великої кількості електричної енергії показала, що непрямі перетворення з використанням на останньому етапі динамічних електромеханічних перетворювачів (генераторів) є найбільш ефективними. Саме такі джерела постачають практично всю електричну енергію. Джерела електричної енергії з прямими перетвореннями виробляють поки що не більше кількох відсотків загальної кількості електричної енергії.

Таким чином, саме перетворення механічної енергії в електричну стало основою електроенергетики. Хімічні, теплові та радіаційні джерела електричної енергії з прямим перетворенням порівняно з електромеханічними джерелами поки що виявляються не досить ефективними. Їх енергетичні, масогабаритні, вартісні показники суттєво поступаються електромеханічним пристроям.

2. Поняття про електричний заряд.

З курсів фізики і хімії відомо, що всі речовини складаються з дуже дрібних частинок – молекул, які в свою чергу складаються з ядра і дрібніших часток, які обертаються навколо нього. Згодом їх назвали електронами.

Виникнення електричних сил при взаємодії електрона з іншими тілами або частинками пояснюється властивостям і будовою матерії, з якої він складається.

Електричні властивості електрона умовно пояснюють наявністю в нього так званого електричного заряду. Оскільки виходить, що заряд електрона – властивість матерії, то його не можна розглядати окремо від електрона, а електрон – без заряду.

Крім такого розуміння про електричний заряд під терміном заряд розуміють тіло, наелектризоване більш або менш сильно.

Ядро атома також має електричні властивості, але електричні сили, що виникають під час взаємодії ядра з зарядженим тілом, протилежні по напрямку силам, які виникли б під час взаємодії електрона з цим тілом. Отже можна вважати, що ядро атома також має електричний заряд, який проте відрізняється від заряду електрона. Заряд ядра називають позитивним (+), а електрона негативним (-).

У металах у кожному атомі є один або два електрони, що обертаються навколо ядра по найбільш віддалених орбітах й тому слабо зв'язані з ним. Під впливом різних причин (наприклад теплового руху молекул і атомів) ці електрони можуть залишати межі одного атома (переходити в міжатомний простір, входити в систему іншого атома і знову залишати його). В результаті в металі спостерігається безперервний рух величезної кількості електронів у міжатомному просторі, тобто відбувається безперервна іонізація атомів і відновлення іонів у нейтральні атоми. Електрони, що залишають межі атомів і вільно переміщуються в міжатомному просторі називаються вільними.

Вільні електрони використовуються для створення електричного струму, тому всі речовини, які мають вільні електрони називаються провідниками електричного струму першого роду. До них належать усі метали та їх сплави.

Наприкінці 19-го сторіччя французький фізик Кулон встановив закон взаємодії між зарядженими тілами, за яким сила взаємодії між двома точковими зарядами прямо пропорційна величині заряду, обернено пропорційна квадрату відстані між ними, залежить від властивостей середовища, в якому відбувається ця взаємодія, а напрям сили збігається з напрямом прямої, що сполучає ці заряди, тобто:

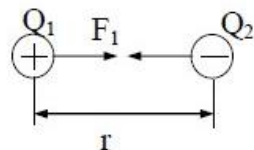
$$F = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2 \epsilon_a}$$


Рис. 1.

де: F – сила взаємодії між зарядами;

Q_1, Q_2 – величини взаємодіючих зарядів;

r – відстань між зарядами;

ϵ_a – абсолютна діелектрична проникність середовища – величина, яка враховує вплив навколишнього середовища на силу взаємодії між зарядами;

K – коефіцієнт пропорційності.

В системі СІ: $K=1/(4\pi)$.

3. Поняття про електромагнітне поле.

Елементарні матеріальні частинки, які мають електричний заряд, оточені електромагнітним полем, причому між частинками і їх полем точної межі немає. Доведено, що електромагнітне поле, як і всякий інший вид матерії, має масу, енергію і характеризується кількістю руху. Проте на відміну від інших видів матерії воно характеризується ще й силовою дією на заряджені частинки, тому електромагнітне поле називають особливим видом матерії. Електромагнітне поле може виявити себе по різному залежно від того, рухається заряджена частинка, якою це поле зв'язано або в взаємодіє, чи перебуває в стані спокою. Якщо частинка рухається то воно проявляється як один вид матерії, з одними властивостями, і цей вид матерії називають магнітним полем, а якщо нерухома – то як інший вид матерії, з іншими властивостями, і цей вид матерії називають електричним (електростатичним) полем.

Електричним полем називається особливий вид матерії, що оточує нерухомий електричний заряд, в який вміщені пробні заряди, на які діють електричні сили.

Неоднорідне електричне поле в різних точках діє на той самий пробний заряд з різною силою, тобто сили поля, або його інтенсивність, в різних точках неоднакова.

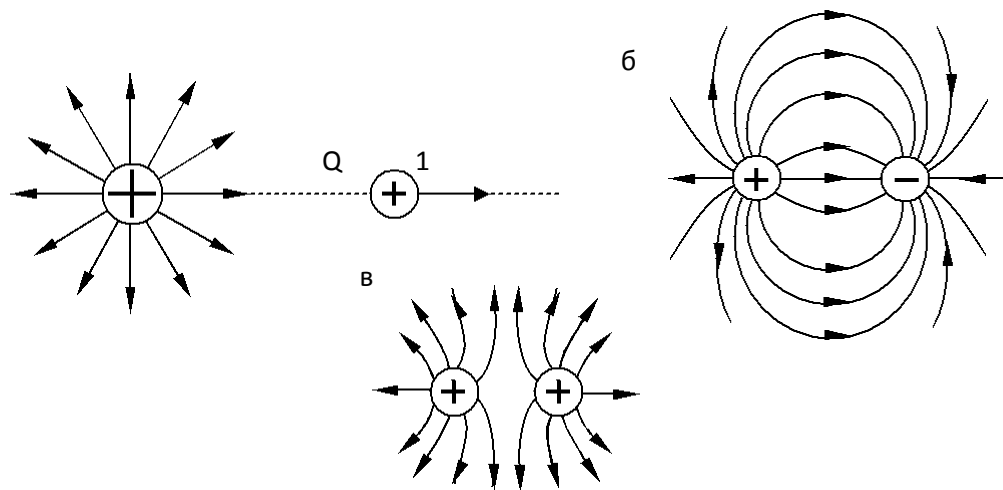


Рис. 2. Електричні поля зарядів: а– одиночного позитивного; б – двох різнойменних; в – двох однойменних

Напруженістю електричного поля в даній точці називається відношення сили, яка діє на заряд, уміщений в цю точку електричного поля, до величини внесеного заряду: $E=F/Q$.

Важливою властивістю електричного поля є те, що воно має деякий запас потенціальної енергії.

Робота по перенесенню зарядженого тіла силами електричного поля може здійснюватися лише за рахунок потенціальної енергії цього поля, і її запас при цьому відповідно зменшується.

Для характеристики енергетичних можливостей різних точок електричного поля вводиться величина, яку назвали потенціалом точки електричного поля. Чисельно потенціал точки дорівнює роботі, яку необхідно виконати для внесення позитивного одиночного заряду з-за меж кола у дану точку поля:

$$\varphi = \frac{A}{Q}$$

Потенціал точок електричного поля вимірюється у вольтах [В]. За один вольт приймають потенціал такої точки електричного поля, для внесення в яку заряду один кулон з-за меж кола необхідно затратити роботу в одинДжоуль. Різниця потенціалів точок 1 і 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_1}{Q} - \frac{A_2}{Q} = \frac{A_1 - A_2}{Q} = U_{1-2}$$

чисельно дорівнює роботі, яку необхідно виконати, щоб перенести одиницю заряду з точки 1 у точку 2. Різницю двох потенціалів називають електричною напругою, таким чином напруга: $U=\varphi_1-\varphi_2$. Одиниця виміру напруги також Вольти [В].

ТЕМА 2. «ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І СПІВВІДНОШЕННЯ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ.»

Метою лекції є формування в студентів цілісного уявлення про розвиток електротехніки від епохи постійного струму до становлення систем змінного струму, а також розуміння фундаментальних законів і фізичних процесів, що визначають роботу електричних кіл. Лекція спрямована на засвоєння сутності електричного струму, електрорушійної сили, напруги, опору та провідності, ознайомлення з основними структурними елементами електричних схем, а також із законом Ома, законом Джоуля–Ленца та енергетичними співвідношеннями в електричних колах. Особливу увагу приділено аналізу втрат напруги, балансу потужностей та впливу параметрів провідників на ефективність передавання електроенергії.

План лекції:

1. Електричні схеми, елементи схем.
2. Закон Ома.
3. Напруга на клеммах генератора та навантаження.
4. Енергетичні співвідношення. Електрична потужність.

Ключові слова: електротехніка, постійний струм, змінний струм, закони Ома і Кірхгофа, теплова дія струму, електромагнітна індукція, електромагнітні сили, Фарадей, Максвелл, Ампер, Джоуль, Ленц, гальванічні елементи, передача електроенергії, електричні кола, електричні схеми, вузол, вітка, контур, електричний струм.

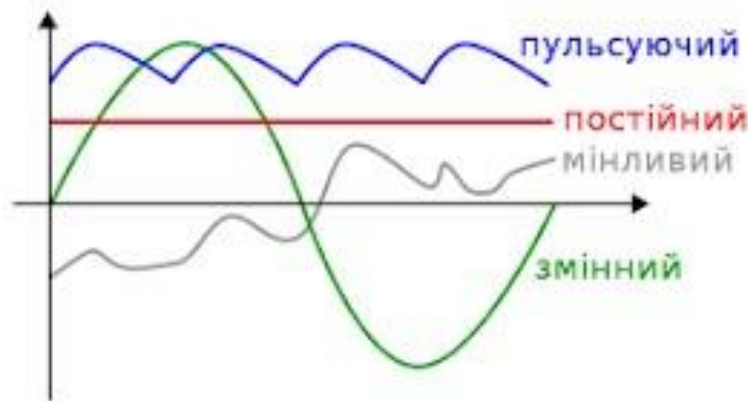
Keywords: electrical engineering, direct current, alternating current, Ohm's and Kirchhoff's laws, thermal effect of current, electromagnetic induction, electromagnetic forces, Faraday, Maxwell, Ampere, Joule, Lenz, galvanic cells, transmission of electricity, electrical circuits, electrical diagrams, node, branch, circuit, electric current.

Електротехніка, як наука теоретична і прикладна спочатку розвивалась на основі постійного струму, оскільки першими джерелами електричного струму були гальванічні елементи. В цей період (1800 – 1850) були відкриті основні закономірності електричних явищ: закони електричного кола (Ом і Кірхгоф), теплова дія електричного струму і його практичне використання (Ленц, Джоуль, Петров), закони електромагнітної індукції і електромагнітних сил (Фарадей, Максвелл, Ленц, Ампер, Якобі), електрохімічна дія струму і т. ін.

В подальшому все більше виявлявся основний недолік системи постійного струму – трудність економної передачі електричної енергії на значні відстані.

Можливість передачі електричної енергії на великі відстані, простота машин та інші переваги забезпечили системі змінного струму широкий розвиток. Однак і тепер, коли змінний струм займає центральне місце в електроенергетиці, багато користувачів користуються електроенергією постійного струму, який є для них або єдиним можливим за технологічних умов родом струму, або родом струму, що забезпечує ряд техніко – економічних переваг.

Отже, електричні кола бувають як постійного так і змінного струму. Графічне зображення постійного (червона лінія) та варіацій змінного (зелена, синя, сіра лінії) струмів наведена нижче.



В електричних колах як постійного, так і змінного струму при будь-яких можливих режимах одночасно проходить неперервний процес утворення електричної енергії і перетворення її в інші види енергії.

Електричні кола бувають простими та складними.

1. Електричні схеми, елементи схем.

Впорядкований рух вільних заряджених часток в провіднику під дією електричного поля називається електричним струмом.

Для виникнення струму необхідне замкнуте електричне коло і джерело електрорушійної сили.

Електричне коло в загальному випадку включає такі елементи:

- Джерело електричної енергії – генератори, джерела живлення.
- Приймачі, що перетворюють електроенергію в інші види енергії.
- Засоби, що з'єднують джерела енергії і приймачі.

Графічне зображення кола називається електричною схемою.

Для кожної електричної схеми існує поняття вузла, вітки і контуру.

Вузол – точка з'єднання трьох або більше елементів кола.

Іноді вводиться поняття умовного вузла, в якому з'єднуються два елементи

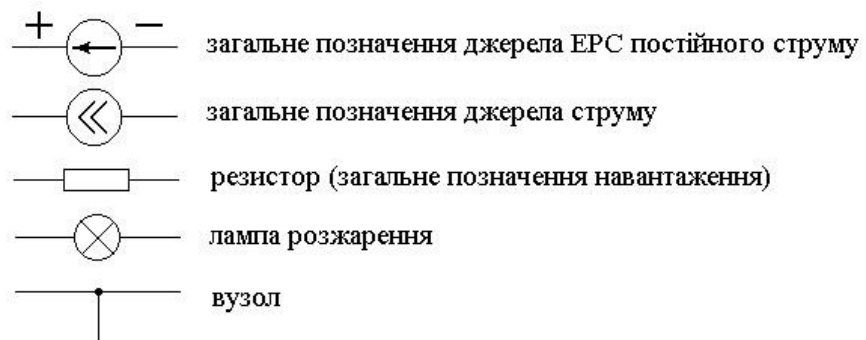
електричного кола.

Вітка – ділянка кола між двома вузлами.

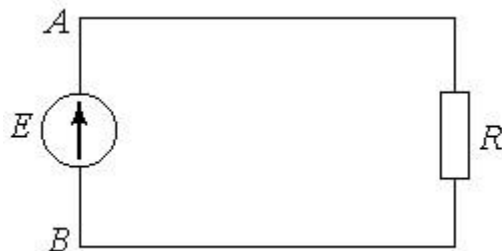
Контур – замкнутий шлях обходу віток.

Електричні кола можуть бути простими і складними. До простих відносяться кола з одним джерелом живлення (або кількома джерелами в одній вітці); до складних – кола з двома або більше джерелами живлення в різних вітках.

Позначення деяких елементів електричних кіл на схемах:



Найпростіше коло складається з джерела енергії з ЕРС E , приймача електричної енергії або кажуть навантаження з опором R та з'єднувальних проводів. Частина кола, що включає з'єднувальні проводи і навантаження є зовнішнім колом джерела.



Під дією електрорушійної сили E генератора в замкнутому колі виникає і підтримується направлений рух електричних зарядів – електричний струм I .

Величина струму I визначається кількістю електричних зарядів, що проходять через поперечний перетин провідника за одиницю часу (одну секунду). Якщо величина струму в часі не змінюється, то $I = \frac{q}{t}$ q – кількість електрики (кількість електричних зарядів), що проходить за t секунд.

Одиницею виміру електричного струму є ампер.

$$1 \text{ ампер} = 1 \frac{\text{кулон}}{\text{секунда}}$$
$$(1\text{A} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{сек.}})$$

Якщо величина струму непостійна і змінюється в часі, залежність має вираз в диференційній формі $i = \frac{dq}{dt}$

В джерелі електрорушійної сили на переміщення електричних зарядів витрачається певна енергія.

Відношення роботи A , що здійснюється зовнішніми силами при переносі зарядженої частки всередині джерела до її заряду Q називається електрорушійною силою джерела енергії (ЕРС) – $E = \frac{A}{Q}$.

Якщо $Q = 1$ Кл, то $E = A$, тобто ЕРС чисельно дорівнює роботі, що здійснюється зовнішніми силами при переносі одиниці заряду на ділянці АВ (див. попередній мал.). ЕРС визначається в вольтах

$$E = \frac{A}{Q} \left[\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ Кл}} = 1 \text{ В} \right]$$

Дією електрорушійної сили джерела забезпечується певна різниця потенціалів на його клеммах. Клема з більш високим потенціалом називається позитивною і позначається знаком «+». Клема з більш низьким потенціалом називається від'ємною і позначається знаком «-». Тобто клема «+» має більше вільних позитивних зарядів або менше від'ємних, а клема «-» має менше позитивних або більше від'ємних зарядів.

Іншими словами ЕРС – це здатність джерела енергії підтримувати на своїх затискачах різницю потенціалів, тобто напругу.

У зовнішньому колі струм направлений від клеми «+» до клеми «-», тобто від точки з більш високим потенціалом до точки з більш низьким потенціалом.

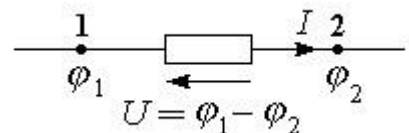
В джерелі напрямок струму співпадає з напрямком ЕРС – від клеми «-» до клеми

«+». Проходження електричного струму в колі пов'язане з втратою енергії. Ця енергія постачається в коло джерелом і перетворюється в колі в інші види енергії.

Елемент кола, в якому здійснюється необоротний процес перетворення електроенергії в теплову називається електричним активним опором.

Розглянемо ділянку кола 1 – 2.

Проходження струму на ділянці обумовлене різницею потенціалів $U = \varphi_1 - \varphi_2$ на його кінцях, або напругою U на ділянці.



Далі буде використовуватись таке узгодження: додатний (позитивний) напрямок напруги приймається від точки 2 з низьким потенціалом до точки 1 з більш високим потенціалом, тобто протилежно напрямку струму на цій ділянці кола.

Напругу на ділянці кола називають ще падінням напруги. Напруга вимірюється як і ЕРС в вольтах – “В”.

2. Закон Ома.

Основні електроенергетичні співвідношення для ділянки кола встановлені законами Ома і Джоуля–Ленца.

Згідно закону Ома, струм I на ділянці кола пропорційний напрузі U на цій ділянці: $I = Ug$.

Коефіцієнт пропорційності g називається електричною провідністю.

Величина, зворотна провідності $R = 1/g$, кількісно визначає значення опору ділянки кола. Опір вимірюється в омах – «Ом», а провідність в сименсах – «Сим» або «1/Ом».

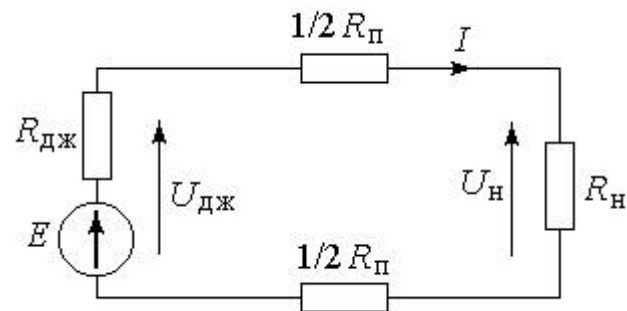
З закону Ома випливають формули: $I = \frac{U}{R}$; $U = IR$; $R = \frac{U}{I}$

3. Напруга на клеммах генератора та навантаження.

В електричному колі кожний елемент – і джерело, і провід, і приймачі мають певний електричний опір.

Зобразимо схему найпростішого електричного кола з врахуванням опорів всіх його елементів.

Через всі послідовно з'єднані елементи кола протікає один і той же струм I . Величина цього струму прямо пропорційна електрорушійній силі джерела і зворотно пропорційна загальному опору кола



$$I = \frac{E}{R_{дж} + R_{п} + R_{н}} = \frac{E}{R_{дж} + R_{зовн}}, \text{ де}$$

$R_{дж}$ – опір джерела;

$R_{п}$ – опір проводів;

$R_{н}$ – опір навантаження (приймача);

$R_{зовн} = R_{п} + R_{н}$ – загальний опір зовнішнього кола.

Ця формула є виразом закону Ома для замкнутого електричного кола. Її можна записати в іншому вигляді:

$$E = IR_{дж} + IR_{п} + IR_{н} = IR_{дж} + IR_{зовн}$$

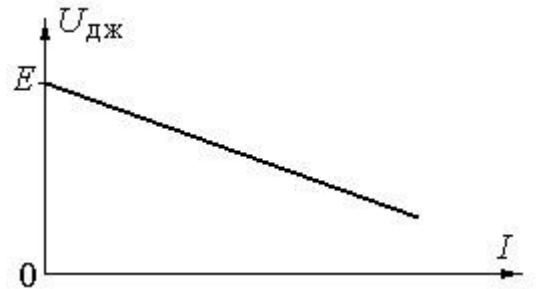
Частина електрорушійної сили, що витрачається на здолаття внутрішнього опору джерела називається падінням (втратою) напруги в джерелі $\Delta U_{дж} = IR_{дж}$.

Друга частина ЕРС витрачається на здолаття опору зовнішнього кола і називається напругою на клеммах джерела (генератора) $U_{дж} = E - IR_{дж} = E - \Delta U_{дж}$.

При зменшенні зовнішнього опору R зовн струм I в колі збільшується, падіння напруги в джерелі збільшується і тому напруга на клеммах джерела зменшується.

Залежність $U_{дж}$ (I) називається зовнішньою характеристикою джерела.

Вигляд зовнішньої характеристики джерела:



Як правило $R_{дж} \ll R_{зовн}$, тому допустимо вважати $U_{дж} \approx E$.

Якщо джерело з'єднане з навантаженням лінією передачі (проводами), то при проходженні струму в ній втрачається частина напруги $\Delta U_{п} = IR_{п}$. Тому напруга $U_{н}$ на клеммах навантаження менша за напругу на клеммах джерела на величину $\Delta U_{п}$

$$U_{н} = U_{дж} - \Delta U_{п} = E - I(R_{дж} + R_{п}).$$

Лінії електропередачі, як правило, виконують мідними, алюмінієвими і рідше сталевими проводами.

Опір металевих провідників залежить від його довжини l , площі поперечного перетину S і електропровідних можливостей металу – $R = \rho \frac{l}{S}$, де

l – довжина провідника [м];

S – площа поперечного перетину [мм²]

ρ – питомий опір [$\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}$].

Наприклад: ρ міді = $0,0175 [\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}]$;

ρ алюмінію = $0,029 [\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}]$

ρ сталі = $0,13 - 0,25 [\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}}]$

Величина зворотна опору називається провідністю. Провідність провідника – здатність провідника проводити електричний струм.: $G = 1/R$ [См].

Величина зворотна питомому опору $\gamma = 1/\rho$ – питома провідність [$(\frac{\text{Ом} \cdot \text{мм}^2}{\text{м}})^{-1}$]

Опір металевих провідників залежить також від температури. При підвищенні температури опір збільшується. Приблизно ця залежність визначається формулою

$$R_{\theta 2} = R_{\theta 1} [1 + \alpha(\theta 2^{\circ} - \theta 1^{\circ})], \text{ де}$$

$R_{\theta 1}$ і $R_{\theta 2}$ – опір відповідно при температурах $\theta 1^{\circ}\text{C}$ і $\theta 2^{\circ}\text{C}$; α – температурний коефіцієнт для інтервалу $0^{\circ} \div 100^{\circ}$.

Наприклад: α міді = 0,004 град $^{-1}$; α алюмінію = 0,004 град $^{-1}$; α сталі = 0,006 град $^{-1}$. На практиці площу перетину проводів вибирають так, щоб втрати напруги в них не перевищували 5 – 10% від напруги джерела.

4. Енергетичні співвідношення. Електрична потужність.

При проходженні електричного струму I по ділянці кола з опором R здійснюється перетворення електричної енергії в теплову. Кількість електричної енергії W , перетвореної в теплову за час t , визначається за законом Джоуля–Ленца: $W = I^2 R t$.

Потужність P є кількість енергії, що перетворюється за одиницю часу:
 $P = W/t = I^2 R$ або $P = U^2 / R$.

Замінивши добуток IR напругою U (згідно закону Ома) отримаємо формулу для визначення потужності P , що характеризує інтенсивність процесу перетворення електричної енергії в тепло або інші види енергії: $P = UI$.

Основними одиницями виміру для потужності є ват (Вт), а для електричної енергії– ват–секунда (Вт·сек.) або джоуль (Дж). На практиці частіше використовують більш великі одиниці виміру:

$$1 \text{ Кіловат (КВт)} = 1000 \text{ ват};$$

$$1 \text{ Кіловат–година (КВт·год.)} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ ват–секунд або джоулів.}$$

Розглянемо баланс потужностей в найпростішому колі. Для цього помножимо всі складові рівняння $E = IR_{\text{дж}} + IR_{\text{п}} + IR_{\text{н}}$ на $I \Rightarrow EI = I^2 R_{\text{дж}} + I^2 R_{\text{п}} + I^2 R_{\text{н}}$.

Добуток EI є повна електрична потужність P , яку має джерело. Частина цієї потужності $\Delta P_{\text{дж}} = I^2 \cdot R_{\text{дж}}$ втрачається в самому джерелі у вигляді тепла. Різниця $P - \Delta P_{\text{дж}}$ є потужність, що віддається джерелом в зовнішнє коло.

В проводах лінії також втрачається у вигляді тепла частина потужності $\Delta P_{\text{п}} = I^2 \cdot R_{\text{п}}$. Потужність, що залишилась $P_{\text{н}} = I^2 \cdot R_{\text{н}} = U_{\text{н}} I$ споживається навантаженням.

Баланс потужностей полягає в рівності значень суми повних електричних потужностей джерел кола і суми потужностей, що споживаються елементами кола.

Втрати потужності в джерелах живлення сучасних енергетичних установок відносно невеликі. Потужні енергетичні генератори мають високий к.к.д., що досягає значення 0,95 і вище.

При передачі споживачам однієї і тієї ж потужності $P_n = U_n \cdot I$ струм, що протікає по лінії, буде тим менший, чим вища напруга установки. Втрати потужності в лінії пропорційні квадрату величини струму. Отже, підвищення напруги, наприклад, в 10 разів призводить до зниження втрат потужності в лінії передачі в 100 разів. Цим пояснюється використання все більш високих напруг в енергетичних

ТЕМА 3. « ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА. ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ ВАХ. ДЖЕРЕЛА ЕНЕРГІЇ ТА ЇХ СХЕМИ ЗАМІЩЕННЯ»

Метою є формування у студентів цілісного розуміння будови електричного кола, його основних елементів та їх характеристик. Студенти мають засвоїти принципи поділу елементів на лінійні й нелінійні, навчитися розрізняти їх вольт-амперні характеристики та розуміти, як параметри елементів впливають на роботу кола. Також розглядаються схеми заміщення джерел енергії та умови їх еквівалентності, що є важливою основою для аналітичного моделювання електричних кіл.

План

- Основні елементи електричного кола.
- Лінійні та нелінійні ВАХ.
- Параметри елементів: опір, провідність, ЕРС.
- Умовні позначення елементів.
- Джерела енергії та їх схеми заміщення.
- Умови еквівалентності схем заміщення.

Ключові слова: Електричне коло, джерело енергії, споживач, активні та пасивні елементи, ВАХ, лінійні елементи, нелінійні елементи, внутрішній опір, внутрішня провідність, ЕРС, схема заміщення, джерело напруги, джерело струму.

Keywords: Electric circuit, energy source, consumer, active and passive elements, I-V characteristic, linear elements, nonlinear elements, internal resistance, internal conductivity, EMF, equivalent circuit, voltage source, current source.

Електричним колом називається сукупність пристроїв, які забезпечують генерування, передачу, розподіл електричної енергії та перетворення її в інші види.

Основними елементами електричного кола є джерела енергії, споживачі та з'єднувальні провідники.

Джерела енергії – це пристрої в яких теплова, механічна, хімічна чи світлова енергії перетворюються в електричну енергію.

В споживачах має місце зворотнє перетворення електричної енергії в теплову, механічну, хімічну і інші види енергії.

Джерела енергії називають ще активними елементами кола, споживачі – пасивними елементами.

Залежність напруги на затискачах джерела чи споживача від струму через цей елемент називається вольт-амперною характеристикою (ВАХ) елемента.

За виглядом цих залежностей (прямолінійні чи криволінійні) елементи ділять на лінійні і нелінійні. ВАХ лінійних елементів приведено на рис. 1.1,

ВАХ нелінійних елементів - на рис. 1.2.

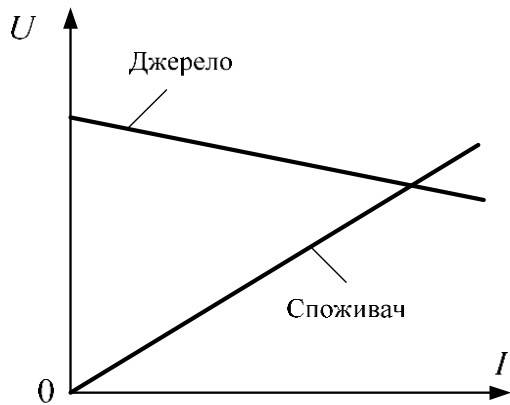


Рис. 1

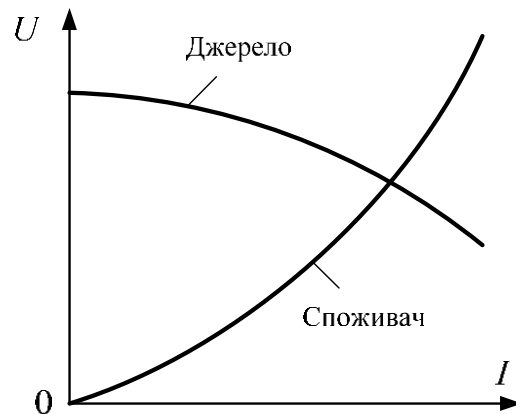


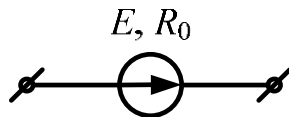
Рис. 2

Величини, які характеризують елементи в умовах даної задачі, називаються параметрами елементів. Параметрами джерел енергії є величина ЕРС чи величина струму, а також внутрішній опір чи провідність джерела. Параметрами споживачів є опори чи провідності. Крім того в колах змінного струму параметрами є також індуктивності і ємності елементів. Якщо параметри елементів не залежать від величини струму через елемент, тоді рівняння для ВАХ такого елементу є лінійним і відповідно ВАХ елементів будуть зображені на рис. 1. Якщо ж параметри елементів залежать від величини струму, тоді рівняння для ВАХ елементу буде нелінійним і його ВАХ зображено на рис. 2.

Якщо електричне коло має хоча б один нелінійний елемент, то все коло розглядається як нелінійне.

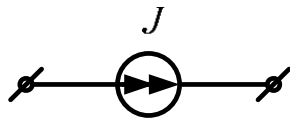
Зображення електричного кола з допомогою умовних знаків називається схемою кола. Схема електричного кола не передає фізичних властивостей елементів, а тільки вказує на послідовність з'єднання елементів.

Умовні позначення елементів кола:

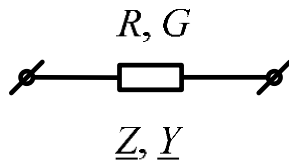


Джерело із заданою ЕРС (ДН)

E - ЕРС, R_0 - внутрішній опір.



Джерело із заданим струмом (ДС)



Споживач

R - опір, G - провідність,

$\underline{Z}$ - комплексний опір,

$\underline{Y}$ - комплексна провідність.

Схеми заміщення джерел енергії. Умови еквівалентності схем заміщення.

Розглянемо найпростіше коло, яке складається з джерела енергії і споживача (рис.1.3).

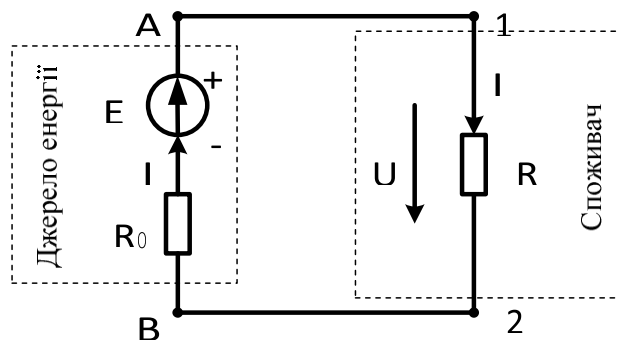


Рис . 3

Рівняння напруг

$$IR_0 + IR = E$$

де IR_0 – - спад напруги на внутрішньому опорі,

$IR=U=U_{12}$ – спад напруги на споживачі,

$U_{A1}=U_{2B}=0$, $U_{AB}=UI_2=U$, U_{AB} – різниця потенціалів на джерелі енергії.

Тоді з рівняння (1.1):

$$U_{AB} = U = E - IR_0$$

Нехай $E = \text{const}$, $R = \text{const}$. Тоді лінійне рівняння, ВАХ джерела теж лінійна.

Якщо маємо кілька джерел з однаковими E і різними R_0 , то залежності напруг на затискачах джерела від струму будуть мати вигляд, зображений на рис. 4

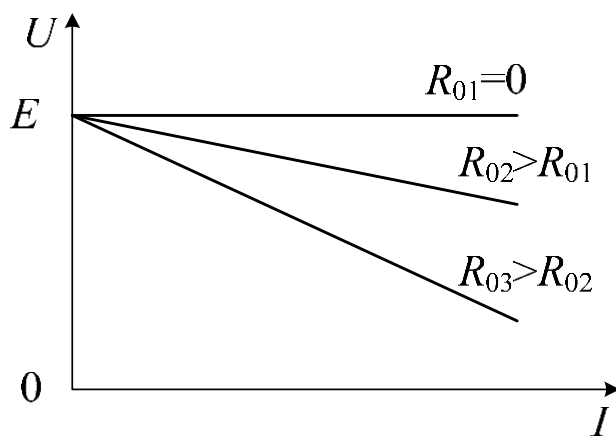


Рис. 4

Як видно із рис. 4, чим менше R_0 , тим менший спад напруги на цьому внутрішньому опорі і відповідно напруга на затискачах джерела менше залежатиме від струму. Якщо ж $R_0=0$, то напруга на затискачах джерела взагалі не буде залежати від величини струму і ВАХ такого джерела буде прямою, паралельною осі I (дивись рис. 4).

Таке ідеальне джерело, внутрішній опір якого дорівнює нулю і напруга на затискачах якого не залежить від величини струму, називається джерелом напруги (ДН). На схемі заміщення воно зображається одним елементом (рис. 5,б).

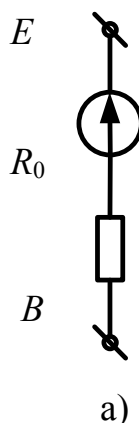


Рис. 5

Поділимо ліву і праву частину рівняння R_0 :

$$\frac{U}{R_0} = \frac{E}{R_0} - I$$

Введемо позначення:

$$\frac{E}{R_0} = I_{\text{КЗ}} \quad \text{— струм короткого замикання джерела, } I_{\text{КЗ}} = J;$$

$$\frac{I}{R_0} = G_0 \quad \text{— внутрішня провідність джерела.}$$

$$UG_0 = J - I,$$

тоді

$$I = J - UG_0$$

Рівнянню (1.3) відповідає наступна схема заміщення джерела (рис. 6)

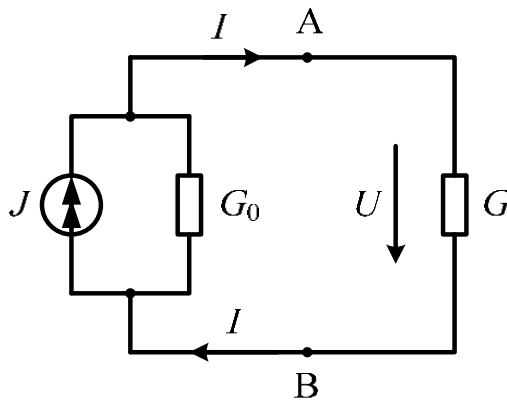


Рис. 6

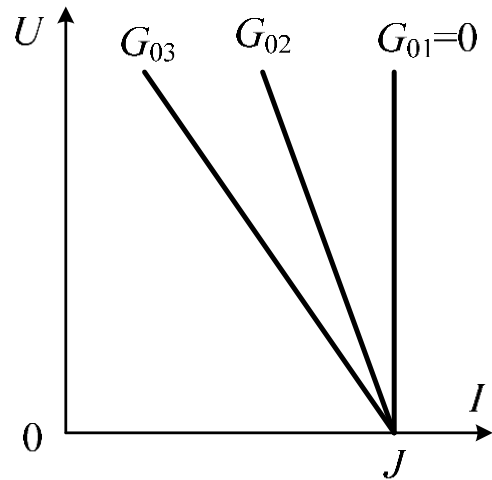


Рис. 7

Вольт-амперні характеристики джерела, побудовані по рівнянню, будуть мати вигляд рис. 7, де $G_{03} > G_{02} > G_{01}$.

Таке ідеальне джерело, внутрішня провідність якого дорівнює нулю і струм якого не залежить від величини напруги на затискачах, отримало назву джерело струму (ДС).

Для джерела струму будуть справедливими співвідношення:

$$G=0, \quad R_0 = \infty, \quad E = IR_0 = \infty.$$

Для споживача R (див. рис. 1.3) немає значення, якою схемою заміщення зображено джерело енергії: послідовною чи паралельною. Струм і напруга на споживачі залишаються тими самими, якщо між параметрами схем заміщення джерела енергії виконуються такі співвідношення:

$$J = \frac{E}{R_0}, \quad E = JR_0$$

$$G_0 = \frac{1}{R_0}, \quad R_0 = \frac{1}{G_0}$$

Вирази є умовами еквівалентності схем заміщення джерела енергії.

ТЕМА 4. « СТРУКТУРА ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА. ЗАКОН ОМА. ЗАКОНИ КІРХГОФА»

Метою лекції є ознайомлення студентів зі структурою електричних кіл та базовими підходами до їх аналізу. Лекція формує розуміння топології кола – віток, вузлів, контурів та графів. Особливу увагу приділено застосуванню закону Ома для різних типів ділянок і всього кола. Також розглядаються перший і другий закони Кірхгофа, які дозволяють виконувати розрахунок струмів і напруг у простих та складних електричних схемах.

План:

- Топологія електричного кола: вітка, вузол, контур.
- Граф та дерево графа.
- Закон Ома для ділянки і кола.
- Перший закон Кірхгофа.
- Другий закон Кірхгофа та складання рівнянь для контурів.

Ключові слова: Вітка, вузол, контур, граф електричного кола, дерево графа, вітка зв'язку, головний контур, закон Ома, закон Ома для ділянки, закон Ома для кола, перший закон Кірхгофа, другий закон Кірхгофа, ЕРС, спад напруги.

Keywords: Branch, node, circuit, electric circuit graph, graph tree, connection branch, main circuit, Ohm's law, Ohm's law for a section, Ohm's law for a circuit, Kirchhoff's first law, Kirchhoff's second law, EMF, voltage drop.

Частина електричного кола, вздовж якої струм має одне і теж значення, називається віткою кола чи схеми. Місце з'єднання трьох і більше віток називається електричним вузлом. Замкнений шлях по елементах кола, створений вітками, які не повторюються, називається електричним контуром.

Якщо кожному вітку схеми незалежно від кількості елементів в ній зобразити однією лінією, то отримаємо граф схеми. Вітки схеми будуть вітками графа (ребра). Схема кола і її граф, в яких 6 віток і 4 вузли, зображено на рис. 1.8 та рис. 1.9 $n_{\text{ВУЗ}}=4$, $m_{\text{ВІТ}}=6$.

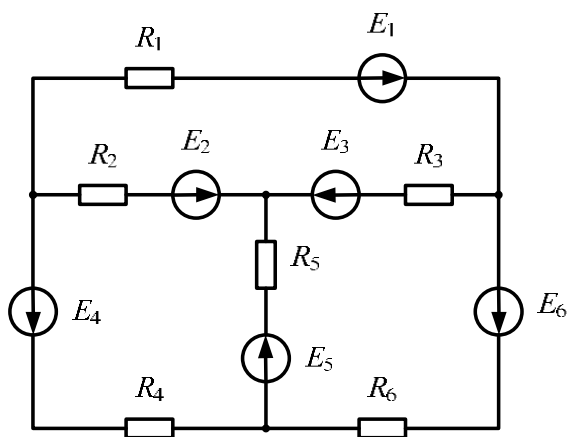


Рис. 1

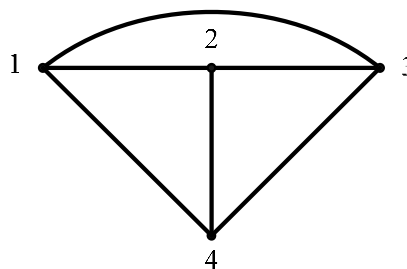


Рис. 2

Частина графа, створена вітками, які зв'язують всі вузли і не дають замкнених контурів, називається деревом графа. Для графа рис. 2 можна запропонувати кілька дерев: рис. 3 (а, б, в).

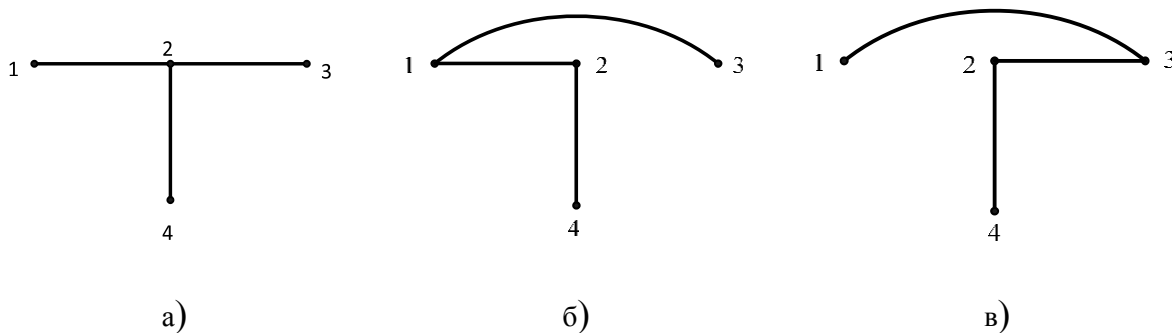


Рис. 3

Вітки дерева називаються головними вітками графа. Вітки, які доповнюють дерево до повного графа, називаються вітками зв'язку. Кількість віток дерева залежить від кількості вузлів. Для графу рис. 3 $m_{\text{вуз}}=4$, $n_{\text{вд}}=3$. Кількість віток дерева та кількість вузлів пов'язані співвідношенням:

$$n_{\text{вд}} = m_{\text{вуз}} - 1.$$

Наприклад, для графів:

$m_{\text{вуз}}=3, n_{\text{вд}}=2.$	$m_{\text{вуз}}=2, n_{\text{вд}}=1.$

Конттури графа, які створені вітками дерева і тільки однією віткою зв'язку, називаються головними контурами графа. Кількість головних контурів визначається кількістю віток зв'язку.

n_B – всього віток графа;

n_{BD} – віток дерева;

$$n_{B.BB} = n_B - n_{BD} = n_{\text{ГОЛ.КОН}}$$

$$n_{\text{ГОЛ.КОН}} = n_d - (m_{\text{Dep}} - 1)$$

Якщо коло має послідовне з'єднання елементів, в яких протікає один і той же струм, то таке коло називається нерозгалуженим. Якщо в колі 3 і більше віток, то це розгалужене коло. Якщо в колі діє одне джерело енергії, то незалежно від кількості віток його називають простим колом.

Якщо в колі є кілька віток і не менше 2-х джерел, які знаходяться в різних вітках, то це складне коло.

Закон Ома.

а) Для пасивної ділянки кола (рис. 4)

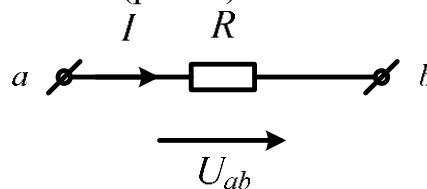


Рис 4

$$\int_a^b \vec{E}_{\text{РЕЗ}} d\vec{l} = I \cdot R = U_{ab} - \text{спад напруги};$$

$$\vec{E}_{\text{РЕЗ}} = \vec{E}_{\text{КУЛ}} + \vec{E}_{\text{СТОП}}, \quad \vec{E}_{\text{СТОП}} = 0;$$

$$\int_a^b \vec{E}_{\text{РЕЗ}} d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_{\text{РЕК}} d\vec{l} = \varphi_a - \varphi_b = U_{ab} - \text{різниця потенціалів};$$

$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} = I \cdot R;$$

$$I = \frac{U_{ab}}{R}$$

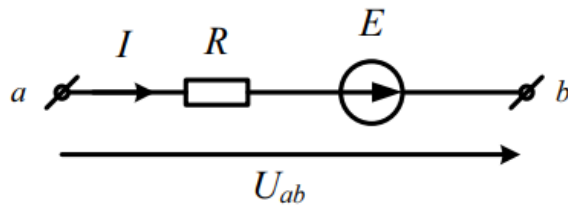
$$\varphi_a = \varphi_b + I \cdot R$$

піввідношення вказує на те, що в напрямку проти струму потенціал підвищується на величину спаду напруги.

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R$$

В напрямку струму потенціал знижується на величину спаду напруги.

б) Для активної ділянки



$$\int_a^b \bar{E}_{\text{РЕЗ}} d\bar{l} = I \cdot R$$

$$\bar{E}_{\text{РЕЗ}} = \bar{E}_{\text{КУЛ}} + \bar{E}_{\text{СТОП}};$$

$$\int_a^b \bar{E}_{\text{РЕЗ}} d\bar{l} = \int_a^b \bar{E}_{\text{КУЛ}} d\bar{l} + \int_a^b \bar{E}_{\text{СТОП}} d\bar{l} = \varphi_a - \varphi_b + E = I \cdot R;$$

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R}$$

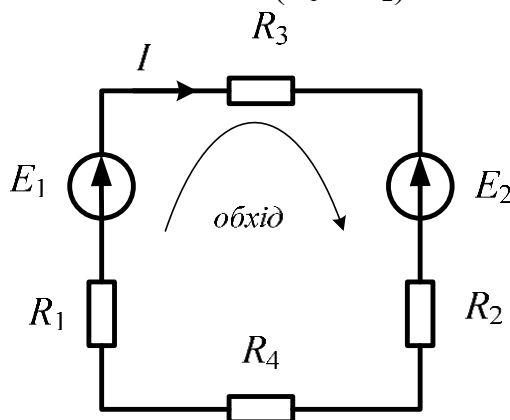
рум ділянки з опором і ЕРС дорівнює відношенню різниці потенціалів точок ділянки, взятої в напрямку струму, «+» ЕРС ділянки (за умови, що напрям ЕРС збігається з напрямом струму), до величини опору ділянки. В загальному випадку, якщо на ділянці маємо кілька опорів і кілька ЕРС, то (1.10) матиме вигляд:

$$I = (U_{ab} + \sum E_k) / \sum R_k$$

В чисельнику співвідношення (1.11) E_k входить із знаком «+», якщо напрямок ЕРС і струму збігаються (і навпаки). В знаменнику $\sum R_k$ – це арифметична сума. U_{ab} – різниця потенціалів, взята в напрямку струму.

Якщо напрямок струму невідомий, то його можна вибрати довільно і записати відповідне співвідношення. Якщо отримане рішення буде додатнім, то вибраний напрямок відповідає дійсному (і навпаки).

в) Закон Ома для замкненого кола ($E_1 > E_2$).



$$\oint \bar{E}_{\text{РЕЗ}} d\bar{l} = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4);$$

$$\begin{aligned}\bar{E}_{\text{PEЗ}} &= \bar{E}_{\text{КУЛ}} + \bar{E}_{\text{СТОП}}; \\ \oint \bar{E}_{\text{PEЗ}} d\bar{l} + \oint \bar{E}_{\text{СТОП}} d\bar{l} &= E_1 - E_2; \\ E_1 - E_2 &= I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4); \\ I &= \sum E_k / \sum R_k\end{aligned}$$

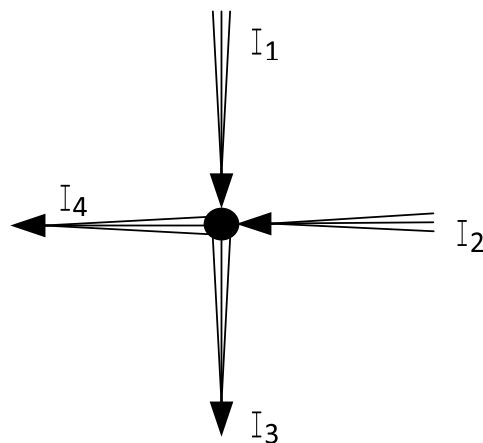
Струм у нерозгалуженому замкненому колі визначається як відношення алгебраїчної суми ЕРС до суми опорів цього кола. В рівнянні E_k входить із знаком «+», якщо напрямки ЕРС і струму однакові.

Закони Кірхгофа.

а) Перший закон Кірхгофа. Алгебраїчна сума струмів віток, з'єднаних у вузлі, дорівнює 0.

$$\sum I_k = 0$$

Наприклад, для вузла, зображеного на рис. 1.14, перший закон Кірхгофа записується так:



$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0,$$

або

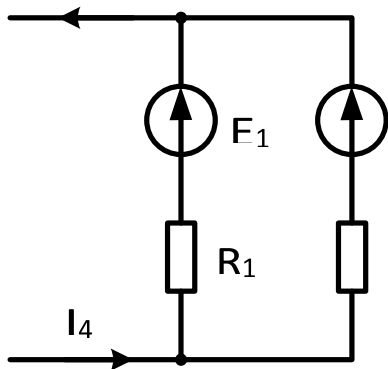
$$-I_1 - I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Рис. 5

Перший закон Кірхгофа можна розглядати як наслідок принципу неперервності електричного струму.

$$\oint \bar{\sigma} d\bar{S} = 0$$

Виходячи з цього, перший закон Кірхгофа можна використовувати не тільки для вузла, але й для будь-якої замкненої поверхні, в якій знаходиться частина електричного кола (рис. 6).



$$I_3 = I_4$$

Рис. 6

б) Другий закон Кірхгофа.

В будь-якому замкненому контурі алгебраїчна сума спадів напруг на ділянках контуру дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС в цьому контурі.

$$\sum I_k \cdot R_k = \sum E_k$$

Для того, щоб записати рівняння на основі другого закону, треба попередньо вибрати напрямок обходу контуру (рис. 7).

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_1 + E_2 - E_3 - E_4.$$

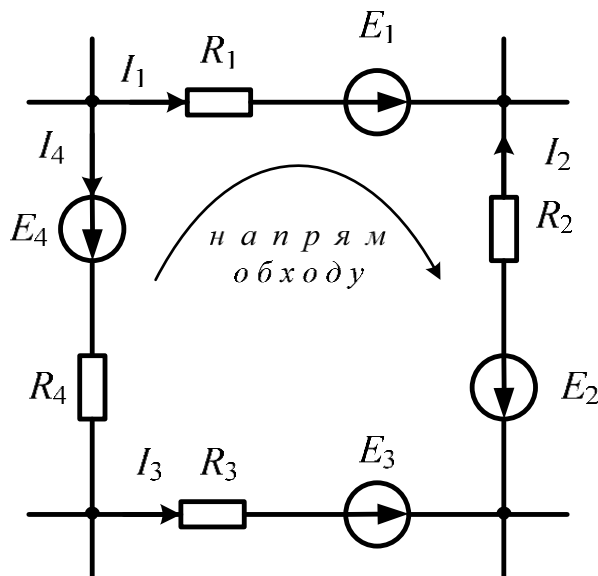


Рис. 7

В рівнянні складова $I_k R_k$ береться із знаком «+» для спадів напруг, де напрям обходу і напрямок струму співпадають; складова E_k додатна, де напрямок обходу співпадає з напрямком ЕРС.

Якщо замість ЕРС ввести в розгляд напруги, що їх врівноважують, то другий закон Кірхгофа записується таким чином в будь-якому замкненому контурі алгебраїчна сума напруг дорівнює 0.

$$\sum U_k = 0$$

Це формулювання другого закону Кірхгофа частіше використовується в ході експериментальної перевірки.

ТЕМА 5. «МЕТОД РІВНЯНЬ КІРХГОФА»

Метою є ознайомлення студентів із методом рівнянь Кірхгофа як універсальним способом аналізу складних електричних кіл. Студенти повинні зрозуміти принцип складання систем рівнянь за першим і другим законами Кірхгофа, навчитися визначати кількість необхідних рівнянь, правильно вибирати напрями струмів та виконувати розрахунок невідомих струмів у вітках кола. Також формується вміння перевіряти правильність розв'язку за допомогою балансу потужностей.

План

- Суть методу рівнянь Кірхгофа.
- Вузли, вітки та кількість рівнянь.
- Рівняння за 1-м та 2-м законами Кірхгофа.
- Розв'язання системи рівнянь.
- Баланс потужностей.
- Приклади розрахунку.

Ключові слова: перший закон Кірхгофа, другий закон Кірхгофа, вузол, вітка, контур, система рівнянь, струми віток, ЕРС, опір, провідність, незалежні рівняння, баланс потужностей.

Keywords: Kirchhoff's first law, Kirchhoff's second law, node, branch, circuit, system of equations, branch currents, EMF, resistance, conductivity, independent equations, power balance.

В задачах аналізу для розрахунку кола потрібно визначити струми у вітках за відомими параметрами ЕРС (джерел енергії), опорів (споживачів –

резисторів) і конфігурації кола. Для електричного кола із кількістю вузлів B і віток B_T необхідно скласти кількість рівнянь, щоб визначити всі невідомі струми.

Якщо в схемі є вітки з джерелами струму, то у таких вітках із джерелами струму B_{T_j} струми відомі, відповідно і зменшиться кількість рівнянь складених за другим законом Кірхгофа для незалежних контурів.

Кількість рівнянь, яку можна скласти за першим законом Кірхгофа : $n_1 = B - 1$.

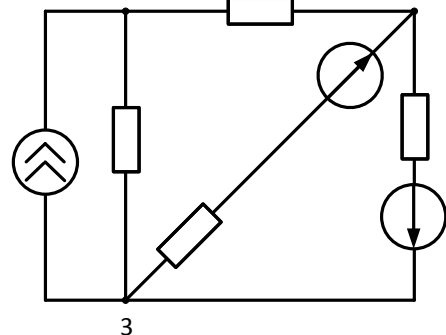
Кількість рівнянь складених за другим законом:
 $n_2 = B_T - (B - 1) - B_{T_j}$.

Наприклад, для кола Рис.20 кількість вузлів $B=3$, віток $B_T=5$, віток зі струмом $B_{T_j}=1$.

$$n_1 = B - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$n_2 = B_T - (B - 1) - B_{T_j} = 5 - (3 - 1) - 1 = 2$$

Рис.20



Загальна кількість рівнянь, яку необхідно скласти рівна кількості віток з невідомими струмами, або: $n_1 + n_2 = 4$

Послідовність розв'язання електричного кола методом рівнянь Кірхгофа:

1. Визначити кількість віток (B_T) та вузлів (B) в схемі, довільно вибрати напрями струму у вітках;

2. Скласти систему рівнянь за законами Кирхгофа:

– кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа: $n_1 = B - 1$;

– кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа: $n_2 = B_T - (B - 1) - B_{T_j}$.

*Для контура, в який входить вітка із джерелом струму, рівняння не складається (зайва інформація).

3. Підставити значенні відомих величин в систему рівнянь. Розв'язати систему рівнянь будь-яким відомим способом.

Розв'язок системи рівнянь дає невідомі струми. Якщо якийсь із струмів має знак “мінус” це означає, що його істинний напрям протилежний вибраному.

4. Перевірити правильність розв'язку за балансом потужностей.

Приклад 1. Розглянемо коло, приведенне на рис.1

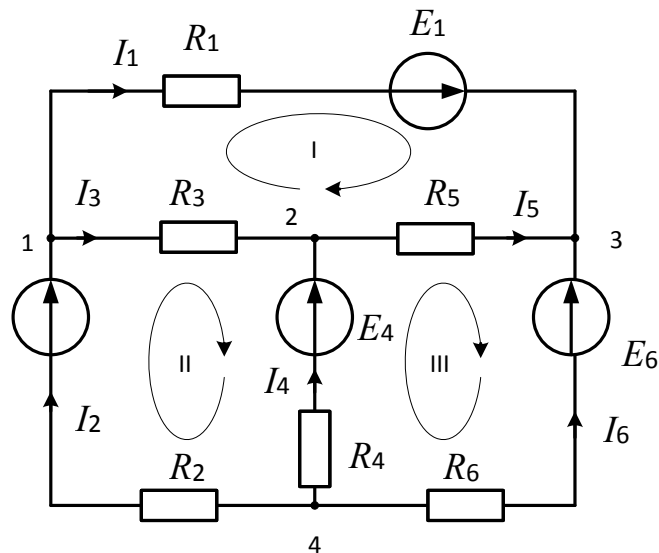


Рис.1

У колі вузлів $B=4$, віток $B_T=6$, віток із джерелами струму $B_{T_j}=0$.

Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа $n_1=B-1=4-1=3$.

Кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа, $n_2=B_T-(B-1)-B_{T_j}=6-4+1-0=3$, або дорівнює кількості незалежних контурів.

$$\begin{aligned} 1. & -I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ 2. & I_3 + I_4 - I_5 = 0; \\ 3. & I_1 + I_5 + I_6 = 0; \\ 4. & I_1 R_1 - I_5 R_5 - I_3 R_3 = E_1; \\ 5. & I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_2 - E_4; \\ 6. & I_4 R_4 + I_5 R_5 - I_6 R_6 = E_4 - E_6. \end{aligned}$$

Одержана система із шести рівнянь із шістьма невідомими (струмами).

Приклад 2. У колі Рис.22 вузлів $B=5$, віток $B_T=8$, віток із джерелами струму $B_{T_j}=1$. Кількість рівнянь за першим законом Кірхгофа : $n_1=B-1=5-1=4$.

Кількість рівнянь за другим законом Кірхгофа $n_2=B_T-(B-1)-B_{T_j}=8-(5-1)-1=3$, або дорівнює кількості незалежних контурів мінус відомий контурний струм J

1. $I_2 + I_5 - I_7 = 0$;
2. $I_3 + I_7 - J = 0$;
3. $I_1 - I_5 - I_6 = 0$;
4. $I_4 - I_3 + I_6 = 0$;
5. $I_2 R_2 - I_5 R_5 - I_1 R_1 = E_2 - I_{\text{контур}}$;
6. $I_5 R_5 - I_3 R_3 - I_6 R_6 = E_7 - II_{\text{контур}}$;
7. $I_1 R_1 - I_6 R_6 - I_4 R_4 = 0 - III_{\text{контур}}$;

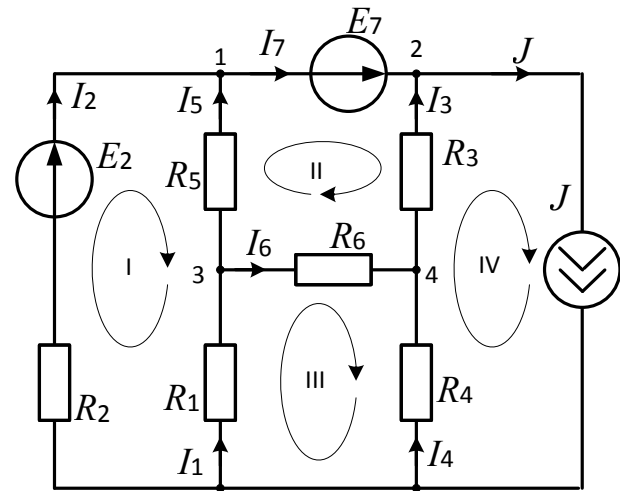


Рис.2

Як вже відомо, будь-яке складне коло можна розрахувати, склавши для цього кола відповідну кількість рівнянь на основі першого та другого законів Кірхгофа.

Але якщо в схемі є значна кількість віток з невідомими струмами, то система рівнянь по їх визначенню буде громіздкою і розв'язок цієї системи складатиме певні труднощі. Тому були розроблені методи, які дозволяють спростити систему рівнянь для сумісного розв'язку, звівши їх кількість або до кількості головних контурів (метод контурних струмів) або до кількості вузлів схеми (метод вузлових потенціалів). В залежності від того, чого в досліджувальній схемі менше - рівнянь для головних контурів чи рівнянь для вузлів, використовують той чи інший метод.

ТЕМА 6. «МЕТОД КОНТУРНИХ СТРУМІВ»

Метою є формування в студентів навичок аналітичного розрахунку електричних схем методом контурних струмів. Лекція спрямована на розуміння поняття “контурного струму” як математичної моделі та правил складання рівнянь для незалежних контурів. Студенти повинні навчитися виділяти незалежні контури, визначати власні та взаємні опори, враховувати контурні ЕРС та розраховувати реальні струми у вітках на основі знайдених контурних струмів.

План

- Поняття контурного струму.
- Незалежні контури.
- Власні та взаємні опори.
- Контурні ЕРС.

- Система рівнянь для контурів.
- Визначення струмів у вітках.
- Приклади.

Ключові слова: контур, контурний струм, контурні рівняння, власний опір, взаємний опір, контурна ЕРС, незалежні контури, метод контурних струмів, баланс потужностей, віртуальні струми, суміжні вітки.

Keywords: circuit, circuit current, circuit equations, self-resistance, mutual resistance, circuit EMF, independent circuits, circuit current method, power balance, virtual currents, adjacent branches.

Даний метод базується на другому законі Кірхгофа.

Під “контурним струмом” будемо розуміти струм, який протікає в будь-якому незалежному контурі кола, що аналізується. У реальних електричних колах “контурних струмів” не протікає. Це «віртуальні струми», тобто це математичний підхід для розрахунку струмів у вітках. Рівняння для контурних струмів складають за другим законом Кірхгофа.

Кількість рівнянь дорівнює кількості незалежних контурів:

$$n = B - (B - 1) - B_{Tj}.$$

якщо в схемі є контур, який містить джерело струму, його контурний струм вважаємо відомим (бажано напрямок контурного струму у контурі із джерелом струму вибирати у одному напрямку з ДС).

Порядок розрахунку струмів в електричному колі методом контурних струмів:

1. Визначаємо кількість незалежних контурів p . На схемі показуємо напрямки контурних струмів. Складаємо загальні рівняння (систему рівнянь) за методом контурних струмів. Бажано, але необов’язково, напрями контурних струмів задавати однаково (наприклад, за годинниковою стрілкою).

Увага! Контурні струми контурів із джерелами струмів вважаються відомими (на схемі показуємо додаткові контури з вітками, що містять джерело струму), але для них рівняння не складається (зайва інформація).

Для схеми електричного кола, що має p незалежний контурів, загальна система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}
 &1) R_{11}IK_1 + R_{12}IK_2 + \dots + R_{1n}IK_n = E_{11} \\
 &2) R_{21}IK_1 + R_{22}IK_2 + \dots + R_{2n}IK_n = E_{22} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &m) R_{m1}IK_1 + R_{m2}IK_2 + \dots + R_{mn}IK_n = E_{mm} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &n) R_{n1}IK_1 + R_{n2}IK_2 + \dots + R_{nn}IK_n = E_{nn}
 \end{aligned}$$

2. Визначаємо власні та взаємні опори контурів, а також контурні ЕРС. Власним контурним опором називається опір, який є алгебраїчною сумою всіх опорів, які є в даному контурі. Взаємним контурним опором називається опір, який є суміжним для двох контурів (він може бути як додатним, так і від'ємним, в залежності від напрямків контурних струмів). Контурною ЕРС називається алгебраїчна сума всіх ЕРС, які діють в контурі.

3. Підставляємо отримані константи в систему рівнянь. Будь-яким розрахунковим методом розв'язуємо систему рівнянь і визначаємо контурні струми.

4. За знайденими контурними струмами визначити струми у вітках схеми.

5. Перевіряємо правильність розрахунку за балансом потужностей.

Приклад 3. Розрахувати методом контурних струмів всі струми у колі рис. 2 при таких заданих параметрах:

$$R_1 = 26(\text{Ом}),$$

$$R_2 = 10(\text{Ом}),$$

$$R_3 = 18(\text{Ом}),$$

$$R_4 = 14(\text{Ом}),$$

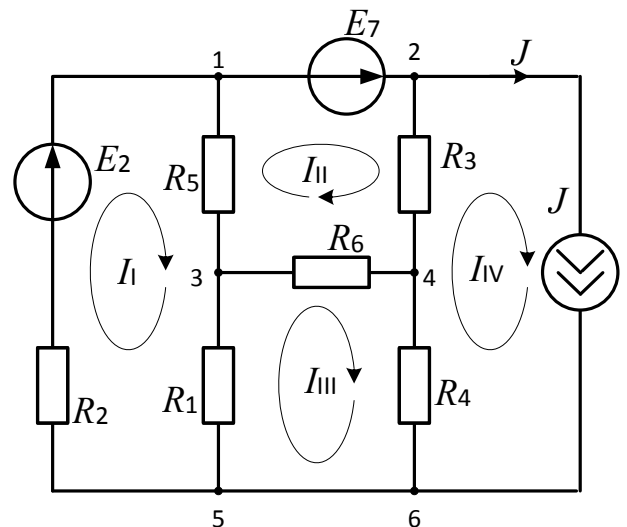
$$R_5 = 20(\text{Ом}),$$

$$R_6 = 8(\text{Ом}),$$

$$E_2 = 20(\text{В}),$$

$$E_7 = 24(\text{В}),$$

$$J = 2(\text{А}).$$



Кількість (загальна) віток в схемі: $V_T=8$;

Кількість віток з джерелами струму :

$$V_{TJ}=1.$$

Тоді кількість незалежних контурів:

$$n=V_T-(V-1)-V_{TJ}=8-5+1-1=3.$$

Кількість додаткових контурів: $n_d=V_{TJ}=1$. Так як у колі три незалежних контури (обираємо їх таким чином, щоб до них не входила вітка з джерелом струму), то за методом контурних струмів потрібно скласти три рівняння.

Однак для можливості подальшого визначення реальних струмів в гілках на цсхемі необхідно обрати четвертий контурний струм (обрати додатковий контур з віткою, що містить джерело струму), пам'ятаючи, що він відомий ($I_{IV}=J$), тобто рівняння для цього контуру не складається.

Записуємо загальні рівняння методу контурних струмів для трьох обраних контурів:

1. $I_I R_I + I_{II} R_{12} + I_{III} R_{13} + I_{IV} R_{14} = E_I$;
2. $I_I R_{21} + I_{II} R_{22} + I_{33} R_{23} + I_{IV} R_{24} = E_{II}$;
3. $I_I R_{31} + I_{II} R_{32} + I_{III} R_{III} + I_{IV} R_{34} = E_{III}$.

В загальному рівнянні маємо наступні позначення.

Власні контурні опори:

$$R_I = R_1 + R_2 + R_5 = 26 + 10 + 20 = 56 \text{ Ом};$$

$$R_{II} = R_3 + R_6 + R_5 = 20 + 18 + 5 = 46 \text{ Ом};$$

$$R_{III} = R_1 + R_6 + R_4 = 8 + 14 + 26 = 46 \text{ Ом}.$$

Взаємні контурні опори при однакових напрямках контурних струмів – від'ємні:

$$R_{12} = R_{21} = -R_5 = -26 \text{ Ом};$$

$$R_{13} = R_{31} = -R_1 = -26 \text{ Ом};$$

$$R_{14} = R_{41} = 0 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_{32} = -R_6 = -8 \text{ Ом};$$

$$R_{24} = R_{42} = -R_3 = -18 \text{ Ом};$$

$$R_{34} = R_{43} = -R_4 = -14 \text{ Ом};$$

Контурні ЕРС:

$$E_I = E_2 = 20 \text{ В};$$

$$E_{II} = E_7 = 24 \text{ В};$$

$$E_{III} = 0.$$

Підставляємо ці значення у початкову систему рівнянь. Пам'ятаємо, що контурний струм $I_{IV}=2 \text{ А}$ відомий.

$$56I_I - 20I_{II} - 26I_{III} = 20$$

$$-20I_I + 46I_{II} - 8I_{III} - 18 \cdot 2 = 2 \Rightarrow$$

$$-26I_I - 8I_{II} + 48I_{III} - 14 \cdot 2 = 0$$

$$56I_I - 20I_{II} - 26I_{III} = 20$$

$$-20I_I + 46I_{II} - 8I_{III} = 60$$

$$-26I_I - 8I_{II} + 48I_{III} = 28$$

Розв'язуємо систему рівнянь за допомогою будь-якого методу. Наприклад визначників:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 56 & -20 & -26 \\ -20 & 46 & -8 \\ -26 & -8 & -48 \end{bmatrix} = 61448$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 56 & -20 & -26 \\ -20 & 60 & -8 \\ -26 & 28 & -48 \end{bmatrix} = -159696$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 20 & -20 & -26 \\ 60 & 46 & -8 \\ 28 & -8 & -48 \end{bmatrix} = -52592$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 56 & -20 & 20 \\ -20 & 46 & 60 \\ -26 & -8 & 28 \end{bmatrix} = 146128$$

Знаходимо контурні струми:

$$I_I = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -0.856 \text{ A};$$

$$I_{II} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2.599 \text{ A};$$

$$I_{III} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.378 \text{ A}.$$

Струми віток дорівнюють алгебраїчним суммам контурних струмів, що протікають у вітках. Обрані напрямки реальних струмів у вітках показані на схемі Рис.22,а.

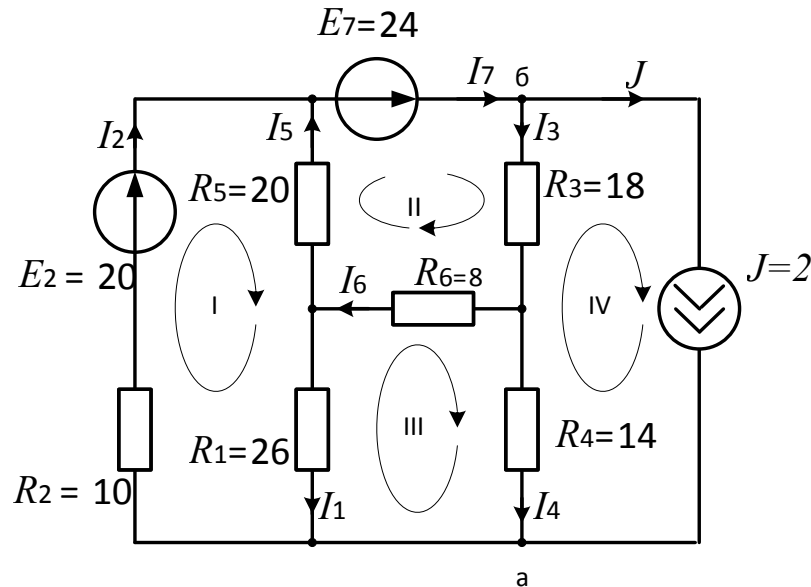


Рис. 2 , а

$$I_1 = I_I - I_{III} = 2.456 - 2.378 = 0.078 \text{ A};$$

$$I_2 = I_I = 2.456 \text{ A};$$

$$I_3 = I_{II} - I_{IV} = 2.768 - 2 = 0.78 \text{ A};$$

$$I_4 = I_{III} - I_{IV} = 2.378 - 2 = 0.378 \text{ A};$$

$$I_5 = I_{II} - I_I = 2.786 - 2.456 = 0.33 \text{ A};$$

$$I_6 = I_{II} - I_{III} = 2.786 - 2.378 = 0.408 \text{ A};$$

$$I_7 = I_{II} = 2.786 \text{ A};$$

Перевірка вірності розв'язку за балансом потужностей

Рівняння балансу потужностей: $P_{\text{джерел}} = P_{\text{спож}}$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^m E_k I_k + \sum_{k=1}^n U_k I_k}_{\text{Алгебр.сум.}} = \underbrace{\sum_{k=1}^t I_k^2 R_k}_{\text{Ариф.сум.}}$$

У вітках із ЕРС E_2 та E_7 напрями струмів співпадають із напрямками ЕРС, тому потужності джерел напруги E_2 і E_7 додатні.

Для визначення потужності джерела струму J необхідно визначити напругу U_{ab} на його клеммах:

$$U_{ab} = -I_4 R_4 - I_3 R_3 = -0.378 \cdot 14 - 0.786 \cdot 18 = -19.44 \text{ В.}$$

$$\begin{aligned} E_2 I_2 + E_7 I_7 + U_{ab} J &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_5^2 R_5 \\ 20 \cdot 2.456 + 24 \cdot 2.786 - 19.44 \cdot 2 &= 0.78^2 \cdot 26 + 2.456^2 \cdot 10 + 0.786^2 \cdot 18 + \\ &+ 0.378^2 \cdot 14 + 0.405^2 \cdot 8; \\ 77.104 &\cong 77.108 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Баланс потужностей зійшовся із допустимою похибкою, що означає правильність розв'язку задачі.

ТЕМА 7. «МЕТОД ВУЗЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ»

Метою є навчити студентів використовувати метод вузлових потенціалів для аналізу електричних кіл будь-якої складності. У лекції розглядається алгоритм визначення вузлів, вибору опорного вузла, складання рівнянь за першим законом Кірхгофа та застосування закону Ома для запису струмів через вузлові потенціали. Студенти повинні навчитися будувати систему рівнянь, знаходити потенціали вузлів та визначати всі струми віток, включаючи випадки з джерелами напруги чи струму.

План

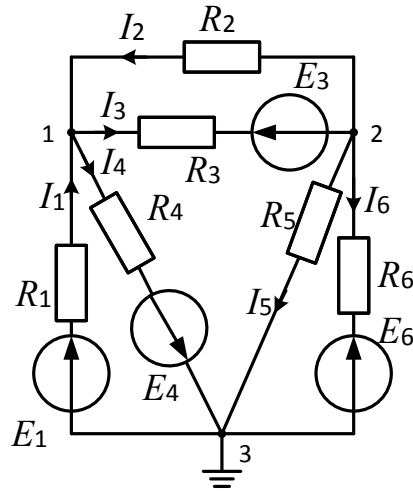
- Суть методу вузлових потенціалів.
- Опорний вузол і незалежні вузли.
- Власні та взаємні провідності.
- Вузлові рівняння.
- Розрахунок потенціалів.
- Визначення струмів у вітках.
- Приклади.

Ключові слова: вузол, опорний вузол, вузловий потенціал, перший закон Кірхгофа, закон Ома, власна провідність, міжвузлова провідність, вузлові рівняння, джерело напруги, джерело струму, вузловий струм, система рівнянь.

Keywords: node, reference node, node potential, Kirchhoff's first law, Ohm's law, intrinsic conductance, internodal conductance, node equations, voltage source, current source, node current, system of equations.

Метод базується на використанні першого закону Кірхгофа та законі Ома для ділянки кола.

Розглянемо сутність методу на прикладі схеми:



Нехай потенціал 3-го вузла – нуль. Складемо рівняння за 1-м законом Кірхгофа для 1-го та 2-го вузлів:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 &= 0; \\ -I_2 + I_3 - I_5 - I_6 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Запишемо значення струмів, скориставшись законом Ома для ділянки кола.

$$I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = (\varphi_3 - \varphi_1 + E_1)G_1;$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_2} = (\varphi_2 - \varphi_1)G_2;$$

$$I_3 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_3}{R_3} = (\varphi_1 - \varphi_2 + E_3)G_3;$$

$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_4}{R_4} = (\varphi_1 - \varphi_3 + E_4)G_4;$$

$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_5} = (\varphi_2 - \varphi_3)G_5;$$

$$I_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_6}{R_6} = (\varphi_2 - \varphi_3 + E_6)G_6.$$

Підставимо тримані рівняння в систему (1). Після спрощення отримаємо:

$$\begin{aligned} (G_1 + G_2 + G_3 + G_4)\varphi_1 - (G_2 + G_3)\varphi_2 &= E_1G_1 + E_3G_3 - E_4G_4; \\ -(G_2 + G_3)\varphi_1 + (G_2 + G_3 + G_5 + G_6)\varphi_2 &= -E_3G_3 + E_6G_6. \end{aligned}$$

Де ведемо наступні позначення

$$G_1 + G_2 + G_3 + G_4 = G_{11} \text{ – власні (вузлові) провідності вузлів 1 та 2;}$$

$$G_2 + G_3 + G_5 + G_6 = G_{22}$$

$$G_2 + G_3 = G_{12} = G_{21} \text{ – між вузлова провідність;}$$

$$E_1G_1 + E_3G_3 - E_4G_4 = J_{11} \text{ – вузлові струми.}$$

$$-E_3G_3 + E_6G_6 = J_{22}$$

Правило знаків. Якщо джерело струму або ЕРС спрямовані до вузла то вони входять у вузловий струм зі знаком «+», інакше – зі знаком «-». Власні провідності входять у рівняння зі знаком «+», а взаємні – зі знаком «-». З урахуванням введених позначень отримаємо загальну систему рівнянь методу вузлових потенціалів для досліджуваного кола:

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 &= J_{11} \\ G_{21}\varphi_1 - G_{22}\varphi_2 &= J_{22} \end{aligned}$$

Аналогічно для кола з n незалежними вузлами загальна система рівнянь буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} - \dots - \varphi_n G_{1n} &= J_{11}; \\ \varphi_1 G_{21} - \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} - \dots - \varphi_n G_{2n} &= J_{22}; \\ \varphi_1 G_{n1} - \varphi_2 G_{n2} - \varphi_3 G_{n3} - \dots - \varphi_n G_{nn} &= J_{nn}. \end{aligned}$$

Розв'язуємо систему рівнянь відносно невідомих потенціалів. Підставляємо отримані значення потенціалів в рівняння струмів, записані за законом Ома, та знаходимо значення всіх струмів гілок.

Порядок проведення розрахунку МВП:

1. Визначаємо кількість вузлів V схеми. Приймаємо потенціал одного з вузлів за нуль;

Увага! Якщо у вітці між двома вузлами є ЕРС без послідовного резистора то, очевидно, потенціали вузлів відрізняються між собою на величину ЕРС. Приймаючи потенціал одного із цих вузлів за нульовий, одержуємо потенціал другого вузла. Таким чином кількість рівнянь, необхідних для розв'язку зменшиться.

2. Визначаємо кількість розрахункових рівнянь та складаємо загальну систему рівнянь; (Кількість рівнянь дорівнює кількості незалежних вузлів з невідомими потенціалами).

3. Визначаємо величини власних та міжвузлових провідностей, а також вузлові струми;

4. Підставляємо значення отриманих величин-констант в систему рівнянь і вирішуємо її відносно невідомих потенціалів;

5. Задаємось напрямками струмів у вітках і за законом Ома визначаємо їх значення.

Приклад :

Розрахувати методом вузлових потенціалів усі струми у колі Рис. П2.

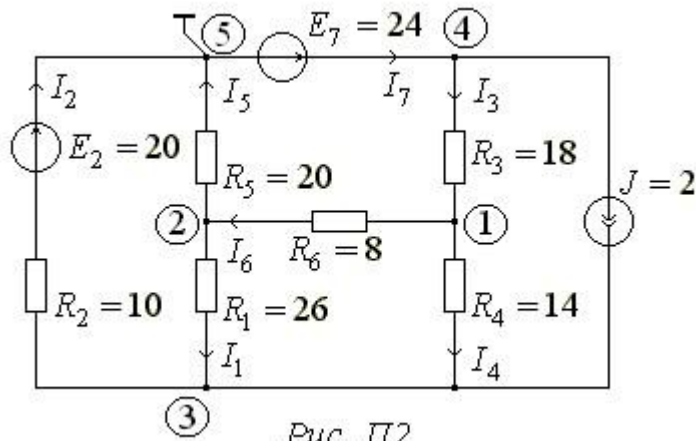


Рис. П2

У колі п'ять вузлів. Прийнемо потенціал ϕ_5 за базовий, тобто $\phi_5 = 0$.

За методом вузлових потенціалів потрібно скласти чотири рівняння, але у колі є вітка з ЕРС (E_7), послідовно з якою не увімкнено резистор.

Так як ми прийняли за нуль потенціал вузла $\phi_5 = 0$, то одержимо, що потенціал $\phi_4 = E_7 = 24$ (В). Тому кількість рівнянь зменшується до трьох.

Запишемо загальну систему рівнянь за методом вузлових потенціалів

1. $\phi_1 G_{11} - \phi_2 G_{12} - \phi_3 G_{13} - \phi_4 G_{14} = J_{11}$;
2. $-\phi_1 G_{21} + \phi_2 G_{22} - \phi_3 G_{23} - \phi_4 G_{24} = J_{22}$;
3. $-\phi_1 G_{31} - \phi_2 G_{32} + \phi_3 G_{33} - \phi_4 G_{34} = J_{33}$.

Визначемо значення власних провідностей, взаємних провідностей та вузлових струмів.

$$G_{11} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_6} \right) = \left(\frac{1}{18} + \frac{1}{14} + \frac{1}{8} \right) = 0.252 \text{ См};$$

$$G_{22} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} \right) = \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{20} + \frac{1}{8} \right) = 0.213 \text{ См};$$

$$G_{33} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) = \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} \right) = 0.210 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_6} = \frac{1}{8} = 0.125 \text{ См};$$

$$G_{13} = G_{31} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{14} = 0.071 \text{ См};$$

$$G_{14} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{18} = 0.055 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{26} = 0.039 \text{ См};$$

$$G_{24} = 0;$$

$$G_{34} = 0.$$

$$J_{11} = 0; J_{22} = 0; J_{33} = -\frac{E_2}{E_2} + J = -\frac{20}{10} + 2 = 0 \text{ А}.$$

З урахуванням обчислених значень констант маємо наступне рівняння:

1. $\varphi_1 0.252 - \varphi_2 0.125 - \varphi_3 0.071 - 24 \cdot 0.055 = 0$;
2. $-\varphi_1 0.125 + \varphi_2 0.213 - \varphi_3 0.039 = 0$;
3. $-\varphi_1 0.071 - \varphi_2 0.039 + \varphi_3 0.210 = 0$.

Або,

1. $\varphi_1 0.252 - \varphi_2 0.125 - \varphi_3 0.071 = 1.333$;
2. $-\varphi_1 0.125 + \varphi_2 0.213 - \varphi_3 0.039 = 0$;
3. $-\varphi_1 0.071 - \varphi_2 0.039 + \varphi_3 0.210 = 0$.

Розв'язавши систему рівнянь, одержимо потенціали вузлів:

$$\varphi_1 = 9.85(\text{В}), \quad \varphi_2 = 6.59(\text{В}), \quad \varphi_3 = 4.56(\text{В})$$

За законом Ома знаходимо струми у вітках кола.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_1} = \frac{6.59 - 4.56}{26} = 0.078(\text{А}), \\ I_2 &= \frac{\varphi_3 - \varphi_0 + E_7}{R_2} = \frac{4.56 - 0 + 20}{10} = 2.456(\text{А}), \\ I_3 &= \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{R_3} = \frac{24 - 9.85}{18} = 0.786(\text{А}), \\ I_4 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4} = \frac{9.85 - 4.56}{14} = 0.378(\text{А}), \\ I_5 &= \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{R_5} = \frac{6.59 - 0}{26} = 0.253(\text{А}), \\ I_6 &= \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_6} = \frac{9.85 - 4.56}{8} = 0.661(\text{А}), \end{aligned}$$

Струм I_7 знаходиться за першим законом Кірхгофа

$$I_7 = I_2 + I_5 = 2.456 + 0.253 = 2.709(\text{А}).$$

ТЕМА 8. « ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ »

Метою є формування у студентів розуміння принципів еквівалентного перетворення пасивних елементів у електричних колах, що дозволяє значно спростувати аналіз та розрахунок складних схем. Студенти повинні навчитися визначати умови послідовного, паралельного та змішаного з'єднання опорів, обчислювати їх еквівалентні значення, а також володіти методом перетворення трикутника у зірку і навпаки. Це забезпечить вміння оптимально спростувати

схеми та правильно застосовувати правила з'єднання для подальшого аналізу кіл.

План

- Послідовне з'єднання резисторів та еквівалентний опір.
- Паралельне з'єднання резисторів та еквівалентний опір.
- Змішане з'єднання опорів — принцип “згортання” схеми.
- Поняття сполучень «зірка» та «трикутник».
- Перетворення трикутника в зірку.
- Перетворення зірки в трикутник.
- Використання еквівалентних перетворень у практичних розрахунках.

Ключові слова: послідовне з'єднання, паралельне з'єднання, змішане з'єднання, еквівалентний опір, провідність, падіння напруги, розподіл струмів, зірка, трикутник, перетворення зірка–трикутник, еквівалентні схеми, спрощення схеми.

Keywords: series connection, parallel connection, mixed connection, equivalent resistance, conductivity, voltage drop, current distribution, star, delta, star-delta transformation, equivalent circuits, circuit simplification.

Послідовне сполучення резисторів (опорів) – це коли опори ввімкненні так, що утворюють нерозгалужену ділянку кола, та по ним проходить один і той же струм (рис 1.1): $I = I_1 = I_2$

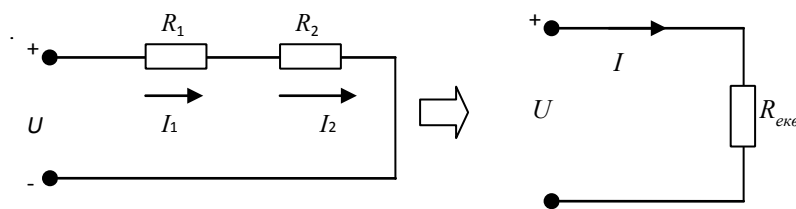


Рис. 1 – Послідовне сполучення опорів та їх спрощення

При послідовному сполученні резисторів падіння напруги в окремих опорах пропорційно значенню опорів: $U_1:U_2 = R_1:R_2$.

Тому сума падінь напруги в окремих опорах дорівнює напрузі, яка прикладена до кола: $U = U_1 + U_2 = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$.

Потужність всього кола теж дорівнює сумі потужностей окремих ділянок:

$$P = P_1 + P_2 = U_1 \cdot I_1 + U_2 \cdot I_2$$

Тобто потужність, яка виникає на окремих ділянках кола, пропорційна значенню опорів цих ділянок: $P_1:P_2 = R_1:R_2$

Для розрахунку електричних кіл зручно замінити послідовне з'єднання опорів одним рівнозначним (загальним, еквівалентним) опором, значення якого повинно бути таким, щоб при цьому ж струмі напруга між кінцями еквівалентного опору дорівнювала напрузі цього кола:

$$U = I \cdot R_{\text{екв}} \Rightarrow R_{\text{екв}} = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} = R_1 + R_2.$$

Тобто еквівалентний опір n послідовно з'єднаних елементів

$$R_{\text{еккв}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Якщо $R_1 = R_2 = R_3 = \dots R_n$ то $R_{\text{екв}} = R_n \cdot n$.

Таким чином, еквівалентний опір при послідовному сполученні резисторів дорівнює сумі окремих опорів цього сполучення. При послідовному з'єднанні приймачів при відключенні одного приймача спостерігається розрив кола, тобто відключення всіх приймачів електроенергії.

Паралельне сполучення резисторів (опорів) – це коли кілька опорів ввімкнено між одними і тими ж двома вузлами так, що напруга на них однакова (рис.2):

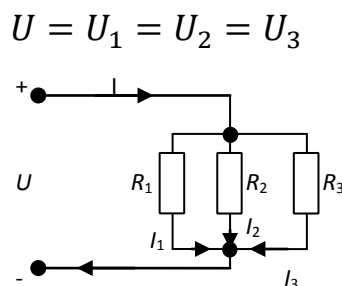


Рис. 2 - Паралельне сполучення опорів

При паралельному сполученні резисторів розподілення струмів в окремих опорах прямопропорційно значенню провідностей чи зворотнопропорційно значенню опорів: $I_1 : I_2 : I_3 = G_1 : G_2 : G_3 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}$

Згідно I закону Кірхгофа для паралельного з'єднання опорів:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Загальна провідність кола дорівнює сумі провідностей окремих віток:

$$G = G_1 + G_2 + G_3$$

Потужність всього кола, як й при послідовному сполученні, дорівнює сумі потужностей окремих ділянок:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = U_1 I_1 + U_2 I_2 + U_3 I_3$$

Для зручного розрахунку кіл паралельне з'єднання опорів замінюють одним еквівалентним опором так, щоб при струмі, який дорівнює сумі струмів в окремих гілках, напруга між кінцями еквівалентного опору дорівнювала напрузі цього кола: $U = I R_{\text{екв}}$

$$\text{Тобто } R_{\text{екв}} = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3}, \text{ або}$$

$$\frac{1}{R_{\text{екв}}} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Для кола з n паралельно з'єднаних елементів еквівалентний опір

$$\frac{1}{R_{\text{екв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Еквівалентний опір двох паралельних віток буде мати вигляд:

$$R_{12} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Отже, еквівалентний опір при паралельному сполученні буде менше, ніж самий менший з опорів.

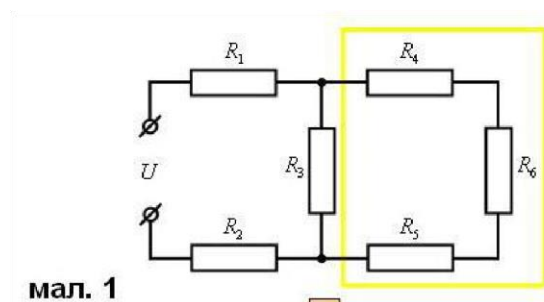
При паралельному з'єднанні n рівних опорів R еквівалентний опір буде:

$$R_{\text{екв}} = \frac{R}{n}$$

При паралельному з'єднанні приймачів режим роботи одного не впливає на режим роботи іншого та напруга на кожному приймачі постійна. Тому приймачі, які потребують постійної напруги (лампи, двигуни...), звичайно з'єднуються паралельно.

У практиці отримало розповсюдження змішане сполучення резисторів.

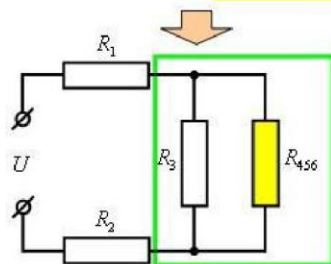
Змішане сполучення резисторів (опорів) – це коли у колі є як послідовне так і паралельне сполучення резисторів чи ділянок кола. Для цього сполучення притаманні властивості паралельного та послідовного з'єднання опорів.



мал. 1

R_4, R_5, R_6 з'єднані послідовно

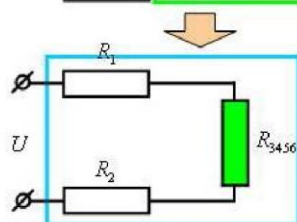
Отже $R_{456} = R_4 + R_5 + R_6$



мал. 2

R_{456}, R_3 з'єднані паралельно.

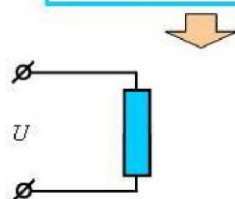
Отже $R_{3456} = \frac{R_3 \cdot R_{456}}{R_3 + R_{456}}$



мал. 3

R_1, R_{3456}, R_2 з'єднані послідовно.

Отже $R_{екв} = R_{123456} = R_1 + R_{3456} + R_2$



мал. 4

$R_{123456} = R_{1-3} = R$

Щоб знайти еквівалентний опір кола зі змішаним з'єднанням опорів, необхідно поступово «згортати» схему, виявляючи в ній елементи, які з'єднані або послідовно, або паралельно.

Поняття про трикутник та зірку з пасивних елементів кола

Сполучення “зірка” – це електричне коло, яке складається з трьох гілок, один кінець яких сходиться в одну загальну точку (рис.3).

Сполучення “трикутник” – це електричне коло, яке складається з трьох гілок, кінці яких з’єднуються в три вузли, та коло має вигляд трикутника (рис.4).

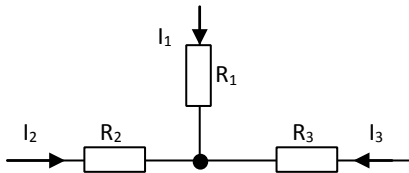


Рисунок 3 – Сполучення зіркою

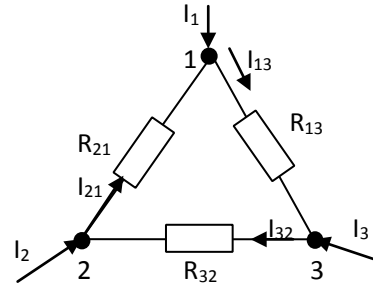


Рисунок 4 – Сполучення трикутником

Перетворення трикутників опорів в еквівалентну зірку та навпаки

В деяких розрахункових задачах є потреба перетворення опорів з трикутника в зірку і навпаки.

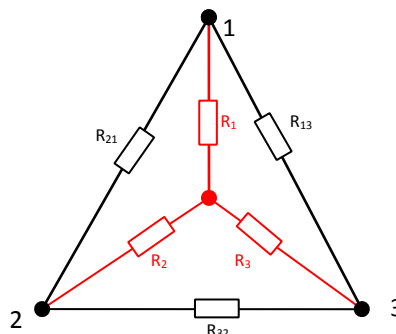


Рисунок 5 – Перетворення трикутників опорів в еквівалентну зірку і навпаки

При перетворенні потрібно, щоб при незмінних значеннях напруги між вершинами трикутника й зірки струми у проводах, які з’єднують ці вершини з іншими ділянками кола, залишалися незмінні. Трикутник й зірка, які відповідають цим вимогам, називаються рівнозначними (або еквівалентними).

Формули перетворення зірки в еквівалентний трикутник:

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}; \quad R_{32} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

$$R_{21} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

Перетворення трикутника в еквівалентну зірку:

$$R_1 = \frac{R_{13} \cdot R_{21}}{R_{13} + R_{21} + R_{32}}; \quad R_2 = \frac{R_{32} \cdot R_{21}}{R_{13} + R_{21} + R_{32}}$$

$$R_3 = \frac{R_{13} \cdot R_{32}}{R_{13} + R_{21} + R_{32}}$$

ТЕМА 9 «МЕТОД ДВОХ ВУЗЛІВ. МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА»

Метою є формування в студентів умінь застосовувати спрощені методи аналізу електричних кіл — метод двох вузлів та метод еквівалентного генератора. Студенти повинні зрозуміти умови застосування цих методів, навчитися будувати відповідні рівняння, визначати напругу холостого ходу, внутрішній опір двополюсника, а також розраховувати струм у виділеній гілці. Опанування цих прийомів дозволить значно спростити аналіз складних схем і досліджувати залежність струму від параметрів навантаження.

План:

- Суть методу двох вузлів та його область застосування.
- Вибір опорного вузла та складання вузлового рівняння.
- Визначення струмів у вітках за методом двох вузлів.
- Поняття двополюсника: активні та пасивні типи.
- Теорема про активний двополюсник.
- Напруга холостого ходу U_{xx} та внутрішній опір двополюсника $R_{вт}$.
- Розрахунок струму у виділеній гілці методом еквівалентного генератора.
- Побудова залежності $I(R)$.

Ключові слова: вузловий потенціал, два вузли, вузлове рівняння, двополюсник, активний двополюсник, пасивний двополюсник, напруга холостого ходу, внутрішній опір, еквівалентний генератор, еквівалентна напруга, еквівалентний опір, виділена гілка.

Keywords: nodal potential, two nodes, nodal equation, two-pole, active two-pole, passive two-pole, open-circuit voltage, internal resistance, equivalent generator, equivalent voltage, equivalent resistance, isolated branch.

Метод вузлових потенціалів найбільш доцільно застосовувати, коли кількість вузлів на багато менша кількості незалежних контурів.

Особливо ефективний цей метод для розрахунку електричних кіл з двома вузлами. В цьому випадку складається лише одне вузлове рівняння (рівняння методу двох вузлів).

Розглянемо електричне коло (рис. 1).

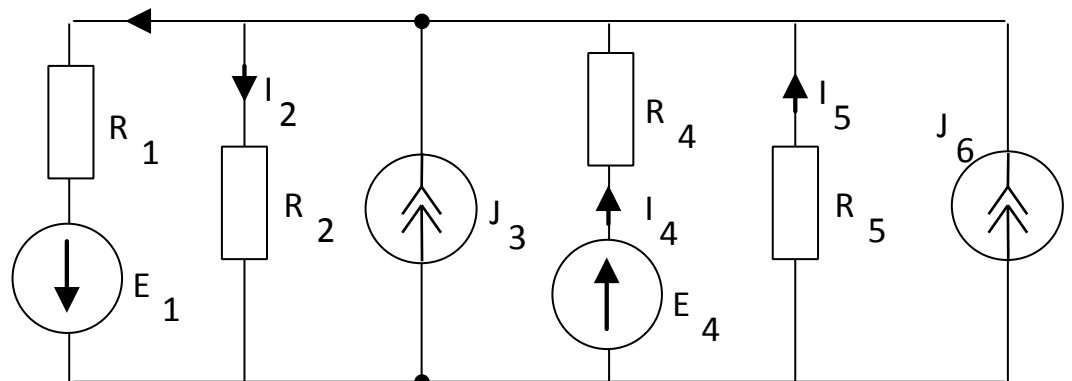


Рис. 1

Виконаємо аналіз кола:

Загальна кількість віток $p=6$, кількість вузлів $q=2$, кількість віток з джерелами струмів: $h=2$, кількість незалежних контурів $n=p-(q-1)-h=3$.

Так як в даній схемі всього два вузли, то найдоцільніше буде використовувати метод двох вузлів.

Прийmemo потенціал вузла 2 за нуль, $\varphi_2=0$, тоді вузлове рівняння для вузла 1 запишеться в вигляді:

$$\varphi_1(G_1 + G_2 + G_4 + G_5) = -E_1G_1 + J_3 + E_4G_4 + J_6.$$

$$\text{Звідси: } \varphi_1 = \frac{-E_1 G_1 + J_3 + E_4 G_4 + J_6}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}$$

За законом Ома для ділянки кола визначаємо струми в гілках:

$$I_1 = \frac{\varphi_1 + E_1}{R_1}; \quad I_2 = \frac{\varphi_1}{R_2}; \quad I_4 = \frac{-\varphi_1 + E_4}{R_4}; \quad I_5 = \frac{-\varphi_1}{R_5}$$

В загальному випадку потенціал одного з вузлів електричного кола з двома вузлами визначається за формулою:

$$\varphi_1 = \frac{\sum (E_k G_k + J_k)}{G_{11}}$$

В знаменнику маємо алгебраїчну суму, тобто якщо джерело енергії направлено до вузла, то буде враховано зі знаком плюс, якщо від вузла – то відповідно зі знаком мінус.

Метод еквівалентного генератора

Даний метод застосовується для розрахунку струму в одній гілці складного електричного кола, а також для визначення залежності струму від опору гілки.

Розглянемо електричне коло (рис. 2).

Визначимо струм I_4 та встановимо залежність $I_4 = f(R_4)$

Для цього розіб'ємо складне коло на дві частини:

I частина – гілка, в якій визначається струм, тобто виділена гілка;

II частина – вся решта кола, тобто двополюсник.

Будь-яку частину електричного кола, що має два затискачі (полюси), називають **двополюсником**.

Двополюсники бувають активні (що мають джерела електричної енергії) та пасивні (що не містять джерел електричної енергії).

Метод еквівалентного генератора оснований на теоремі про активний двополюсник, яка визначається так:

«Будь-який активний двополюсник по відношенню до виділеної гілки можна розглядати як еквівалентний генератор з внутрішнім опором $R_{вт}$ та ЕРС,

що дорівнює напрузі холостого ходу U_{XX} між вхідними затискачами двополюсника при розімкненій виділеній гілці».

Тоді вихідна схема прийме вигляд, зображений на (рис. 3).

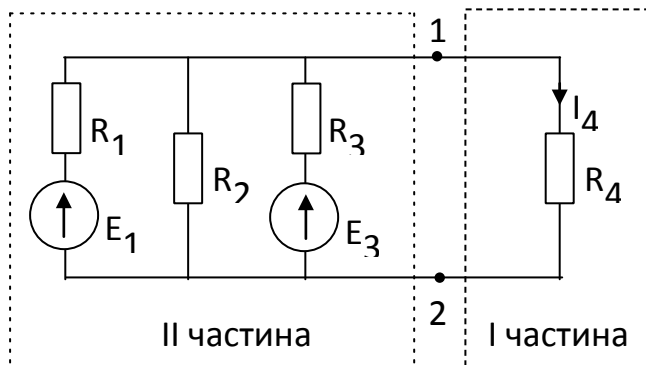


Рис. 2

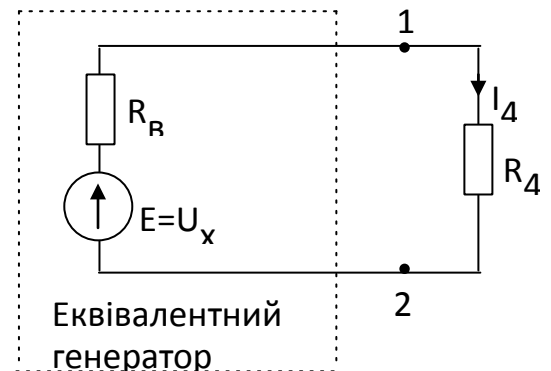


Рис. 2

Тут струм I_4 можна визначити за законом Ома:

$$I_4 = \frac{U_{XX}}{R_{Bm} + R_4}$$

В загальному випадку

$$I_k = \frac{U_{XX}}{R_{BB} + R_K}$$

Розглянемо послідовність розрахунку струму в виділеній гілці.

1. Визначаємо напругу холостого ходу U_{xx} , для чого зобразимо розрахункову схему, в якій розімкнемо виділену гілку (рис. 4).

Вкажемо напругу холостого ходу на затискачах виділеної гілки (вона, звичайно, співпадає з напрямом струму).

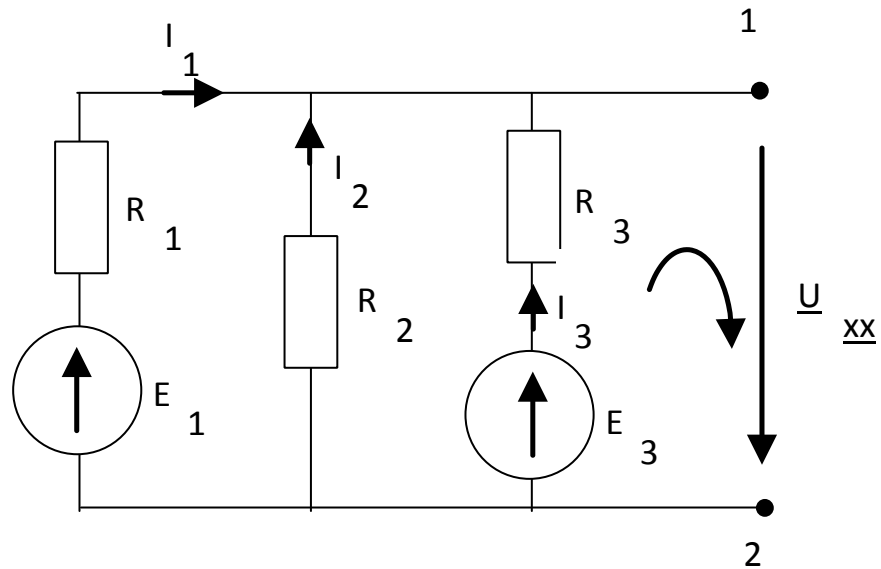


Рис. 4

Задамося додатнім напрямом струмів в гілках. Складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для контуру, в який входить U_{xx} :

$$I_3 R_3 + U_{xx} = E_3$$

звідси $U_{xx} = E_3 - I_3 R_3$

Визначимо струм I_3 , для цього використаємо метод вузлових потенціалів, так як маємо схему з двома вузлами.

Нехай $\varphi_2 = 0$, тоді $\varphi_1(G_1 + G_2 + G_3) = E_1 G_1 + E_3 G_3$

Звідси: $\varphi_1 = \frac{E_1 G_1 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$, а струм дорівнює: $I_3 = (\varphi_2 - \varphi_1 + E_3) G_3$

Одержимо кінцевий вираз для напруги U_{xx} :

$$U_{xx} = E_3 - \varphi_2 + \varphi_1 - E_3 = \varphi_1 - \varphi_2$$

2. Визначимо внутрішній опір $R_{вт}$ відносно затискачів 1 та 2. Для цього на розрахунковій схемі (рис. 5) видалимо всі джерела електричної енергії. При цьому точки підключення ідеальних джерел ЕРС замикаються накоротко, а гілки з ідеальними джерелами струму видаляються.

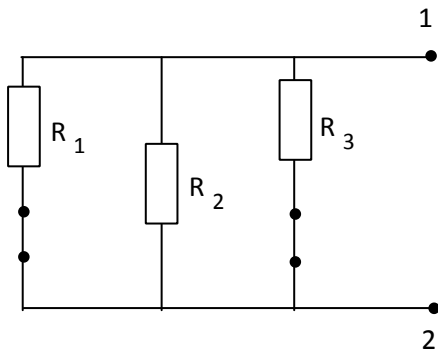


Рис. 5

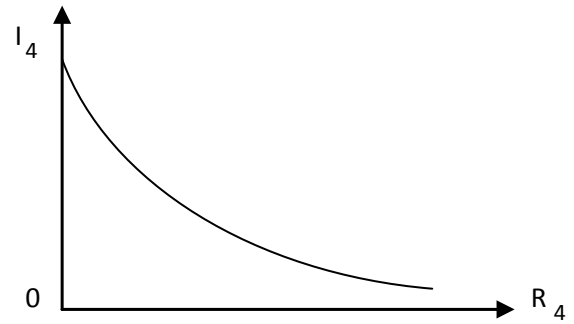


Рис. 6

Тоді:

$$R_{вт} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

3. Визначимо струм в виділеній гілці:

$$I_4 = \frac{U_{XX}}{R_{вт} + R_4}$$

4. Змінюючи R_4 від 0 до ∞ , побудуємо залежність $I_4 = f(R_4)$ (рис. 6).

ЛЕКЦІЯ 10

ТЕМА 10. «МЕТОД НАКЛАДАННЯ. ПРИНЦИПИ КОМПЕНСАЦІЇ ТА ВЗАЄМНОСТІ. ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ АКТИВНИХ І ПАСИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ПЕРЕДАЧА ЕНЕРГІЇ АКТИВНИМ ДВОПОЛЮСНИКОМ»

Метою є ознайомлення студентів з комплексом методів і принципів, що застосовуються під час аналізу електричних кіл із кількома джерелами. Студенти повинні зрозуміти суть принципу суперпозиції та навчитися обчислювати струми і напруги при окремому врахуванні кожного джерела. Також важливим є опанування принципів компенсації та взаємності, уміння використовувати еквівалентні перетворення елементів та аналізувати умови передачі максимальної потужності від активного двополюсника до навантаження.

План:

- Суть методу накладання та область застосування.
- Розв'язання схеми при дії одного джерела.
- Сумування часткових струмів і напруг.
- Принцип компенсації: заміна елементів еквівалентними джерелами.
- Принцип взаємності: визначення взаємних струмів.
- Еквівалентні перетворення активних і пасивних елементів кіл.
- Передача енергії від активного двополюсника до навантаження.
- Умова максимальної потужності та узгоджений режим.
- ККД джерела та вплив опору навантаження.

Ключові слова: метод накладання, суперпозиція, лінійне коло, компенсація, взаємність, еквівалентні перетворення, активний елемент, пасивний елемент, двополюсник, максимальна потужність, узгоджений режим, внутрішній опір, ККД джерела.

Keywords: superposition method, superposition, linear circuit, compensation, reciprocity, equivalent transformations, active element, passive element, two-pole, maximum power, matched mode, internal resistance, source efficiency.

Принцип накладання (суперпозиції) полягає в тому, що струм в будь якій гілці електричного кола, викликаний дією декількох джерел, дорівнює сумі струмів в цій гілці, що викликані кожним джерелом окремо (при рівності нулю решти ЕРС або струмів джерел):

$$I_i = I_i^1 + I_i^2 + \dots + I_i^k$$

Принцип суперпозиції можна застосовувати лише до лінійних електричних кіл.

Розглянемо розрахунок складного електричного кола методом накладання на конкретному приладі (рис. 1). Вихідна схема зображено на рис.7, а.

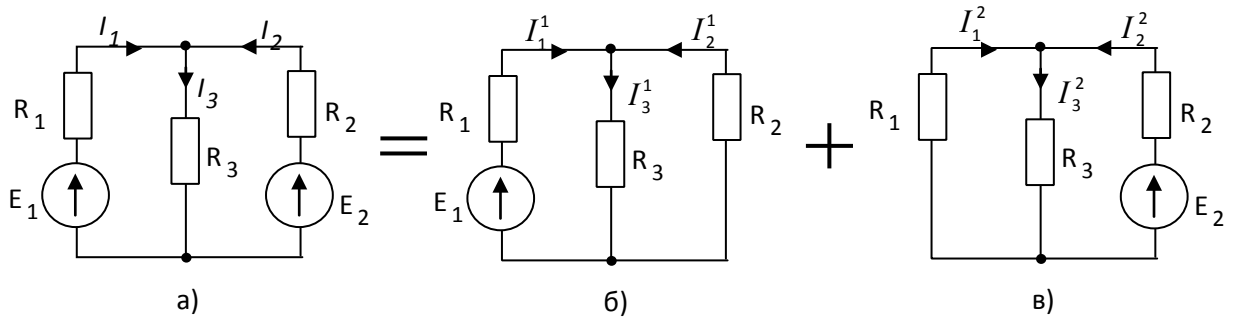


Рис. 1

Порядок розрахунку:

1. Визначимо струм в гілках кола при наявності лише ЕРС E_1 , при цьому вважаємо, що $E_2 = 0$.

Зобразимо відповідну електричну схему (рис. 1,б).

Струми в електричному колі в цьому випадку будуть дорівнювати

$$I_1^1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{E_1 (R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Та за правилом «чужої гілки»:

$$I_2^1 = -I_1^1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_3^1 = I_1^1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

2. Визначимо струми в гілках кола при наявності лише ЕРС E_2 , при цьому вважаємо, що $E_1 = 0$.

Зобразимо відповідну електричну схему (рис. 1,в).

Струми в електричному колі в цьому випадку дорівнюватимуть:

$$I_2^2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{E_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \quad I_1^2 = -I_2^2 \frac{R_3}{R_1 + R_3}; \quad I_3^2 = I_2^2 \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

3. На основі принципу накладання визначимо дійсні величини струмів в вихідній схемі:

$$I_1 = I_1^1 + I_1^2; \quad I_2 = I_2^1 + I_2^2; \quad I_3 = I_3^1 + I_3^2$$

Метод накладання трохи громіздкий та не зручний для розрахунку. Ра зом з тим в ряді випадків застосування цього методу дозволяє швидко визна чити струм в одній гілці, дослідити вплив зміни однієї з ЕРС на зміну струмів в гілках, а також вирішити деякі інші задачі.

Метод розрахунку складних електричних кіл. Принцип компенсації та взаємності

1. Принцип компенсації

Будь-яка частинка електричного кола з напругою U еквівалентна джерелу ЕРС E з тією ж напругою, тобто $E=U$, або будь-яка електрична гілка з струмом I еквівалентна джерелу струму того ж значення, тобто $J=I$ (рис. 1).

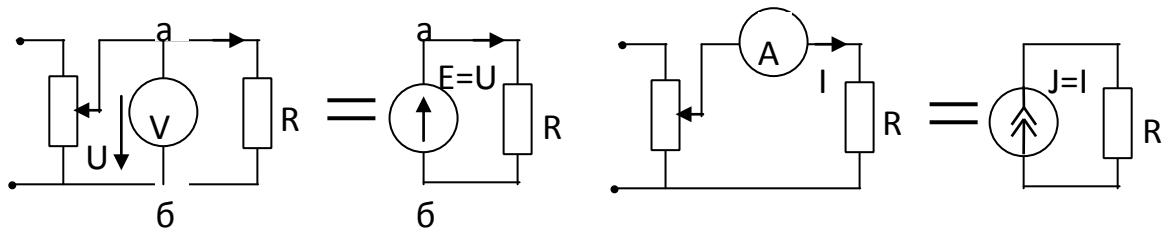


Рис. 2

Для будь-якого резистора електричного кола можна стверджувати, що він може бути замінений ЕРС, чисельно рівною падінню напруги на цьому резисторі і направленою назустріч струму в цьому резисторі (рис. 2).

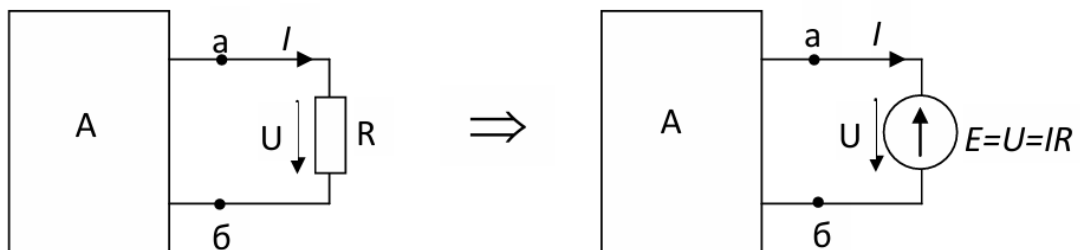
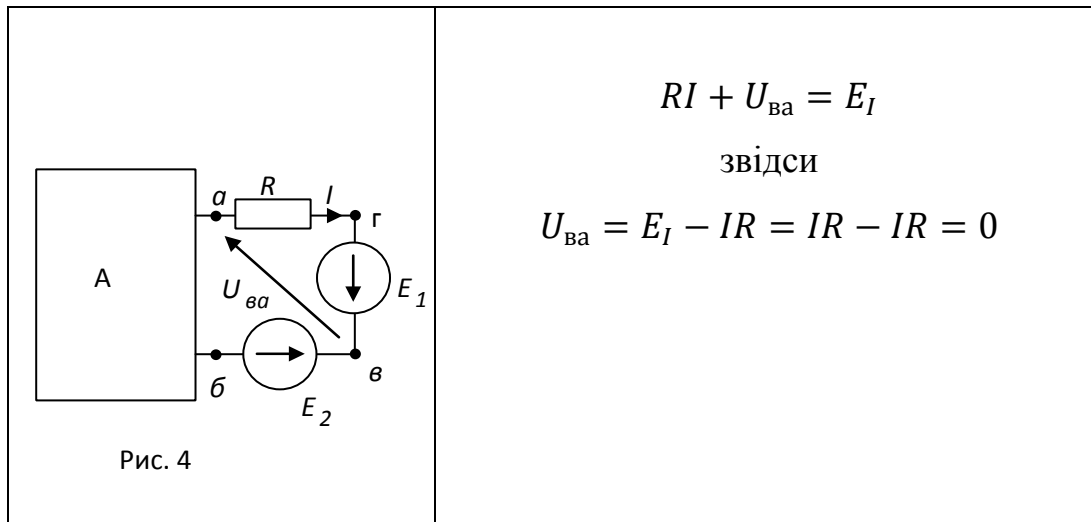


Рис. 3

Докажемо це твердження, для чого добавимо в гілку з резистором R дві ЕРС, що дорівнюють за величиною напрузі на резисторі R та направлені назустріч одна одній: $E_1=E_2=U=RI=E$ (рис. 3). При цьому струм I не зміниться. Складемо рівняння за II-м законом Кірхгофа для контуру а-г-в-а:



Це означає, що потенціали точок а та в рівні і їх можна об'єднати, закоротивши елементи R та E₁. Залишається лише ЕРС E₂=U=IR=E, направлене назустріч струму.

Принцип компенсації застосовується до лінійних та нелінійних кіл.

Принцип взаємності

Струм в гілці k, що створюється джерелом ЕРС в гілці m, дорівнює струму в гілці m, що створюється тим самим джерелом, переміщеним в гілку k.

Для доказу цього принципу використаємо метод контурних струмів. Розглянемо електричне коло (рис. 4).

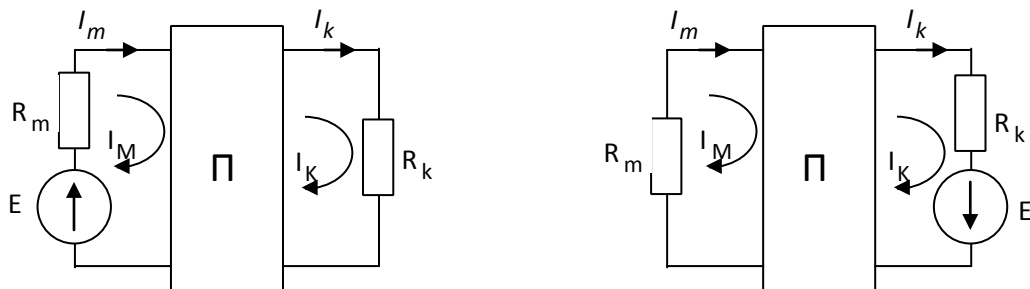


Рис. 5

Якщо скористатися методом визначників, то струм I_k в контурі k, викликаний ЕРС E в контурі m буде дорівнювати:

$$I_k = E \frac{\Delta_{nk}}{\Delta}$$

А струм I_m в контурі m, викликаний тією ж ЕРС E, перенесеною в контур k, буде дорівнювати:

$$I_m = E \frac{\Delta_{mk}}{\Delta}$$

де Δ – головний визначник системи контурних рівнянь;

Δ_{mk} , Δ_{km} – часткові визначники системи контурних рівнянь.

Так як головний визначник Δ симетричний відносно головної діагоналі, то часткові визначники

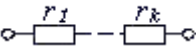
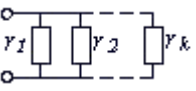
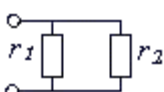
$$\Delta_{mk} = \Delta_{km} \text{ тому струми } I_k = I_m$$

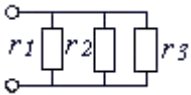
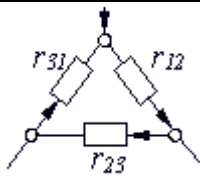
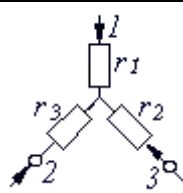
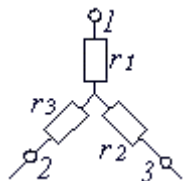
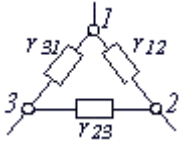
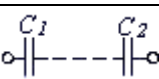
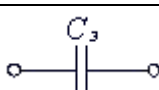
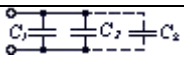
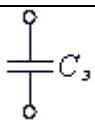
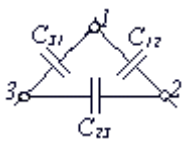
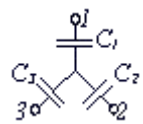
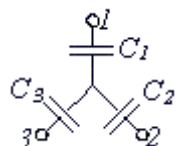
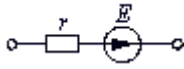
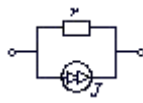
При цьому напрямок ЕРС E , що переноситься в гілку k , по відношенню до напрямку струму I_k повинен бути таким самим, як і напрямок цієї ЕРС до переносу по відношенню до напрямку струму I_m .

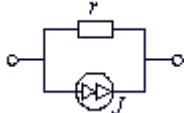
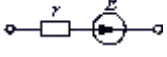
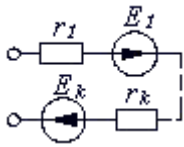
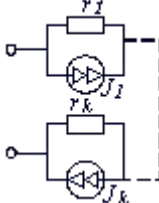
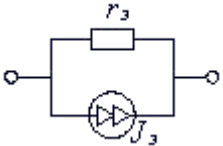
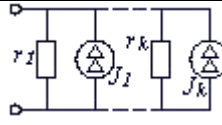
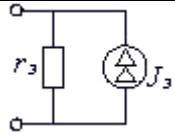
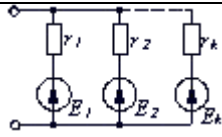
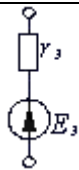
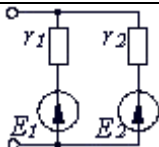
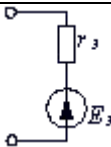
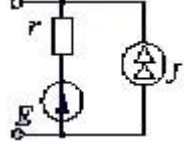
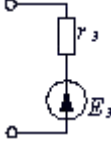
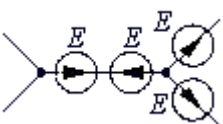
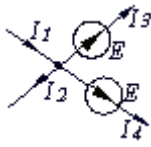
Принцип взаємності виконується не для всіх лінійних кіл.

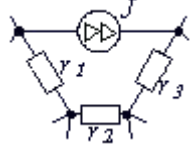
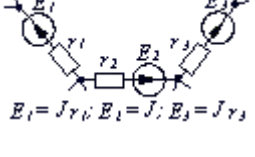
Варіанти еквівалентних перетворень активних і пасивних елементів електричних кіл постійного струму

Приклади більшості можливих варіантів еквівалентних перетворень в електричних колах приведені в таблиці ***.

		Таблиця ***	
		Еквівалентні перетворення	
№ п/п	Схема	Еквівалентна схема	Формули перетворення
1			$r_3 = \sum_{i=1}^K r_i$
2			$g_i = \frac{1}{r_i}; g_3 = \sum_{i=1}^K g_i;$ $r_3 = \frac{1}{g_3}$
3			$r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$

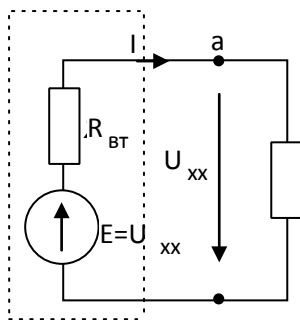
4			$r_3 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$
5			$r_1 = \frac{r_{12} r_{31}}{r_{12} + r_{31} + r_{23}};$ $r_2 = \frac{r_{12} r_{23}}{r_{12} + r_{31} + r_{23}};$ $r_3 = \frac{r_{23} r_{31}}{r_{12} + r_{31} + r_{23}}$
6			$g_{12} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3};$ $g_{23} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3};$ $g_{31} = \frac{g_3 g_1}{g_1 + g_2 + g_3};$ $r_{12} = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3};$ $r_{23} = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1};$ $r_{31} = r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}$
7			$\frac{1}{C_3} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{C_i}$
8			$C_3 = \sum_{i=1}^K C_i$
9			$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12} C_{13}}{C_{23}};$ $C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12} C_{23}}{C_{31}};$ $C_3 = C_{23} + C_{31} + \frac{C_{23} C_{31}}{C_{12}}$
10			$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3};$ $C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3};$ $C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}$
11			$I = \frac{E}{r}$

12			$E = I \cdot r$
13			$r_3 = \sum_{i=1}^K r_i;$ $E_3 = \sum_{i=1}^K E_i$
14			$r_3 = \sum_{i=1}^K r_i; I_3 = \frac{\sum_{i=1}^K I_i r_i}{\sum_{i=1}^K r_i}$
15			$g_3 = \sum_{i=1}^K g_i; r_3 = \frac{1}{g_3};$ $I_3 = \sum_{i=1}^K I_i; g_i = \frac{1}{r_i}$
16			$g_3 = \sum_{i=1}^K g_i; r_3 = \frac{1}{g_3};$ $E_3 = \frac{\sum_{i=1}^K E_i g_i}{\sum_{i=1}^K g_i}$
17			$r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2};$ $E_3 = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2}$
18			$E_3 = E + J r$ $r_3 = r$
20			

21			
----	---	---	---

Передача енергії від активного двополюсника приймачу

Розглянемо активний двополюсник, до якого підключено приймач електричної енергії R_n .



Струм в приймачі дорівнює:

$$I = \frac{U_{xx}}{R_n} = \frac{E}{R_{вт} + R_n}$$

Потужність, що споживається приймачем дорівнює:

$$P_n = I^2 R_n = \frac{E^2 R_n}{(R_{вт} + R_n)^2}$$

Одержаний вираз характеризує залежність потужності приймача від його опору $P_n(R_n)$.

Залежність потужності приймача від струму в ньому визначимо із рівняння балансу потужностей

$$U_{xx} I = I^2 R_{вт} + I^2 R_n$$

звідси

$$P_n = U_{xx} I - I^2 R_{вт}$$

Бачимо, що потужність залежить від струму за параболічним законом. Для побудови залежності $P_n(I)$ знайдемо значення P_n для струмів:

1. $I = 0, R_n = \infty$ – режим холостого ходу, $P_n = 0$

2. $I = I_{max}, R_n = 0$ – режим короткого замикання, $I_{max} = \frac{U_{xx}}{R_{вт}},$

$$P_n = 0$$

3. $P_n = P_{n.max},$ – режим короткого замикання, $\frac{dp_n}{dI} = 0$

$$\text{Маємо } U_{xx} - 2R_n I =$$

Звідси $I = \frac{U_{XX}}{2R_{Bm}} = \frac{I_{k3}}{2}$, при цьому $R_n = R_{Bm}$

Таким чином, для струму $I = I_{k3}/2$, коли $R_n = R_{Bm}$. (цей режим роботи електричного кола називається узгодженим режимом), потужність досягає максимального значення:

$$P_{max} = R_n I^2 = \frac{R_n U_{XX}^2}{(2R_{Bm})^2} = \frac{R_n E^2}{4R_{Bm}^2} = \frac{E^2}{4R_{Bm}}$$

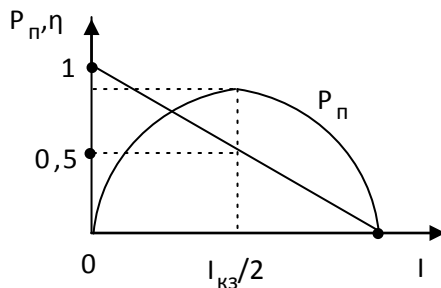
Графік залежності $P_n(I)$ приведено на рис. 6.

Коефіцієнт корисної дії джерела дорівнює:

$$\square = \frac{P_n}{P_\partial}, P_\partial = EI = \frac{E^2}{R_{Bm} + R_n}, P_n = \frac{R_n E^2}{(R_n + R_{Bm})^2}$$

Тоді

$$\square = \frac{R_n E^2 (R_n + R_{Bm})}{(R_n + R_{Bm})^2 E^2} = \frac{R_n}{R_n + R_{Bm}} = \frac{1}{1 + \frac{R_{Bm}}{R_n}}$$



Цей вираз виражає залежність коефіцієнту корисної дії (ККД) від опору навантаження R_n .

Знайдемо залежність коефіцієнту корисної дії від струму приймача I :

$$\square = \frac{P_n}{P_\partial} = \frac{U_{XX} I - R_{Bm} I^2}{U_{XX} I} = 1 - \frac{R_{Bm} I}{U_{XX}} = 1 - \frac{I}{I_{k3}}$$

Рис. 6

Побудуємо залежність $\eta = f(I)$.

Якщо $R_n = R_{Bm}$, то $\eta = 0,5$, це низький коефіцієнт корисної дії.

Для того, щоб одержати високий ККД, необхідно щоб $R_n \gg R_{Bm}$ (для $R_n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 1$).

Вибір співвідношення величин R_n та R_{Bm} називається узгодженням навантаження.

При $R_n = R_{Bm}$ маємо узгоджений режим роботи електричного кола.

Половина потужності втрачається всередині джерела. Тому узгоджений режим не використовується у силових енергетичних ланцюгах. Цей режим ви

користовують в інформаційних ланцюгах, де потужності можуть бути малими, і вирішальними не є міркування економічності передачі сигналу, а максимальна потужність сигналу в навантаженні.

ТЕМА 11. « ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ. ПЕРІОДИЧНІ ТА СИНУСОЇДНІ ВЕЛИЧИНИ, ЇХ ПАРАМЕТРИ»

Метою є формування в студентів базового розуміння природи змінного та синусоїдного струму, вміння визначати його миттєві значення, період, частоту, амплітуду та фазу. Лекція спрямована на пояснення фундаментальних фізичних процесів, що лежать в основі генерації синусоїдних ЕРС, а також особливостей поведінки напруги і струму як функцій часу. Студенти повинні усвідомити сутність фазових співвідношень та принципи побудови часових діаграм.

План:

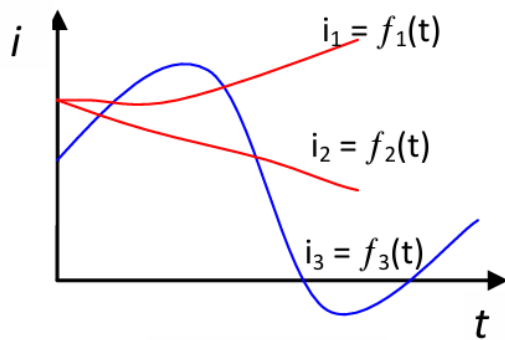
- Поняття змінного струму, миттєві значення $i(t); u(t); e(t)$.
- Періодичні величини: період, частота, амплітуда.
- Синусоїдний струм і промислова частота.
- Генерація синусоїдної ЕРС у магнітному полі.
- Аналітичний вираз $e = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e)$
- Синусоїдні струм і напруга, початкові фази.
- Часові діаграми напруги та струму.
- Зсув фаз: $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Ключові слова: змінний струм, миттєве значення, період, частота, амплітуда, синусоїда, початкова фаза, зсув фаз, синусоїдна ЕРС, генератор змінного струму, ωt , часові діаграми.

Keywords: alternating current, instantaneous value, period, frequency, amplitude, sinusoid, initial phase, phase shift, sinusoidal EMF, alternating current generator, ωt , time diagrams.

Основні визначення

Змінним струмом i (ЕРС – e , напругою – u) називається струм (ЕРС, напруга), який змінюється за часом. Таким чином $i, e, u = f(t)$.



$e = f_3(t)$ – миттєва ЕРС.

Рис. 1

Електричний струм, миттєве значення якого повторюється через рівні проміжки часу, називається періодичним

$$i = f(t) = f(t + kT), \quad T - \text{період [с]}.$$

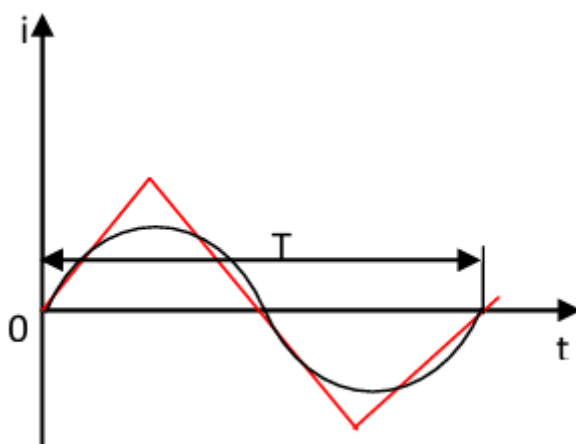


Рис. 2

Змінний струм може змінювати не тільки величину, але і напрям.

Значення електричного струму в довільний момент часу називається миттєвим струмом.

$i = f_1(t)$ – миттєвий струм,

$u = f_2(t)$ – миттєва напруга,

Періодом електричного струму називається найменший інтервал часу, по скінченні якого миттєві значення періодичного електричного струму повторюється.

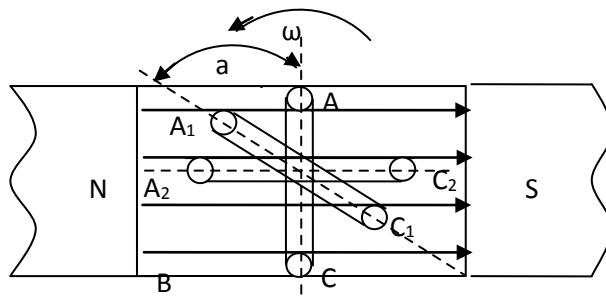
Величина, обернена періоду електричного струму, називається, частотою електричного струму

В техніці найбільшого використання набув синусоїдний періодичний електричний струм. Отже, періодичний електричний струм, який є синусоїдною функцією часу, називається синусоїдним струмом.

Промислова частота синусоїдного струму – 50Гц, в авіації використовується синусоїдний струм змінної частоти 400...900Гц та стабільної частоти 400Гц.

Одержання синусоїдної ЕРС

Нехай в однорідному магнітному полі постійного магніту з постійною кутовою швидкістю ω в напрямку проти годинникової стрілки обертається незамкнений виток АС.



АС – початкове положення витка (рамки). При обертанні витка магнітний потік $\Phi = BS$, що пронизує площу витка, буде змінюватись за законом косинуса:

Рис. 3

- положення АС: $t=0, \alpha=0, \phi=\Phi_m$;
- положення A^1C^1 : $t=t_1, \alpha=\omega t, \phi=\Phi_m \cos \alpha$;
- положення A^2C^2 : $t=t_2, \alpha=90^\circ, \phi=0$;
- положення СА: $t=t_3, \alpha=180^\circ, \phi=-\Phi_m$;

де $\alpha=\omega t$ – кут між напрямком вектора магнітної індукції B і площі ною витка S .

Таким чином $\phi = \Phi_m \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t$,

тут ϕ – миттєве значення магнітного потоку, Φ_m – максимальне значення магнітного потоку.

За законом електромагнітної індукції у витку буде наводитись ЕРС са моіндукції

де $E_m = \omega \Phi_m$ – амплітуда ЕРС в одному витку;

якщо в магнітному полі обертається не один виток, а w , то :

$$E_m = \omega \Phi_m$$

Так як за період T рамка робить повний оберт в 2π радіан, то

Отже, у витку наводиться синусоїдна ЕРС $e = E_m \sin \omega t$.

Якщо при $t = 0$ виток вже був повернутий від вертикалі на кут ψ_e , то весь кут дорівнює $\alpha = \omega t + \psi_e$, а ЕРС буде:

$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ – це аналітичний вираз миттєвої ЕРС. На такому принципі працюють генератори синусоїдного струму.

Синусоїдна напруга і струм. Часова діаграма. Зсув фаз

Якщо до обмотки (катушки) генератора приєднати споживач, то потече синусоїдний струм i , який на ньому створить синусоїдну напругу u : $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$,

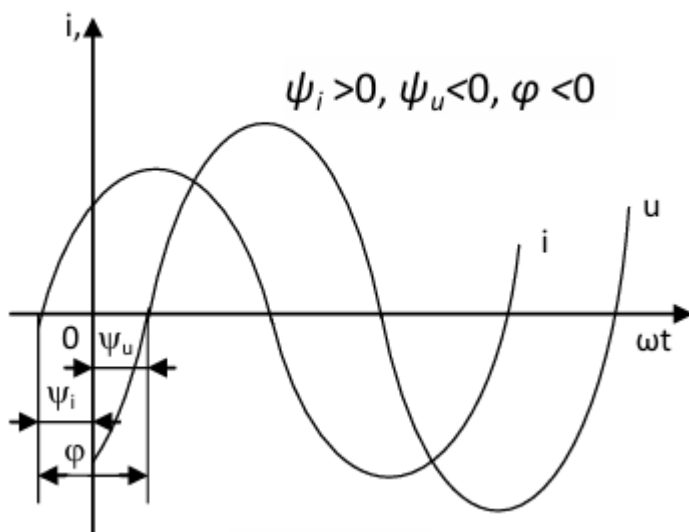


Рис. 4

до

початку координат. Додатна початкова фаза відкладається вліво від початку координат, а від'ємна – вправо. Побудуємо часові діаграми u та i .

де: I_m , U_m , E_m – амплітуди синусоїдних i , u , e – це максимальні їх значення;

$\omega t + \psi_i(e, u)$ – фаза струму i (e , u) – це аргумент синусоїдної функції;

ψ_i , ψ_u , ψ_e – початкові фази – це значення фази при $t = 0$.

Початкові фази відраховуються від початку синусоїди при її переході від

від'ємних до додатних значень

Різниця початкових фаз напруги і струму називається зсувом фаз між напругою і струмом: $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

ТЕМА 12. « ВЕКТОРНІ ТА АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ОПИСУ СИНУСОЇДНИХ ВЕЛИЧИН. ДІЮЧЕ ТА СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ. ЗОСЕРЕДЖЕНІ ПАРАМЕТРИ В КОЛАХ ЗМІННОГО СТРУМУ»

Метою є навчити студентів працювати з векторним (фазорним) поданням синусоїдних величин, розуміти зв'язок між амплітудою, діючим та середнім значенням, а також застосовувати аналітичний апарат для обчислення середньоквадратичних величин. Важливо сформувати у студентів розуміння фізичного змісту діючих значень та причин використання саме цих величин у вимірювальній техніці. Крім того, лекція пояснює поняття зосереджених параметрів і спрощення реальних кіл змінного струму до еквівалентних схем.

План:

- Векторне подання синусоїдних величин (фазори).
- Правила побудови векторної діаграми.
- Складання синусоїдних ЕРС за допомогою векторних діаграм.
- Діюче значення струму, напруги, ЕРС: $I = I_m / \sqrt{2}$.
- Середнє значення, визначення за додатний напівперіод.
- Порівняння амплітудних, діючих та середніх значень.
- Реальні кола змінного струму.
- Поняття зосереджених параметрів: R , L , C .
- Причини появи індуктивності, ємності та опору в будь-якій ділянці кола.

Ключові слова: векторна діаграма, фазор, амплітуда, діюче значення, середнє значення, RMS, середньоквадратичне значення, індуктивність, ємність, опір, струм зміщення, ЕРС самоіндукції, зосереджені параметри.

Keywords: vector diagram, phasor, amplitude, effective value, average value, RMS, root mean square value, inductance, capacitance, resistance, bias current, self-induction EMF, lumped parameters.

1. Векторні діаграми

З курсу математики відомо, що будь-яку синусоїдальну функцію часу, наприклад $A(t) = A_m \sin(\omega t + \psi)$, можна зобразити обертовим вектором при дотриманні наступних умов:

- довжина вектора в масштабі дорівнює амплітуді функції A_m ;
- початкове положення вектора при $t=0$ визначається початковою фазою ψ ;
- вектор рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω , рівній кутовій частоті функції.

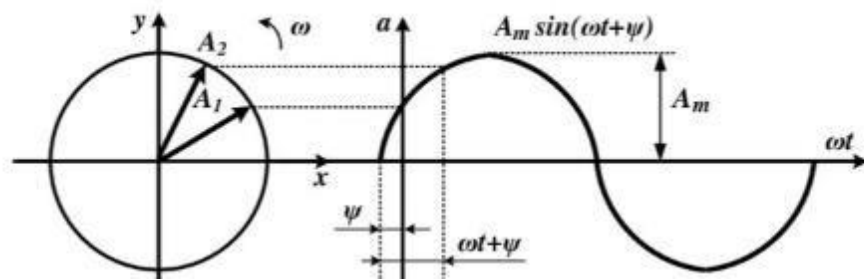


Рис. 1

Отже, синусоїдну величину можна графічно зобразити не тільки в вигляді синусоїди, але і вектором, що обертається. Це можливо тому, що проекція вектора, який обертається навколо початку координат, на вісь ординат змінюється в часі за законом синуса.

Покажемо це для ЕРС $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

Зобразимо систему координат і відкладемо під кутом ψ_e до осі абсцис вектор $OA = E_m$ (рис. 3.5). Домовимося додатні початкові фази відкласти від осі абсцис проти годинникової стрілки, а від'ємні – за годинниковою стрілкою.

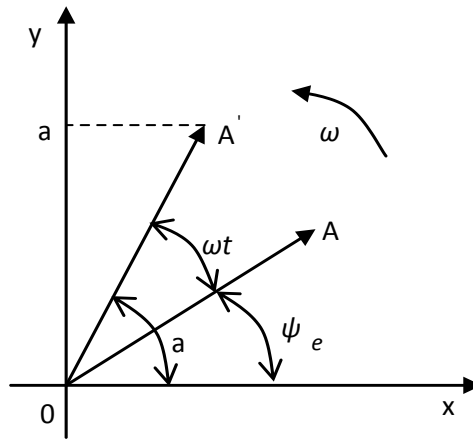


Рис. 2

Далі, починаючи з моменту часу $t=0$, буде мо обертати вектор OA навколо початку координат проти годинникової стрілки. Частота обертання ω дорівнює кутовій частоті синусоїдної ЕРС. На момент часу t вектор OA повернеться на кут ωt і буде розташований під кутом $\alpha = \omega t + \psi_e$ до осі абсцис. Його проекція на вісь ординат

$O_a = OA \sin \alpha$, але $OA = E_m$, $\alpha = \omega t + \psi_e$, тоді $O_a = e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$ – це миттєве значення синусоїдної ЕРС.

Векторна діаграма – це сукупність векторів, які зображають синусоїдні ЕРС, струми та напруги однакової частоти. Векторні діаграми використовують для додавання або віднімання кількох синусоїдних величин.

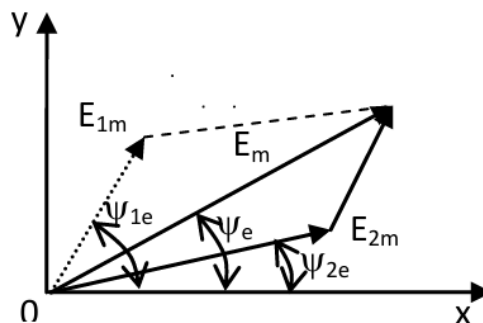


Рис. 3

Наприклад, потрібно скласти дві ЕРС (рис. 3):

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1e}),$$

$$e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \psi_{2e}).$$

Будуємо векторну діаграму

з якої находимо E_m і ψ_e .

Тоді

2. Діючі та середні значення змінних струмів, ЕРС, напруг

Для виміру змінного струму користуються методом його порівняння з постійним струмом.

При протіканні через провідник змінного або постійного струму спостігаються такі загальні явища: виділяється певна кількість тепла; діє електромагнітна сила; через поперечний переріз провідника за одиницю часу проходить визначена кількість електрики.

На основі цих загальних дій для характеристики змінного струму вводяться ще два поняття (крім миттєвого значення і амплітуди):

діюче – $I (E, U)$;

середнє – $I_c (E_c, U_c)$.

Діючий змінний струм визначеної величини створює таку ж механічну і теплову дію, як і постійний струм тієї ж величини.

3. Діючі значення

За діючий змінний струм приймають такий постійний струм, котрий за один і той же час T виділяє в тому ж резисторі R , таку ж кількість тепла Q , що і даний змінний струм.

Кількість тепла, що виділяється в резисторі R за час T (один період) постійним та змінним струмами дорівнює:

$$Q_{\text{п}} = I^2 R T, Q = \int_0^T i^2 R dt$$

Прирівняємо ці значення: $Q_{\text{п}} = Q$, або

$$I^2 R T = \int_0^T i^2 R dt, \text{ звідси } I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}, \text{ — діючий струм}$$

Діючим струмом називається середнє квадратичне значення змінного електричного струму за період.

Аналогічно $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}$; $E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}$

Нехай змінний струм змінюється за синусоїдним законом

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

Визначимо зв'язок між діючим струмом I та амплітудою I_m .

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi_i) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)] dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2}{2} dt - \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T \cos 2(\omega t + \psi_i) dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0.707 U_m; E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0.707 E_m.$$

Електровимірювальні прилади реагують на діючі значення I , U , E , і їх шкали відградувані в діючих величинах.

При розрахунках електричних кіл змінного струму задаються напрямками діючих I , U , E .

4. Середні значення

Середнім значенням змінного струму називається величина такого постійного струму, при якому за період через поперечний перетин проводу проходить така ж кількість електричного заряду, як і при даному змінному струмі.

Кількість електричного заряду від постійного та змінного струмів відносно визначається за формулами

$$Q_- = IT = I_c T; Q = \int_0^T i dt$$

Прирівнюючи ці значення одержимо

$$I_c = \frac{1}{T} \int_0^T i dt, \text{ аналогічно } U_c = \frac{1}{T} \int_0^T u dt; E_c = \frac{1}{T} \int_0^T e dt$$

Якщо період T виразити через 2π , то формули приймуть такий вигляд:

$$I_c = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = -\frac{2I_m}{\omega T} \cos \omega t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{2I_m T}{2\pi T} \cos \frac{2\pi}{T} t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{I_m}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{2I_m}{\pi}.$$

Для синусоїдних струмів, напруг та ЕРС середнє значення за повний період дорівнює нулю, так як площі від'ємних та додатних напівхвиль синусоїд рівні і різні за знаком. Тому для періодичних величин, симетричних відносно осі часу, прийнято середнє значення визначати за додатний напівперіод, або по модулю.

Визначимо середнє значення синусоїдного струму

$$\text{Тобто } I_c = \frac{2I_m}{\pi} \approx 0.637I_m$$

$$\text{аналогічно } U_c = \frac{2U_m}{\pi} \approx 0.637U_m, \quad E_c = \frac{2E_m}{\pi} \approx 0.637E_m$$

Деякі електричні вимірювальні прилади (магнітоелектричної системи) реагують на середнє значення струму, напруги та ЕРС.

5. Заміна реальних кіл змінного струму колами з зосередженими параметрами

В колах змінного струму електромагнітні процеси носять складний характер, так як електричне та магнітне поля являються змінними величинами.

Зміна магнітного поля призводить до виникнення ЕРС самоіндукції

ЕРС самоіндукції наводиться на будь-якій ділянці електричного кола, отже індуктивність присутня на будь-якій ділянці кола (реостат, проводи то що).

Зміна електричного поля призводить до появи струмів зміщення в діелектриках

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{Cdu}{dt}$$

Струми зміщення існують не тільки в діелектрику конденсатора, але і між проводами, витками котушок тощо. Отже, електрична ємність розподілена вздовж усього кола.

Електричний опір також розподілений вздовж всього кола.

Таким чином, будь-яка ділянка електричного кола змінного струму має електричний опір R , індуктивність L , та ємність C .

Однак на практиці для зручності розрахунку кіл змінного струму вважають, що електричні опори, індуктивності та ємності зосереджені на окремих ділянках. Такі кола називаються **колами з зосередженими параметрами**.

ТЕМА 13. « ОСНОВИ РОБОТИ РЕЗИСТОРА, КОТУШКИ ІНДУКТИВНОСТІ ТА КОНДЕНСАТОРА В КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ. ФАЗОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ ТА ЕНЕРГЕТИЧНІ ПРОЦЕСИ»

Метою лекції є формування в студентів повного уявлення про поведінку резистора, індуктивної котушки та конденсатора в колах однофазного синусоїдного струму. Особлива увага приділяється фазовим співвідношенням між струмом і напругою, фізичним причинам виникнення зсуву фаз та енергетичним процесам у кожному типі елементів. Студенти повинні навчитися аналізувати миттєві, діючі та амплітудні значення струмів і напруг, а також розуміти, як енергія споживається, накопичується або повертається джерелу в залежності від характеру елемента.

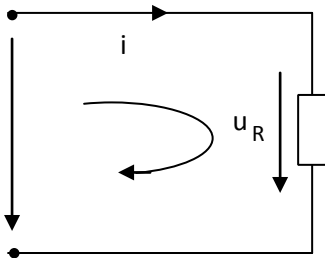
План:

- Резистивний елемент у синусоїдному режимі.
- Закон Ома для миттєвих, амплітудних та діючих значень.
- Відсутність зсуву фаз між напругою та струмом у резисторі.
- Енергетичні процеси: активна потужність та її графік.
- Потужність у R-колі: $P = UI = I^2 R = U^2 / R$.

Ключові слова: резистор, активний опір, закон Ома, амплітудне значення, діюче значення, миттєва потужність, активна потужність, векторна діаграма, синусоїдний струм, зсув фаз.

Keywords: resistor, active resistance, Ohm's law, amplitude value, effective value, instantaneous power, active power, vector diagram, sinusoidal current, phase shift.

Розглянемо фізичні процеси в електричному колі, що містить лише активний опір R .



До таких кіл відносяться електричні кола, що містять лампи накаливання, нагрівальні елементи, реостати, резистори тощо. Хай прикладена напруга змінюється за синусоїдним законом: $u = U_m \sin \omega t$, $\psi_u = 0$. За законом Ома для миттєвих значень ви знайдемо миттєвий струм у колі:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

де $I_m = \frac{U_m}{R}$ – амплітудне значення струму (закон Ома для амплітудних значень), або $I\sqrt{2} = \frac{U\sqrt{2}}{R}$, тоді $I = \frac{U}{R}$ – закон Ома для діючих значень; початкова фаза струму $\psi_i = 0$.

З виразів для миттєвих струму та напруги видно, що на активному опорі струм та напруга співпадають за фазою, тому зсув фаз $\phi = \psi_u - \psi_i = 0$.

Розглянемо енергетичні процеси в даному колі.

Миттєва потужність – це добуток миттєвої напруги на миттєвий струм

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_m I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t) = UI (1 - \cos 2\omega t)$$

З одержаного виразу видно, що миттєва потужність змінюється за косинусоїдою з подвійною кутовою частотою навколо сталої складової UI , залишаючись завжди додатною. Це говорить про те, що потік електричної енергії завжди направлений від джерела до приймача, де енергія неодмінно перетворюється в інший вид енергії (теплову, механічну тощо).

Побудуємо часові та векторні діаграми.

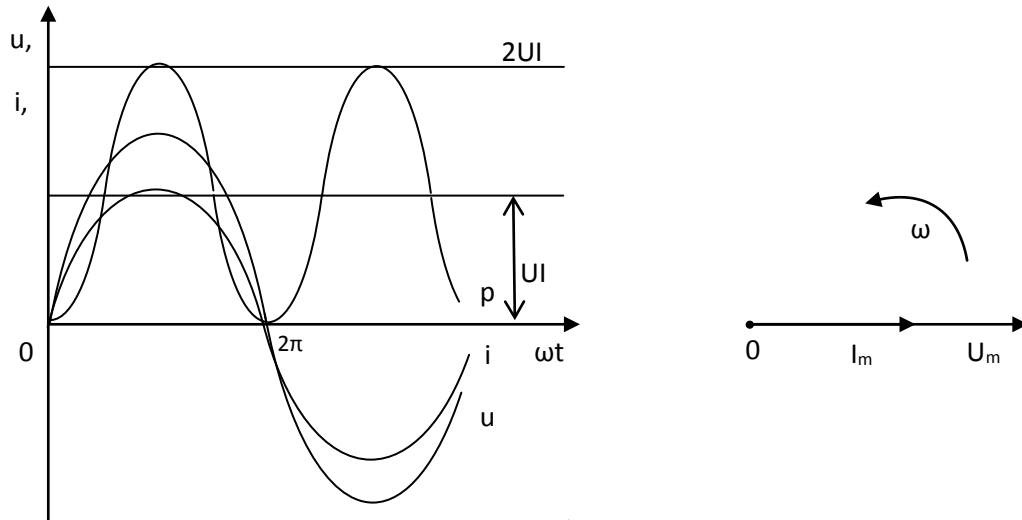


Рис. 1

Активна потужність – це середнє арифметичне миттєвої потужності, тому

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI dt - \int_0^T UI \cos 2\omega t dt = UI$$

Отже, активна потужність в колі синусоїдного струму з резистором дорівнює сталій складовій миттєвої потужності

$$P = UI = I^2 R = U^2 / R, \text{ звідси: } R = \frac{P}{I^2} \text{ або } G = \frac{P}{U^2}$$

Енергія, що поглинається резистором за час T, дорівнює

$$W = \int_0^T P dt = p t = u I T$$

1. Електричне коло синусоїдного струму з індуктивною котушкою

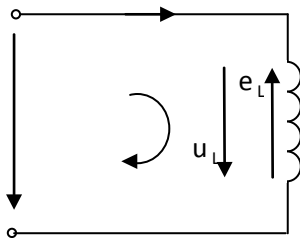


Рис. 2.

Розглянемо фізичні процеси, які відбуваються в колі синусоїдного струму, яке має тільки індуктивну котушку (рис. 3.9).

Активний опір і міжвиткову ємність не беремо до уваги, тобто маємо ідеальну індуктивну котушку. Нехай в котушці протікає синусоїдний струм, $i = I_m \sin \omega t$ і $\varphi = 0$.

Потокозчеплення самоіндукції в котушці буде дорівнювати:

$$\psi_i = L_i i \text{ або } \psi_i = \Phi_w, \text{ тоді } L_i = \Phi_w / i$$

Звідси

$$\Phi = \frac{L}{w} i = \frac{l}{w} I_m \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t$$

де $\Phi_m = \frac{LI_m}{w}$ – амплітуда магнітного потоку

Магнітний потік за фазою збігається з електричним струмом.

Змінне магнітне поле в витках котушки збуджує ЕРС самоіндукції:

$$e_L = - d\psi/dt = -L di/dt = -L d/dt (I_m \sin \omega t) = -\omega LI_m \cos \omega t = \\ = \omega LI_m \sin(\omega t - \pi/2) = E_m \sin(\omega t - \pi/2),$$

де $E_m = \omega LI_m$ – амплітуда ЕРС самоіндукції,

$\psi_L = -\pi/2$ – початкова фаза ЕРС.

Отже, ЕРС самоіндукції відстає по фазі від струму в котушці на 90° . ЕРС самоіндукції викликає струм, який згідно закону Ленца протидіє зміні струму, що його обумовлює. За умов збільшення струму ЕРС самоіндукції діє назу стріч струму, а за умов зменшення – у напрямку струму, протидіючи його зменшенню.

Для того, щоб у котушці протікав змінний струм, необхідно на її затискачах мати напругу, яка б компенсувала ЕРС самоіндукції:

$$u = u_L = -e_L = L di/dt,$$

$$\text{або } u_L = L di/dt = L d/dt (I_m \sin \omega t) = \omega LI_m \cos \omega t = U_m \sin(\omega t + \pi/2),$$

де $U_m = \omega LI_m$ – амплітуда напруги,

$\psi_L = \pi/2$ – початкова фаза.

Отже, напруга на котушці випереджає по фазі струм у ній на 90° , а ЕРС самоіндукції – на 180° . Амплітуда струму дорівнює:

$$I_m = U_m / \omega L \text{ – закон Ома для амплітудних значень,}$$

$$I = U / \omega L \text{ – закон Ома для діючих значень.}$$

Для електричного кола з індуктивною котушкою закон Ома справедливий тільки для амплітудних і діючих значень. Для миттєвих значень закон Ома застосовувати не можна, так як миттєві струм і напруга зсунуті по фазі.

Величина

$$X_L = \omega L = 2 \pi f L \text{ [Ом]} \text{ називається індуктивним опором.}$$

$$B_L = 1/X_L = 1/\omega L \text{ [См]} \text{ – індуктивна провідність.}$$

Індуктивний опір пропорційний індуктивності котушки, а також частоті змінно струму. Зі збільшенням частоти індуктивний опір збільшується.

Зобразимо часові й векторні діаграми кола з індуктивною котушкою (рис. 3.10).

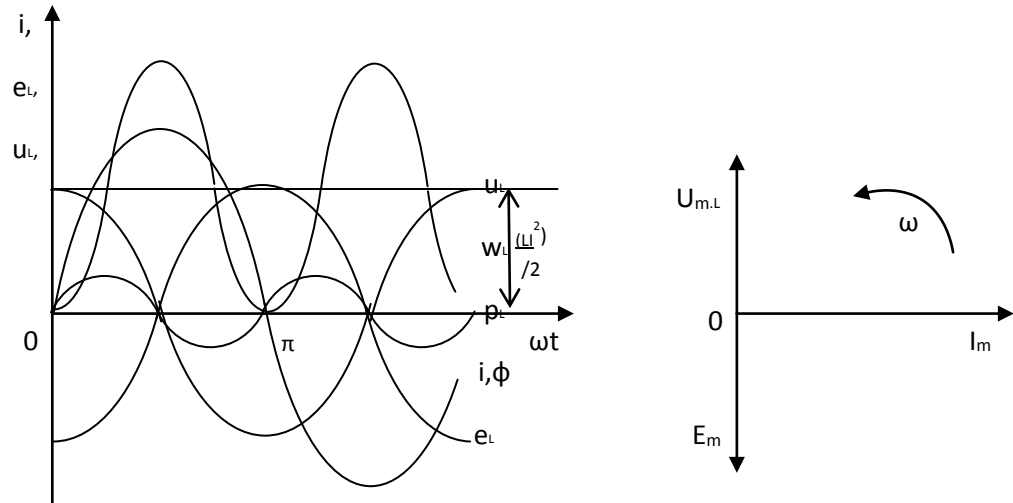


Рис. 3

Розглянемо енергетичні процеси в колі з індуктивною котушкою.

Миттєва потужність:

$$p_L = ui = U_M \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) I_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t \\ = UI \sin \omega t$$

Отже, реактивна потужність змінюється за синусоїдним законом з подвійною кутовою частотою, а вісь симетрії збігається з віссю абсцис.

Активна потужність:

$$p_L = \frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t = 0$$

Тобто, активна потужність ідеальною котушкою не споживається.

Миттєва енергія:

$$w_L = \int p_L dt = \int u i dt = \int i L \frac{di}{dt} dt = L \int i di = \frac{Li^2}{2}$$

Після підстановки значення струму маємо:

$$w_L = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI_m^2}{4} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2\omega t)$$

Отже, миттєва енергія має постійну складову $LI^2/2$ і змінну складову, яка змінюється по косинусоїді з подвійною кутовою частотою.

Із часових діаграм для i , pL , wL видно, що за першу і третю чверті періоду, коли струм в колі збільшується від 0 до I_m , миттєва потужність позитивна, тому енергія від джерела іде до приймача і дорівнює:

$$w_L = L \int_0^{I_m} i di = \frac{LI^2}{2} \Big|_0^{I_m} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

За другу і четверту чверті періоду, коли струм зменшується від I_m до 0, миттєва потужність від'ємна. Отже, електрична енергія, накопичена в магнітному полі котушки, повертаються джерелу електричної енергії і дорівнює:

$$w_L = L \int_{I_m}^0 i di = \frac{LI^2}{2} \Big|_{I_m}^0 = -\frac{LI_m^2}{2}.$$

Таким чином, у колі з індуктивною котушкою відбувається періодичний обмін енергією між джерелом і котушкою.

Отже котушка індуктивності здатна накопичувати та віддавати енергію магнітного поля.

ТЕМА 14. « РОБОТА ІДЕАЛЬНОЇ ІНДУКТИВНОЇ КОТУШКИ ТА КОНДЕНСАТОРА В КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ. ІНДУКТИВНИЙ ТА ЄМНІСНИЙ ОПІР. ЕНЕРГЕТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА РЕАКТИВНА ПОТУЖНІСТЬ»

Метою є сформулювати в студентів глибоке розуміння процесів, які відбуваються в електричних колах з індуктивною котушкою та конденсатором при синусоїдному струмі. Лекція розкриває фізичну природу виникнення ЕРС самоіндукції, пояснює фазові співвідношення між струмом та напругою, вводить поняття індуктивного та ємнісного опорів. Студенти повинні усвідомити, що котушка та конденсатор не споживають активної потужності, а здійснюють періодичний обмін енергією з джерелом, і зрозуміти сутність реактивної потужності та її роль в електричних колах.

План

- Ідеальна індуктивна котушка: i , u , ЕРС самоіндукції.
- Зсув фаз між струмом і напругою: напруга випереджає струм на 90° .
- Індуктивний опір: $XL = \omega L$ та індуктивна провідність $BL = 1/XL$.
Енергетичні процеси в котушці: накопичення та повернення енергії.
- Ідеальний конденсатор: струм випереджає напругу на 90° .
- Ємнісний опір $XC = 1/\omega C$ та ємнісна провідність $BC = \omega C$.
- Реактивна потужність для L та C , її графік і фізичний зміст.
- Обмін енергією між джерелом та елементами у колі.

Ключові слова: індуктивність, котушка, ЕРС самоіндукції, індуктивний опір, ємнісний опір, ємність, фазовий зсув, реактивна потужність, магнітне поле, електричне поле, обмін енергією, XL , XC .

Keywords: inductance, coil, self-induced emf, inductive resistance, capacitive resistance, capacitance, phase shift, reactive power, magnetic field, electric field, energy exchange, XL , XC .

Розглянемо фізичні процеси в колі синусоїдного струму, яке має тільки ідеальний конденсатор.

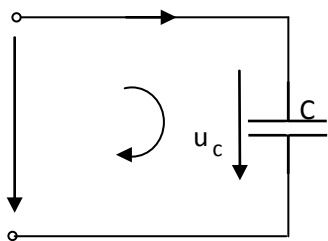


Рис. 1.

Нехай до ідеального конденсатора прикладе на синусоїдальна напруга, $u = U_m \sin \omega t$, $\psi_u = 0$. За другим законом Кірхгофа маємо $u_c - u = 0$, $u_c = u$. Тоді миттєвий заряд на обкладинках конденсатора буде дорівнювати:
 $q = CU_c = CU_m \sin \omega t$.

Через конденсатор протікатиме струм:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c}{dt} = \omega C U_c \cos \omega t = I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad \psi_i = \frac{\pi}{2}$$

Початкова фаза струму $\psi_i = \pi/2$, тому в ідеальному конденсаторі струм випереджає напругу на його затискачах на 90° .

Амплітуда миттєвого струму дорівнює:

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} - \text{закон Ома для амплітудних значень.}$$

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{X_C} - \text{закон Ома для діючих значень, де:}$$

$$\text{де: } X_C = \frac{1}{\omega C} [\text{Ом}] - \text{ємнісний опір конденсатора.}$$

$$B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C [\text{См}] - \text{ємкісна провідність.}$$

Для електричного кола з конденсатором закон Ома справедливий для амплітудних і діючих значень. Для миттєвих значень його застосовувати не можна, так як миттєві струм і напруга зсунуті по фазі.

Зобразимо часові й векторні діаграми.

Розглянемо енергетичні процеси в колі з ідеальним конденсатором.

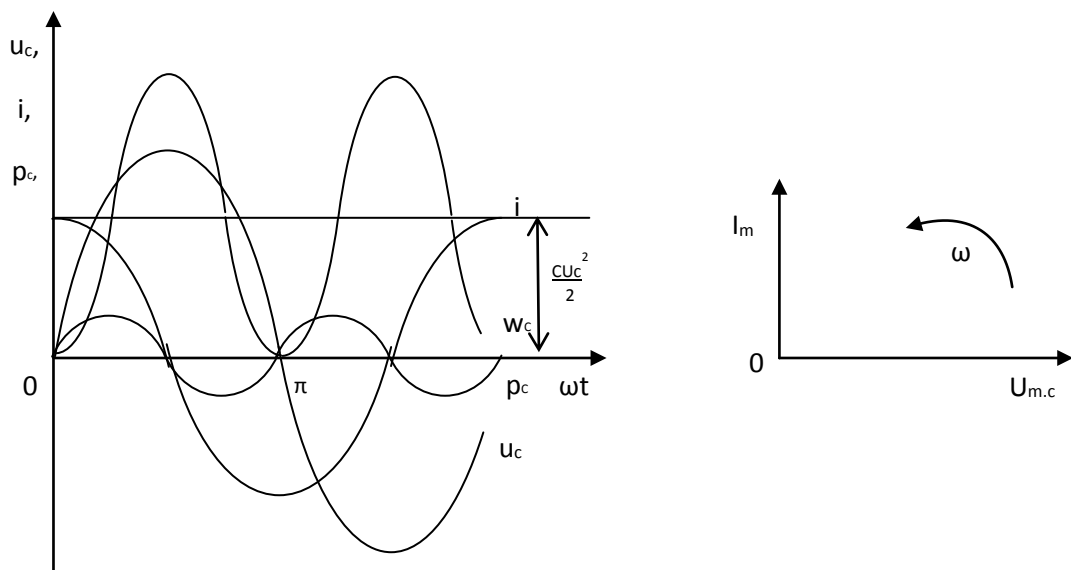


Рис. 2

Миттєва потужність:

$$P_c = u_c i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) U_m \sin \omega t = U_m I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t$$

$$= UI \sin 2\omega t$$

$$\text{де } UI = \frac{U^2}{X_C} = X_C I^2 = Q_C [\text{вар, var}] - \text{реактивна потужність.}$$

Отже, реактивна потужність змінюється за синусоїдним законом з по двійною кутовою частотою навколо осі абсцис.

Активна потужність:

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T p_c dt = \frac{1}{T} \int_0^T UI \sin 2\omega t dt = 0$$

Тобто, активна потужність ідеальним конденсатором не споживається.

Миттєва енергія:

$$w_c = \int p_c dt = \int u_c i dt = \int u_c C \frac{du_c}{dt} dt = C \int u_c du_c = \frac{Cu_c^2}{2}$$

Після підстановки значення напруги маємо:

$$w_c = \frac{CU_{m.c}^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{CU_{m.c}^2}{4} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{CU_{m.c}^2}{4} (1 - \cos 2\omega t)$$

Отже, миттєва енергія має постійну складову $CU_c^2/2$ і змінну складову, яка змінюється по косинусоїді з подвійною кутовою частотою.

Із часових діаграм для u_c , p_c , w_c видно, що за першу і третю чверті періоду, коли напруга на конденсаторі збільшується від 0 до $|U_{m.c}|$, миттєва потужність додатна, а миттєва енергія збільшується. Це говорить про те, що конденсатор заряджається, енергія направлена від джерела до конденсатора і дорівнює

$$w_c = \int_0^{\frac{T}{4}} u_c i dt = \int_0^{U_{m.c}} u_c C \frac{du_c}{dt} dt = \frac{Cu_c^2}{2} \Big|_0^{U_{m.c}} = \frac{CU_{m.c}^2}{2}.$$

За другу й четверту чверті періоду, коли напруга на конденсаторі зменшується від $|U_{m.c}|$ до 0, миттєва потужність від'ємна, а миттєва енергія зменшується. Це говорить про те, що конденсатор розряджається, енергія, накопичена в його електричному полі, повертається джерелу і дорівнює

$$w_c = \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} u_c i dt = \int_{U_{m.c}}^0 u_c C \frac{du_c}{dt} dt = \frac{Cu_c^2}{2} \Big|_{U_{m.c}}^0 = -\frac{CU_{m.c}^2}{2}.$$

Таким чином, у електричному колі з ідеальним конденсатором активна потужність не споживається, а відбувається періодичний обмін енергією між джерелом і конденсатором.

Отже конденсатор здатен накопичувати та віддавати енергію електричного по ля.

ТЕМА 15 « РОЗРАХУНОК КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ З ПОСЛІДОВНИМ ТА ПАРАЛЕЛЬНИМ З'ЄДНАННЯМ R, L, C»

Метою є формування у студентів навичок аналізу електричних кіл синусоїдного струму з послідовним і паралельним з'єднанням елементів R, L, C. Лекція спрямована на розуміння фізичних процесів у таких колах, побудову векторних діаграм, визначення напруг, струмів, фазових зсувів та потужностей. Студенти мають опанувати метод векторних діаграм і навчитися оцінювати характер кола (активний, індуктивний, ємнісний), умови резонансу напруг або струмів та користуватися трикутниками опорів, потужностей та провідностей.

План

- Послідовне з'єднання R, L, C та рівняння кола (закон Кірхгофа).
- Напруги на елементах: U_R , U_L , U_C та їх векторне подання.
- Векторна діаграма напруг — трикутник напруг.
- Фазовий зсув та умови характеру кола: $X_L > X_C$, $X_L < X_C$, $X_L = X_C$.
- Резонанс напруг: фізичний зміст та застосування.
- Трикутник опорів та трикутник потужностей.
- Паралельне з'єднання R, L, C та рівняння струмів.
- Векторна діаграма струмів — трикутник струмів.
- Активна, реактивна складові струму та повна провідність.
- Резонанс струмів та його застосування в електротехніці.
- Метод векторних діаграм при аналізі синусоїдних кіл.

Ключові слова: послідовне коло, паралельне коло, трикутник напруг, трикутник струмів, трикутник потужностей, векторна діаграма, резонанс напруг, резонанс струмів, індуктивний опір X_L , ємнісний опір X_C , активний опір

R , повна провідність Y , фазовий зсув φ , активна та реактивна потужність, $\cos\varphi$.

Keywords: series circuit, parallel circuit, voltage triangle, current triangle, power triangle, vector diagram, voltage resonance, current resonance, inductive resistance XL , capacitive resistance XC , active resistance R , total conductivity Y , phase shift φ , active and reactive power, $\cos\varphi$.

Нехай у колі з послідовним з'єднанням R, L, C протікає синусоїдний струм: $i = I_m \sin\omega t$, $\psi_i = 0$.

Розглянемо фізичні процеси в колі та знайдемо $u, \varphi, U, U_R, U_L, U_C$. За другим законом Кірхгофа: $u_R + u_L + u_C = u$, або $Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = u$

Спершу знайдемо складові рівняння, а потім всю напругу u . Для синусоїдального струму маємо:

$$u_R = R i = R I_m \sin\omega t = U_{m.R} \sin\omega t.$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_m \sin\omega t) = L I_m \cos\omega t = U_{m.L} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int I_m \sin\omega t dt = -\frac{I_m}{\omega C} \cos\omega t = U_{m.C} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Тут: } U_{m.R} = R I_m, U_{m.L} = \omega L I_m = X_L I_m, U_{m.C} = I_m / \omega C = X_C I_m.$$

Або для діючих значень:

$$U_R = R I, \quad U_L = \omega L I = X_L I, \quad U_C = I / \omega C = X_C I.$$

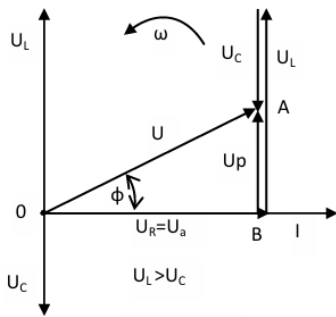
Так як кожна складова рівняння (3.1) змінюється за синусоїдним законом, то і вся прикладена напруга u повинна бути синусоїдою наступного виду:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

де невідомі U_m та ψ_u .

Для визначення U_m (або U) та ψ_u виразимо синусоїдні величини в рівнянні (3.1) векторами для діючих величин:

$$U = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C$$



В відповідності з цим рівнянням побудуємо векторну діаграму напруг (рис. 3.14).

За базисний вектор, відносно якого будемо будувати інші вектори, візьмемо вектор струму I , який протікає через всі елементи кола.

На векторній діаграмі напруг $\triangle OAB$ називається трикутником напруг. Кожна з його сторін в масштабі відображають відповідні напруги.

$$\text{де } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\text{зсув фаз } \varphi = \arctg \frac{U_p}{U_a} = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$$

Щодо значення зсуву фаз можливі три випадки:

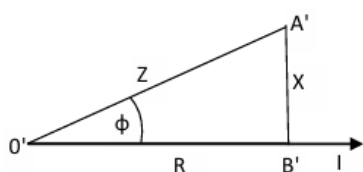
1. $X_L > X_C$ (або в колі з R, L) $\varphi > 0$ – коло носить індуктивних характер.
2. $X_L < 0$ – коло носить ємнісний характер.
3. $X_L = X_C$, $\varphi = 0$ – коло носить активний характер (резонанс напруг).

В ряді областей електротехніки резонанс напруг знаходить корисне застосування. Коливальні контури, наприклад, є обов'язковою частиною радіотехнічних пристроїв. Зокрема, настройка радіоприймача полягає в тому, щоб шляхом зміни ємності C або індуктивності L досягнути збігу частоти коливального контуру в приймачі з частотою генераторів радіостанції.

Визначивши з векторної діаграми U та φ , можна тепер записати вираз для шуканої прикладеної напруги u .

$$\text{Так як } U_m = \sqrt{2U}, \psi_u = \varphi + \psi_i = \varphi, (\psi_i = 0),$$

$$\text{то } u = \sqrt{2U} \sin(\omega t + \varphi)$$



Якщо усі сторони трикутника напруг розділити на струм I , то отримаємо йому подібний трикутник опорів.

Тут

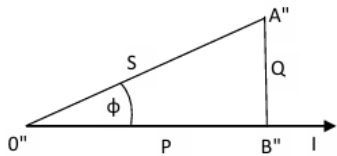
$$O'B' \rightarrow R = \frac{U_a}{I} = Z \cos \varphi = \sqrt{Z^2 - X^2} = \sqrt{Z^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \text{активний опір,}$$

$$A'B' \rightarrow X = \frac{U_p}{I} = Z \sin \varphi = \sqrt{Z^2 - R^2} - \text{реактивний опір,}$$

$$O'A' \rightarrow Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \text{повний опір кола,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} - \text{зсув фаз.}$$

Якщо усі сторони трикутника напруг помножити на струм I , то отримаємо йому подібний трикутник потужностей.



Тут: $O'B'' \rightarrow P = U_a I = R I^2 = S \cos \varphi = U I \cos \varphi$ [ват] – активна потужність, $A'B'' \rightarrow Q = U_p I = R X I^2 = S \sin \varphi = U I \sin \varphi$ [ВАр] – реактивна потужність,

$$O''A'' \rightarrow S = U I = Z I^2 = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [ВА]} - \text{повна потужність,}$$

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P} - \text{зсув фаз.}$$

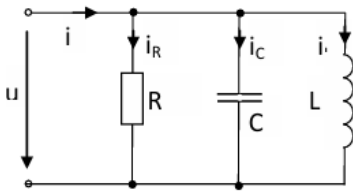
З усіх потужностей тільки активна потужність P характеризує величину виконаної роботи за одиницю часу. Відношення

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi$$

називається коефіцієнтом потужності, воно характеризує повноту використання повної потужності кола S і має важливе техніко-економічне значення.

Розрахунок кола синусоїдного струму з паралельним з'єднанням R, L, C

Хай до кола з паралельним з'єднанням R , L , C прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega t$, $\psi_u = 0$



За першим законом Кірхгофа маємо: $i_R + i_L + i_C = i$, або в інтегрально-диференціальній формі запису

Враховуючи, що $u = u_R = u_C = u_L$, спершу знайдемо струми в гілках, а потім струм на вході кола.

$$u/R + \int i_L dt + C du_C / dt = i.$$

Враховуючи, що $u = u_R = u_C = u_L$, спершу знайдемо струми в гілках, а потім струм на вході кола. $i_R = u/R = U_m / R \sin \omega t = G U_m \sin \omega t = I_{mR} \sin \omega t$;

$$i_C = C du_C / dt = C d(U_m \sin \omega t) / dt = \omega C U_m \cos \omega t = \omega C U_m \sin(\omega t + \pi/2) = I_{mC} \sin(\omega t + \pi/2);$$

$$i_L = 1/L \int i_L dt = 1/L \int (U_m \sin \omega t) dt = - U_m / \omega L \cos \omega t = U_m / \omega L \sin(\omega t - \pi/2) = I_{mL} \sin(\omega t - \pi/2).$$

Тут

$$I_{mR} = U_m / R = G U_m; I_{mC} = \omega C U_m = B_C U_m; I_{mL} = U_m / \omega L = B_L U_m,$$

або для діючих значень:

$$I_R = U / R = G U; I_C = \omega C U = B_C U; I_L = U / \omega L = B_L U,$$

де $B_L = 1 / \omega L = 1 / X_L$ [См] – індуктивна провідність;

$B_C = \omega C = 1 / X_C$ [См] – ємнісна провідність.

Так як кожен доданок рівняння змінюється за синусоїдним законом, то струм в нерозгалуженій ділянці кола повинен бути синусоїдним. Тоді:

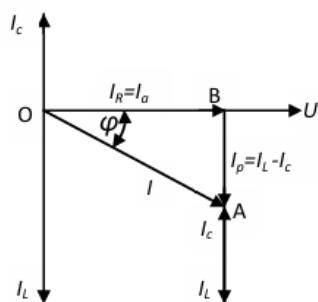
$$I_{mR} \sin \omega t + I_{mL} \sin(\omega t - \pi/2) + I_{mC} \sin(\omega t + \pi/2) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

В цьому рівнянні невідомі I_m (або I) та ψ_i . При $\psi_u = 0$, $\psi_i = \psi_u - \phi = -\phi$.

Для визначення I та ψ_i зобразимо синусоїдні струми векторами для діючих значень і перейдемо до векторного рівняння:

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

В відповідності з рівнянням побудуємо векторну діаграму струмів. За базисний вектор, відносно якого будемо будувати інші вектори, приймемо вектор напруги, так як вона являється загальною для всіх елементів кола. Нехай $\bar{I}_L > \bar{I}_C$



На векторній діаграмі струмів ΔOAB на зивається трикутником струмів.

$$OB \rightarrow I_a = I_R = UG = I \cos \varphi = \sqrt{I^2 - I_p^2} -$$

активна складова струму;

$$AB \rightarrow I_p = I_L - I_C = U(1/\omega L - \omega C) = U(B_L - B_C) = UB =$$

$$\sqrt{I^2 - I_a^2}$$

– реактивна складова струму,

де $B_L - B_C = B$ [См] – реактивна про відність кола.

$$OA \rightarrow I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2} = \sqrt{U^2 G^2 + U^2 B^2} = U \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} =$$

$$U \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2} = UY - \text{закон Ома для паралель ного з'єднання } R, L, C.$$

$$\text{Тут: } Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2} = 1/Z - \text{повна провідність кола.}$$

$$\text{Зсув фаз: } \varphi = \arctg(I_p / I_a) = \arctg((B_L - B_C) / G).$$

Можливі випадки:

1. $B_L > B_C$, тобто $B > 0$, $\varphi > 0$ – коло носить індуктивний характер.
2. $B_L < B_C$, тобто $B < 0$, $\varphi < 0$ – коло носить ємнісний характер.
3. $B_L = B_C$, $\varphi = 0$ – коло носить активний характер (резонанс струмів).

Резонанс струмів широко застосовується як в радіотехніці, так і в силових електричних колах для збільшення коефіцієнта потужності $\cos \varphi$, оскільки він має велике техніко-економічне значення. Для збільшення коефіцієнта потужності конденсатори підключаються паралельно до споживачів, які внаслідок індуктивності мають низький $\cos \varphi$.

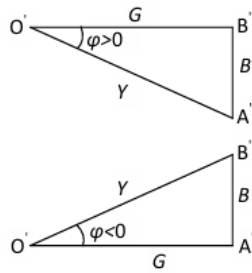
Тепер, знаючи I та φ , знаходимо I_m і φ :

$$I_m = I\sqrt{2}, \psi_i = \psi_u - \varphi = \varphi$$

Отже, струм на вході кола дорівнює

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi)$$

Розглянуті методи розрахунку синусоїдних кіл з використанням векторних діаграм називаються методом векторних діаграм.



Якщо всі сторони трикутника струмів поділи ти на напругу, то отримаємо йому подібний трикутник провідностей.

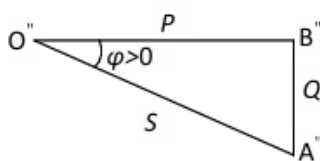
$OB' \rightarrow G = I_a / U = Y \cos \varphi = \sqrt{Y^2 - B^2}$ – активна провідність;

$B'A' \rightarrow B = I_p / U = Y \sin \varphi = \sqrt{Y^2 - G^2} = BL - BC = 1/\omega L - \omega C$ – активна провідність;

$O'A' \rightarrow Y = I / U = 1/Z = \sqrt{B^2 + G^2}$ – повна провідність;

$\varphi = \arctg(B/G) = \arctg((1/\omega L - \omega C)/G)$ – зсув фаз.

Якщо всі сторони трикутника струмів помножити на напругу, то отримаємо йому подібний трикутник потужностей.



$P = I_a U = GU_2 = UI \cos \varphi = S \cos \varphi = \sqrt{S^2 - Q^2}$ [Вт] – активна потужність;

$Q = I_p U = BU_2 = UI \sin \varphi = S \sin \varphi = \sqrt{S^2 - P^2}$ [Вар] – реактивна потужність;

$S = UI = YU_2 = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [ВА] – повна потужність;

$\varphi = \arctg(Q/P)$ – зсув фаз.

ТЕМА 16. «ЕНЕРГЕТИЧНІ ПРОЦЕСИ В КОЛАХ ЗМІННОГО СТРУМУ. ПАСИВНІ ДВОПОЛЮСНИКИ ТА ЇХ ЕКВІВАЛЕНТНІ ПАРАМЕТРИ»

Метою є пояснення студентам енергетичних процесів у колах синусоїдного струму з послідовним з'єднанням R, L, C, а також ознайомлення з поняттям пасивного лінійного двополюсника. Лекція спрямована на розуміння миттєвих і середніх потужностей, обміну енергією між полем та джерелом, а також

методів визначення еквівалентних параметрів кола — опорів та провідностей. Студенти мають навчитися застосовувати формули еквівалентного переходу між схемами заміщення та розуміти фізичний зміст активної, реактивної та повної потужності.

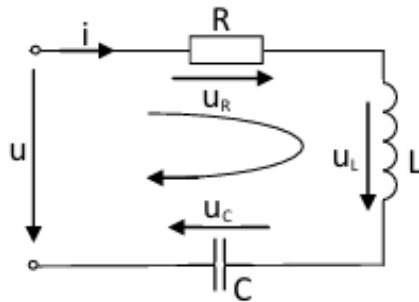
План

- Енергетичні процеси в колі R–L–C: рівняння миттєвої потужності.
- Активна, індуктивна та ємнісна складові миттєвої потужності.
- Синусоїдні струм і напруга: миттєва потужність, P і S .
- Позитивні та негативні ділянки $p(t)$: віддача та приймання енергії.
- Поведінка $p(t)$ при різних співвідношеннях R , L , C .
- Поняття лінійного пасивного двополюсника.
- Визначення Z , R , X , Y , G , B за виміряними U , I , P , φ .
- Послідовна та паралельна схеми заміщення двополюсника.
- Формули переходу між опорами та провідностями.
- Використання еквівалентних параметрів у розрахунку синусоїдних кіл.

Ключові слова: миттєва потужність $p(t)$, активна потужність P , реактивна потужність Q , повна потужність S , енергія магнітного поля, енергія електричного поля, пасивний двополюсник, повний опір Z , активний опір R , реактивний опір X , провідність Y , активна провідність G , реактивна провідність B , еквівалентна схема, метод еквівалентних опорів.

Keywords: instantaneous power $p(t)$, active power P , reactive power Q , apparent power S , magnetic field energy, electric field energy, passive two-pole, impedance Z , active resistance R , reactive resistance X , conductance Y , active conductance G , reactive conductance B , equivalent circuit, equivalent resistance method.

Розглянемо енергетичні процеси в колі з послідовним з'єднанням R, L, C.



За II законом Кірхгофа $u = u_R + u_L + u_C$.

Помножимо всі члени цього рівняння на струм i

$$u i = u_R i + u_L i + u_C i.$$

Враховуючи, що $p = u i$; $p_R = u_R i = R i^2$; $u_L = L$

di/dt ; $i_C = C du_C/dt$, отримаємо:

$$p = R i^2 + L i di/dt + u_C C du_C/dt = R i^2 + d(L i^2/2)/dt + d(C u_C^2/2)/dt = R i^2 + dw_L/dt + dw_C/dt = p_R + p_L + p_C,$$

де: $p_R = R i^2$ – миттєва потужність активного опору, котра характеризує процес перетворення електромагнітної енергії в тепло;

$p_L = dw_L/dt$ – миттєва потужність індуктивної котушки. При $p_L > 0$ енергія джерела іде на утворення магнітного поля котушки, при $p_L < 0$ – енергія магнітного поля котушки повертається джерелу;

$p_C = dw_C/dt$ – миттєва потужність конденсатора. При $p_C > 0$ енергія джерела йде на утворення електричного поля конденсатора, при $p_C < 0$ енергія, яка накопичена в електричному полі конденсатора, повертається джерелу.

Нехай струм та напруга змінюються за синусоїдним законом:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

$$\begin{aligned} \text{mod } p = u i &= U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_i) = U_m I_m / 2 [\cos(\psi_u - \psi_i) - \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)] \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = P - S \cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i) = P - S \cos(2\omega t + \psi_p). \end{aligned}$$

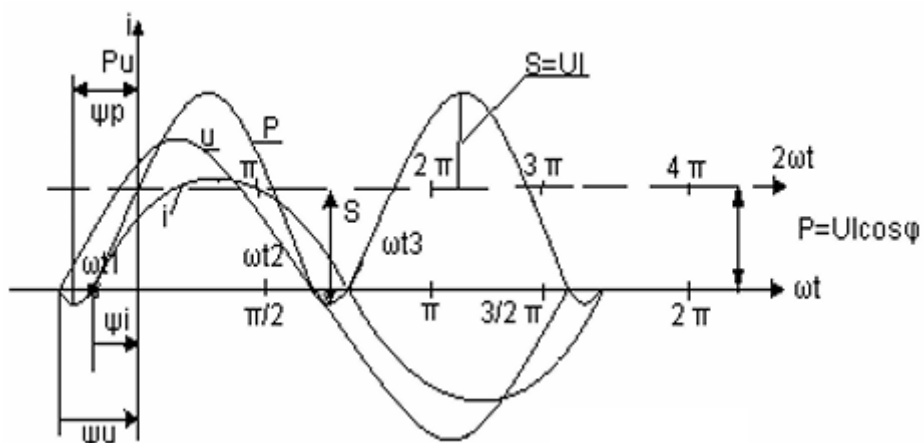


Рис.1.

На графіку (рис. 1) бачимо:

- при $\omega t_1 < \omega t < \omega t_2$ – миттєва потужність позитивна, джерело віддає енергію в коло;

- при $\omega t_2 < \omega t < \omega t_3$ – миттєва потужність від'ємна, електричне коло віддає енергію джерелу.

При збільшенні реактивного опору і зменшенні активного опору крива миттєвої потужності буде все більше опускатися вниз. При $R=0$, вона буде симетрична відносно осі абсцис, тобто буде проходити періодичний обмін енергією між джерелом і електричним колом.

Еквівалентні параметри лінійного пасивного двополюсника

Розглянемо лінійний пасивний двополюсник (рис. 2).

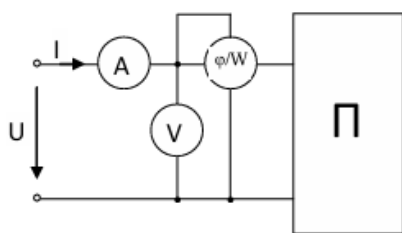


Рис.2.

$$\text{Дано: } u = U\sqrt{2} \sin(\omega t \psi_u)$$

Визначимо потужності, які споживає

двополюсник:

$$S = UI = ZI^2 = YU^2,$$

$$P = UI \cos \varphi = RI^2 = GU^2,$$

$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 = BU^2.$$

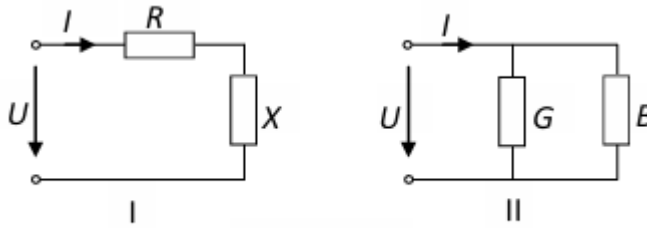
$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Із цих рівнянь можна отримати:

$$Z = U/I; \quad R = Z \cos \varphi; \quad X = Z \sin \varphi;$$

$$Y = I/U; \quad G = Y \cos \varphi; \quad B = Y \sin \varphi;$$

Із цього слідує, що будь який пасивний двополюсник з енергетичної точки зору можна уявити у вигляді двохелементної схеми заміщення з послідовним з'єднанням опорів R і X або паралельним з'єднанням провідностей G і B .



Схемою заміщення реального електричного кола називається схема, яка відображає властивості кола при деяких умовах.

Опори Z , R , X і провідності Y , G , B називаються еквівалентними параметрами пасивних двополіусників. Їх можна визначити дослідним шляхом за показами вольтметра V , амперметра A , фазометра ϕ чи ватметра W та наступними розрахунками:

$$Z=U/I; R=P/I^2; (\text{чи } R=Z\cos\phi); X = \pm\sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$Y=I/U; G=P/U^2; (\text{чи } G=Y\cos\phi); B = \pm\sqrt{Y^2 - G^2}$$

Виходячи із рівності потужностей, які споживаються еквівалентними схемами заміщення, можна отримати формули еквівалентного переходу від послідовної схеми заміщення до паралельної і навпаки

$I \rightarrow II$

$$G=RI^2/U^2=R/Z^2=R/(R^2+X^2);$$

$$B=XI^2/U^2=X/Z^2=X/(R^2+X^2);$$

$$Y=ZI^2/U^2=Z/Z^2=1/Z.$$

$II \rightarrow I$

$$R=GU^2/I^2=G/Y^2=G/(G^2+B^2);$$

$$X=BU^2/I^2=B/Y^2=B/(G^2+B^2);$$

$$Z=YU^2/I^2=Y/Y^2=1/Y.$$

Таким чином, якщо відомі параметри однієї із еквівалентних схем двополіусника, то параметри другої схеми можна визначити за параметрами відомої схеми.

Цими формулами користуються також при аналітичному розрахунку кіл синусоїдного струму, замінюючи послідовні ділянки кола паралельними і навпаки. Цей метод отримав назву методу еквівалентних опорів і провідностей.

ТЕМА 17 « ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ СИМВОЛІЧНОГО МЕТОДУ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ»

Метою є формування базових знань про символічний метод, що застосовується для розрахунку електричних кіл синусоїдного струму. Студенти повинні розуміти необхідність переходу від часових залежностей до комплексних зображень, знати форми запису комплексних чисел, виконувати їх арифметичні операції та застосовувати ці знання для подання синусоїдних величин у комплексній формі. Це створить основу для подальшого використання алгебраїчних методів замість диференціальних рівнянь, значно спрощуючи аналіз кіл змінного струму.

План

- Недоліки класичних методів розрахунку кіл синусоїдного струму.
- Ідея та переваги символічного методу.
- Комплексне число: алгебраїчна, тригонометрична, показникова форми.
- Формула Ейлера та оператор j .
- Арифметичні операції над комплексними числами.
- Комплексно-спряжені числа та їх властивості.
- Подання синусоїдної величини у вигляді комплексного числа.

Комплексна амплітуда та комплексний миттєвий струм.

Ключові слова: символічний метод, комплексне число, алгебраїчна форма, тригонометрична форма, показникова форма, формула Ейлера, комплексна амплітуда, оператор j , уявна частина, комплексно-спряжені числа, комплексне зображення.

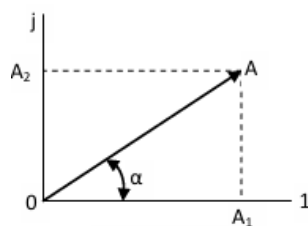
Keywords: symbolic method, complex number, algebraic form, trigonometric form, exponential form, Euler's formula, complex amplitude, operator j , imaginary part, complex conjugate numbers, complex representation.

Раніше ми розглянули розрахунок електричних кіл синусоїдного струму методом векторних діаграм та методом еквівалентних опорів і провідностей. Ці методи є достатньо складними, особливо при розрахунку розгалужених та складних електричних кіл.

Тому широке практичне застосування одержав символічний метод розрахунку кіл синусоїдного струму. (Метод був введений американським вченим Штейнметчем).

Для наочності розрахунок електричних кіл символічним методом супроводжується побудовою векторних діаграм. Символічний метод оснований на застосуванні комплексних чисел.

З математики відомо, що комплексне число можна виразити точкою, або радіус-вектором на комплексній площині (де 01 – вісь дійсних чисел; $0j$ – вісь уявних чисел) і записати аналітично в трьох формах: алгебраїчній, тригонометричній та показниковій:



$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A(\cos \alpha + j\sin \alpha) = Ae^{ja}$$

де $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ – модуль комплексного числа;

$\alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}$ – аргумент комплексного числа;

j – мніма (уявна) одиниця, яка дорівнює $j = \sqrt{-1}$, відповідно $j^2 = -1$. $\cos \alpha + j \sin \alpha = e^{j\alpha}$ – Формула Ейлера.

При переході від однієї форми комплексного числа до іншої необхідно враховувати, що:

$$\pm j = \cos 90^\circ \pm j \sin 90^\circ = e^{\pm j90^\circ},$$

$$-1 = \cos 180^\circ \pm j \sin 180^\circ = e^{\pm j180^\circ},$$

$$1 = \cos 360^\circ \pm j \sin 360^\circ = e^{\pm j360^\circ}.$$

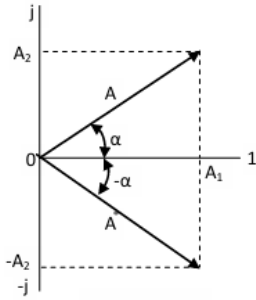
При додаванні або відніманні краще використовувати алгебраїчну форму запису, а при множенні та діленні – показникову форму.

Наприклад:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= A_1 + jA_2 = Ae^{ja}; & \underline{B} &= B_1 + jB_2 = Be^{j\beta} \\ \underline{A} + \underline{B} &= (A_1 + B_1) + j(A_2 + B_2); & \underline{A} - \underline{B} &= (A_1 - B_1) + j(A_2 - B_2) \end{aligned}$$

$$\underline{A} \underline{B} = A e^{ja} B e^{j\beta} = AB e^{j(a+\beta)};$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A e^{ja}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(a-\beta)}.$$



Два комплексних числа називаються спряженими, якщо їх модулі рівні, а аргументи рівні, але протилежні за знаком (рис. 3.25)

$$\underline{A} = A_1 + jA_2 = A(\cos a + j \sin a) = A e^{ja}$$

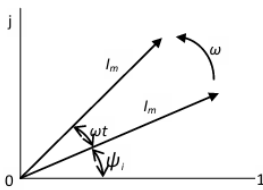
$$\underline{A}^+ = A_1 - jA_2 = A(\cos a - j \sin a) = A e^{-ja}$$

Добуток комплексно-спряжених чисел до рівнює дійсному числу:

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^* = A^2 = A_1^2 + A_2^2$$

Таким чином, комплексне число можна подати радіус-вектором і навпаки, – радіус-вектор може бути поданий комплексним числом.

Зобразимо вектор струму I_m на комплексній площині під кутом $\alpha = \psi_i$ (рис. 3.26): Як радіус-вектор його можна записати в комплексній формі:



Як радіус-вектор його можна записати в комплексній формі:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$$

Примусимо вектор I_m обертатися з частотою ω . Тоді через час t він займе положення $\alpha = \omega t + \psi_i$. Вектор, що обертається, в комплексній формі записується у вигляді:

$$\underline{I}(t) = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)} = I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

де $\underline{I}(t)$ – комплексний миттєвий струм,

$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ – комплексна амплітуда струму,

$e^{j\omega t}$ – оператор обертання

Запишемо комплексний миттєвий струм в тригонометричній формі:

$$\underline{I}(t) = I_m \cos(\omega t + \psi_i) + j I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

Бачимо, що синусоїдну функцію можна подати у вигляді уявної частини комплексного числа, тобто проекції радіус-вектора на вісь уявних чисел. Умовно це записується так:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m (\underline{I}_m e^{j\omega t}).$$

Символ I_m (уявний) означає, що при переході від комплексного числа до синусоїдної функції, необхідно брати лише уявну частину. Можна записати іншим чином:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{I}(t)$$

де i – оригінал; $\underline{\quad}$ – знак відповідності; $\underline{I}(t)$ – зображення – це допоміжна величина, що не має фізичного змісту, але зручна для розрахунку.

Отже, комплексним числом можна зобразити синусоїдну функцію.
Аналогічно

Приклад: 1. Дано: $i = 10\sin(\omega t + 30^\circ)$ А. Визначимо $\underline{I}_m, I$.

$$I = I_m e^{j\psi_i} = 10 e^{j30^\circ} \text{ А.} \quad I = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

2. Дано: $\underline{I} = 5e^{-j60^\circ}$ А. Визначимо mI, i . Визначимо $\underline{I}_m, I$.

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 5\sqrt{2}\sin(\omega t - 60^\circ) \text{ А.}$$
$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i} = 5\sqrt{2} e^{-j60^\circ} \text{ А.}$$

ТЕМА 18. «ЗАСТОСУВАННЯ СИМВОЛІЧНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ. КОМПЛЕКСНИЙ ОПІР ТА ПРОВІДНІСТЬ»

Метою є засвоєння студентами практичних прийомів використання символічного методу під час розрахунку електричних кіл синусоїдного струму. Студенти повинні вміти переходити від диференціальних рівнянь до алгебраїчних через комплексні зображення струмів і напруг, застосовувати закони Кірхгофа у комплексній формі, обчислювати комплексні опори та провідності, а також працювати з показниковою формою комплексних величин для визначення фазових зсувів та діючих значень струмів.

План

- Символічний метод та його процедура застосування.
- Приклад аналізу послідовного кола $R - L - C$ в комплексній формі.
- Похідні та інтеграли синусоїдних величин у комплексній формі: заміна на $j\omega$ та $1/j\omega$.
- Виведення комплексного закону Ома.
- Комплексний опір: алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми.
- Індуктивний та ємнісний характер опору (знак уявної частини).
- Комплексна провідність та її форми запису.
- Взаємозв'язок комплексних Z і Y (умова $Z \cdot Y = 1$).
- Запис миттєвого струму через комплексні величини.

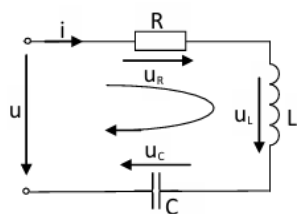
Ключові слова: символічний метод, комплексний опір, комплексна провідність, комплексний закон Ома, диференціальні рівняння, оператор $j\omega$, імпеданс, сукупний опір, тригонометрична форма, фазовий зсув, комплексна напруга, комплексний струм.

Keywords: symbolic method, complex resistance, complex conductance, complex Ohm's law, differential equations, operator $j\omega$, impedance, total resistance, trigonometric form, phase shift, complex voltage, complex current.

Символічним методом називається метод розрахунку електричних кіл синусоїдного струму, оснований на представленні струму, напруги та ЕРС комплексними числами.

Цей метод дозволяє замінити лінійні інтегро-диференціальні рівняння, що описують синусоїдні кола, на алгебраїчні рівняння, а також застосовувати для розрахунку електричних кіл синусоїдного струму основні закони та методи розрахунку електричних кіл постійного струму в тій самій формі запису.

Розглянемо методику застосування символічного методу на прикладі електричного кола з послідовним з'єднанням R, L, C.



Нехай: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

Визначимо: $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$,

де I_m, ψ_i –?

За II законом Кірхгофа маємо:

$$u = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

З метою використання символічного методу перейдемо до зображень:

$$u = \underline{U}_m e^{j\omega t}, \text{ де } \underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u};$$

$$i = \underline{I}_m e^{j\omega t}, \text{ де } \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i};$$

$\frac{di}{dt} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}$ – похідна від синусоїдної функції замінюється добутком $j\omega$ на її комплексне зображення;

$\int i dt = \frac{1}{j\omega} \underline{I}_m e^{j\omega t}$ – інтеграл синусоїдної функції замінюється діленням на $j\omega$ її комплексного зображення

Підставимо одержані вирази у вихідне рівняння

$$\underline{U}_m e^{j\omega t} = R \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

Скоротимо обидві частини на $\sqrt{2}e^{j\omega t}$, одержимо:

$$\underline{U} = R \underline{I} + j\omega L \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$$

Звідси: $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ – закон Ома в символічній формі, де комплексний опір

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = Z e^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \varphi = \arctg \frac{X}{R}$$

Таким чином, ми від вихідного інтегрально-диференційного рівняння перейшли до алгебраїчного (3.5).

Запишемо вираз для комплексного струму в показниковій формі:

$$I = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{Z e^{j\varphi}} = I e^{j(\psi_u - \varphi)} = I e^{j\psi_i}$$

Комплексний струм – це комплексна величина, модуль якої дорівнює діючому синусоїдному струму, а аргумент дорівнює початковій фазі цього струму.

Знаючи комплексний струм в показниковій формі можна записати вираз для миттєвого струму

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \psi_i)$$

Комплексний електричний опір та комплексна електрична провідність

Нехай відомі: $\underline{I} = I e^{j\psi_i}$, $\underline{U} = U e^{j\psi_u}$

Візьмемо відношення $\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U e^{j\psi_u}}{I e^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)}$

Враховуючи, що $\frac{U}{I} = Z$, а $\psi_u - \psi_i = \varphi$, одержимо

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Z e^{j\varphi} = \underline{Z} - \text{комплексний опір кола.}$$

Запишемо комплексний опір в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R + jX = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C});$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \varphi = \arctg \frac{X}{R}$$

При $X > 0$ перед j стоїть знак “+”, – коло має індуктивний характер, при $X < 0$ перед j стоїть знак “-”, – коло має ємнісний характер

Знайдемо відношення $\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I e^{j\psi_i}}{U e^{j\psi_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\psi_i - \psi_u)}$

Враховуючи, що $\frac{I}{U} = Y$, а $-(\psi_u - \psi_i) = -\varphi$ одержимо:

$$\frac{\underline{I}}{\underline{U}} = Y e^{j\varphi} = \underline{Y} - \text{комплексна провідність.}$$

Запишемо комплексну провідність в алгебраїчній, тригонометричній та показниковій формах:

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi = G - jB = G - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C);$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{G}$$

При $B > 0$, перед j стоїть знак “–”, – коло має індуктивний характер, при $B < 0$, перед j стоїть знак “+”, – коло має ємнісний характер.

Для комплексних опору та провідності завжди виконується рівність:

$$\underline{ZY} = 1, \text{ звідси } \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}; \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

ТЕМА 19. «ТОПОГРАФІЧНА ДІАГРАМА ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ»

Метою лекції є формування у студентів умінь застосовувати топографічні діаграми для аналізу електричних кіл синусоїдного струму. Студенти повинні розуміти принципи побудови таких діаграм, зв'язок між елементами електричного кола та їх векторними зображеннями, а також вміти використовувати діаграми для перевірки правильності розрахунків і визначення напруг між довільними точками кола. Опанування цього методу сприяє глибшому аналізу фізичних процесів у змінних режимах.

План:

- Поняття топографічної діаграми.
- Призначення та можливості застосування.
- Вибір точки нульового потенціалу.

Ключові слова: топографічна діаграма, променева діаграма, комплексні напруги, потенціали вузлів, векторна діаграма, вузол кола, зсув фаз, контур кола, Кірхгоф, змінний струм.

Keywords: topographic diagram, ray diagram, complex voltages, node potentials, vector diagram, circuit node, phase shift, circuit contour, Kirchhoff, alternating current.

Зображення синусоїдних функцій комплексними числами спрощує розрахунок синусоїдних кіл, так як дозволяє перейти від інтегро-диференціальних рівнянь електричної рівноваги до алгебраїчних відносно зображень.

Наприклад, для послідовного з'єднання R, L, C:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \rightarrow \underline{U}(t) = \underline{I}(t) \left[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right]$$

Розрахувавши це рівняння ми знаходимо не оригінал, а зображення. При цьому можна використовувати всі методи розрахунку кіл постійного струму. Це ми доведемо, якщо виразимо закони Ома та Кірхгофа в комплексній формі.

Закон Ома

Для кола з послідовним з'єднанням R, L, C маємо:

$$\underline{U} = \underline{I} \left[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \right] = \underline{I} \underline{Z}$$

звідси $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$ – закон Ома в комплексній формі.

Закони Кірхгофа

I закон Кірхгофа.

Алгебраїчна сума миттєвих значень струмів в вузлі дорівнює нулю:

$$\sum K_i = 0.$$

Це справедливо для будь-якого закону зміни струму, в тому числі і синусоїдного. Перейдемо до зображень:

$$i_k = I_{km} \sin(\omega t + \psi_{ik}) = \underline{I}_k(t) = \underline{I}_k \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

Якщо $\sum i_k = 0$, то сума зображень також дорівнює нулю.

Тоді $\sum \underline{I}_k \sqrt{2} e^{j\omega t} = 0$, або $\sum \underline{I}_k = 0$, – 1-й закон Кірхгофа.

Алгебраїчна сума комплексних струмів в вузлі дорівнює нулю.

II закон Кірхгофа.

Алгебраїчна сума миттєвих значень ЕРС в замкненому контурі дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих значень напруг на всіх ділянках цього контуру.

Для контуру з послідовним з'єднанням R, L, C одержимо:

$$\sum e_k = \sum (u_R + u_L + u_C) = \sum \left(R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt \right)$$

Перейдемо до комплексних миттєвих величин:

$$\sum \underline{E}_k(t) = \sum \underline{I}_k(t) \left[R_k + j(\omega L_k) - \frac{1}{C_k} \right] = \sum \underline{I}(t) \underline{Z}_k$$

$$\text{або } \sum \underline{E}_k \sqrt{2} e^{j\omega t} = \sum \underline{I}_k \sqrt{2} e^{j\omega t} \underline{Z}_k$$

$$\text{або } \sum \underline{E}_k = \sum \underline{I}_k \underline{Z}_k$$

Алгебраїчна сума комплексних ЕРС, діючих в замкненому контурі, дорівнює алгебраїчній сумі комплексних напруг на всіх ділянках цього контуру.

Одержані вирази для законів Ома та Кірхгофа в комплексній формі мають той же вигляд, що й для кіл постійного струму. Різниця в тому, що в цих виразах потрібно записувати струм, напругу та ЕРС в комплексній формі.

Отже, для розрахунку комплексних струмів та напруг, тобто зображень, справедливі всі розрахункові формули та методи, вивчені раніше для кіл постійного струму, тому що вони ґрунтуються на законах Ома та Кірхгофа.

Визначення комплексної повної потужності за комплексною напругою та комплексним струмом

Для кола синусоїдного струму потужності знаходяться за формулами:

$$P = UI \cos \varphi; \quad Q = UI \sin \varphi; \quad S = UI, \quad \text{де } \varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Нехай відомі комплексна напруга та струм:

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u}; \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i}; \quad \underline{I}^+ = I e^{-j\psi_i}$$

Визначимо P та Q за комплексним струмом та напругою. Враховуючи, що в аргументі ми повинні одержати різницю початкових фаз напруги та струму, тобто

$\psi_u - \psi_i$ то візьмемо спряжений комплексний струм. Тоді одержимо:

$$\underline{UI}^+ = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} = UI \cos\varphi + jUI \sin\varphi = P + jQ$$

$$= \underline{S}$$

звідси: $S = UI^+$ – комплексна повна потужність.

Баланс потужностей

Для перевірки правильності розрахунків кіл синусоїдного струму символьним методом застосовують рівняння балансу потужностей в комплексній формі.

В колах синусоїдного струму алгебраїчна сума комплексних потужностей, що віддаються джерелами електричної енергії, дорівнює сумі комплексних потужностей, що споживаються приймачами.

$$\sum \underline{E}_k I_k^+ = \sum \underline{Z}_k I_k^+$$

При цьому, якщо напрям комплексних ЕРС та струму в гілці співпадають, то добуток $\underline{E}_k I_k^+$ береться з додатнім знаком і навпаки.

ТЕМА 20. «РОЗРАХУНОК КІЛ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ СИМВОЛІЧНИМ МЕТОДОМ»

Метою є формування в студентів здатності виконувати комплексний розрахунок електричних кіл синусоїдного струму за допомогою символічного методу. Студенти повинні навчитися переходити від диференціальних рівнянь до алгебраїчних співвідношень, визначати комплексні опори, струми, напруги та потужності в простих і складних електричних колах. Особлива увага приділяється побудові топографічних діаграм — за променевими діаграмами струмів, комплексними напругами та потенціалами вузлів — як важливому інструменту контролю правильності розрахунків і аналізу енергетичних процесів у колі.

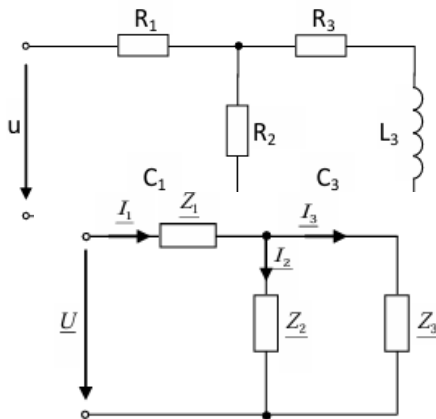
План:

- Побудова діаграми за променевою діаграмою струмів.
- Побудова діаграми за комплексними напругами.
- Побудова діаграми за потенціалами вузлів.
- Аналіз точності розрахунків за замкнутістю топографічної діаграми.

Ключові слова: символічний метод, комплексний опір, комплексна провідність, контурні струми, комплексна напруга, комплексний струм, активна потужність, реактивна потужність, повна потужність,

еквівалентний опір, топографічна діаграма, променева діаграма, вузлові потенціали, баланс потужностей, синусоїдний режим.

Keywords: symbolic method, complex resistance, complex conductivity, loop currents, complex voltage, complex current, active power, reactive power, apparent power, equivalent resistance, topographic diagram, ray diagram, nodal potentials, power balance, sinusoidal mode.



Прості кола

Дано: $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$; R_k ; L_k ; C_k

Визначити: i_1 ; i_2 ; i_3 , P , Q , S .

Рішення:

1. Перейдемо до розрахункової схеми з комплексними параметрами, для чого визначимо комплексні опори гілок:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jx_1 = E - j \frac{1}{\omega C_1}$$

$$\underline{Z}_1 = R_2$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = R_3 + j \left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_3} \right)$$

$$\underline{U} = U e^{j\psi_u}$$

2. Визначимо еквівалентний комплексний опір кола:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{ек} = \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_1; (\underline{Z}_{ек} = R_{ек} + jX_{ек})$$

3. Визначимо комплексні струми:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{екв}} = I_1 e^{j\psi_{i1}}; \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = I_2 e^{j\psi_{i2}}; \underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = I_3 e^{j\psi_{i3}}$$

Перевірка; $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

4. Запишемо дійсні миттєві струми:

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t \psi_{i1}); i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t \psi_{i2}); i_3 = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t \psi_{i3});$$

5. Визначимо комплексні потужності джерела та приймачів:

$$\underline{S}_д = \underline{U} \underline{I}_1^+ = U e^{j\psi_u} I_1 e^{-j\psi_i} = U I_1 e^{j\varphi} = U I_1 \cos \varphi + j U I_1 \sin \varphi = P_д + j Q_д$$

$$\underline{S}_{cn} = \underline{Z}_{ек} \underline{I}_1^2 = (R_{ек} + jX_{ек}) I_1^2 = R_{ек} I_1^2 + j X_{ек} I_1^2 = P_{cn} + j Q_{cn}$$

$$P_{cn} = R_{ек} I_1^2; Q_{cn} = X_{ек} I_1^2; S_д = U I_1 = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

6. Перевіримо баланс потужностей:

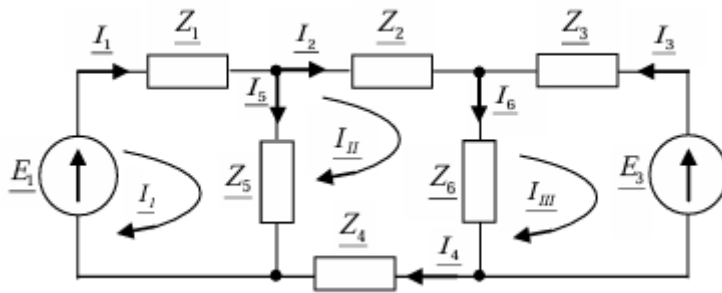
$$\underline{S}_д = \underline{S}_{cn}; \underline{U} \underline{I}_1^+ = \underline{Z}_1 \underline{I}_1^2 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2^2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3^2$$

Складні електричні кола

Розрахунок складних кіл синусоїдного струму символічним методом виконується аналогічно розрахунку електричних кіл постійного струму, тобто за

допомогою тих самих методів, але всі величини представлені в комплексній формі.

Нехай задано складне електричне коло синусоїдного струму.



Дано: E_1, E_2, Z_k

Визначити: I_k, U_k, P, Q, S .

Рішення:

1. Виконаємо розрахунок методом контурних струмів, для цього визначимо незалежні контури та задамося

в них напрямками контурних струмів.

Число незалежних контурів: $n = p - (q - 1) = 6 - (4 - 1) = 3$.

2. Складемо систему контурних рівнянь:

$$\begin{aligned} I_1(Z_1 + Z_5) &= -I_{II}Z_5 = E_1 \\ -I_1Z_5 + I_{II}(Z_2 + Z_4 + Z_5) - I_{III}Z_6 &= 0 \\ -I_{II}Z_6 + I_{III}(Z_3 + Z_6) &= -E_3 \end{aligned}$$

Розрахувавши систему, визначимо комплексні контурні струми I_I, I_{II}, I_{III}

3. Задамо напрямки дійсних струмів в гілках і визначимо їх комплексні значення:

$$I_1 = I_I; I_2 = I_{II}; I_3 = -I_{III}; I_4 = I_{II}; I_5 = I_I - I_{II}; I_6 = I_{II};$$

4. За комплексними струмами визначаємо дійсні струми в гілках.

5. Визначимо комплексні падіння напруги на ділянках електричного кола $U_k = Z_k I_k$, а за їх значеннями визначимо дійсні падіння напруги.

6. Визначимо потужності джерел та приймачів:

$$\underline{S}_d = \sum \underline{E}_k \underline{I}_k = P_d + jQ_d; S_d = \sqrt{P_d^2 + Q_d^2}; \underline{S}_n = \sum I_k^2 \underline{Z}_k$$

7. Перевірка за балансом потужностей: $\underline{S}_d = \underline{S}_n$

ТЕМА 21. «МЕТОДИ ПОБУДОВИ ТОПОГРАФІЧНИХ ДІАГРАМ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ»

Метою є опанування студентами трьох основних методів побудови топографічних діаграм: за променевою діаграмою струмів, за комплексними напругами та за вузловими потенціалами. Лекція спрямована на формування практичних навичок відтворення топографічних діаграм у різних варіантах та застосування їх для визначення напруг, перевірки рівнянь Кірхгофа та аналізу поведінки складних кіл синусоїдного струму.

План:

- Метод 1: побудова за променевою діаграмою струмів.
- Метод 2: побудова за комплексними напругами в алгебраїчній формі.
- Метод 3: побудова за комплексними потенціалами точок.
- Особливості відповідності напрямів напруг та потенціалів.
- Геометричний аналіз напруг між довільними точками.
- Перевірка розрахунків за замкнутістю діаграми.
- Приклади використання у практичних задачах.

Ключові слова: метод побудови діаграми, комплексна напруга, векторний аналіз, фазові співвідношення, потенціали вузлів, контурна напруга, синусоїдний режим, геометричний метод.

Keywords: diagram construction method, complex voltage, vector analysis, phase relations, node potentials, contour voltage, sinusoidal mode, geometric method.

Топографічна діаграма – це векторна діаграма напруг кола змінного струму, в якій напруги на всіх елементах контуру побудовані в послідовності розміщення елементів в контурі, тому кожній точці на топографічній діаграмі відповідає визначена точка електричного кола.

Топографічна діаграма будується за результатами розрахунку кола символічним методом і дозволяє:

- визначити графічно як величину, так і початкову фазу напруги між будь-якими точками електричного кола;
- перевірити правильність розрахунку електричного кола (для кожного контуру векторна діаграма напруг повинна бути замкнута);
- детальніше вивчити фізичні процеси в колі.

За початок відліку на топографічній діаграмі вибирають довільну точку вихідного електричного кола і приймають потенціал її рівним нулю, тобто су міщають її з початком координат комплексної площини.

Послідовність побудови топографічної діаграми розглянемо на конкрет ному прикладі.

Приклад № 1. Побудувати топографічну діаграму для кола рис. 3.31,а, якщо

$$\underline{E}_1 = 100 \text{ В}, \underline{E}_2 = j150 \text{ В}, \underline{Z}_1 = 40 \text{ Ом}, \underline{Z}_2 = j20 \text{ Ом},$$

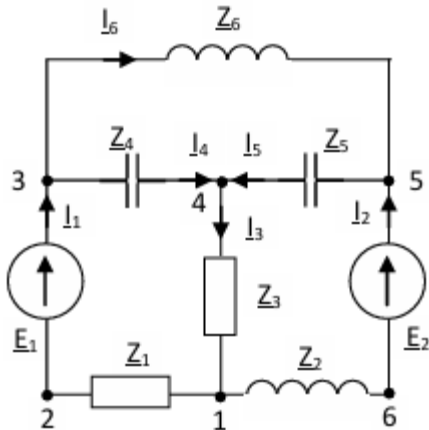
$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = \underline{Z}_5 = -j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_6 = j15 \text{ Ом}, I_1 = -1,69 + j3,73 \text{ А},$$

$$I_2 = 4,97 + j5,59 \text{ А},$$

$$I_3 = 3,28 + j9,32 \text{ А}, I_4 = 11,63 + j7,43 \text{ А}$$

$$I_5 = -8,35 + j1,89 \text{ А}, I_6 = -13,32 - j3,7 \text{ А}.$$



Рішення

I спосіб: – з використанням променевої діаграми струмів та діючих напруг на ідеальних елементах кола.

1. Будуємо променеву векторну діаграму струмів – сукупність векторів всіх струмів кола, що виходять з початку координат комплексної площини. Таким чином задаємо напрями струмів у всіх гілках кола.

2. Задаємося на схемі електричного кола точкою нульового потенціалу, нехай $V_1 = 0$, від якої будемо починати побудову топографічної діаграми. Ця точка на топографічній діаграмі відповідає початку координат. Вказуємо на прям обходу контуру, наприклад 1-2-3-4-5-6-1.

3. Для контуру з вибраною початковою точкою складаємо рівняння за другим законом Кірхгофа для векторів напруг на всіх елементах контуру, починаючи від вибраної точки. ЕРС джерел енергії можна замінити спадами на пруг на їх затискачах, які рівні їм, але протилежні за напрямом.

$$\bar{U}_{12} - \bar{U}_{23} + \bar{U}_{34} - \bar{U}_{45} + \bar{U}_{56} - \bar{U}_{61} = 0.$$

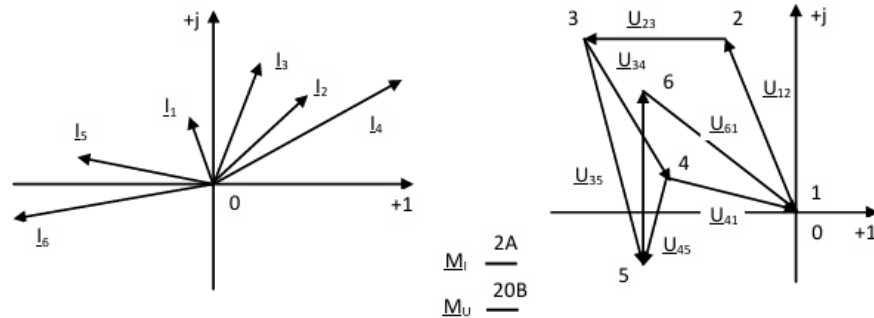
4. Знаходимо діючі значення напруг:

$$U_{12} = Z_1 I_1; U_{23} = E_1; U_{34} = Z_4 I_4; U_{45} = Z_5 I_5; U_{45} = E_2; U_{61} = Z_2 I_2.$$

5. На комплексній площині з початку координат в вибраному масштабі відкладаємо діючі значення напруг в послідовності розміщення елементів контуру чи за рівнянням (1), орієнтуючи їх відносно напрямів струмів в гілках, зображених на променевій діаграмі. Напруги на резисторах відкладаються за напрямом струму в них, напруги на реактивних елементах – під кутом $\pm 90^\circ$ до струму (L чи C). Наступний вектор напруги будується з кінця попереднього і орієнтується відносно свого струму. Кінець останнього вектора прийде в

початок координат. ЕРС чи напруга на ній орієнтуються відносно координатних осей за їх комплексною величиною, записаною в алгебраїчній формі.

II спосіб: – з використанням комплексних напруг на елементах кола чи гілках кола, записаних в алгебраїчній формі.



1. Як і в першому випадку, приймаємо потенціал однієї із точок кола рівним нулю і вказуємо напрям обходу контуру.

2. Складаємо рівняння для замкнутих контурів за другим законом Кірхгофа для комплексних напруг на пасивних і активних елементах в послідовно сті їх розміщення, починаючи їх обхід з точки нульового потенціалу. При цьому напруги на пасивних елементах кола, напрям обходу яких співпадає з напрямом струму в них, беруться з додатним знаком і навпаки. Напруги на джерелах ЕРС беруться додатними при їх зустрічному обході і навпаки. Наприклад, для контуру 1-2-3-4-5-6-1:

$$\underline{U}_{12} - \underline{U}_{23} + \underline{U}_{34} - \underline{U}_{45} + \underline{U}_{56} - \underline{U}_{61} = 0.$$

3. Знаходимо комплексні напруги на всіх елементах контуру і записуємо їх в алгебраїчній формі (напрямок напруг врахований в рівнянні (2)):

$$\underline{U}_{12} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = 40(-1,69 + j3,73) = -67,6 + j149,2 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{E}_1 = 100 \text{ В}, \underline{U}_{34} = \underline{Z}_4 \underline{I}_4 = -j10(11,63 + j7,43) = 74,3 - j116,3 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{45} = \underline{Z}_5 \underline{I}_5 = -j10(-8,35 + j1,89) = 18,9 + j83,5 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{56} = \underline{E}_2 = j150 \text{ В},$$

$$\underline{U}_{61} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = j20(4,97 + j5,59) = -111,8 + j99,4 \text{ В}.$$

4. Будуємо на комплексній площині в вибраному масштабі вектори напруг в послідовності розміщення елементів в контурі чи за рівнянням (2). Початок першого вектора напруги суміщаємо з початком координат, а наступний вектор будуємо з кінця попереднього як з початку координат: – по осі дійсних чисел відкладаємо дійсну частину комплексної напруги, а по осі уявних чисел – уявну частину, знайдену координату з'єднуємо з кінцем попереднього вектора і т. д. Кінець останнього вектора прийде в початок координат.

III спосіб: – з використанням комплексних потенціалів, знайдених для кожної точки контуру.

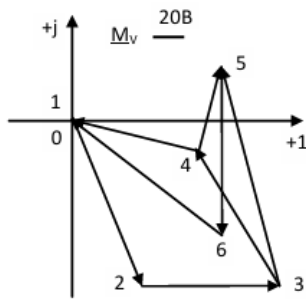
1. Приймаємо потенціал однієї із точок електричного кола рівним нулю і вказуємо напрям обходу контуру, наприклад, 1-2-3-4-5-6-1. Нехай $V_1 = 0$.

2. Послідовно визначаємо комплексні потенціали точок і записуємо їх в алгебраїчній формі:

$\underline{V}_1 = 0$; $\underline{V}_2 = \underline{V}_1 - \underline{U}_{12} = -\underline{U}_{12}$, (знак V_2 протилежний знаку напруги U_{12}),

$$\underline{V}_3 = \underline{V}_2 + \underline{E}_1; \underline{V}_4 = \underline{V}_3 - \underline{U}_{34}; \underline{V}_5 = \underline{V}_4 + \underline{U}_{45}; \underline{V}_6 = \underline{V}_5 - \underline{E}_2.$$

3. Будуємо на комплексній площині в вибраному масштабі точки, що від



повідують потенціалам точок схеми електричного кола (як для кінців векторів струмів про меневуї діаграми).

4. Знаходимо напруги між окремими точками, для цього достатньо їх з'єднати. Відрізок, що з'єднує точки з різними потенціалами, ви значає різницю потенціалів цих точок електричного кола, тобто визначає напругу між цими точками кола. Але на цій діаграмі вектори на пруг будуть направлені назустріч додатному напрямку напруг між цими точками на схемі. Справа в тому, що напруга направлена за струмом, тобто до вузла, куди тече струм, а потенціал більший того вузла, звідки тече струм, а це протилежні напрями. Тому топографічна діаграма, побудована за потенціалами, симетрична відносно початку координат до топографічної діаграми, побудованої за спадами напруг. Всі інші співвідношення – спади напруг між різними точками схеми, зсув фаз між ними – залишаються незмінними.

ТЕМА 22. « ПРАКТИЧНІ ПРИКЛАДИ ПОБУДОВИ ТА АНАЛІЗУ ТОПОГРАФІЧНИХ ДІАГРАМ У РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ СИНУСОЇДНОГО СТРУМУ»

Мета є навчити студентів застосовувати топографічні діаграми під час аналізу реальних, у тому числі складних та розгалужених електричних кіл. Студенти повинні навчитися проводити повний цикл розрахунку: визначення струмів і напруг символьним методом, побудова топографічної діаграми, знаходження різниць потенціалів між будь-якими точками та виконання перевірки розрахунків за законом Кірхгофа. Такий підхід дозволяє комплексно оцінювати синусоїдні режими та виявляти можливі помилки в обчисленнях.

План:

- Загальна схема розрахунку складного кола (символьний метод).
- Вибір початкової точки та напрямку обходу контуру.
- Побудова топографічної діаграми за комплексними напругами.
- Пошук напруг між довільними точками.
- Аналіз фазових співвідношень у складних контурах.
- Застосування топографічної діаграми для перевірки балансу напруг.
- Використання діаграми для контролю правильності розрахунків потужностей.

Ключові слова: складне електричне коло, топографічна діаграма, комплексний розрахунок, фаза напруги, контурний аналіз, символьний метод, баланс напруг, аналітичний контроль, векторне представлення.

Keywords: complex electrical circuit, topographic diagram, complex calculation, voltage phase, contour analysis, symbolic method, voltage balance, analytical control, vector representation.

В колах змінного струму, що містять індуктивні котушки та конденсатори, можливі випадки, коли їх еквівалентний реактивний опір або еквівалентна реактивна провідність дорівнюють нулю, тобто $X = X_L - X_C = 0$ або $B = B_L - B_C = 0$.

Струм та напруга у цьому випадку співпадають за фазою, а коло носить активний характер. Таке явище називається резонансом.

Резонанс – це такий стан електричного кола, яке містить котушки індуктивності та конденсатори, при якому зсув фаз між напругою та струмом дорівнює нулю $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0$.

Розрізняють два види резонансу:

резонанс напруг, що виникає в колах з послідовним з'єднанням R, L, C;
резонанс струмів, що виникає в колах з паралельним з'єднанням R, L, C.

Резонансні явища знаходять широке застосування в авіаційному обладнанні літальних апаратів: в схемах автоматичного регулювання частоти перетворювачів постійно го струму в змінний; в блоках підвищення та пониження частоти; в коректорах частоти приводів постійної частоти обертання.

Дослідити резонансні явища в електричному колі означає: визначити кутову частоту, при якій в колі наступає резонанс; визначити залежність струму в колі, або напруги на його ділянці від частоти, індуктивності або ємності; розглянути енергетичні процеси при резонансі.

Резонанс напруг

Розглянемо коло з послідовним з'єднанням R, L, C.

До кола прикладемо синусоїдну напругу:

$$u = U\sqrt{2}\sin\omega t.$$

Нехай в даному колі індуктивний опір до рівнює ємнісному, тобто $X_L = X_C$, тоді реактивний опір кола буде дорівнювати: $X = X_L - X_C = 0$,

а повний опір $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, тобто повний опір дорівнює активному опору.

В цьому випадку струм в колі досягне максимального значення, а напруга на індуктивній котушці $U_L = X_L \cdot I$ та конденсаторі $U_C = X_C \cdot I$ за умови, що $X_L = X_C \gg R$, значно перевищує напругу, прикладену до кола.

Тому резонанс в колі з послідовним з'єднанням R, L, C одержав назву резонансу напруг.

Резонанс напруг – це явище резонансу на ділянці електричного кола, що містить послідовне з'єднання котушок індуктивності та конденсаторів.

Побудуємо векторну діаграму для випадку резонансу напруг

$$\bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = U$$

Отже, при резонансі напруг, напруга на активному опорі дорівнює напрузі, прикладеній до кола:

$$U_R = I \cdot R = U$$

З діаграми також бачимо, що струм співпадає за фазою з напругою. Таким чином, резонанс напруг в колі з послідовним з'єднанням R, L, C настане при умові:

$$X_L = X_C \text{ або } \omega L = \frac{1}{\omega C}, \omega^2 LC = 1/$$

З останнього виразу бачимо, що резонансу можна досягнути змінюючи L, C або ω .

При $L = \text{const}$; $C = \text{const}$ резонанс настає при кутовій частоті, що дорівнює:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ — частота особливих коливань контуру.}$$

При $L = \text{const}$; $\omega = \text{const}$ резонанс наступить при ємності:

$$C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}$$

При $C = \text{const}$; $\omega = \text{const}$ резонанс наступить при індуктивності:

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}$$

Напруги на індуктивній котушці та на конденсаторі при резонансі будуть дорівнювати:

$$U_{L0} = \omega_0 L \cdot I = \frac{1}{\sqrt{LC}} L \cdot I = I \sqrt{\frac{L}{C}} = I \cdot \rho;$$

$$U_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} \cdot I = \frac{\sqrt{LC}}{C} \cdot I = I \sqrt{\frac{L}{C}} = I \cdot \rho,$$

де $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — хвильовий опір контуру:

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Реактивна потужність при резонансі дорівнює нулю:

$$Q = I^2(X_L - X_C) = 0$$

тоді повна потужність дорівнює активній:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P$$

а коефіцієнт потужності дорівнює одиниці:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{R}{Z} = 1$$

Добротність та згасання контуру

Відношення напруги на котушці індуктивності або конденсаторі до напруги на затискачах кола при резонансі називається добротністю контуру:

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{\omega_0 LI}{RI} = \frac{\rho}{R}$$

В технічних пристроях $Q=5\dots 5000$.

Добротність контуру показує в скільки разів при резонансі напруга на індуктивній котушці або на конденсаторі більше, ніж напруга, прикладена до кола.

Добротність резонансного контуру тим більша, чим менший активний опір контуру.

Величина, обернена добротності, називається затуханням резонансного контуру:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}$$

Частотні характеристики кола з послідовним з'єднанням R, L, C

Частотні характеристики – це залежності величин X , X_L , X_C , Z та φ від частоти прикладеної напруги. При цьому $\omega=0\dots\infty$. Зобразимо вказані залежності:

1. $X_L = \omega L$ – лінійна залежність; $X_L(0) = 0$; $X_L(\infty) = \infty$;

2. $X_C = \frac{1}{\omega C}$ – гіпербола; $X_C(0) = \infty$; $X_C(\infty) = 0$;

3. $X = X_L - X_C$; $X(0) = -\infty$; $X(\omega_0) = 0$; $X(\infty) = \infty$;

$$4. Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} - \text{парабола}; Z(0) = \infty; Z(\omega_0) = R; Z(\infty) = \infty;$$

$$5. \varphi = \arctg \frac{X}{R}; \varphi(0) = -\frac{\pi}{2}; \varphi(\omega_0) = 0; \varphi(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

При $\omega < \omega_0$ – ємнісний характер кола;

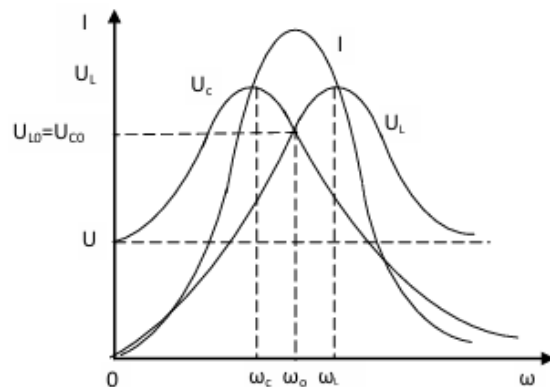
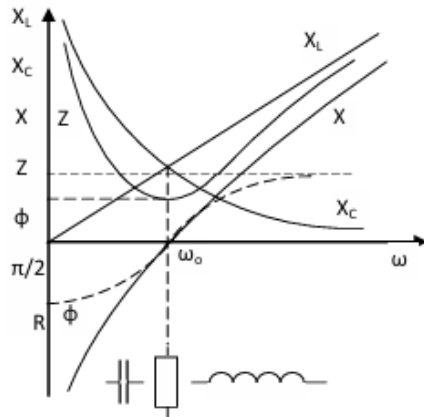
при $\omega = \omega_0$ – активний характер кола;

при $\omega > \omega_0$ – індуктивний характер кола.

Резонансні характеристики – це залежності U_L , U_C , I від частоти прикладеної напруги ω (або від значень L та C).

Побудуємо резонансні характеристики в залежності від частоти. Нехай $\omega = 0 \dots \infty$.

$$1. I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. I(0) = 0; I(\omega_0) = \frac{U}{R}; I(\infty) = 0$$



$$2. U_0 = \frac{I}{\omega C} = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}; U_C(0) = U;$$

$$U_{C0}(\omega_0) = U \frac{\rho}{R} = UQ; U_C(\infty) = 0$$

Для визначення частоти ω_C , при якій U_C досягає максимуму, дослідимо підкореневий вираз на мінімум:

$$\frac{d}{d\omega} (R^2 \omega^2 C^2 + \omega^4 L^2 C^2 - 2\omega^2 LC + 1) = 0$$

$$2R^2 C^2 \omega + 4L^2 C^2 \omega^3 - 4L C \omega = 0 \mid : 2\omega C$$

$$R^2 C + 2L^2 C \omega^2 - 2L = 0$$

$$2L^2C\omega^2 = 2L - R^2C$$

$$\omega^2 = \frac{2L}{2L^2C} - \frac{R^2C}{2L^2C} = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} = \frac{1}{LC} \left(1 - \frac{R^2C}{2L} \right) = \omega_0^2 = \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)$$

Таким чином $\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}$; $\omega_c < \omega_0$, так як підкореневий вираз менший за одиницю.

$$3. U_L = \omega LI = \frac{\omega UL}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)}}$$

Частота ω_L , при якій U_L досягає максимуму, визначається аналогічно по передньому випадку і дорівнює:

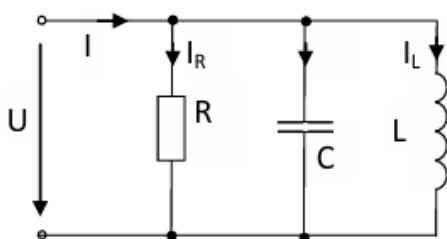
$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{2\rho^2}}}; \quad \omega_L$$

$> \omega_0$ тому що підкореневий вираз менший за одиницю.

Максимальні значення напруги на індуктивній котушці та конденсаторі будуть дорівнювати:

$$U_{L \max} = U_L(\omega_L) = U_{C \max} = U_C(\omega_c) = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{4\rho^2}}} = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{d^2}{4}}}$$

Резонанс струмів, добротність та згасання контуру



Розглянемо коло з паралельним з'єднанням R, L, C

До кола прикладемо синусоїдну напругу $u = U_m \sin \omega t$.

Нехай в колі $B_L = B_c$, тоді $B = B_L - B_c = 0$, а $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G$, тобто повна провідність кола дорівнює активній.

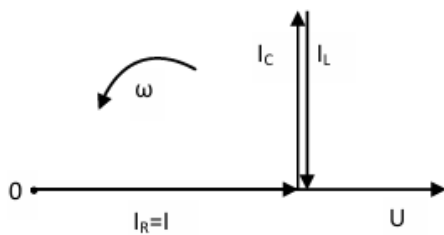
В цьому випадку струм в нерозгалуженій ділянці кола I досягне максимального значення ($I = UG$), а струми в гілках з індуктивністю I_L та

ємністю I_c за умови, що $B_L = B_C > G$, значно перевищать струм в нерозгалуженій ділянці кола. Тому резонанс в колі з паралельним з'єднанням R, L, C одержав назву резонансу струмів.

Резонанс струмів – це явище резонансу на ділянці електричного кола, що містить паралельне з'єднання R, L, C .

Побудуємо векторну діаграму для випадку резонансу струмів:

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$$



Отже, при резонансі струмів струм в резисторі дорівнює струму в нерозгалуженій ділянці кола, а струм і напруга на вході кола співпадають за фазою.

Таким чином, загальною умовою резонансу струмів для даного кола являється $B_L = B_C$; або $\frac{1}{\omega L} = \omega C$,

$$\text{або } \omega^2 LC = 1$$

Отже, резонансу струмів можна досягти змінюючи L, C або ω , відповідно будемо мати резонансні параметри:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}$$

При резонансі струмів струми в індуктивній котушці та конденсаторі будуть однакові:

$$I_{L0} = B_L U = \frac{1}{\omega_0 L} U = \frac{\sqrt{LC}}{L} U = U \sqrt{\frac{C}{L}} = U \gamma$$

$$I_{C0} = B_C U = \omega_0 C U = \frac{C}{\sqrt{LC}} U = U \sqrt{\frac{C}{L}} = U \gamma$$

де $\gamma = \sqrt{\frac{C}{L}} = B_{L0} = B_{C0}$ [См] – хвильова провідність.

Реактивна потужність при резонансі

$$Q = U^2(B_L - B_C), \text{ тоді } S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$= P, \text{ а коефіцієнт потужності } \cos \varphi = \frac{P}{S} = 1$$

Відношення струму в гілці з індуктивністю, або струму в гілці з ємністю до струму в нерозгалуженій ділянці кола при резонансі називають добротністю контуру

$$\frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{U\gamma}{UG} = \frac{\gamma}{G} = Q$$

Величина, обернена добротності, називається згасанням резонансного контуру

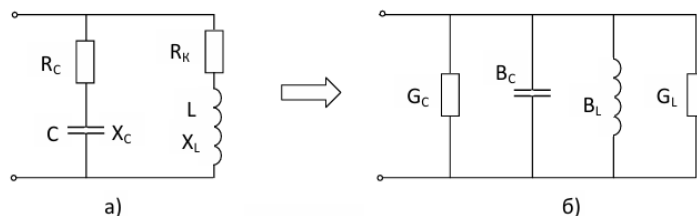
$$d = \frac{1}{Q} = \frac{G}{\gamma}$$

Для збільшення добротності контуру необхідно $G \downarrow$, тобто $R \uparrow$.

Нехай $R \rightarrow \infty$, в цьому випадку в колі маємо тільки ідеальні індуктивність та ємність, $Y=0$ і $Z = 1/Y \rightarrow \infty$. Отже, струм в нерозгалуженій ділянці кола буде дорівнювати нулю, при цьому енергія від джерела не надходить, а відбуваються лише періодичні коливання енергії між магнітним полем котушки та електричним полем конденсатора.

В реальних електричних колах індуктивна котушка та конденсатор мають активний опір

В цьому випадку необхідно враховувати еквівалентні індуктивні та ємності провідності:



$$B_{L \text{ ек}} = B_{C \text{ ек}}, \text{ де } B_{L \text{ ек}} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2}; B_{C \text{ ек}} = \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} \\ = \frac{1}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2};$$

Тоді:

$$\frac{\omega L}{R_L^2 + (\omega L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

звідси знаходимо резонансну частоту в реальному контурі

$$\omega = \sqrt{\frac{L - R_L^2 C}{LC(L - R_C^2 C)}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - R_L^2 \gamma^2}{1 - R_C^2 \gamma^2}}$$

Частотні характеристики кола з паралельним з'єднанням R, L, C

Частотні характеристики – це залежність величин B_L , B_C , B , Y та φ від частоти прикладеної напруги. Зобразимо вказані залежності.

1) $B_L = \frac{1}{\omega L}$ – гіпербола; $B_L(0) = \infty$; $B_L(\infty) = 0$

2) $B_C = \omega C$ – лінійна залежність; $B_C(0) = 0$; $B_C(\infty) = \infty$

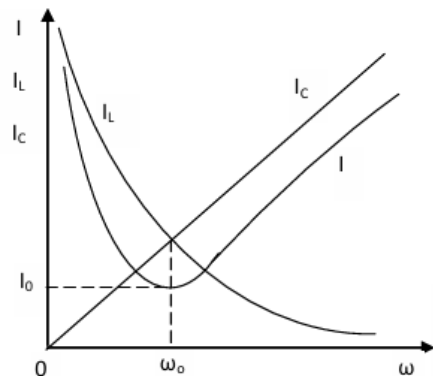
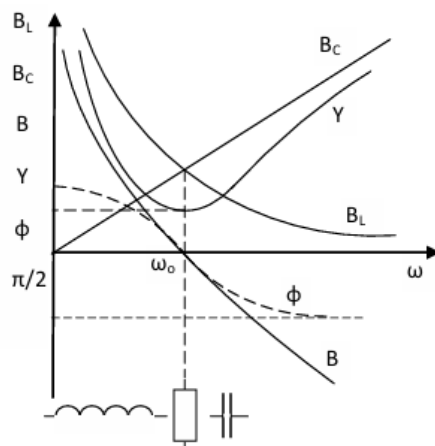
3) $B = B_L - B_C$; $B = \frac{1}{\omega L} - \omega C$; $B_C(0) = \infty$; $B(\omega_0) = 0$; $B_C(\infty) = -\infty$

4) $Y = \sqrt{G^2 + B^2}$; – парабола; $Y = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$; $Y(0) = \infty$; $Y(\omega_0)$
 $= G$;

$Y(\infty) = \infty$

5) $\varphi = \arctg \frac{B}{C}$; $\varphi(0) = +\frac{\pi}{2}$; $\varphi(\omega_0) = 0$; $\varphi(\infty) = -\frac{\pi}{2}$

Резонансні характеристики – це залежності I_L , I_C , I від частоти прикладеної напруги. Зобразимо вказані залежності



Ці характеристики справедливі для ідеального резонансного контуру. В випадку реального контуру необхідно врахувати активні опори котушки індуктивності та конденсатора.

Енергетичні процеси при резонансі

Розглянемо енергетичні процеси при резонансі на прикладі контуру з послідовним з'єднанням R, L, C .

До кола прикладена синусоїдна напруга $u = U_m \sin \omega_0 t$. Так як коло при резонансі носить активний характер, то струм буде дорівнювати $i = I_{m0} \sin \omega_0 t$, а напруга на конденсаторі буде відставати від струму на 90° , тобто

$$u_c = U_{mc} \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = -U_{mc} \cos \omega_0 t$$

Визначимо миттєві значення енергії:

$$w_m = \frac{Li^2}{2} = \frac{Li_{m0}^2}{2} \sin^2 \omega_0 t = \frac{Li_{m0}^2}{4} (1 - \cos 2\omega_0 t)$$

$$w_e = \frac{Cu_c^2}{2} = \frac{CU_{m.c.}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t = \frac{CU_{m.c.}^2}{4} (1 + \cos 2\omega_0 t)$$

Враховуючи, що при резонансі

$$U_{m.c.} = I_{m0} X_C = \frac{I_{m0}}{\omega_0 C} = I_{m0} \frac{\sqrt{LC}}{C} = I_{m0} \frac{\sqrt{L}}{C}; \quad U_{m.c.}^2 = I_{m0}^2 \frac{L}{C}$$

Підставимо одержане значення в вираз для w_e :

$$w_e = \frac{CI_{m0}^2 L}{4C} (1 + \cos 2\omega_0 t) = \frac{LI_{m0}^2}{4} (1 + \cos 2\omega_0 t)$$

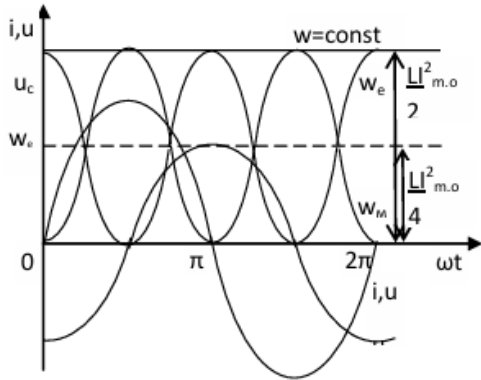
Отже, максимальна енергія, накопичена в електричному полі конденсатора, дорівнює максимальній енергії, накопиченій в магнітному полі котушки індуктивності.

Визначимо миттєву енергію резонансного контуру:

$$w = w_m + w_e = \frac{LI_{m0}^2}{2} (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{LI_{m0}^2}{2}$$

Таким чином, миттєва енергія, накопичена в магнітному і електричному полях при резонансі, є величиною сталою і не залежить від часу.

Зобразимо часові діаграми миттєвих енергій.



З часових діаграм видно, що при резонансі напруг, магнітне та електричне поля безперервно обмінюються енергією. Коло поводить себе як активний опір, тому повертання енергії з магнітного та електричного полів джерелу немає.

В випадку паралельного з'єднання R, L, C , тобто при резонансі струмів, енергетичні процеси будуть аналогічними. В цьому випадку струм в котушці буде відставати від напруги на конденсаторі на 90° . Тому всі висновки, приведені вище, будуть справедливими і для паралельного контуру.

Підвищення коефіцієнта потужності та його практичне значення

Економічне значення коефіцієнта потужності $\cos \varphi$ полягає в тому, що від його величини залежать витрати на експлуатацію, а також ефективність використання електрообладнання.

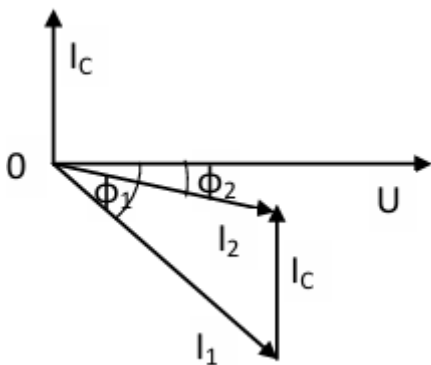
Розглянемо декілька приймачів електричної енергії, що працюють з однаковою активною потужністю, напругою, але при різних $\cos \varphi$, тобто звідси $\cos \varphi = \text{const}; U = \text{const};$

$\cos \varphi = \text{var}$

В цьому випадку: $P = UI \cos \varphi$, звідси $I = P / \cos \varphi$

Отже, з зменшенням $\cos \varphi$, струм буде збільшуватись, а це призводить:

- до збільшення втрат енергії на активних опорах кола, тобто $\Delta P = R_e I^2$
- до збільшення перерізу проводів, що призводить до збільшення їх маси;
- до збільшення вартості системи;
- до зменшення ККД та ефективності використання енергетичних систем.



Тому виникає необхідність підвищення коефіцієнта потужності кола. Це досягається шляхом вмикання паралельно до приймача з низьким коефіцієнтом потужності батареї конденсаторів, що пояснює векторна діаграма.

I_C – струм батареї конденсаторів; I_1 – струм навантаження; I_2 – струм навантаження з урахуванням конденсаторів. ; $\varphi_2 < \varphi_1$. $\cos \varphi_2 > \cos \varphi_1$

ЧАСТИНА II

ТЕМА 23. «РЕЗОНАНСНІ ЯВИЩА В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ»

Метою є формування розуміння фізичної сутності резонансних явищ у електричних колах змінного струму, а також умов їх виникнення у послідовних та паралельних RLC-контурах. Студенти повинні навчитися визначати резонансну частоту, аналізувати частотні, резонансні характеристики, добротність, загасання та енергетичні процеси при резонансі. Особлива увага приділяється практичним аспектам: використанню резонансу в техніці та підвищенню коефіцієнта потужності.

План лекції (стислий)

- Поняття резонансу в електричних колах.
- Послідовний резонанс: умови, струми, напруги.
- Паралельний резонанс: умови, струми, напруги.
- Резонансна частота та її визначення.
- Добротність контуру та загасання.
- Частотні та амплітудно-фазові характеристики.
- Енергетичні процеси при резонансі.
- Практичне застосування резонансних кіл.

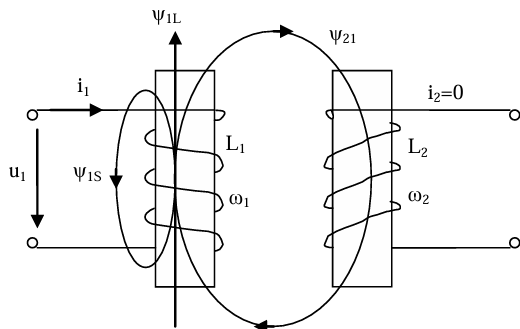
Ключові слова: резонанс, резонанс напруг, резонанс струмів, послідовний RLC-контур, паралельний RLC-контур, реактивний опір, добротність, загасання, резонансна частота, частотні характеристики, енергетичні процеси, коефіцієнт потужності, фазові співвідношення.

Keywords: resonance, voltage resonance, current resonance, series RLC circuit, parallel RLC circuit, reactance, quality factor, damping, resonant frequency, frequency characteristics, energy processes, power factor, phase relations.

Електричні кола, які мають загальний магнітний потік, називаються колами з взаємною індукцією або індуктивно зв'язаними (або з індуктивним зв'язком).

Якщо магнітне поле однієї індуктивної котушки частково зціплене з витками другої котушки, то такі індуктивні котушки називаються індуктивно зв'язаними.

Розглянемо дві індуктивні котушки, розташовані поруч.



Нехай перша котушка підключена до джерела напруги і по ній протікає струм i_1 , а друга котушка вимкнута, тому $i_2=0$.

Навколо першої котушки виникає магнітне поле.

Магнітний потік, зчеплений з витками першої котушки і обумовлений струмом в ній, називається потокозчепленням самоіндукції:

$$\psi_{1L} = \omega_1 \Phi_1 = L_1 i_1 \text{ [Вб]}.$$

Напрямок потокозчеплення визначається за правилом правої руки. Але може бути, що частина магнітного потоку першої котушки зчеплена з витками другої котушки. з

Магнітний потік, обумовлений струмом в першій котушці, і зчеплений витками другої котушки (тобто частина потокозчеплення самоіндукції I котушки) називається потокозчепленням взаємної індукції:

$$\psi_{21} = \psi_{2m} = M_{21} \cdot i_1,$$

де $M_{21} = \psi_{21}/i_1$ – взаємна індуктивність між першою та другою котушками, залежить від форми, розмірів, взаємного розташування котушок та магнітних властивостей середовища.

Решта потокозчеплення самоіндукції першої котушки, яка зчеплена тільки з власними витками називається потокозчепленням розсіяння:

$$\psi_{1s} = L_{1s} \cdot i_1,$$

де L_{1s} – індуктивність розсіяння першої котушки. Таким чином:

$$\psi_{1L} = \psi_{21} + \psi_{1s},$$

Якщо струм в першій котушці змінюється за часом, то і потокозчеплення будуть змінними величинами. За законом Фарадея в першій котушці буде наводитися ЕРС самоіндукції:

$$e_{1L} = -d\psi_{1L} / dt = -L_1 \cdot di_1 / dt,$$

а в другій – ЕРС взаємної індукції:

$$e_{2L} = -d\psi_{21} / dt = -M_{21} \cdot di_1 / dt,$$

Тепер розглянемо інший випадок, коли друга котушка підключена до джерела напруги і в ній протікає струм i_2 , а перша котушка вимкнута і $i_1=0$. Маємо:

$\psi_{2L}=L_2 \cdot i_2$ – потокозчеплення самоіндукції другої котушки;

$\psi_{12}=\psi_{1M}=M_{12} \cdot i_2$ – потокозчеплення взаємоіндукції;

$\psi_{2s}=L_{2s} i_2$ – потокозчеплення розсіювання другої котушки.

де: M_{12} – взаємна індуктивність між другою і першою котушками;

L_{2s} – індуктивність розсіювання другої котушки. Теж вірно:

$$\psi_{2L} = \psi_{12} + \psi_{2s}.$$

Якщо струм в другій котушці змінний, то одержимо ЕРС самоіндукції e_{2L} та ЕРС взаємної індукції e_{12} :

$$e_{2L} = -d\psi_{2L} / dt = -L_2 \cdot di_2 / dt;$$

$$e_{12} = -d\psi_{12} / dt = -M_{12} \cdot di_2 / dt.$$

В лінійних індуктивно зв'язаних котушках зазвичай

$$M_{12} = M_{21} = M \text{ [Гн]}.$$

Тепер розглянемо загальний випадок, коли в обох котушках протікають змінні струми i_1 та i_2 (рис. 5.2). В цьому випадку загальне потокозчеплення кожної котушки із буде потоко зчеплення самоіндукції та взаємоіндукції. Наприклад, в першій котушці: $\psi_I = \psi_{1L} \pm \psi_{12}$

Так як потокозчеплення самоіндукції обумовлює ЕРС самоіндукції, а потокозчеплення взаємоіндукції – ЕРС взаємоіндукції, то загальна ЕРС в I котушці буде:

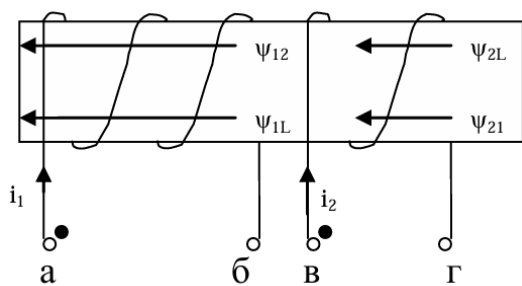
$$e_I = e_{1L} \pm e_{12}.$$

Можливі два випадки включення котушок – узгоджене та зустрічне, від чого і залежать знаки “+” або “-”.

Узгодженим називається таке включення котушок, при якому потокозчеплення самоіндукції та взаємоіндукції і ними обумовлені ЕРС співпадають за напрямом, тобто мають однакові знаки.

Зустрічним називається таке включення котушок, при якому потокозчеплення самоіндукції та взаємної індукції і ними обумовлені ЕРС направлені протилежно, тобто мають різні знаки.

Для визначення знака ЕРС взаємоіндукції вводять поняття **однойменних затискачів**.



Затискачі двох котушок називаються однойменними, якщо при однаковому напрямку струмів відносно них потокозчеплення самоіндукції та взаємної індукції співпадають за напрямом (рис. 5.3).

a i в, б i г – однойменні затискачі.

На електричних схемах однойменні затискачі позначаються крапками.

Чим менше потокозчеплення розсіяння, тим ближче потокозчеплення взаємної індукції до потокозчеплення самоіндукції.

Для оцінювання ступеню магнітного зв'язку між котушками користуються коефіцієнтами зв'язку та розсіяння:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} - \text{коефіцієнт зв'язку. } (K = \frac{E_m}{E_{m \max}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}})$$

Коефіцієнт зв'язку показує, яку частину реально обумовлена ЕРС взаємної індукції складає від тої максимальної ЕРС, яку б змогла навести одна котушка в другій в ідеальному випадку.

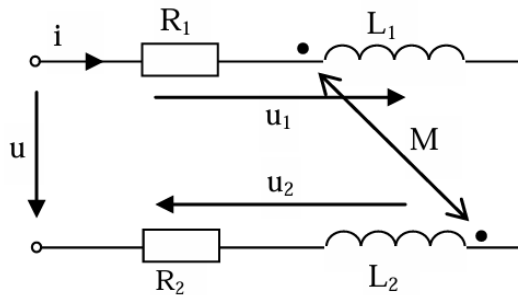
Коефіцієнт розсіяння:

$$\sigma = 1 - K^2 = \frac{L_1 \cdot L_2 - M^2}{L_1 \cdot L_2}$$

При сильному магнітному зв'язку між контурами $K \rightarrow 1$, а $\sigma \rightarrow 0$.

Послідовне з'єднання котушок при їх узгодженому та зустрічному включенні

Розглянемо послідовне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок в колі синусоїдного струму при узгодженому включенні.



До кола прикладена синусоїдна напруга

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Складемо рівняння за II законом

Кірхгофа:

$$u = u_1 + u_2$$

Враховуючи, що

$$u_1 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}; \quad u_2 = R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}; \quad u_3 = R_3 i + L_3 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt};$$

одержимо

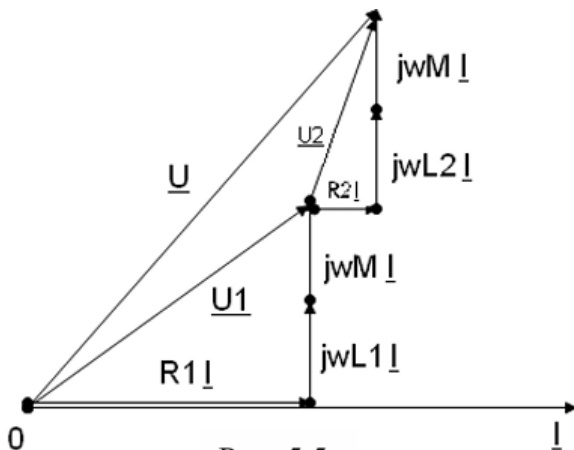
$$u = R_1 i + (L_1 + M) \frac{di}{dt} + R_2 i + (L_2 + M) \frac{di}{dt} = (R_1 + R_2) i + (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}$$

Перейдемо до комплексної форми запису:

$$\underline{U} = (R_1 + R_2) \underline{I} + j\omega \underline{I} (L_1 + L_2 + 2M).$$

$R_1 + R_2 = R$ – еквівалентний активний опір кола, $L_1 + L_2 + 2M = L_y$ – еквівалентна індуктивність при узгодженому включенні. Тоді: $\underline{U} = R \underline{I} + j\omega L_y \underline{I}$, звідси

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L_y} = I e^{j\psi_i}$$



Таким чином, при послідовному узгодженому включенні двох індуктивно зв'язаних котушок їх еквівалентна індуктивність дорівнює сумі індуктивностей котушок плюс подвоєне значення взаємної індуктивності

$$L_y = L_1 + L_2 + 2M.$$

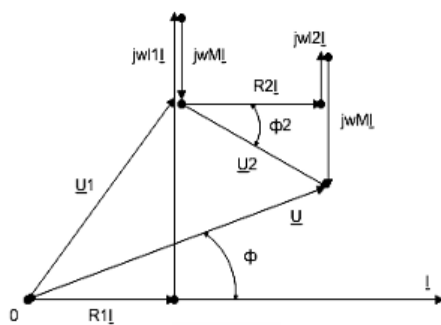
Зобразимо векторну діаграму напруг при узгодженому включенні котушок. Для цього використаємо рівняння електричної рівноваги в комплексній формі.

При зустрічному включенні котушок напрямки струму відносно однойменних затисків буде протилежним, тому знаки при ЕРС самоіндукції та взаємної індукції будуть різними.

В цьому випадку рівняння електричної рівноваги буде мати вигляд:

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{R}_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} - j\omega M \underline{I} + \underline{R}_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} - j\omega M \underline{I} = \\ = \underline{I} [(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)],$$

де $L_3 = L_1 + L_2 - 2M$ – еквівалентна індуктивність при зустрічному включенні котушок. Зобразимо векторну діаграму напруг при зустрічному включенні котушок для випадку $L_2 < M < L_1$.



В цьому випадку вектор U_2 відстає від струму, чим утворюється ефект “несправжньої ємності”. Коло в цілому носить індуктивний характер, тому що завжди як додатна фізична величина $L_3 = L_1 + L_2 - 2M > 0$.

Величина взаємної індуктивності M може бути визначена експериментально за знайденими

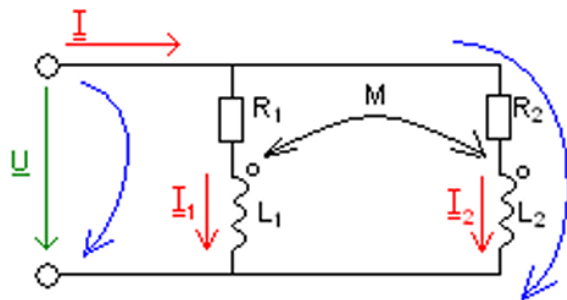
$$L_y = L_1 + L_2 + 2M \text{ та } L_3 = L_1 + L_2 - 2M$$

$$\text{за формулою: } L_y - L_3 = 4M$$

Звідси..

$$M = \frac{L_y - L_3}{4}$$

Паралельне з'єднання котушок при їх узгодженому та зустрічному включенні



напругу

Розглянемо паралельне з'єднання двох індуктивно зв'язаних котушок в колі синусоїдального струму при їх узгодженому включенні.

До кола прикладемо синусоїдну

$$u = U \sqrt{2} \sin(t \omega + \psi_u)$$

Задамо напрямок обходу і складемо два рівняння за II-м законом Кірхгофа в комплексній формі:

$$\begin{cases} \underline{U} = R_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U} = R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 \end{cases}$$

Позначимо

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1$$

$$Z_2 = r_2 + j\omega L_2$$

$$Z_M = j\omega M$$

тоді одержимо:

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2 \\ \underline{U} = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_1 \end{cases}$$

Визначимо струми $\underline{I}_1$ та $\underline{I}_2$ за методом визначників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \underline{U} & \underline{Z}_M \\ \underline{U} & \underline{Z}_2 \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M); \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{U} \\ \underline{Z}_M & \underline{U} \end{vmatrix} = \underline{U}(\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M)$$

$$I = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 - 2\underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_e}$$

де

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 - 2\underline{Z}_M} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + j^2 \omega^2 M^2}{R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 - j\omega M} = R_e + j\omega L_y$$

Припустимо, що $R_1=R_2=0$, тоді $R_e=0$,

В цьому випадку одержимо

$$j\omega L_y = \frac{-\omega L_1 L_2 \omega^2 M^2}{j\omega(L_1 + L_2 - 2M)} = \frac{j\omega(L_1 L_2 - 2M)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

Звідси

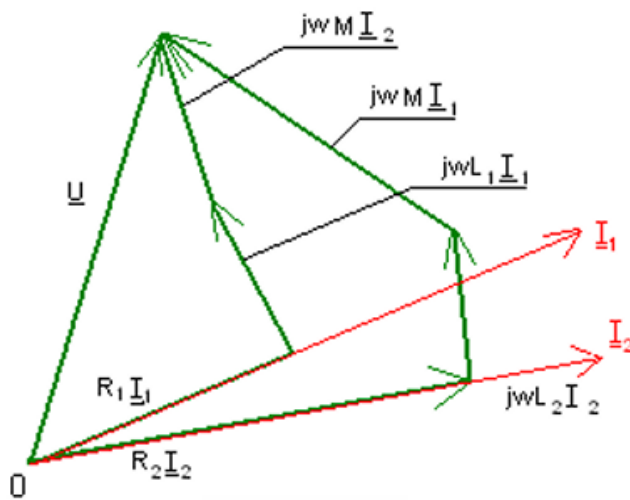
$$L_y = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

– еквівалентна індуктивність при паралельному узгодженому включенні двох котушок. Аналогічно може бути визначена еквівалентна індуктивність при паралельному зустрічному включенні двох індуктивних котушок. Вона дорівнює:

$$L_3 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} < L_y$$

Побудуємо векторну діаграму (рис. 5.8) для узгодженого включення паралельно з'єднаних котушок в відповідності з рівняннями:

- будуємо вектори струмів $\underline{I}_1$ та $\underline{I}_2$
- будуємо $R_1 \underline{I}_1; j\omega L_1 \underline{I}_2; j\omega M \underline{I}_2$ за
- будуємо $R_2 \underline{I}_2; j\omega L_2 \underline{I}_2; j\omega M \underline{I}_1$ за



Для плавної зміни індуктивності кола застосовують варіометри. Вони складаються з двох котушок різного діаметра, причому одна обертається в середині другої. Котушки можуть бути з'єднані послідовно і паралельно при узгодженому та зустрічному включенні. Тому їх

індуктивність буде змінюватись від $L_{max} = L_1 + L_2 + 2M_{max}$ до

$$L_{min} = \frac{L_1 L_2 + 2M_{max}^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

Поняття про повітряний трансформатор

Трансформатор – це статичний пристрій, призначений для перетворення змінного струму однієї напруги, в змінний струм тієї ж частоти, але іншої за величиною напруги. Трансформатор був винайдений в 1876 році російським інженером Яблочковим П.М. Повітряний трансформатор складається з двох електрично не зв'язаних, нерухомих котушок без феромагнітних осердь. Такий трансформатор являється лінійним.

ТЕМА 24. «ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА З ВЗАЄМНОЮ ІНДУКЦІЄЮ»

Метою є ознайомлення студентів із фізичними процесами взаємної індукції, явищами самоіндукції, потокозчепленням та законом Фарадея у індуктивно зв'язаних колах. Студенти повинні вміти аналізувати взаємне розташування котушок, визначати знаки ЕРС взаємоіндукції, користуватися поняттям однойменних затискачів, обчислювати коефіцієнти зв'язку та розсіювання, а також виконувати розрахунок індуктивно зв'язаних котушок при узгодженому та зустрічному включенні у послідовних і паралельних схемах.

План :

- Фізична сутність взаємної індукції.
- Закон Фарадея та потокозчеплення.
- Коефіцієнт взаємного зв'язку та коефіцієнт розсіювання.
- Однойменні та різнойменні затискачі.
- Послідовне узгоджене та зустрічне з'єднання котушок.
- Еквівалентна індуктивність при різних схемах включення.
- Паралельне з'єднання індуктивно зв'язаних котушок.
- Практичні приклади: варіометр, трансформаторні зв'язки.

Ключові слова: взаємна індукція, самоіндукція, потокозчеплення, ЕРС взаємоіндукції, індуктивно зв'язані кола, коефіцієнт зв'язку, коефіцієнт розсіювання, однойменні затискачі, узгоджене включення, зустрічне включення, послідовне з'єднання котушок, паралельне з'єднання котушок, еквівалентна індуктивність, варіометр.

Keywords: mutual induction, self-induction, flux linkage, mutual induction EMF, inductively coupled circuits, coupling coefficient, dissipation coefficient, terminals of the same name, matched connection, counter connection, series connection of coils, parallel connection of coils, equivalent inductance, variometer.

За значенням абсолютної магнітної проникності μ_a речовини поділяють на: діамагнітні – $\mu_a < 1$ (полімерні матеріали, срібло, мідь), парамагнітні – $\mu_a > 1$ (платина, алюміній, повітря) і феро магнітні – $\mu_a \gg 1$ (залізо, кобальт, нікель, ферити).

Основним матеріалом, який використовують для виготовлення магнітопроводів сучасного електротехнічного обладнання є напівпровідникові феромагнетики - ферити. Ферити — це тверді розчини оксиду заліза Fe_2O_3 і оксиду одновалентного або двовалентного металу Ni, Zn, Si, Cd, Cu, Pb і ін. Виготовляють ферити спіканням при температурі 1100—1600 К добре перемішаних порошкоподібних компонентів. Особливого значення набули магній-марганцеві ферити з коерцитивною силою 160 000— 240 000 А/м, які, зокрема, використовують у запам'ятовуючих пристроях ЕОМ («+В» і «-В» відповідають двійковій системі чисел).

Крім великої магнітної проникності μ_a , яка в десятки, а то і сотні тисяч разів може перебільшувати магнітну проникність вакууму μ_0 , ферити мають здатність добре намагнічуватися і, тим самим, ставати джерелами магнітного поля. Так наприклад, якщо МРС, яку збуджує котушка зі струмом відносно мала, то при введенні у цю котушку феромагнітного осердя, магнітна проникність якої μ_a , МРС підсилюється приблизно в $\mu = \mu_a/\mu_0$ разів. Крім того, маючи дуже великий питомий електричний опір, ці матеріали обмежують втрати енергії на індукційні струми.

Для розрахунку магнітних кіл складених із феромагнітних матеріалів використовують криві намагнічування – залежності $B(H)$. Враховуючи, що для абсолютної більшості цих матеріалів криву намагнічування точно описати аналітично складно, то у довідниковій літературі залежності B від H звичайно наводять у вигляді таблиць або графіків.

Залежність $B(H)$, побудовану при безперервному збільшенні B і H від нуля, тобто при відсутності у речовини залишкової намагніченості, називають початковою кривою намагнічування (крива 1). Видно, що зі збільшенням напруженості магнітного поля, індукція (намагніченість) матеріалу

збільшується. Разом з тим, при $H > H_c$ подальше зростання B практично не відбувається. Стан матеріалу намагніченого до $B \geq B_c$ називають магнітним насиченням матеріалу

При періодичному намагнічуванні феромагнетика до стану насичення то в одному, то в іншому напрямках процес відбувається за так звану граничну гістерезисну петлю. При періодичному намагнічуванні до $B < B_c$ отримують сімейство гістерезисних петель (на рис. не показані) розташованих у межах граничної петлі.

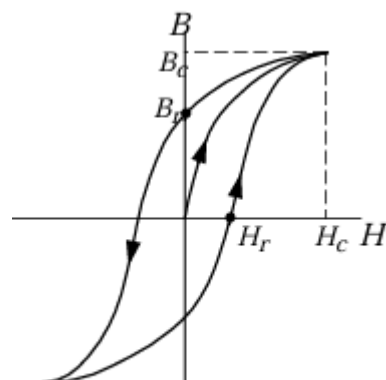


Рис. 4.1. Крива намагнічування феромагнітного матеріалу

Площа гістерезисної петлі є пропорційною енергії, яка витрачається за один цикл на перемагнічування одиниці об'єму матеріалу. Координати точок перетину граничної петлі гістерезису з віссю ординат B_r називають залишковим намагнічуванням, а з віссю абсцис H_r - коерцитивною силою, якою є напруженість магнітного поля, при якій залишкова намагніченість феромагнетика зменшується до нуля.

Залежно від значення H_r , тобто ширини гістерезисної петлі, феромагнітні матеріали умовно поділяють на магнітом'які ($H_r < 4$, кА/м – вузька петля гістерезису) і магнітотверді ($H_r > 4$, кА/м – широка гістерезисна петля). Оскільки магнітна проникність магнітом'яких матеріалів (технічне залізо, електротехнічні сталі, залізонікелеві сплави, чавуни) велика, а коерцитивна сила мала, то втрати енергії на їх перемагнічування відносно малі і тому такі матеріали використовують для виготовлення електромагнітних пристроїв, які працюють зі змінною МРС (індукційні котушки, трансформатори тощо).

Тверді магнітні матеріали характеризуються тим, що коерцитивна сила і залишкова індукція B у них великі. Це, наприклад, вуглецева, вольфрамові, хромові та кобальтова сталі, альніко (24 Co; 14 Ni; 8 Al; 3 Cu; інше - Fe), альні (25 Ni; 12 Al; інше - Fe). Названі магнітні матеріали мають малий питомий опір, а тому у змінних магнітних полях спричиняють значні втрати енергії на індукційні струми. Їх використовують для побудови постійних магнітів, які є

складовою частиною магнітоелектричних вимірювальних приладів, динаміків тощо.

Слід відмітити, що під дією магнітного поля феромагнітні матеріали змінюють свої геометричні розміри (це явище називають магнітострикцією), а при стисненні або розтягуванні здатні намагнічуватися. Зі збільшенням температури магнітна проникність феромагнетиків зменшується і для кожного з матеріалів є така критична температура (точка Кюрі) при якій матеріал втрачає свої феромагнітні властивості.

Поряд з цим стає очевидним, що від зміни магнітного поля в просторі індукційний струм виникатиме не тільки в лінійному струмопроводному контурі, а й у самому масивному струмопроводному тілі. Ці вихрові індукційні струми називають струмами Фуко.

Завдяки малому електричному опору масивних тіл індукційні струми в них можуть досягати значної густини і у самих тілах буде виділятися значна кількість теплоти. Для зменшення втрат на нагрівання вихровими струмами якоря електричних машин і сердечники трансформаторів виготовляють не з суцільного заліза, а з тонких пластин або тонких дротин, покритих непровідним лаком. Площини пластин або дротини розміщують перпендикулярно до можливих напрямів струмів Фуко. Разом з тим, теплову дію індукційних струмів широко використовують для плавлення металів, нагрівання при поверхневому гартуванні сталей виробів та ін. Гальмівну силу, що утворюється в зоні дії струмів Фуко використовують в конструкціях магнітних демпферів — заспокоювачів рухомих стрілок у гальванометрах, сейсмографах та інших приладах.

Магнітні кола й їх класифікація

Магнітним колом називають сукупність джерел МРС і феромагнітних та інших матеріалів і середовищ, по яких замикається магнітний потік.

Джерелом МРС у магнітному колі може бути одна чи кілька котушок, або ж постійний магніт. Шлях, по якому замикаються силові лінії магнітного потоку, або іншими словами магнітопровід, в більшості випадків виконують з

феромагнітних матеріалів необхідної конфігурації. Часто магніто провід електротехнічних пристроїв, окрім феромагнітного матеріалу, включає у себе ділянки виконані з не феромагнітних матеріалів, наприклад повітряні зазори. Феромагнітний матеріал при цьому використовується для направлення і концентрації силових ліній в місці, де безпосередньо використовується енергія магнітного поля, наприклад у повітряний зазор між ротором і статором електричної машини.

Магнітні кола поділяють на нерозгалужені – однорідні та неоднорідні, і розгалужені – симетричні і несиметричні.

До однорідних відносять кола, в яких напруженість магнітного поля по всій довжині магнітопроводу є величиною сталою. Таким чином, достатньо змінити переріз або ж матеріал будь-якої з ділянок однорідного кола і воно вже буде неоднорідним.

Потрібно відмітити, що неоднорідним також є магнітне коло, в якому існує магнітний потік розсіювання Φ_r , наприклад внаслідок нерівномірного розподілення витків котушки по довжині магнітопроводу. По току розсіювання називають частину магнітного потоку котушки зі струмом, силові лінії якого відгалужуються від основного потоку Φ магнітопроводу і замикаються навколо котушки через повітря. Але, оскільки звичайно $\Phi_r < 0,1\Phi$, то при виконанні

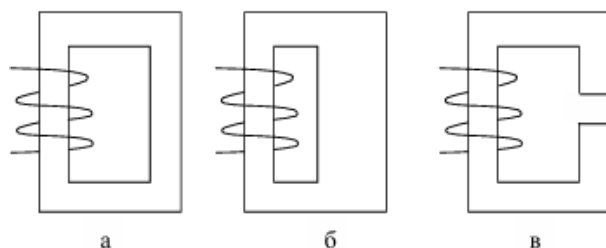


Рис. 4.2. Нерозгалужене магнітне коло: а – однорідне; б, в – неоднорідне

практичних розрахунків магнітних кіл величиною потоку розсіювання часто нехтують і вважають, що на всій довжині магнітопроводу, наприклад кіл показаних на рис. 4.2, діє постійний магнітний потік Φ .

Симетричне розгалужене коло, по суті являє собою комбінацію двох однакових однорідних (рис. 4.3, а) або ж двох однакових неоднорідних (рис. 4.3, б) нерозгалужених кіл. Відповідно, прикладом не симетричного розгалуженого кола буде бути комбінація однорідного і неоднорідного нерозгалужених кіл (рис 4.3, в).

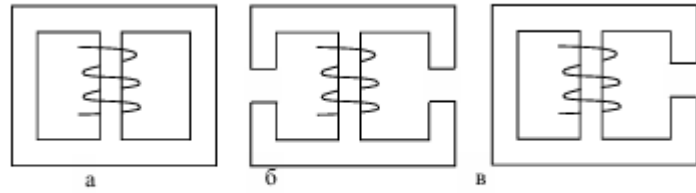


Рис. 4.3. Розгалужене магнітне коло: а, б – симетричне; в – несиметричне

Кола, в яких МРС створюється дією постійного струму, називають колами з постійною МРС, а в яких дією змінного струму – колами зі змінною МРС.

Основні закони магнітних кіл

Подібно до електричного, стан магнітного кола можна визначити трьома основними законами, які за аналогією із електричними колами називають законами Кірхгофа і Ома.

Перший закон Кірхгофа – алгебраїчна сума потоків, що збігаються в будь-якому вузлі магнітного кола дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^n \Phi_k = 0$$

Другий закон Кірхгофа – алгебраїчна сума магнітних напруг ($U_m = Hl$, де H та l – напруженість магнітного поля та довжина магнітної лінії цього поля відповідно) у будь-якому замкненому контурі магнітного кола дорівнює алгебраїчній сумі МРС F , які діють у цьому контурі:

$$\sum_{k=1}^n U_{mk} = \sum_{k=1}^n F_k$$

Для кола з котушкою, де $F = IW$, аналітичний запис другого закону Кірхгофа має вигляд:

$$\sum_{k=1}^n (HI)_k = \sum_{k=1}^n (IW)_k$$

Для більшості реальних конструкцій магнітопроводів математичний запис другого закону Кірхгофа співпадає з записом закону повного струму (повний струм включає в себе струми провідності, переносу та електричного зміщення). У загальному випадку закон повного струму – циркуляція вектора напруженості магнітного поля по замкненому контуру дорівнює повному струму, що пронизує поверхню, обмежену цим контуром, записують так:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k$$

Закон Ома встановлює зв'язок між магнітним потоком, який діє на ділянці магнітного кола, і магнітною напругою U_m на цій ділянці. Так, для ділянки осердя довжиною l , перерізом S і магнітною проникністю μ_a маємо:

$$U_m = Hl = Bl/\mu_a = \Phi l/(S\mu_a)$$

Звідси, з урахуванням співвідношення $Hl = IW = F$, для нерозгалуженого однорідного магнітного кола одержимо:

$$\Phi = IW/[l/S\mu_a]$$

де l та S – відповідно довжина та переріз магнітопроводу у якому діє МРС.

За аналогією з теорією електричних кіл при розрахунках магнітних кіл використовують поняття магнітний опір R_m , Гн⁻¹, і магнітна провідність $\lambda = 1/R_m$, Гн:

$$R_m = l/(\mu_a S)$$

$$\lambda = \mu_a S/l$$

Тому закон Ома для магнітного кола можна записати так:

$$\Phi = F/R_m = F\lambda$$

ТЕМА 25. « МАГНІТНІ КОЛА ТА ВЛАСТИВОСТІ ФЕРОМАГНІТНИХ МАТЕРІАЛІВ »

Метою лекції є поглиблення знань студентів щодо властивостей феромагнітних матеріалів, граничних петель гістерезису та фізичних процесів у магнітних колах. Студенти повинні розуміти класифікацію магнітних кіл, сутність магнітного опору, магнітної провідності, закони Кірхгофа та Ома для

магнітних кіл, а також особливості роботи кіл з постійною та змінною магніторушійною силою. Лекція формує навички виконання прямих і зворотних розрахунків магнітних кіл та аналізу втрат у феромагнітних матеріалах.

План

- Феромагнітні матеріали: класифікація та властивості.
- Магнітна проникність та намагнічування.
- Петля гістерезису та її основні параметри.
- Втрати в магнітних матеріалах: гістерезисні та вихрові.
- Поняття магнітного кола, магнітний потік і МРС.
- Магнітний опір і закон Ома для магнітних кіл.
- Розрахунок простих магнітних кіл.
- Особливості змінного магнітного режиму.

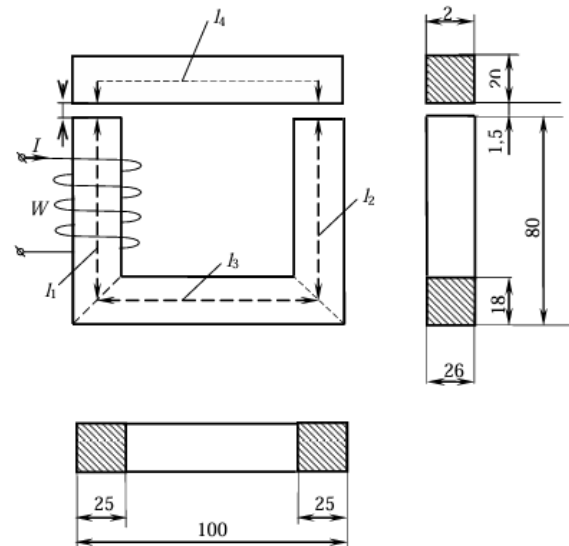
Ключові слова: феромагнетики, магнітна проникність, гістерезис, коерцитивна сила, залишкова індукція, магнітне насичення, струми Фуко, магнітострикція, магнітне коло, магнітний потік, магнітний опір, магнітна напруга, МРС, закон Ома для магнітного кола, вебер-амперна характеристика, магнітні втрати.

Keywords: ferromagnets, magnetic permeability, hysteresis, coercive force, residual induction, magnetic saturation, Foucault currents, magnetostriction, magnetic circuit, magnetic flux, magnetic resistance, magnetic voltage, MRS, Ohm's law for a magnetic circuit, Weber-ampere characteristic, magnetic losses.

Коли при відомих геометричних розмірах, конфігурації і матеріалі магніторповоду потріб но визначити МРС (струм в котушці), необхідну для утворення у магнітному колі заданого магні тного потоку (магнітної індукції), то прийнято вважати, що вирішується так звана пряма задача розрахунку магнітних кіл. Разом з тим, на практиці часто доводиться вирішувати і зворотну за дачу – коли при відомих діючій МРС і геометричних розмірах, конфігурації та матеріалі магнітор поводу, потрібно визначити магнітний потік кола.

Хоча методики вирішення прямої і зворотної задач розрахунку магнітних кіл відрізняються між собою, але початковий етап у них є спільним.

Спочатку, за заданим кресленням кола (рис. 4.4), керуючись однорідністю та однаковістю поперечного перерізу матеріалу, наявністю або відсутністю обмотки, магнітопровід розбивають на k окремих ділянок. Потім, для кожної з виділених ділянок визначають довжину її середньої лінії l_k та площу поперечного перерізу S_k .



Далі, при вирішенні прямої задачі, для кожної ділянки кола обчислюють магнітну індукцію:

$$B_k = \Phi / S_k$$

і за кривими намагнічування $B=f(H)$ матеріалів знаходять H_k . Напруженість магнітного поля у повітряному зазорі з площею поперечного перерізу S_δ розраховують, як лінійну задачу за формулою:

$$H_\delta = \Phi / (S_\delta \mu_0) = B_\delta \mu_0$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн.

Магніторушійну силу кола і струм обмотки розраховують за формулами, відповідно:

$$F = \sum_{k=1}^n (H l)_k, I = F / W.$$

У зв'язку з тим, що для феромагнітних матеріалів залежність B від H є нелінійною функцією, розв'язати зворотну задачу безпосередньо аналітичним шляхом достатньо складно, а у випадках коли магнітопровід складається з кількох різнорідних ділянок стає просто неможливо. Тому для вирішення зворотної задачі часто застосовують графоаналітичний метод, суть якого наступна.

Після визначення довжин середніх ліній і площ перерізів ділянок кола для декількох заданих довільно значень Φ вирішують пряму задачу (визначають $F=IW$). Далі за результатами обчислень будують вебер-амперну характеристику розрахункового кола, з якої для заданого значення $F_n=I_nW$ визначають магнітний потік Φ_n .

Приклад чисельного розрахунку прямої задачі.

Визначити намагнічуючий струм котушки, необхідний для утворення у магнітопроводі нерозгалуженого магнітного кола робочого магнітного потоку $\Phi=5 \cdot 10^{-4}$ Вб, при умові, що осердя та якір магнітопроводу виконані із електротехнічної сталі марок, відповідно, Э 330 та Э 43, число витків котушки $W=950$, потік розсіювання Φ_r на ділянці магнітопроводу з котушкою скла дає 8% від величини робочого магнітного потоку.

Керуючись геометричними розмірами, вказаними, та умовою задачі, виділимо у магнітопроводі розрахункового кола шість ділянок (чотири у сталі та два повітряних зазори), які відрізняються між собою за перерізом, матеріалом та наявністю магнітоутворюючого елементу. Довжини середніх ліній l_k , м та перерізи S_k , м², видалених ділянок відповідно будуть:

$$I_1 = I_2 = (80 - 18/2) \cdot 10^{-3} = 0.071$$

$$I_3 = (100 - 25/2 - 25/2) \cdot 10^{-3} = 0.075$$

$$I_4 = (100 - 25/2 - 25/2 + 20/2 + 20/2) \cdot 10^{-3} = 0.095$$

$$I_{\delta 1} = I_{\delta 2} = 0.0015$$

$$S_1 = S_2 = S_{\delta 1} = S_{\delta 2} = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 26 \cdot 10^{-3} = 6.5 \cdot 10^{-3}$$

$$S_3 = 26 \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{-3} = 4.68 \cdot 10^{-3}$$

$$S_4 = 26 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 5.2 \cdot 10^{-3}$$

Магнітний потік, Вб:

$$\Phi_1 = \Phi + \Phi_p = 5 \cdot 10^{-4} + 0.08 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5.4 \cdot 10^{-4}$$

$$\Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_4 = \Phi_{\delta 1} = \Phi_{\delta 2} = \Phi = 5 \cdot 10^{-4}$$

та магнітна індукція кожної ділянки кола, Тл:

$$B_1 = \Phi_1 / S_1 = 5.4 \cdot 10^{-4} / (6.5 \cdot 10^{-3}) = 0.0831$$

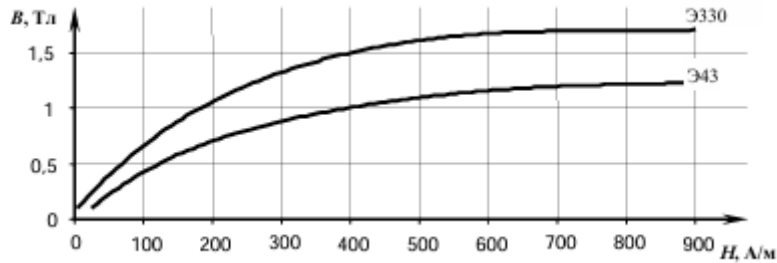
$$B_2 = \Phi_2/S_2 = 5 \cdot 10^{-4}/(6.5 \cdot 10^{-4}) = 0.769$$

$$B_3 = \Phi_3/S_3 = 5 \cdot 10^{-4}/(4.68 \cdot 10^{-4}) = 1.068$$

$$B_4 = \Phi_4/S_4 = 5 \cdot 10^{-4}/(5.2 \cdot 10^{-4}) = 0.896$$

$$B_{\delta 1} = B_{\delta 2} = \Phi_{\delta 1}/S_{\delta 1} = 5 \cdot 10^{-4}/(6.5 \cdot 10^{-4}) = 0.769$$

Залежно від величини магнітної індукції по кривим намагнічування електротехнічних сталей (рис. 4.5), з яких виконані перші чотири ділянки



магнітопроводу, знаходимо напруженість магнітного поля на цих ділянках, А/м: $H_1=125$, $H_2=120$, $H_3=200$ і $H_4=375$.

Напруженість магнітного поля у повітряних зазорах буде, А/м:

$$H_{\delta 1} = H_{\delta 2} = B_{\delta 1}/\mu_0 = 0.769/(4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7}) = 612261$$

Магнітна напруга на ділянках кола, А:

$$H_1 I_1 = 125 \cdot 0.071 = 8.875; H_2 I_2 = 120 \cdot 0.071 = 8.52$$

$$H_3 I_3 = 200 \cdot 0.075 = 15; H_4 I_4 = 375 \cdot 0.095 = 35.625$$

$$H_{\delta 1} I_{\delta 1} = H_{\delta 2} I_{\delta 2} = 612261 \cdot 0.0015 = 918.39$$

Намагнічуюча сила, А –

$$F = \sum_{k=1}^6 (HI)_k = 8.875 + 8.52 + 15 + 35.625 + 2 \cdot 918.39 = 1904.8$$

та намагнічуючий струм котушки, А:

$$I = F/W = 1904.8/950 \approx 2$$

Потокозчеплення Ψ , Вб та індуктивність L , Гн котушки

$$\Psi = \Phi_1 W = 5.4 \cdot 10^{-4} \cdot 950 = 0.513$$

$$L = \Psi/I = 0.513/2 = 0.2565$$

У разі притягнення якоря до осердя, тобто зникнення повітряних зазорів у магнітопроводі, на намагнічуючий струм I' , А та індуктивність L' , Гн котушки –

$$I' = F/W = \sum_{k=1}^4 (HI)_k / W = (8.875 + 8.52 + 15 + 35.625)/950 = 0.072$$

$$L' = \Psi/I' = \Phi_1 W/I' = 5.4 \cdot 10^{-4} \cdot 950/0.072 = 7.125$$

меншаться у $K_I = \frac{I}{I'} = \frac{2}{0.072} = 27$ та $K_L = \frac{L}{L'} = 7.125 - 0.2565 = 27$ разів.

Приклад чисельного розрахунку зворотної задачі.

Для умов прикладу, розглянутого у попередньому розділі, нехтуючи потоком розсіювання, ви значити величину магнітного потоку у магнітопроводі нерозгалуженого магнітного кола (рис. 4.4) при заданій величині магніторушійної сили $F=IW=1900$ А.

Задачу вирішуємо графоаналітичним способом. Для побудови вебер-амперної характеристики розрахункового кола потрібно прийняти декілька значень Φ , за якими визначити відповідні магні торушійні сили F . Перше значення Φ оберемо за умовою, що увесь магнітний опір кола зосереджений у повітряних зазорах магнітопроводу. Для такого випадку, згідно з другим законом Кірхгофа маємо:

$$F = H_{\delta 1} l_{\delta 1} + H_{\delta 2} l_{\delta 2}$$

Звідси напруженість H_{δ} , А/м і, далі, магнітна індукція B_{δ} Тл, магнітного поля у повітряних зазорах будуть, відповідно –

$$H_{\delta 1} = H_{\delta 2} = F/(2l_{\delta}) = B_{\delta}/\mu_0 = 1900/(2 \cdot 0.0015) = 633333$$

$$B_{\delta 1} = B_{\delta 2} = H_{\delta 1} \mu_0 = 633333 \cdot 4 \cdot 3.14 \cdot 10^{-7} = 0.796$$

Для утворення такої індукції необхідний такий магнітний потік, Вб:

$$\Phi_{\delta 1} = \Phi_{\delta 2} = H_{\delta 1} S_{\delta 1} = 0.796 \cdot 6.5 \cdot 10^{-4} = 5.173 \cdot 10^{-4}$$

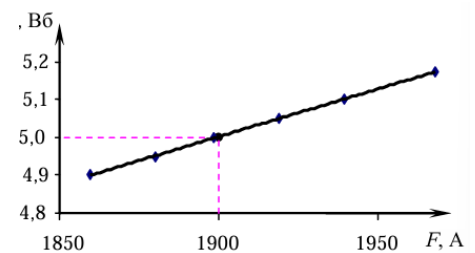
Тепер, прийнявши, що у розрахунковому магнітному колі діє магнітний потік $\Phi=5,173 \cdot 10^{-4}$ Вб, за методикою викладеною у попередньому розділі визначимо намагнічуючу силу, необхідну для утворення такого потоку. Результати розрахунків надамо у вигляді таблиці 4.1.

Порівнявши задане 1900 А та одержане 1967,94 значення МРС бачимо, що прийнятий магнітний потік Φ є завищеним по відношенню до шуканого. Тому, задаючись рядом менших значень Φ , за методикою викладеною у попередньому розділі визначимо величини необхідних магніторушійних сил F . Результати розрахунків надамо у вигляді таблиці 4.2 та графіка (рис. 4.6).

Таблиця 4.1							
Ділянка	Матеріал	$\Phi \cdot 10^4$, Вб	$S \cdot 10^4$, м ²	B , Тл	H , А/м	l , м	(Hl) , А
1	СтальЭ43	5,173	6,50	0,796	113,60	0,071	8,065
2	СтальЭ43	5,587	6,50	0,860	113,60	0,071	8,065
3	СтальЭ43	5,173	4,68	1,105	223,40	0,075	16,76
4	СтальЭ330	5,173	5,20	0,995	440,46	0,095	41,84
δ_1	Повітря	5,173	6,50	0,796	633758	0,0015	950,6
δ_2	Повітря	5,173	6,50	0,796	633758	0,0015	950,6
Всього							1967,94

Таблиця 4.2						
$\Phi \cdot 10^4$, Вб	5,173	5,100	5,050	5,000	4,950	4,900
F , А	1967,94	1939,60	1919,01	1898,47	1880,27	1859,64

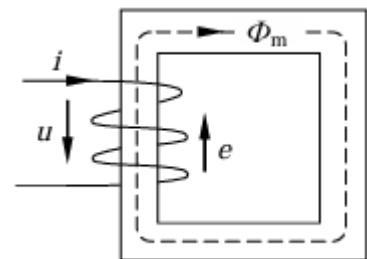
З графіка $\Phi=f(F)$ при заданій магніторушійній силі $F = 1900$ А визначимо шукане знання магнітного потоку $\Phi \approx 5 \cdot 10^{-4}$ Вб.



Особливості магнітних кіл зі змінною магніторушійною силою

Особливості магнітних кіл зі змінною МРС покажемо на прикладі аналізу котушки з замкненим феромагнітним осердям (рис. 4.7) підключеної до джерела синусоїдної напруги $u = U_m \sin \omega t$.

З метою спрощення аналізу, ідеалізуємо це коло і будемо вважати, що активний опір W витків котушки дорівнює нулю, а також, що система не має потоку розсіювання і підведена до котушки напруга, врівноважується тільки ЕРС самоіндукції ($u = -eL = W d\Phi/dt$), яка індукована робочим потоком Φ .



Відповідно до прийнятих умов можемо записати:

$$-W d\Phi/dt = U_m \sin \omega t$$

Рішення цього диференційного рівняння відносно Φ , при відсутності постійної складової потоку, має вигляд:

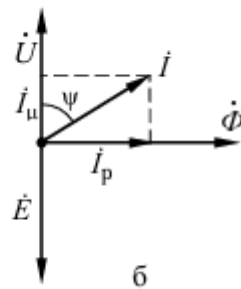
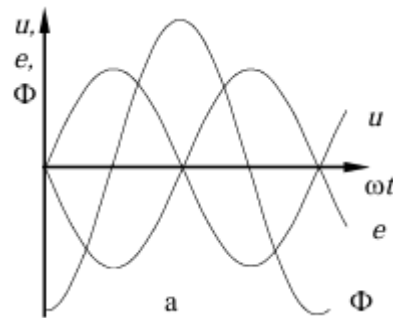
$$\Phi = \frac{E\sqrt{2}}{2\pi f W} \cos \omega t = \Phi_m \cos \omega t$$

Звідси, після заміни $\pi\sqrt{2} = 4.44$ і відповідних перетворень, одержимо рівняння трансформаторної ЕРС – $E = 4.44 f W \Phi_m$.

З результатів аналізу одержаних вище рішень випливає перша особливість електромагнітних процесів в магнітному колі змінного струму – закон зміни магнітного потоку повністю визнається законом зміни напруги, підведеної до обмотки магнітопроводу і не залежить від параметрів цього магнітопроводу.

Одержаний прямий зв'язок між ЕРС (підведеною до котушки напругою) і магнітним потоком у осерді не означає, що напруга безпосередньо створює магнітне поле. Поле створює електричний струм, але аналізувати електромагнітні процеси і

визначати магнітний потік зручно за величиною напруги, а вже далі визначати силу струму як функцію потоку. Тут же відмітимо, що на часовій (векторній) діаграмі



синусоїди u та e (вектори $\dot{U}$ та $\dot{E}$) зсунуті між собою на 180° , а синусоїда (вектор) магнітного потоку Φ – на кут $\pm 90^\circ$ по відношенню до них.

Отже, ми отримали, що закон зміни магнітного потоку в осерді повторює закон зміни напруги, прикладеної до затискачів обмотки цього осердя. Але, оскільки у феромагнетиків функція $B(H)$ або $\Phi(i)$ не є лінійною, то струм у витках обмотки повинен змінюватися за іншим законом ніж Φ і отже U . Звідси впливає друга особливість кіл зі змінною МРС – закон зміни струму в обмотці феромагнітного магнітопроводу не такий, як закон зміни напруги, прикладеної до затискачів цієї обмотки.

Для нашого випадку, коли до затискачів котушки з осердям прикладена синусоїдна напруга у її витках буде діяти несинусоїдний струм. За таких умов, щоб виконувалось рівняння $u = L di/dt$, індуктивність L котушки повинна бути змінною величиною. Звідси впливає третя особливість кіл зі змінною МРС – індуктивність обмотки феромагнітного магнітопроводу є функцією струму цієї обмотки.

Для несинусоїдної кривої $i = f(t)$ можна визначити діюче значення струму і розглядати його як діюче значення деякого еквівалентного синусоїдного струму.

Але синусоїда цього еквівалентного струму повинна буде відставати від синусоїди напруги вже не на 90° , а на менший кут ψ .

Знаючи кут ψ , діюче значення струму I можна розкласти на активну I_r і реактивну (намагнічуючу) I_μ складові:

$$I_r I = \cos \psi, I_\mu = I \sin \psi.$$

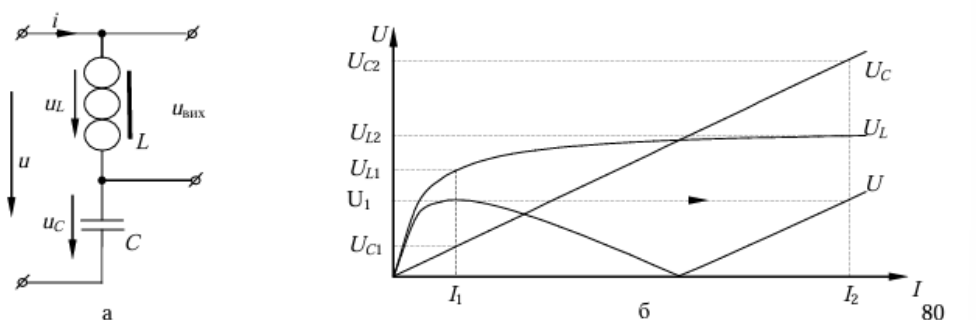
Оскільки еквівалентний струм обмотки магнітопроводу не співпадає за фазою з прикладеною напругою, то, відповідно, у цьому магнітопроводі є втрати енергії. Таким чином, на відміну від магнітопроводу з постійною МРС де втрат немає, у магнітопроводі зі змінною МРС є магнітні втрати енергії – це четверта особливість кіл зі змінною МРС.

У загальному випадку, втрати потужності у магнітних колах зі змінною МРС складаються з втрат на нагрівання обмотки (електричні або втрати у міді): і втрат на нагрівання феромагнітного осердя (магнітні, або втрати у сталі) P_c . Втрати в осерді, у свою чергу складаються з втрат від вихрових струмів P_v (струмів Фуко) і втрат на гістерезис P_r :

$$P_c = P_v + P_r.$$

Вихровими називають струми, які індукуються у масиві провідника при перетині його магнітними силовими лініями. Таку назву ці струми отримали тому, що вони замикаються у провіднику по кривих, які нагадують вихор. Згідно з правилом Ленца магнітне поле вихрових струмів завжди діє розмагнічуюче по відношенню до магнітного поля, яке їх індукує. Отже наявність вихрових струмів погіршує енергетичні показники осердя. Внаслідок так званого магнітного поверхневого ефекту глибинні шари осердя охоплюються більшими вихровими струмами, ніж поверхневі і, отже, у глибинних шарах, розмагнічуюча дія вихрових струмів сильніша, ніж у поверхневих. Враховуючи це, для зменшення втрат від вихрових струмів, магнітопроводи сучасних пристроїв набирають з електроізолюваних пластин електротехнічної сталі. Для зменшення опору магнітопроводу ці пластини розташовують обов'язково паралельно напрямку дії магнітного потоку.

Оскільки поверхневий магнітний ефект підсилюється зі збільшенням частоти струму в обмотці, то для різних частот струму існують свої оптимальні матеріал і товщина пластини. Так, для виготовлення магнітопроводів обмоток, де діють струми промислової частоти 50 Гц, використовують листову електротехнічну сталь товщиною 0,35–0,5 мм. В якості електроізоляції листів при цьому застосовують окалину, спеціальні електротехнічні лаки чи епоксидні компаунди. При більших частотах струму товщина листів може бути зменшена до 0,005 мм. Для частот у десятки МГц осердя пристроїв виготовляють з магнітодіелектриків і феритів.



ТЕМА 26. «ОСНОВИ ТРИФАЗНИХ СИСТЕМ»

Мета – Сформувати у студентів базові знання про багатофазні та трифазні системи, принцип утворення трифазних ЕРС, чергування фаз і переваги трифазних систем. Забезпечити розуміння фундаментальних понять, необхідних для подальшого аналізу трифазних кіл.

План

1. Поняття багатофазних систем.
2. Отримання трифазної симетричної системи ЕРС.
3. Миттєві значення та векторні діаграми трифазних ЕРС.
4. Чергування фаз.
5. Визначення фази, лінійних та фазних величин.
6. Переваги трифазних систем.
7. Позначення початків і кінців обмоток.

Ключові слова трифазна система, багатофазність, ЕРС, векторна діаграма, чергування фаз, фаза, лінійні напруги, фазні напруги, переваги трифазних систем.

Keywords three-phase system, multiphase, EMF, vector diagram, phase alternation, phase, line voltages, phase voltages, advantages of three-phase systems.

Сукупність електричних кіл, в яких діють створені спільним джерелом синусоїдні електрорушійні сили (далі – ЕРС) однакової частоти й амплітуди, але які відрізняються один від одного за фазою на кут (m – кількість фаз), називають багатофазними симетричними системами. Багатофазні системи

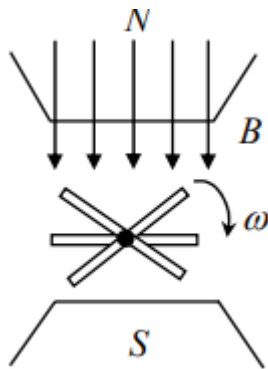


Рис. 1. Принцип отримання трифазної системи ЕРС

бувають дво-, три-, чотири-, шести- та дванадцятифазними.

Трифазна симетрична система ЕРС – сукупність трьох синусоїдних ЕРС однієї частоти, що мають однакові амплітуди та зсунуті між собою за фазою на кут 120° . Принцип отримання трифазної системи ЕРС:

в рівномірному магнітному полі з постійною кутовою швидкістю ω обертаються три однакові жорстко скріплені одна з одною котушки. Площини котушок зміщені у просторі одна відносно іншої на кут 120° . В кожній котушці наводяться ЕРС однакової частоти і амплітуди, зсунуті на кут 120° одна відносно іншої.

Графік миттєвих значень ЕРС e_A , e_B , e_C зображений, а векторна діаграма

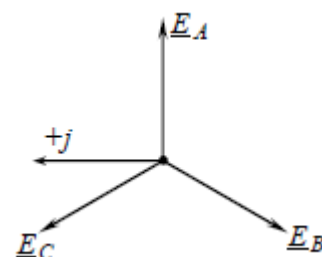
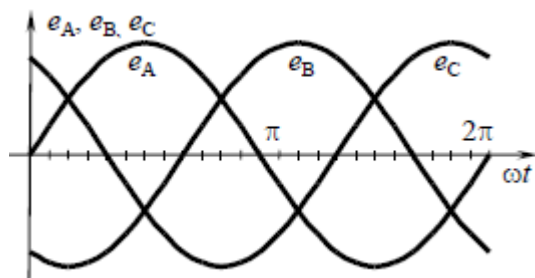


Рисунок 1.2 – Графіки миттєвих значень ЕРС e_A , e_B , e_C

Рисунок 1.3 – Векторна діаграма ЕРС

Чергування фаз – послідовність проходження ЕРС через однакові значення (наприклад, через нуль). Таке чергування фаз, коли початкова фаза ЕРС e_A дорівнює нулю, початкова фаза ЕРС e_B дорівнює «-120», а початкова фаза ЕРС e_C дорівнює «+120», називається прямим. Миттєві значення фазних ЕРС при цьому:

$$e_A = E_m \cdot \sin \omega t; \quad e_B = E_m \cdot \sin(\omega t - 120^\circ); \quad e_C = E_m \cdot \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Трифазне коло – сукупність трифазної система ЕРС, трифазного навантаження чи навантажень та з'єднуючих проводів.

Фаза – ділянка трифазного кола, по якій тече один і той же струм.

Переваги трифазних систем в порівняння з іншими багатофазними системами:

- 1) передача енергії на великі відстані трифазним струмом більш економічна з точки зору економії металу;
- 2) елементи трифазної системи, такі як асинхронний двигун, трифазний генератор і трансформатор є простими у виробництві, економічними, надійними в роботі (усі ланки трифазного кола були розроблені російським вченим М. О. Доліво-Добровольским);
- 3) система має властивості незмінності величини миттєвої потужності за період синусоїдного струму, якщо навантаження в усіх трьох фазах однакове.

Виводам фазних обмоток генераторів надають найменування «початок» і «кінець». Початки позначають буквами А, В, С, а кінці – х, у, з.

ТЕМА 27. «СХЕМИ З'ЄДНАННЯ ТРИФАЗНИХ КІЛ»

Мета – надати студентам уявлення про основні схеми з'єднання трифазних обмоток і навантажень, сформувати навички визначення зв'язків між лінійними та фазними величинами в схемах «зірка» та «трикутник».

План

- Основні схеми з'єднання: зірка та трикутник.
- З'єднання обмоток генератора зіркою.
- Лінійні та фазні напруги при з'єднанні «зіркою».
- З'єднання обмоток генератора трикутником.
- Особливості струмів та напруг при з'єднанні «трикутник».
- Векторні діаграми.
- Порівняння схем з'єднань.

Ключові слова зірка, трикутник, фазні напруги, лінійні напруги, лінійні струми, нейтральний провід, векторна діаграма, трифазне навантаження.

Keywords star, triangle, phase voltages, line voltages, line currents, neutral wire, vector diagram, three-phase load.

Основні схеми з'єднання у трифазних колах – це схеми з'єднання зіркою і трикутником.

З'єднання обмоток генератора зіркою

Якщо всі «кінці» (або всі «початки») фазних обмоток з'єднані в один вузол – таке з'єднання називається зіркою. Цю загальну точку (вузол) називають нейтральною чи, якщо вона заземлена, нульовою.

Проводи, що з'єднують обмотки генератора або трансформатора з навантаженням, називаються лінійними, а провід, що з'єднує нейтральні або нульові точки генератора і навантаження, відповідно нейтральним або нульовим.

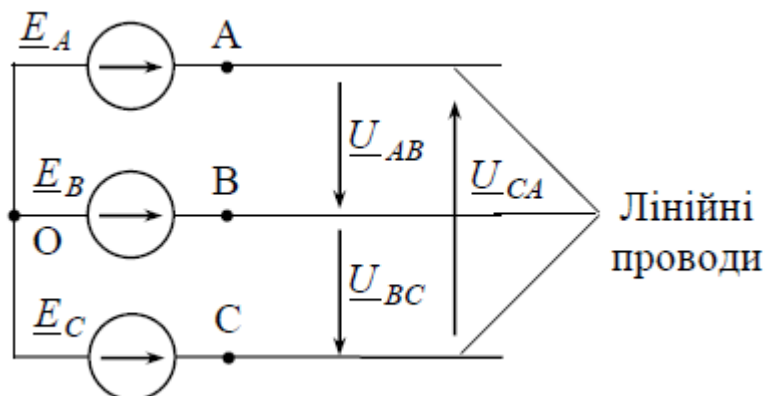


Рис. 1. З'єднання обмоток генератора зіркою

Напруги між початком і кінцем обмотки генератора, тобто $\underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$, $\underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$, $\underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$.

Лінійні напруги дорівнюють різниці фазних напруг:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AO} - \underline{U}_{BO}; \underline{U}_{BC} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}; \underline{U}_{CA} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{AO}.$$

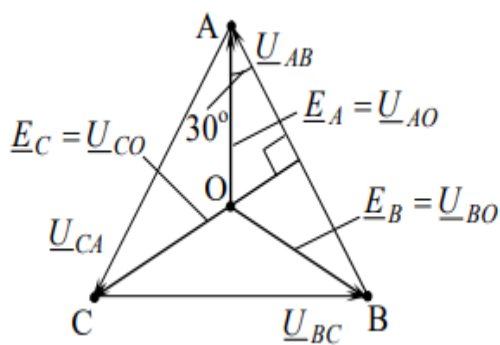


Рис. 2. – Векторна діаграма лінійних та фазних напруг

Розглянемо, яке співвідношення існує між фазними й лінійними напругами. Відповідно до виразів (1.2) побудуємо векторну діаграму лінійних та фазних напруг (рис. 1.5), з якої видно, що при прямому чергуванні фаз лінійні напруги в $\sqrt{3}$ більші, ніж фазні, й випереджають їх на кут 30 тобто

співвідношення між комплексами лінійних та фазних напруг мають вигляд:

$$\underline{U}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{AO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{BO} \cdot e^{j30^\circ}; \quad \underline{U}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \underline{U}_{CO} \cdot e^{j30^\circ}.$$

З'єднання обмоток генератора трикутником

При з'єднанні обмоток генератора трикутником фазні обмотки генератора або трансформатора з'єднані один з одним послідовно таким чином, що «початок» однієї фази генератора (або трансформатора) з'єднується з

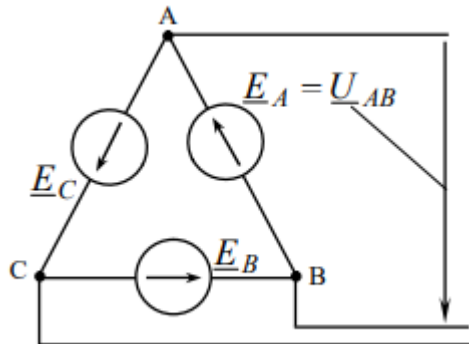


Рис. 3 – Фазні обмотки, з'єднанні трикутником

«кінцем» іншої фази (рис. 1.6), а кожна фаза навантаження, якщо і воно з'єднане трикутником, при цьому вмикається між лінійними проводами. Внаслідок цього навантаження знаходиться під лінійною напругою, яка в даному випадку одночасно є і фазною напругою, тобто: $\underline{U}_L = \underline{U}_\Phi$.

Якщо до затисків генератора не під'єднати навантаження, то по обмотках не протікатиме струм, тому що:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0,$$

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = E \cdot (1 + 1 \cdot e^{-j120^\circ} + 1 \cdot e^{j120^\circ}) = E \cdot (1 - 0,5 - j \cdot 0,866 - 0,5 + j \cdot 0,866) = 0.$$

ТЕМА 28. «ТРИФАЗНІ СХЕМИ "ЗІРКА–ЗІРКА" ТА "ТРИКУТНИК–ТРИКУТНИК"»

Мета – Сформувані в студентів навички розрахунку трифазних кіл при різних схемах з'єднання, навчити визначати фазні та лінійні величини за допомогою законів Ома та Кірхгофа, включаючи метод двох вузлів.

План

- Структура трифазного кола «зірка–зірка».
- «Зірка–зірка» з нейтральним та без нейтрального проводу.
- Напруга зміщення нейтралі.
- Фазні та лінійні струми при симетричному та несиметричному навантаженні.

- Схема «трикутник–трикутник».
- Схема «зірка–трикутник».
- Застосування перетворення «трикутник–зірка» для розрахунків.

Ключові слова: зірка–зірка, трикутник–трикутник, напруга нейтралі, фазні струми, лінійні струми, несиметричне навантаження, перетворення зірка–трикутник.

Keywords: star-star, delta-delta, neutral voltage, phase currents, line currents, asymmetrical load, star-delta transformation.

В трифазному колі «зірка-зірка» обмотки генератора й фазні навантаження з'єднуються «зіркою». Таке трифазне коло може бути без нульового проводу (трипровідна система – рисунок 1.7) або з ним (чотиріпровідна система – рисунок 1.8).

Проводи, що з'єднують генератор та навантаження, називають лінійними, а струми, що течуть по них – лінійні струми ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$). Напруга між лінійними ($\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$).

Для схем струми дорівнюють лінійним. Струм, що тече по нульовому, або нейтральному, проводу – струм нульового або нейтрального проводу.

За додатний напрямок струмів у лінійних проводах приймається напрямок від джерела до навантаження, а в нейтральному проводі навпаки – від навантаження до джерела.

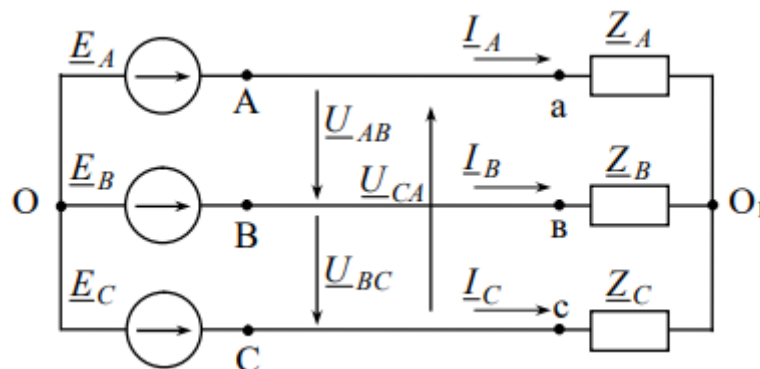


Рис. 1. – Схема «зірка-зірка» без нульового проводу

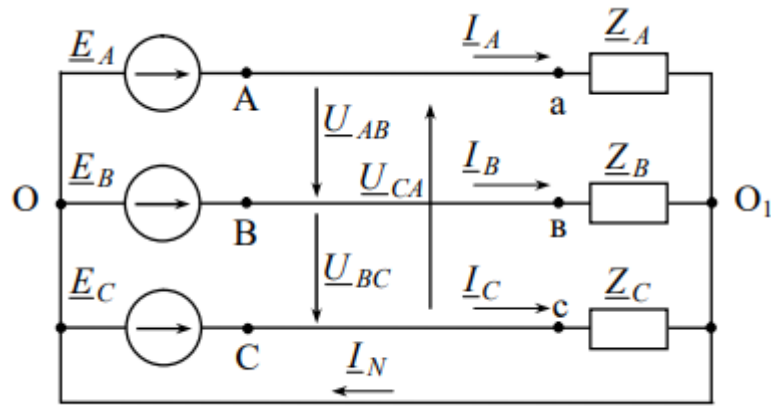


Рис. 2. – Схема «зірка-зірка» з нульовим проводом

Струм у нейтральному проводі дорівнює геометричній сумі лінійних струмів (за першим законом Кірхгофа):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C.$$

З'єднання обмоток генератора і трифазного навантаження за типом «трикутник-трикутник», «зірка-трикутник»

Схема «трикутник-трикутник» характеризується тим, що обмотки генератора і фазні навантаження з'єднані трикутником, а схема «зіркатрикутник» – тим, що обмотки генератора з'єднані зіркою, а фазні навантаження – трикутником.

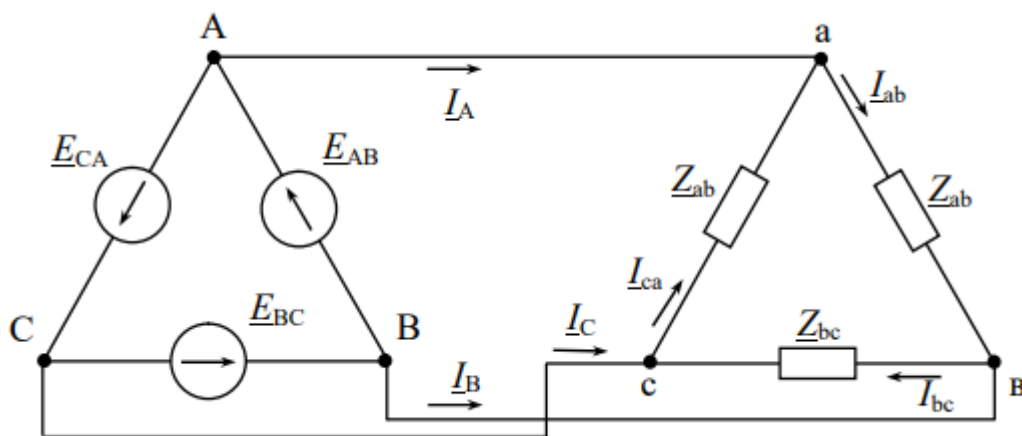


Рис. 3. – Схема «трикутник-трикутник»

За додатний напрямок лінійних струмів ($\underline{I}_A$, $\underline{I}_B$, $\underline{I}_C$) приймається напрямок від джерела до навантаження. Додатний напрямок фазних струмів такий – від точки «а» до точки «в» (струм $\underline{I}_{ab}$), від точки «в» до «с» (струм $\underline{I}_{bc}$), від точки «с» до «а» (струм $\underline{I}_{ca}$).

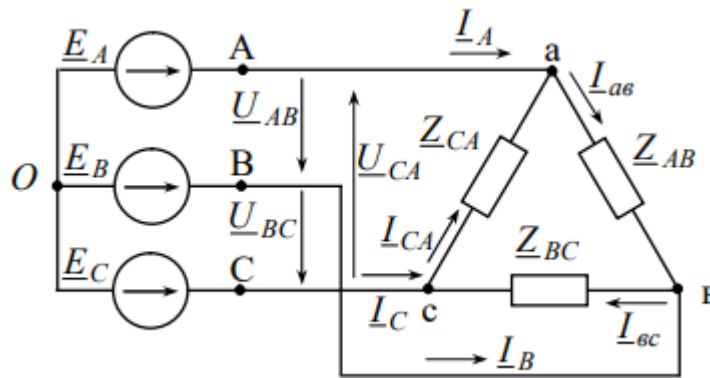


Рис. 4. – Схема «зірка-трикутник»

Розрахунок трифазних кіл

Трифазне електричне коло є різновидом кіл синусоїдного струму і тому його розрахунок та дослідження здійснюють з використанням законів Ома і Кірхгофа та методів розрахунку, що розглядалися раніше. Особливо доцільним є застосування методу двох вузлів для аналізу схем «зірка-зірка». При розрахунках вважаємо, що трифазна ЕРС симетрична.

Трифазне коло «зірка-зірка» з нульовим проводом

В схемі «зірка-зірка» з нульовим проводом при несиметричному навантаженні ($Z_A \neq Z_B \neq Z_C$), коли в нейтральному проводі є опір Z_N , потенціали точок O і O_1 не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють у такій послідовності.

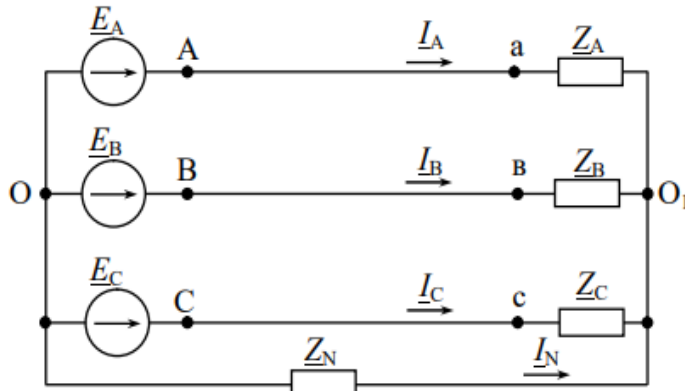
1. Визначають напругу зміщення нейтралі (тобто напругу $\underline{U}_{O_1O}$) за формулою, що випливає з методу двох вузлів:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

Де $\underline{Y}_A = \frac{1}{Z_A}, \underline{Y}_B = \frac{1}{Z_B}, \underline{Y}_C = \frac{1}{Z_C}, \underline{Y}_N = \frac{1}{Z_N}$ – комплекси фазних провідностей і

провідність нейтрального проводу.

2. Визначають фазні напруги на навантаженні:



$$\underline{U}_{aO_1} = \underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O};$$

$$\underline{U}_{bO_1} = \underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O};$$

$$\underline{U}_{cO_1} = \underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}.$$

Рис. 5. – Схема «зірка-зірка» з опором в нейтральному проводі

3. Визначають фазні

струми за формулами:

$$\underline{I}_A = \underline{U}_{aO_1} \cdot \underline{Y}_A; \quad \underline{I}_B = \underline{U}_{bO_1} \cdot \underline{Y}_B; \quad \underline{I}_C = \underline{U}_{cO_1} \cdot \underline{Y}_C$$

4. Струм у нейтральному проводі ному проводі $\underline{I}_N$ визначають як суму фазних струмів за формулою.

Коли в нейтральному проводі немає опору $\underline{Z}_N$, то напруга зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = 0$ і фазні струми визначають за формулами, а струм нейтрального проводу – за формулою.

При симетричному навантаженні ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) в випадках, що відповідають схемам, потенціали точок O і O₁ дорівнюють один одному. Для схеми $\underline{U}_{O_1O} = 0$, тому що нейтральний провід вирівнює потенціали точок O та O₁, а для схеми:

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = \frac{\underline{Y}_A \cdot 0}{3 \cdot \underline{Y}_A + \underline{Y}_N} = 0.$$

Тому фазні (лінійні) струми, які за законом Ома визначають за формулами, дорівнюють один одному за модулем і зсунуті за фазою на кут 120°.

Трифазне коло «зірка-зірка» без нульового проводу

При симетричному навантаженні ($\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$) для схеми :

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{Y}_A \cdot (\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C)}{3 \cdot \underline{Y}_A} = \frac{\underline{Y}_A \cdot 0}{3 \cdot \underline{Y}_A} = 0.$$

Тоді фазні струми визначають за формулами з урахуванням того, що $\underline{U}_{aO_1} = \underline{U}_{AO} = \underline{E}_A$; $\underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} = \underline{E}_B$; $\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} = \underline{E}_C$. Струми однакові за модулем і зсунуті за фазою на кут 120° .

Якщо для тієї ж схеми навантаження несиметричне, фазні струми встановлюються таким чином, що їх сума дорівнює нулю. Внаслідок чого відбувається, як і в випадку несиметричного навантаження за наявності в нейтральному проводі опора $\underline{Z}_N$, так зване спотворення симетрії фазних напруг. При цьому навантаження опиняються під різними, не рівними один одному та фазним ЕРС, напругами. Потенціали точок О та O_1 не дорівнюють один одному.

Розрахунок кола здійснюють так:

- визначають напругу зміщення нейтралі

$$\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C};$$

- визначають фазні напруги на навантаженні за формулами ;

- визначають фазні струми за формулами.

Трифазні кола «трикутник-трикутник» і «зірка-трикутник»

Взагалі розрахунок електричних кіл «трикутник-трикутник» і «зірка-трикутник» без урахування опорів проводів відрізняється тільки величинами напруги на фазних навантаженнях ($\underline{U}_{\phi, \text{навантаження}}$): у випадку кола «трикутник-трикутник» – генератора $\underline{U}_{\phi, \text{навантаження}} = \underline{U}_{\phi, \text{генератора}}$, а у випадку кола «зірка-трикутник» – $\underline{U}_{\phi, \text{навантаження}} = \underline{U}_{\text{лінійне генератора}} = \sqrt{3} \cdot \underline{E}_\phi \cdot \angle 30^\circ$.

Розглянемо порядок розрахунку кола «зірка-трикутник» без урахування опорів проводів, що з'єднують трифазне джерело і навантаження.

1. Комплекси фазних струмів визначають за формулами:

$$\underline{I}_{aB} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{aB}} = \underline{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_{aB}; \underline{I}_{bC} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bC}} = \underline{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_{bC}; \underline{I}_{cA} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{cA}} = \underline{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_{cA},$$

Де $\underline{U}_{AB}, \underline{U}_{BC}, \underline{U}_{CA}$ – лінійні напруги (формули 1.3);

2. Лінійні струми визначають за першим законом Кірхгофа для вузлів а, в, с:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{aB} - \underline{I}_{ca}; \underline{I}_B = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{aB}; \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{BC}.$$

Треба відзначити, що при симетричному режимі фазні струми в усіх фазах однакові й зсунуті відносно своїх фазних напруг на однаковий кут, що визначається співвідношенням

$$\varphi = \arctg \frac{X_\phi}{R_\phi},$$

X_ϕ – реактивний опір навантаження;

R_ϕ – активний опір навантаження.

Лінійні струми при цьому за модулем будуть рівними між собою, в $\sqrt{3}$ разів більшими, ніж фазні струми, а за фазою будуть відставати на кут 30° при прямому чергуванні фаз, тобто

$$\underline{I}_A = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{aB} \angle -30^\circ; \underline{I}_B = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{BC} \angle -30^\circ; \underline{I}_C = \sqrt{3} \cdot \underline{I}_{ca} \angle -30^\circ.$$

При несиметричному навантаженні лінійні струми можуть бути більшими чи меншими, ніж фазні струми. Розглянемо розрахунок кола «зірка-трикутник» з урахуванням опорів проводів, що з'єднують трифазне джерело і навантаження, коли опори в лініях не дорівнюють один одному і навантаження фаз несиметричне.

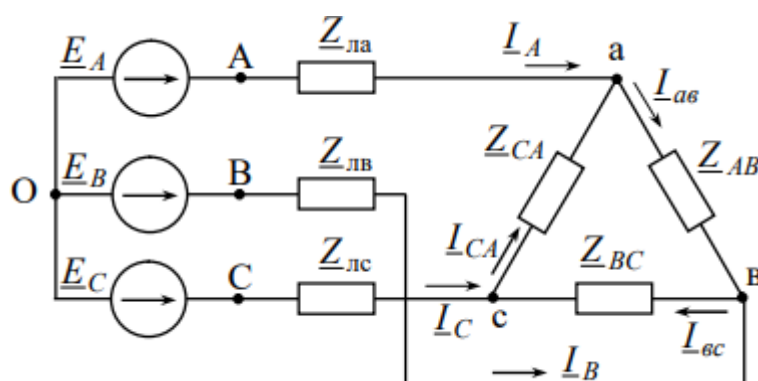


Рис. 6 – Схема «зірка-трикутник» з урахуванням опорів в лініях

Розрахунок такої схеми слід виконувати шляхом заміни трикутника опорів еквівалентною зіркою.

Опори еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}'_a = \frac{\underline{Z}_{aB} \cdot \underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{ca}}; \underline{Z}'_B = \frac{\underline{Z}_{BC} \cdot \underline{Z}_{aB}}{\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{ca}}; \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_{ca} \cdot \underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{ca}}.$$

Якщо навантаження фаз симетричне, тобто $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_\Phi$, то опори еквівалентної зірки:

$$\underline{Z}'_a = \underline{Z}'_B = \underline{Z}'_c = \frac{\underline{Z}_\Phi}{3}.$$

У результаті перетворення одержуємо еквівалентну схему, зображену на рисунку 7, лінійні струми якої ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$) в загальному випадку розраховується як у схемі «зірка-зірка» без нейтрального проводу при несиметричному навантаженні, а саме:

– визначають опори ($\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$) та провідності ($\underline{Y}_A, \underline{Y}_B, \underline{Y}_C$) кожної фази, враховуючи що опори з'єднувальних проводів ввімкнені послідовно з відповідними опорами еквівалентної зірки, тобто:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}'_a + \underline{Z}_{ла}; \quad \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A}; \quad \underline{Z}_B = \underline{Z}'_B + \underline{Z}_{лв}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B};$$

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}'_c + \underline{Z}_{лс}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C};$$

– визначають напругу зміщення нейтралі $\underline{U}_{O_1O} = \frac{\underline{E}_A \cdot \underline{Y}_A + \underline{E}_B \cdot \underline{Y}_B + \underline{E}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C};$

– визначають лінійні струми

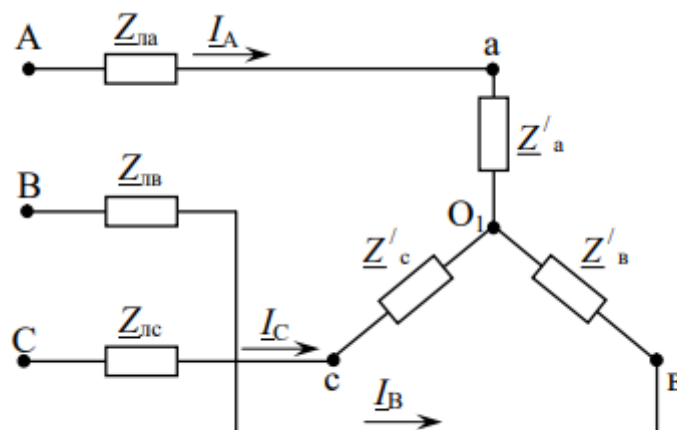


Рис. 7 – Схема «зірка-трикутник» після перетворення

$$\underline{I}_A = (\underline{E}_A - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_A, \quad \underline{I}_B = (\underline{E}_B - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_B, \quad \underline{I}_C = (\underline{E}_C - \underline{U}_{O_1O}) \cdot \underline{Y}_C.$$

Фазні струми в навантаженнях $\underline{Z}_{ab}; \underline{Z}_{bc}; \underline{Z}_{ca}$; вихідної схеми визначають за законом Ома:

$$\underline{I}_{aB} = \frac{\underline{U}_{aB}}{\underline{Z}_{aB}}; \underline{I}_{bC} = \frac{\underline{U}_{bC}}{\underline{Z}_{bC}}; \underline{I}_{cA} = \frac{\underline{U}_{cA}}{\underline{Z}_{cA}},$$

де $\underline{U}_{aB}; \underline{U}_{bC}; \underline{U}_{cA}$ – лінійні напруги на навантаженні.

$$\underline{U}_{aB} = \underline{U}_{aO_1} - \underline{U}_{BO_1} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B;$$

$$\underline{U}_{bC} = \underline{U}_{BO_1} - \underline{U}_{CO_1} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B - \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c;$$

$$\underline{U}_{cA} = \underline{U}_{CO_1} - \underline{U}_{AO_1} = \underline{I}_C \cdot \underline{Z}_c - \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_a.$$

ТЕМА 29. «АВАРІЙНІ РЕЖИМИ В ТРИФАЗНИХ КОЛАХ»

Мета – надати розуміння поведінки трифазних систем при аварійних режимах: обрив фазного чи лінійного проводу, коротке замикання. Навчити визначати струми, напруги та зміщення нейтралі при аваріях.

План

- Види аварійних режимів.
- Обрив лінійного проводу в схемі «зірка–зірка».
- Обрив фазного проводу в схемі «зірка–трикутник».
- Коротке замикання у фазі.
- Вплив аварії на фазні та лінійні струми.
- Напруга на місці обриву.
- Аналіз зміщення нейтралі.

Ключові слова аварійні режими, обрив фази, обрив лінії, коротке замикання, зміщення нейтралі, аварійні струми.

Keywords: emergency modes, phase failure, line failure, short circuit, neutral displacement, emergency currents.

У випадку обриву лінійного проводу в схемі «зірка-зірка» з нейтральним проводом $\underline{I}_A = 0$, а фазні струми $\underline{I}_B, \underline{I}_C$ залишаються тими ж, що й до аварійного режиму тобто:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{BO_1}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{CO_1}}{\underline{Z}_C}.$$

Струм в нульовому проводі $\underline{I}_N = \underline{I}_B + \underline{I}_C$.

Фазні напруги на навантаженні: $\underline{U}_{aO_1} = 0$, $\underline{U}_{BO_1} = \underline{U}_{BO}$, $\underline{U}_{CO_1} = \underline{U}_{CO}$.

Напруга на затискачах розриву дорівнює фазній напрузі $\underline{U}_{Aa} = \underline{U}_{AO}$.

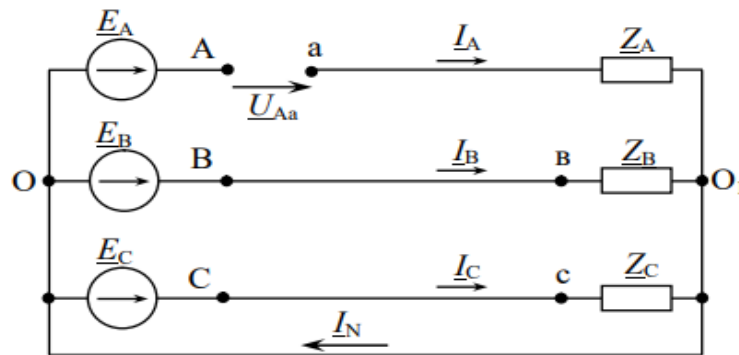


Рис. 1. – Обрив лінійного проводу в схемі «зірка-зірка»

У випадку обриву лінійного проводу в схемі без нейтрального проводу (у схемі рисунку 1 треба вимкнути нульовий провід) лінійна напруга $\underline{U}_{BC}$ прикладається до послідовного з'єднання двох опорів $\underline{Z}_B$ і $\underline{Z}_C$. Якщо $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C$ вона (напруга) рівномірно розподіляється між цими опорами. Струми:

$$\underline{I}_A = 0, \quad \underline{I}_B = -\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_C}.$$

Напруга на затискачах розриву дорівнює:

$$\underline{U}_{Aa} = \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B - \underline{E}_B + \underline{E}_A = \underline{U}_{AB} + \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B$$

Якщо $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C$, то напруга на затискачах розриву:

$$\underline{U}_{Aa} = 1,5 \cdot \underline{U}_{AO}.$$

Напруга зміщення нейтралі:

$$\underline{U}_{OIO} = \underline{U}_{BO} - \underline{I}_B \cdot \underline{Z}_B.$$

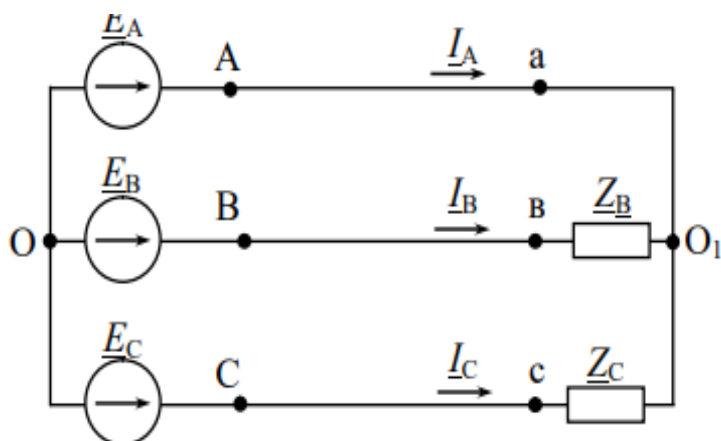


Рис. 2. – Коротке замикання в фазі А, схема «зірка-зірка» без нульового проводу

У випадку короткого замикання у фазі (схема «зірка-зірка» без нульового проводу) напруга зміщення нейтралі – $\underline{U}_{O_1O} = \underline{E}_A$.

Напруги на навантаженнях:

$$\underline{U}_{aO_1} = 0, \underline{U}_{bO_1} = \underline{U}_{BO} - \underline{U}_{O_1O},$$

$$\underline{U}_{cO_1} = \underline{U}_{CO} - \underline{U}_{O_1O}.$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_{bO_1}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_{cO_1}}{\underline{Z}_B}, \quad \underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C).$$

При обриві одного з фазних проводів у схемі «зірка-трикутник», наприклад, у фазі «вс» (рис. 2), фазний струм $\underline{I}_{BC} = 0$, струми $\underline{I}_{ca}$ та $\underline{I}_{ab}$ залишаються без змін. Тому лінійний струм $\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$ зберігає своє значення, а лінійні струми $\underline{I}_B$ та $\underline{I}_C$ змінюються: $\underline{I}_B = -\underline{I}_{ab}$; $\underline{I}_C = \underline{I}_{ca}$. Таким чином, зміна навантаження в одній з фаз зумовлює одночасну зміну двох лінійних струмів і не впливає на величину фазних напруг, струмів двох інших фаз і на величину третього лінійного струму.

При обриві одного з лінійних проводів у схемі «зірка-трикутник», наприклад, у фазі «А» (рис. 3), режим роботи схеми змінюється. Опір фази «вс» буде, як і раніше, знаходитися під нормальною лінійною напругою $\underline{U}_{BC}$, струм $\underline{I}_{BC}$ не зміниться. Опори фаз «ав» і «са» виявляться послідовно з'єднаними та увімкненими до напруги « $-\underline{U}_{BC}$ ».

Якщо $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ca}$, то напруга « $-\underline{U}_{BC}$ » розподілиться між ними навпіл, а якщо $\underline{Z}_{ab} \neq \underline{Z}_{ca}$, то напруга « $-\underline{U}_{BC}$ » розподілиться прямо пропорційно

величинам цих опорів, при цьому у фазах «ав» і «са» протікатиме один і той же струм:

$$\underline{I}_{aB} = \underline{I}_{ca} = \frac{-\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{ca}}. \quad (1.31)$$

$$\text{Лінійні струми визначають так: } \underline{I}_B = -\underline{I}_C = \underline{I}_{BC} - \underline{I}_{ca}; \underline{I}_A = 0. \quad (1.32)$$

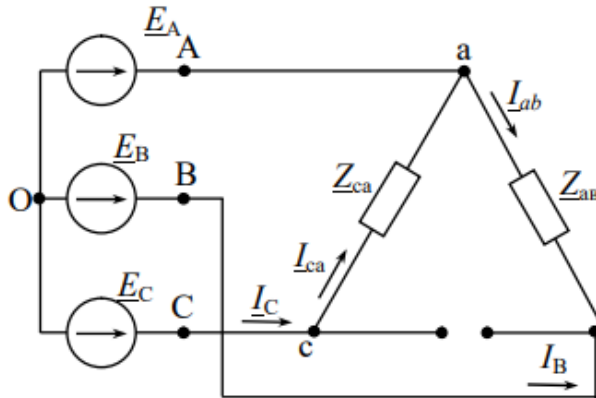


Рис.3. – Обрив фазного проводу в схемі «зірка-трикутник»

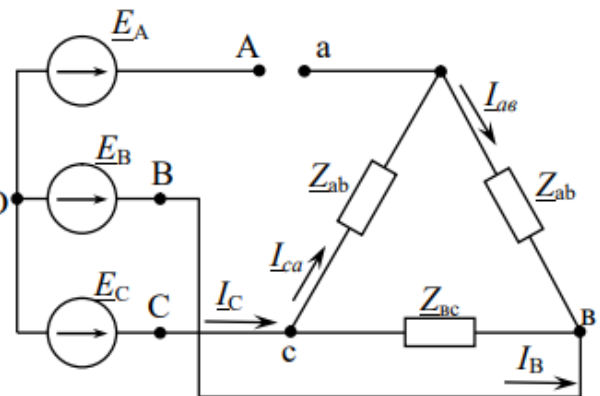


Рис. 4. – Обрив лінійного проводу в схемі «зірка-трикутник»

ТЕМА 30. «ПОТУЖНІСТЬ У ТРИФАЗНИХ КОЛАХ І МЕТОДИ ЇЇ ВИМІРЮВАННЯ»

Мета – сформулювати розуміння формул активної, реактивної і повної потужності в трифазних колах. Навчити методам вимірювання потужності за допомогою двох і трьох ватметрів.

План

- Комплексна потужність трифазного кола.
- Активна та реактивна складові.
- Потужність при симетричному навантаженні.
- Метод трьох ватметрів.
- Метод двох ватметрів.
- Баланс потужностей.
- Особливі випадки вимірювань.

Ключові слова комплексна потужність, активна потужність, реактивна потужність, повна потужність, схема двох ватметрів, схема трьох ватметрів, баланс потужностей.

Keywords: emergency modes, phase failure, line failure, short circuit, neutral displacement, emergency currents.

Комплексна потужність трифазного кола:

$$\tilde{S}_3 = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B + \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_C = P_3 + j \cdot Q_3,$$

де $P_3 = U_{AO} \cdot I_A \cdot \cos \varphi_A + U_{BO} \cdot I_B \cdot \cos \varphi_B + U_{CO} \cdot I_C \cdot \cos \varphi_C$ – активна потужність трифазного кола;

$Q_3 = U_A \cdot I_A \cdot \sin \varphi_A + U_B \cdot I_B \cdot \sin \varphi_B + U_C \cdot I_C \cdot \sin \varphi_C$ – реактивна потужність трифазного кола.

Якщо навантаження симетричне, то в випадку схеми «зірка-зірка» можна користуватися такими формулами ($E_A = U_{AO} = E_B = U_{BO} = E_C = U_{CO} = U_\Phi$;

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_\Delta):$$

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Delta \\ P_3 &= 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Delta \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= 3 \cdot U_\Phi \cdot I_\Delta \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ – фазна форма запису;}$$

де φ – кут зсуву між фазною ЕРС і лінійним струмом;

$$\left. \begin{aligned} S_3 &= \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \\ P_3 &= \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \cdot \cos \varphi \\ Q_3 &= \sqrt{3} \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{ – лінійна форма запису.}$$

Вимірювання активної потужності в трифазних чотирипровідних колах проводять за допомогою схеми трьох ватметрів :

$$P_3 = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}.$$

Якщо схема чотирипровідна, а навантаження симетричне, досить включити один ватметр і тоді $P_3 = 3 \cdot P_{W1}$.

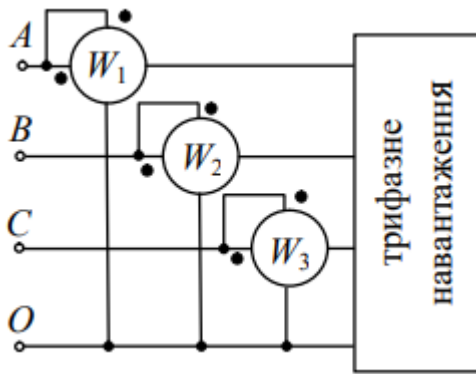


Рис. 1. – Схема трьох ватметрів

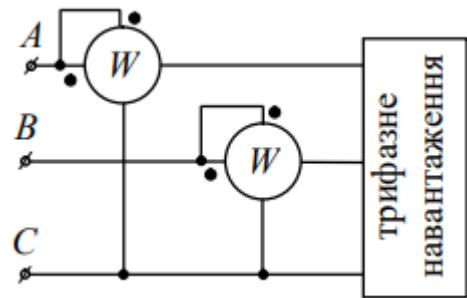


Рис. 2. – Схема двох ватметрів

Доведемо, що включення двох ватметрів (рис. 1.19) дозволяє виміряти повну активну потужність трифазного кола:

$$\begin{aligned}
 P_1 + P_2 &= \operatorname{Re}[\underline{U}_{AC} \cdot \underline{I}_A + \underline{U}_{BC} \cdot \underline{I}_B] = \\
 &= \operatorname{Re}[(\underline{U}_{AO} - \underline{U}_{CO}) \cdot \underline{I}_A + (\underline{U}_{BO} - \underline{U}_{CO}) \cdot \underline{I}_B] = \\
 &= \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A - \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_A + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B - \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_B = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A + \\
 &\quad + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B + \underline{U}_{CO} (-\underline{I}_A - \underline{I}_B) = \underline{U}_{AO} \cdot \underline{I}_A + \underline{U}_{BO} \cdot \underline{I}_B + \underline{U}_{CO} \cdot \underline{I}_C.
 \end{aligned}$$

ТЕМА 31. « ПЕРІОДИЧНІ НЕСИНУСОЇДНІ СТРУМИ »

Мета – Пояснити природу виникнення періодичних несинусоїдних струмів та напруг, причини їх появи та вплив нелінійних елементів і імпульсних джерел на форму кривих.

План

- Визначення несинусоїдних періодичних струмів.
- Джерела несинусоїдності.
- Лінійні кола з несинусоїдними сигналами.
- Несинусоїдні режими в нелінійних колах.
- Однопівперіодний випрямляч.
- Несинусоїдні струми в колах з феромагнітними котушками.
- Комбіновані випадки несинусоїдності.

Ключові слова: несинусоїдні струми, імпульсні джерела, випрямляч, нелінійність, періодичний процес, форма кривої.

Keywords: non-sinusoidal currents, pulsed sources, rectifier, nonlinearity, periodic process, curve shape.

Визначення періодичних несинусоїдних струмів та напруг

Раніше розглядалися лінійні кола з незмінними параметрами активного опору (R), індуктивності (L), ємності (C) та взаємної індуктивності (M) при дії джерел постійних або синусоїдних ЕРС і струмів. Але на практиці ЕРС, напруги й струми відрізняються від постійних або синусоїдних, причому їх залежність від часу може бути періодичною, майже періодичною та неперіодичною. Так у машинних генераторах змінного струму внаслідок відмінності кривої розподілу магнітної індукції вздовж зазору від синусоїди, криві ЕРС, які наводяться в обмотках, відрізняється від синусоїдних.

Періодичним несинусоїдним струмом (або напругою) називають струм (або напругу), який змінюється в часі за періодичним несинусоїдним законом.

Розглянемо режими роботи кіл, які призводять до їх появи.

1. Джерела ЕРС (або струму) дають несинусоїдну ЕРС (струм), а всі елементи кола (R , L , C , M) – лінійні елементи, тобто їх величини від струму не залежать.

Так у різних пристроях радіотехніки, автоматики, телемеханіки, обчислювальної техніки застосовують генератори періодичних імпульсів. При цьому форма імпульсів може бути різною (прямокутною, трапецієподібною, ступінчастою тощо – рисунок 1.). Під час проходження цих імпульсів по електричних колах їх форма суттєво змінюється.

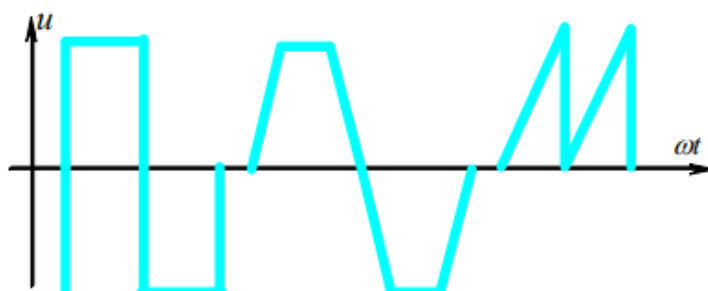


Рис. 1. – Приклади періодичних несинусоїдних кривих $u(\omega t)$

2. Джерело ЕРС (струму) дає синусоїдну ЕРС (струм), але один чи декілька елементів кола – нелінійні.

Як приклад можна розглянути схему однофазного однопівперіодного випрямляча (рис. 2., а). У цьому колі діод – нелінійний елемент. Часові діаграми роботи цього пристрою наведено на рис. 2., б. Випрямлений струм $i_d(t)$ й випрямлена напруга $u_d(t)$ на опорі навантаження R_H є несинусоїдними й періодичними.

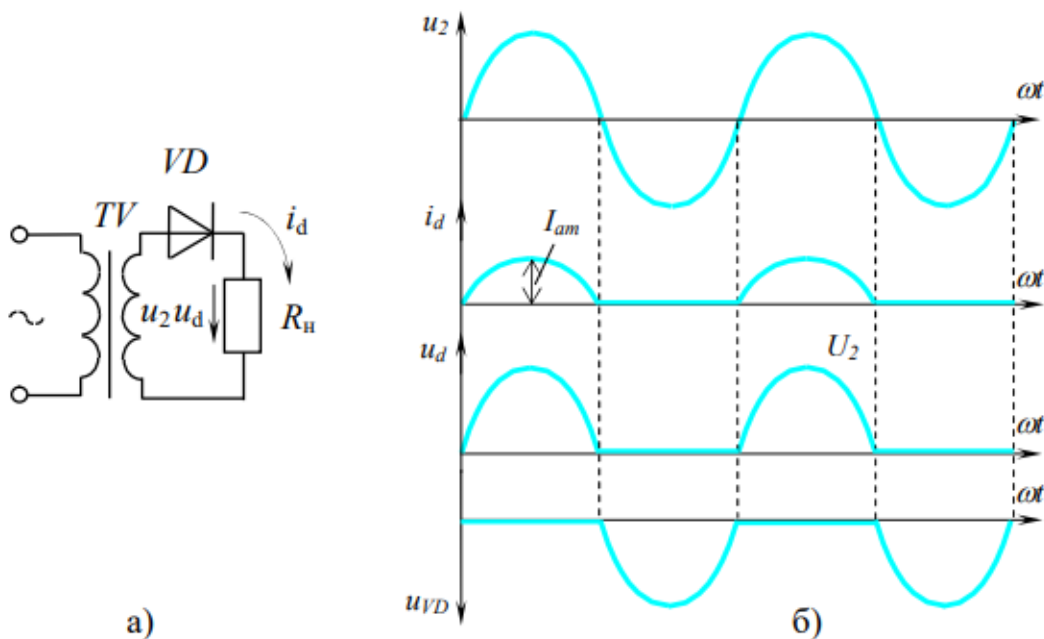


Рис. 2. – Однофазний однонапівперіодний випрямляч: а – схема;
б – часові діаграми його роботи

Ще один приклад отримання несинусоїдного періодичного струму в колі з синусоїдним джерелом енергії – схема на рис.3, яка має котушку з феромагнітним осердям. Струм в цьому випадку має приблизно таку форму, як показано на рисунку 2.4.

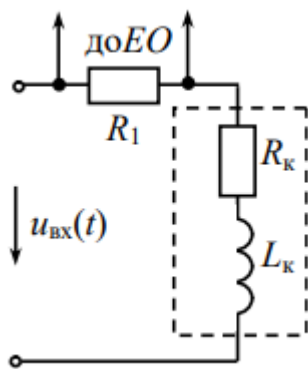


Рис. 3. – Схема з нелінійною котушкою

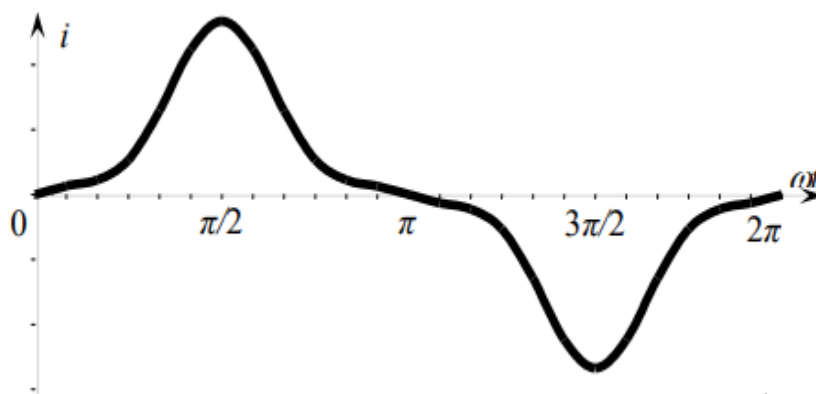


Рис 4. – Несинусоїдний струм в схемі з нелінійною котушкою

3. Сукупність 1 і 2 режимів.
4. Якщо джерело ЕРС (струму) дає постійну або синусоїдну ЕРС (струм), а один або декілька елементів кола періодично змінюються у часі.

В усіх задачах, де доводиться мати справу зі складними несинусоїдними кривими струмів і напруг, важливо вміти звести складну задачу до більш простої та застосувати методи розрахунку простих задач.

У цьому розділі розглядаються методи розрахунку лінійних кіл при несинусоїдних періодичних або майже періодичних струмах і напругах, які можна розкласти на гармонійні складові.

ТЕМА 32. «РЯДИ ФУР'Є ТА СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ НЕСИНУСОЇДНИХ СИГНАЛІВ»

Мета - навчити студентів застосовувати ряди Фур'є для представлення періодичних несинусоїдних сигналів, визначати їх гармонічний склад, амплітуди та фази гармонік, а також застосовувати ці знання під час аналізу електричних кіл.

План

- Поняття спектра періодичної кривої.
- Ряд Фур'є як сума гармонік.

- Нульова, основна та вищі гармоніки.
- Парні та непарні гармоніки.
- Визначення коефіцієнтів Фур'є.
- Представлення у вигляді синусів з фазами.
- Властивості кривих із симетрією (спрощення ряду).

Ключові слова: ряд Фур'є, гармоніка, спектр, парні гармоніки, непарні гармоніки, амплітуда, початкова фаза, спектральний аналіз.

Keywords: Fourier series, harmonic, spectrum, even harmonics, odd harmonics, amplitude, initial phase, spectral analysis.

Як відомо, будь-яку періодичну функцію $f(x)$ з періодом 2π , яка задовольняє умові Діріхле (тобто, яка має на всякому інтервалі кінцеве число розривів першого роду та кінцеве число максимумів та мінімумів) може бути розкладена у нескінченний тригонометричний ряд. При цьому змінна x зв'язана з часом t співвідношенням

$$x = \omega t = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T},$$

де T – період функції у часі.

Таким чином період функції за змінною x дорівнює 2π , а за часом період тієї ж функції дорівнює T . Ряд Фур'є при цьому:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + A_m^{(1)/} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)//} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(2)/} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A_m^{(2)//} \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + \\ + A_m^{(3)/} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)//} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots + A_m^{(k)/} \cdot \sin(k \cdot \omega t) + A_m^{(k)//} \cdot \cos(k \cdot \omega t) + \dots,$$

де $A^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) d\omega t$ – нульова гармоніка (чи постійна складова);

$A_1' = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin \omega t d\omega t$ – амплітуда косинусної складової першої гармоніки;

$A_m^{(k)/} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k \omega t) d\omega t$ – амплітуда синусної складової гармоніки

з номером k ;

$$A_m^{(k) //} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k \omega t) d\omega t - \text{амплітуда косинусної складової гармоніки}$$

з номером k .

Інакше вираз (2.2) може бути записаний так:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \cdot \sin(k \cdot \omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k'' \cdot \cos(k \cdot \omega t).$$

Частіше ряд Фур'є записують у вигляді суми нульової гармоніки та синусоїдних складових з ненульовими початковими фазами:

$$f(\omega t) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} A_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi^{(k)}),$$

де $A_m^{(k)} = \sqrt{A_m^{(k)/2} + A_m^{(k) //2}}$ - амплітуда гармоніки з номером « k »

$$\varphi^{(k)} = \arctan \frac{A_m^{(k) //}}{A_m^{(k) /}} \text{ початкова фаза гармоніки з номером «} k \text{»}$$

При розгляданні цієї теми ми будемо говорити, що гармоніки бувають такими: нульова, перша (основна) та вищі (з номерами 2, 3, 4 і т. ін.). Крім того, якщо $k=1, 3, 5 \dots$ - це непарні гармоніки, а якщо $k=2, 4, 6 \dots$ - це парні гармоніки.

Приклад

Крива напруги має в своєму складі 3 гармонійні складові:

$$u(\omega t) = 100 \cdot \sin(\omega t) + 80 \cdot \cos(\omega t) + 30 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) - 15 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \\ + 8 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 12 \cdot \cos(3 \cdot \omega t), \text{ В.}$$

Представимо ряд Фур'є у вигляді суми синусних складових з ненульовими початковими фазами.

Визначимо амплітуди та початкові фази синусних складових першої, третьої та п'ятої гармонік.

$$A_m^{(1)} = \sqrt{A_m^{(1)/2} + A_m^{(1) //2}} = \sqrt{100^2 + 80^2} = 127 \text{ В}; \varphi^{(1)} = \arctan \frac{80}{100} = 38,66^\circ;$$

$$A_m^{(3)} = \sqrt{A_m^{(3)/2} + A_m^{(3)/2}} = \sqrt{30^2 + 15^2} = 34,7\text{В}; \varphi^{(3)} = \arctan \frac{-15}{30} = -26,6^\circ;$$

$$A_m^{(5)} = \sqrt{A_m^{(5)/2} + A_m^{(5)/2}} = \sqrt{8^2 + 12^2} = 14,4\text{В}; \varphi^{(5)} = \arctan \frac{12}{8} = 56,3^\circ.$$

Таким чином, ряд Фур'є матиме вигляд, В:

$$u(\omega t) = 127 \cdot \sin\left(\omega t + 38,66^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 34,7 \sin\left(3\omega t - 26,6^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 14,4 \cdot \sin\left(5\omega t + 56,3^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

Крива, що відповідає цьому ряду.

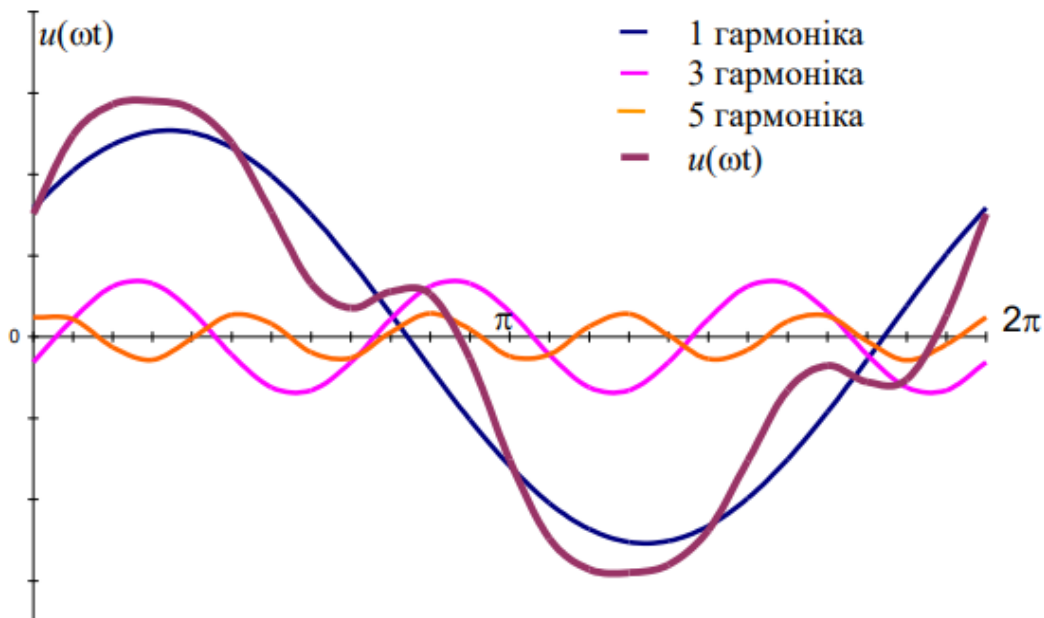


Рис. 1. – Крива $u(\omega t)$, що відповідає отриманому ряду Фур'є

Деякі властивості періодичних кривих, які мають симетрію

Періодичні несинусоїдні криві можуть мати ті чи інші види симетрії, що спрощує їх розкладання в ряд Фур'є, бо деякі гармоніки виключаються з ряду.

Розглянемо це детальніше.

1. Крива симетрична відносно вісі абсцис, тобто задовольняє умові:

$$f(\omega t + \pi) = f(\omega t).$$

При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є нульова і парні гармоніки дорівнюють 0: $A_0 = A_2' = A_2'' = A_4' = A_4'' = \dots = 0$, а сам ряд має вигляд:

$$f(\omega t) = A_m^{(1)'} \cdot \sin(\omega t) + A_m^{(1)''} \cdot \cos(\omega t) + A_m^{(3)'} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(3)''} \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \\ + A_m^{(5)'} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + A_m^{(5)''} \cdot \cos(5 \cdot \omega t) + \dots$$

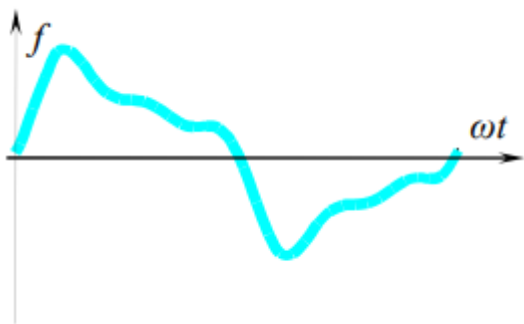


Рис. 1. – Симетрія відносно вісі абсцис

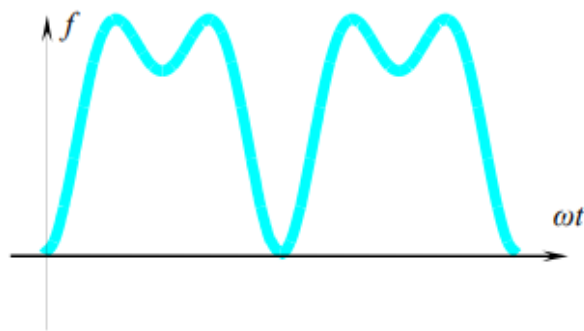


Рис. 2. – Симетрія відносно вісі ординат

ТЕМА 33. «ОСНОВИ РОЗКЛАДАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ НЕСИНУСОЇДНИХ ФУНКЦІЙ У РЯД ФУР'Є»

Мета - Сформуванати розуміння принципів представлення періодичних несинусоїдних функцій у вигляді тригонометричного ряду, пояснити вплив різних видів симетрії кривих на склад ряду Фур'є та навчити визначати гармонійні складові для кривих правильної форми.

План

- Поняття несинусоїдних періодичних функцій.
- Загальна формула ряду Фур'є.
- Види симетрії кривих і їх вплив на гармоніки.
- Розкладання кривих правильної геометричної форми.
- Приклади рядів Фур'є для трикутних і прямокутних сигналів.

Ключові слова: ряд Фур'є, гармоніка, симетрія, трикутна форма, прямокутна форма, синусні складові, косинусні складові.

Keywords: Fourier series, harmonics, symmetry, triangular form, rectangular form, sine components, cosine components.

Крива симетрична відносно вісі ординат, тобто задовольняє умові:
 $f(\omega t) = f(-\omega t)$.

При розкладанні таких кривих у ряд Фур'є відсутні синусні складові, тобто $A'_1 = A'_2 = A'_3 = \dots = 0$, а сам ряд Фур'є має вигляд:

$$f(\omega t) = A_0 + A''_1 \cdot \cos(\omega t) + A''_2 \cdot \cos(2 \cdot \omega t) + A''_3 \cdot \cos(3 \cdot \omega t) + \dots$$

3. Крива симетрична відносно початку координат (рис. 1), тобто задовольняє умові $f(\omega t) = f(-\omega t)$. Такий ряд Фур'є не містить нульову та косинусні складові, тобто: $A_0 = A''_1 = A''_2 = A''_3 = \dots = 0$ і має вигляд:

$$f(\omega t) = A^{(1)'}_m \cdot \sin(\omega t) + A^{(2)'}_m \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A^{(3)'}_m \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A^{(4)'}_m \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots$$

4. Крива одночасно симетрична відносно вісі абсцис та початку координат, тобто задовольняє умовам: $f(\omega t) = -f(-\omega t)$, $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$.

Такий ряд Фур'є містить лише непарні синусні гармоніки і має вигляд:

$$f(\omega t) = A^{(1)'}_m \cdot \sin(\omega t) + A^{(2)'}_m \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + A^{(3)'}_m \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A^{(4)'}_m \cdot \sin(4 \cdot \omega t) + \dots$$

(2.15)

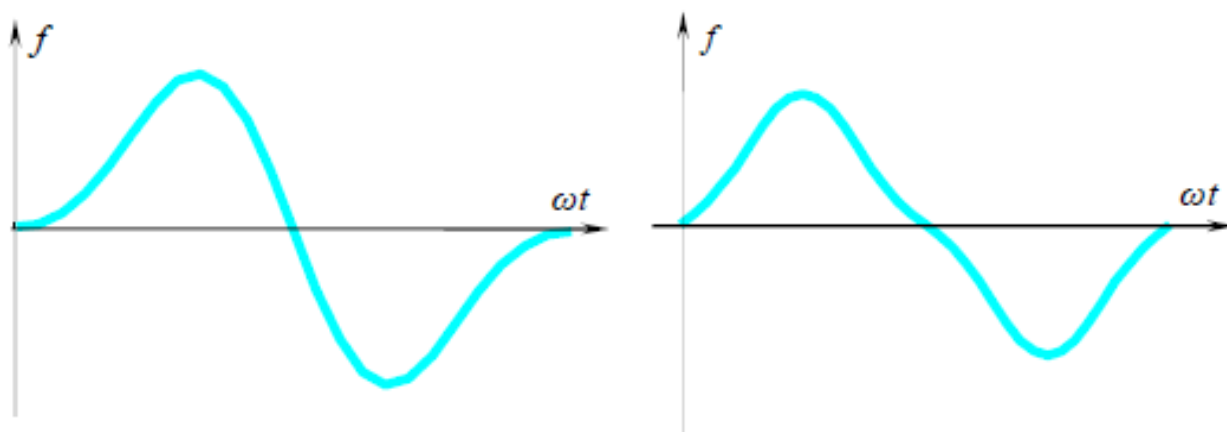
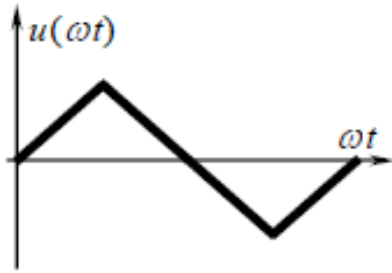


Рис. 1.

Перед тим, як розкласти криву у ряд Фур'є, треба подивитися яким видам



симетрії вона задовольняє та виключити ті чи інші гармоніки.

Усі періодичні несинусоїдні криві в електротехніці можна розділити на 2 групи.

1 група - періодичні криві геометрично правильної форми (трапеції, трикутники, прямокутники і т.д.). Ряди Фур'є для них наведені у довідниках. Так, наприклад, якщо періодична крива напруги (рис. 2.10) має форму трикутника, то ряд Фур'є, що відповідає такій формі (три члени ряду), має вигляд:

$$u(\omega t) = \frac{8 \cdot U_m}{\pi^2} \cdot \left(\sin(\omega t) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3\omega t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5\omega t) - \dots \right), \text{В.}$$

2 група - криві довільної геометрично неправильної форми. Вони розкладаються у ряд Фур'є графоаналітичними методом.

Розкладання у ряд Фур'є кривих геометрично неправильної форми

Криві довільної геометрично неправильної форми мають бути представлені у вигляді графіка. Графоаналітичний метод, який застосовують для розкладання таких кривих у ряд Фур'є, заснований на заміні визначених інтегралів сумою кінцевого числа складових. Для цього період функції 2π поділяється на n рівних інтервалів, кожний інтервал можна визначити так:

$$d\omega t \rightarrow \Delta\omega t = \frac{2 \cdot \pi}{n}. \text{ Отже}$$

$$A^{(0)} \approx \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^n \left(f_p(\omega t) \cdot \Delta\omega t \right) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{p=1}^n \left(f_p(\omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t).$$

де $f_p(\omega t)$ - значення функцій $f(\omega t)$ середині p інтервалу, тобто при значенні $\omega t = (p-0,5) \cdot \Delta\omega t$,

p - поточний індекс.

Амплітуди синусної і косинусної складових k -ї гармоніки відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} A_m^{(k)/} &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n f_p(\omega t) \cdot \sin_p(k \cdot \omega t); \\ A_m^{(k) //} &\approx \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n \left(f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \Delta\omega t \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{p=1}^n \left(f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \cdot \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = \\ &= \frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n \left(f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t) \right), \end{aligned}$$

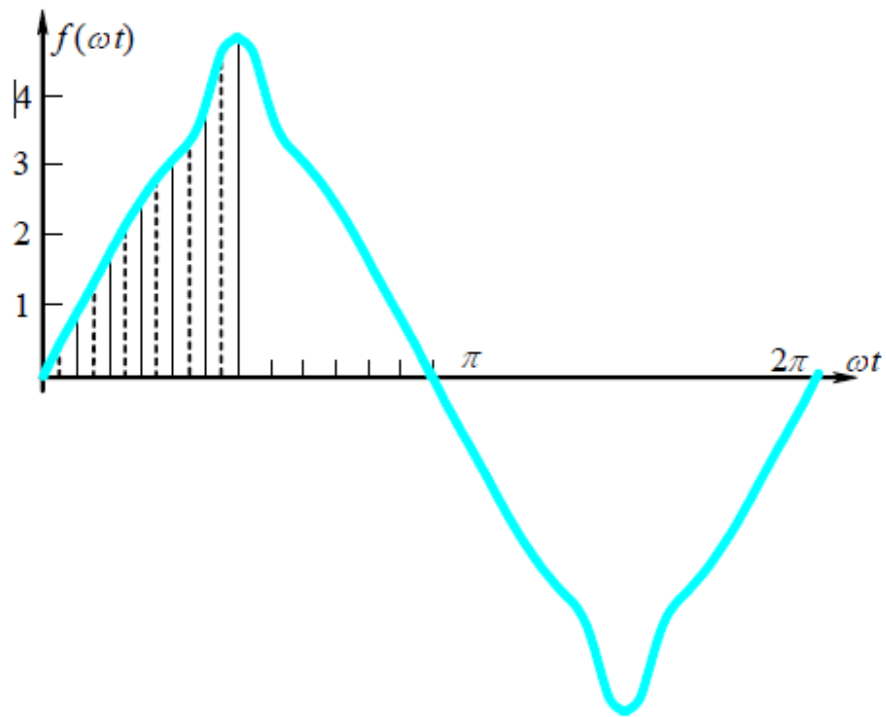
де $\sin_p(k \omega t)$ і $\cos_p(k \omega t)$ - значення функцій $\sin(k \omega t)$, $\cos(k \omega t)$ у середині p -го інтервалу.

Звичайно період ділять на $n=24$ частин ($\Delta\omega t = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ рад)

Розглянемо приклад графоаналітичного розкладання кривої $f(\omega t)$ в ряд Фур'є. Слід врахувати, що крива на має два види симетрії (відносно початку координат та осі абсцис). Отже, можна обмежитися розкладанням чверті періоду. Такий ряд Фур'є повинен містити тільки непарні синусні складові, а саме: $f(\omega t) = A_m^{(1)/} \cdot \sin \omega t + A_m^{(3)/} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + A_m^{(5)/} \cdot \sin(5 \cdot \omega t) + \dots$ (обмежуємося трьома членами ряду).

Для знаходження амплітуд $A_m^{(1)/}$, $A_m^{(3)/}$, $A_m^{(5)/}$ розділимо чверть періоду кривої $f(\omega t)$ на шість рівних частин і виміряємо ординати функції $f(\omega t)$ посередині кожної ділянки, яка становить 15.

Результати розкладання, яке проводять за наведеною вище методикою, представлені в таблиці 2.1.



Таблиця 2.1 – Результати розкладання кривої $f(\omega t)$ в ряд Фур'є

n	$f(\alpha t)$	αt	$\sin \alpha t$	$f(\alpha t) \sin \alpha t$	$3\alpha t$	$\sin 3\alpha t$	$f(\alpha t) \sin 3\alpha t$	$5\alpha t$	$\sin 5\alpha t$	$f(\alpha t) \sin 5\alpha t$
1	0,5	7,5°	0,13	0,0665	22,5	0,382	0,191	37,5	0,608	0,304
2	1,2	22,5°	0,382	0,46	67,5	0,924	1,108	112,5	0,923	1,1
3	2,1	37,5°	0,608	1,27	112,5	0,924	1,94	187,5	-0,13	-0,273
4	2,8	52,5°	0,793	2,22	157,5	0,382	1,07	262,5	-0,99	-2,77
5	3,3	67,5°	0,924	3,05	202,5	-0,382	-1,26	337,5	-0,382	-1,26
6	4,7	82,5°	0,991	4,6	247,5	-0,923	-4,34	412,5	0,79	3,72

Підсумовуємо стовпчики 5, 8 та 11:

$$\sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin \omega t = 11,66; \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 3\omega t = -1,29; \sum_1^6 f(\omega t) \cdot \sin 5\omega t = 0,821.$$

Амплітуди синусних гармонік з номерами 1, 3, 5 відповідно:

$$A_{1m}^{(1)/} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot 11,66 = \frac{1}{3} \cdot 11,66 = 3,88; A_{1m}^{(3)/} = \frac{2}{24} \cdot 4 \cdot (-1,29) = \frac{1}{3} \cdot (-1,29) = -0,43;$$

$A_{1m}^{(5)'} = \frac{1}{3} \cdot 0,821 = 0,247$ (коефіцієнт «4» застосовуємо тому, що розкладаємо тільки 4/1 періоду, а для отримання кінцевого результату помножимо відповідне значення $\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{p=1}^n (f_p(\omega t) \cdot \cos_p(k \cdot \omega t)) \right]$ на «4»)

Таким чином, ряд Фур'є $f(\omega t)$ має вигляд:

$$f(\omega t) = 3,88 \cdot \sin(\omega t) - 0,43 \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + 0,247 \cdot \sin(5 \cdot \omega t).$$

ТЕМА 34. «ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗКЛАДАННЯ КРИВИХ У РЯД ФУР'Є»

Мета – Ознайомити студентів із графоаналітичним методом визначення гармонійних складових несинусоїдних функцій, навчити застосовувати дискретизацію періоду та обчислювати амплітуди гармонік за експериментальними значеннями.

План

1. Геометрично неправильні криві та необхідність графічного методу.
2. Дискретизація періоду на рівні частини.
3. Обчислення коефіцієнтів a_k та b_k .
4. Приклад розкладання за таблицею.
5. Побудова кінцевого ряду Фур'є.

Ключові слова: графоаналітичний метод, дискретизація, гармоніка, коефіцієнти Фур'є, ординати, неправильна форма.

Keywords: graph-analytic method, discretization, harmonics, Fourier coefficients, ordinates, irregular form.

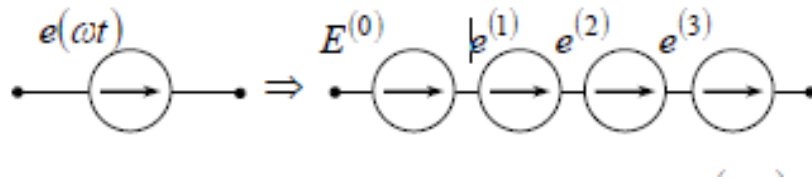
1. Представимо несинусоїдну ЕРС тригонометричним рядом Фур'є. Припустимо, що ряд Фур'є має вигляд

$$e(\omega t) = E^{(0)} + E_m^{(1)} \cdot \sin\left(\omega t + 20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t) + E_m^{(3)} \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t - 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{В.}$$

Умовно розглянемо несинусоїдну ЕРС $e(\omega t)$ як послідовне з'єднання постійної ЕРС $E^{(0)}$ і трьох синусоїдних ЕРС, а саме:

$$e^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot \sin\left(\omega t + 20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \quad e^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t), \quad e^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t - 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right)$$

- рисунок 2.12.



2. Запишемо комплексні амплітуди ЕРС гармонік з номерами 1, 2, 3:

$$\underline{E}_m^{(1)} = E_m^{(1)} \cdot e^{j \cdot 20^\circ}; \underline{E}_m^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot e^{j \cdot 0^\circ}; \underline{E}_m^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot e^{-j \cdot 45^\circ}, \text{В.}$$

3. Визначимо реактивні й комплексні опори віток для окремих гармонік.

При цьому треба врахувати, що реактивні опори залежать від номеру гармоніки, тобто індуктивний і ємнісний опори для гармоніки з номером « k » визначають так:

$$x_L^{(k)} = k \cdot x_L^{(1)} = k \cdot \omega \cdot L,$$

$$x_C^{(k)} = \frac{x_C}{k} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C}.$$

Приклад

Якщо $x_L^{(1)} = 10 \text{ Ом}$ $\Rightarrow x_L^{(3)} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ Ом}$; а якщо

$$x_C^{(1)} = 50 \text{ Ом} \Rightarrow x_C^{(5)} = \frac{50}{5} = 10 \text{ Ом}.$$

Таким чином, з ростом номера гармоніки індуктивний опір збільшується, а ємнісний зменшується пропорційно номеру гармоніки.

Комплексний опір вітки, що містить активний опір, індуктивність та ємність для гармоніки з номером k :

$$\underline{Z}^{(k)} = R + j \cdot \left(k \cdot \omega \cdot L - \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} \right) = R + j \cdot \left(k \cdot X_L^{(1)} - \frac{X_C^{(1)}}{k} \right).$$

4. Розраховуємо струми від дії нульової гармоніки несинусоїдної ЕРС - $I_n^{(0)}$; потім визначаємо комплексні амплітуди струмів від дії 1-ої, 2-ої і т.д. гармонік несинусоїдної ЕРС - $I_{mn}^{(1)}, I_{mn}^{(2)}, I_{mn}^{(3)}$, де « n » - номер вітки.

Таким чином, зрозуміло, що основний метод розрахунку електричних кіл з несинусоїдними періодичними джерелами енергії - метод суперпозиції.

5. За комплексними амплітудами записуємо миттєві значення струмів окремих гармонік - $i_n^{(1)}, i_n^{(2)}, i_n^{(3)}$.

6. Записуємо ряди Фур'є для струмів і напруг на ділянках кола у вигляді суми окремих гармонік. Для вітки з номером « n », наприклад, несинусоїдний струм у загальному вигляді $i_n(\omega t) = I_n^{(0)} + i_n^{(1)} + i_n^{(2)} + i_n^{(3)}$.

Деякі особливості розрахунку несинусоїдних кіл

1. Додавання різнойменних гармонік струмів або напруг за комплексним методом неможливе, тому що кутові швидкості обертання векторів різних гармонік неоднакові.

2. Нульова гармоніка напруги чи струму – це постійна напруга чи струм. Тому падіння напруги на індуктивності від нульової гармоніки струму дорівнює нулю:

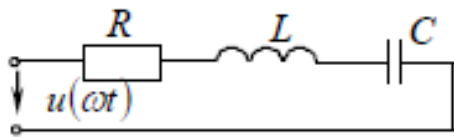
$$x_L^{(0)} = 2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot L = 0 \Rightarrow U_L^{(0)} = I_L^{(0)} \cdot x_L^{(0)} = 0.$$

Нульова гармоніка струму через ємність також дорівнює нулю:

$$x_C^{(0)} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 0 \cdot C} = \infty \Rightarrow I_C^{(0)} = 0.$$

3. Вважають, що величина активного опору не залежить від частоти. Хоча, строго кажучи, величина активного опору внаслідок поверхневого ефекту із зростанням частоти f збільшується.

ТЕМА 35. «РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ З НЕСИНУСОЇДНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ»



Мета – Навчити студентів виконувати розрахунок електричних кіл, на які діють несинусоїдні ЕРС, застосовуючи метод суперпозиції, а також визначати реактивні та комплексні опори для окремих гармонік.

План

- Принцип подання несинусоїдних ЕРС рядами Фур'є.
- Окремі гармоніки як незалежні джерела.
- Частотна залежність реактивних опорів.
- Розрахунок струмів по гармоніках.
- Формування результуючих струмів та напруг.

Ключові слова: несинусоїдна ЕРС, суперпозиція, гармоніка, реактивний опір, комплексний опір.

Keywords: non-sinusoidal EMF, superposition, harmonics, reactance, complex resistance.

Як відомо, резонансним режимом роботи електричного кола, в якому є одна чи декілька індуктивностей і одна чи декілька ємностей, називають такий режим його роботи, за якого струм на вході цього кола співпадає за фазою з діючою на вході ЕРС. Якщо діюча на вході ЕРС несинусоїдна, то в електричному колі можуть виникати резонансні режими (резонанси струмів або напруг) на будь якій гармоніці.

Нехай на вході схеми рисунку 2.13 діє джерело несинусоїдної ЕРС:

$$e(t) = E_m^{(1)} \cdot \sin(\omega t + \varphi^{(1)}) + E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + E_m^{(5)} \cdot \sin(5 \cdot \omega t + \varphi^{(5)})$$

Індуктивний і ємнісний опори дорівнюють:

$$x_L^{(1)} = 50 \text{ Ом}; x_C^{(1)} = 450 \text{ Ом}.$$

Для першої та для п'ятої гармонік:

$$x^{(1)} = x_L^{(1)} - x_C^{(1)} = 50 - 450 = -400 \neq 0,$$

$$x^{(5)} = x_L^{(5)} - x_C^{(5)} = 5 \cdot 50 - \frac{450}{5} = 250 - 90 \neq 0.$$

Для третьої гармоніки: $x^{(3)} = x_L^{(3)} - x_C^{(3)} = 3 \cdot 50 - \frac{450}{3} = 0$ - має місце резонанс напруг.

Висновок

При виникненні резонансного й близького до нього режиму на будь-якій вищій гармоніці, струми і (або) напруги цієї гармоніки можуть виявитися більшими ніж струми і (або) напруги першої гармоніки, навіть якщо амплітуда вищої гармоніки ЕРС на вході схеми в декілька разів менша ніж амплітуда першої гармоніки.

Діючі та середні за модулем значення несинусоїдних функцій

Діюче значення струму, як відомо:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2 dt},$$

де $i = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \sin(k \cdot \omega t + \psi^{(k)})$ - несинусоїдний струм.

Якщо у рівняння підставити формулу, то отримаємо:

$$I = \sqrt{I^{(0)2} + \sum_{k=1}^n I^{(k)2}} = \sqrt{I^{(0)2} + I^{(1)2} + I^{(2)2} + \dots + I^{(k)2} + \dots},$$

де $\frac{I_m^{(k)}}{\sqrt{2}} = I^{(k)}$ - діюче значення струму гармоніки з номером «k».

Таким чином, діюче значення несинусоїдної величини не залежить від початкових фаз окремих гармонік.

Аналогічно, для напруги

$$U = \sqrt{U^{(0)2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U^{(k)2}} = \sqrt{U^{(0)2} + U^{(1)2} + U^{(2)2} + \dots}$$

Приклад

На вході двополюсника несинусоїдні напруга і струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 100 + 80 \cdot \sin\left(\omega t + 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 60 \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t + 20^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 50 \cdot \sin\left(5 \cdot \omega t + 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ В;}$$

$$i(\omega t) = 33,3 + 17,87 \cdot \sin\left(\omega t - 18^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 5,59 \cdot \sin\left(5 \cdot \omega t + 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right), \text{ A.}$$

Знайдемо їх діючі значення:

$$I = \sqrt{33,3^2 + \frac{17,87^2}{2} + \frac{5,59^2}{2}} = 35,6 \text{ A}, U = \sqrt{100^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{60^2}{2} + \frac{50^2}{2}} = 127,1 \text{ В.}$$

Середнє за модулем значення несинусоїдного струму визначають так:

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} |i(\omega t)| d\omega t.$$

Величини, на які реагують амперметри та вольтметри різних систем при несинусоїдних струмах і напругах

Несинусоїдні струми й напруги вимірюють приладами різних систем, принцип дії яких розглядається в курсі «Основи метрології та електричних вимірювань». Наведена нижче таблиця показує, на які величини реагують вольтметри й амперметри різних систем.

Таблиця 2.2. Величини, на які реагують вольтметри й амперметри різних систем при несинусоїдних струмах і напругах

№з/п	Системи приладів	Умовні позначення	Величина, на яку реагує прилад
1	Електродинамічна		Діюча
2	Електромагнітна		Діюча
3	Теплова		Діюча
4	Магнітоелектрична система з випрямлячем		Середня за модулем значення
5	Магнітоелектрична система з рухомою рамкою		Постійна складова
6	Амплітудні електронні прилади		Максимальне значення

ТЕМА 36. «РЕЗОНАНСНІ ЯВИЩА ПРИ НЕСИНУСОЇДНИХ СТРУМАХ І НАПРУГАХ»

Мета – Розкрити сутність резонансних режимів для окремих гармонік, навчити аналізувати резонанс напруг або струмів та оцінювати небезпечні режими, що виникають на вищих гармоніках.

План

- Резонанс при синусоїдному живленні.
- Резонанс на вищих гармоніках.
- Умови резонансу струмів і напруг.
- Приклад для 1-ої, 3-ої та 5-ої гармонік.
- Практичні наслідки резонансів.

Ключові слова: резонанс гармонік, резонанс напруг, резонанс струмів, індуктивний опір, ємнісний опір.

Несинусоїдні криві, яким відповідає певна несинусоїдна функція, характеризують наступними коефіцієнтами:

- коефіцієнтом форми кривої K_ϕ , який визначають як відношення діючого значення до середнього за модулем значення:

$$K_\phi = \frac{A}{A_{\text{сеп}}} \text{ (для синусоїди } K_\phi = \frac{A}{A_{\text{сеп}}} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1,11.$$

- коефіцієнтом амплітуди, який дорівнює відношенню максимального значення до діючого значення несинусоїдної функції:

$$K_a = \frac{A_{\text{max}}}{A} \text{ (для синусоїди } K_a = \sqrt{2})$$

- коефіцієнтом спотворення, який визначають як відношення діючого значення основної гармоніки до діючого значення усієї несинусоїдної функції, в яку входить і перша гармоніка:

$$K_s = \frac{A^{(1)}}{A}.$$

Потужності в колах несинусоїдного струму

Активна потужність несинусоїдного струму – це середнє значення миттєвої потужності за період першої гармоніки:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T (u \cdot i) dt$$

Підставимо у (2.28) наступні формули:

$$u(t) = U^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_u^{(k)}),$$

$$i(t) = I^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} I_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t + \varphi_i^{(k)}).$$

Розрахувавши визначений інтеграл, отримаємо:

$$P = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \cos \varphi^{(k)} = U^{(0)} \cdot I^{(0)} + U^{(1)} \cdot I^{(1)} \cdot \cos \varphi^{(1)} + \\ + U^{(2)} \cdot I^{(2)} \cdot \cos \varphi^{(2)} + \dots,$$

де $U^{(k)}$, $I^{(k)}$, $\varphi^{(k)}$ - відповідно діючі значення несинусоїдної напруги і струму k -ої гармоніки;

$\varphi^{(k)} = \varphi_u^{(k)} - \varphi_i^{(k)}$ - кут зсуву фаз між несинусоїдною напругою і струмом k -ої гармоніки.

Таким чином, активна потужність несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік.

Аналогічно для реактивної потужності:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n U_m^{(k)} \cdot I_m^{(k)} \cdot \sin \varphi^{(k)}.$$

Повна потужність S дорівнює добутку діючого значення несинусоїдної напруги й діючого значення несинусоїдного струму:

$$S = U \cdot I.$$

Кола несинусоїдного струму також характеризують потужністю спотворення T (вимірюється в ВА) та коефіцієнтом спотворення K_T :

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)},$$

$$K_T = \frac{T}{S}.$$

Відношення активної потужності до повної називають коефіцієнтом потужності, його прирівнюють до косинусу деякого умовного кута φ :

$$\chi = \frac{P}{S} = \cos \varphi.$$

ТЕМА 37. «ПОТУЖНОСТІ В КОЛАХ НЕСИНУСОЇДНОГО СТРУМУ»

Мета – Навчити визначати активну, реактивну, повну та спотворюючу потужності у колах із несинусоїдними напругами й струмами, а також використовувати гармонічну модель для окремих складових.

План

- Миттєва потужність.
- Активна та реактивна потужність по гармоніках.
- Повна потужність.
- Потужність спотворення.
- Коефіцієнт потужності при несинусоїдних процесах.

Ключові слова: активна потужність, реактивна, повна, потужність спотворення, коефіцієнт потужності.

Keywords: active power, reactive, apparent, distortion power, power factor.

Несинусоїдні струми й напруги, які не містять постійних складових, можуть бути замінені еквівалентними синусоїдами. Заміну проводять таким чином, що діюче значення синусоїдного струму приймають рівним діючому

значенню несинусоїдного струму, який замінюють (аналогічно – для напруги). Кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами напруги та струму беруть таким чином, щоб активна потужність еквівалентного синусоїдного струму дорівнювала активній потужності несинусоїдного струму: $\cos \varphi_{\text{еке}} = \frac{P}{S}$

Приклад

Розглянемо порядок заміни несинусоїдних струму і $i(\omega t)$ і напруги $u(\omega t)$ еквівалентними синусоїдами. Несинусоїдні напруга й струм дорівнюють:

$$u(\omega t) = 26 \cdot \sin\left(\omega t - 11^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 6 \cdot \sin\left(3\omega t + 54^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right),$$

$$i(\omega t) = 3 \cdot \sin\left(\omega t - 40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right) + 1,27 \cdot \sin\left(3\omega t + 17^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

1. Визначаємо діючі значення струму і напруги:

$$U = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (U_m^{(1)^2} + U_m^{(3)^2})} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (26^2 + 6^2)} = 18,87 \text{ В.}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (I_m^{(1)^2} + I_m^{(3)^2})} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (3^2 + 1,27^2)} = 2,3 \text{ А.}$$

2. Визначаємо активну потужність:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot U_m^{(1)} \cdot I_m^{(1)} \cdot \cos(\varphi_u^{(1)} - \varphi_i^{(1)}) + \frac{1}{2} \cdot U_m^{(3)} \cdot I_m^{(3)} \cdot \cos(\varphi_u^{(3)} - \varphi_i^{(3)}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 3 \cdot \cos(-11^\circ - (-40^\circ)) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1,27 \cdot \cos(54^\circ - 17^\circ) = 34,11 + 3,04 = 37,15 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

3. Визначаємо кут зсуву фаз між еквівалентними синусоїдами:

$$\cos \varphi_{\text{екв}} = \frac{P}{S} = \frac{37,15}{18,87 \cdot 2,3} = 0,856 \Rightarrow \varphi_{\text{екв}} = 31,1^\circ.$$

4. Записуємо еквівалентні синусоїди напруги і струму:

$$u_{\text{екв}} = 18,87 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t) = 26,69 \cdot \sin(\omega t),$$

$$i_{\text{екв}} = 2,3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t \pm 31,1^\circ) = 3,25 \cdot \sin(\omega t \pm 31,1^\circ).$$

Знак плюс або мінус початкової фази струму залежить від характеру кола (активно-ємнісний, або активно-індуктивний).

Вищі гармоніки в трифазних колах

ЕРС усіх фаз трифазного трансформатора або трифазного генератора часто

виявляється несинусоїдною. Кожна ЕРС (e_A, e_B, e_C) повторює за формою інші із зсувом на одну третину періоду ($T / 3$) і може бути розкладена на гармоніки. Запишемо для гармоніки з номером « k » миттєве значення ЕРС фази А:

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k\omega t + \varphi^{(k)}).$$

Оскільки ЕРС фази В відстає від ЕРС фази А на $T/3$, а ЕРС фази С випереджає ЕРС фази А на $T/3$, то для гармоніки з номером « k » ЕРС фаз В і С відповідно дорівнюють:

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t - \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right),$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot \left(t + \frac{T}{3}\right) + \varphi^{(k)}\right) = E_{km} \cdot \sin\left(k \cdot \omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k + \varphi^{(k)}\right).$$

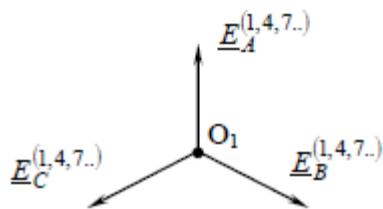
$$\text{При цьому } -k \cdot \omega \cdot \frac{T}{3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 3} = k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} = 120^\circ \cdot k.$$

Якщо $\varphi^{(k)} = 0$:

$$e_A^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin(k \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t - k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right),$$

$$e_C^{(k)} = E_m^{(k)} \cdot \sin\left(k \cdot \omega t + k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$



Гармоніки з номерами $k=1, 4, 7, 10, \dots$

складають так звану пряму послідовність чергування фаз. Для цих гармонік ЕРС фази В відстає від ЕРС фази А, а ЕРС фази С випереджає ЕРС фази А на 120°

(векторна діаграма).

Припустимо, номер гармоніки $k = 4$, тоді

$$e_A^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin(4 \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - 2 \cdot \pi - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t - \frac{2 \cdot \pi}{3}\right),$$

(2.41)

$$e_C^{(4)} = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 4 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + 2 \cdot \pi + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(4)} \cdot \sin\left(4 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Гармоніки з номерами $k = 2, 5, 8, \dots$ складають так звану зворотну послідовність чергування фаз. Для цих гармонік ЕРС фази В випереджає ЕРС фази А, ЕРС фази С відстає від ЕРС фази А на 120° (векторна діаграма – на рисунку 2.15).

Припустимо, номер гармоніки $k = 3$, тоді:

$$e_A^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin(2 \cdot \omega t),$$

$$e_B^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t - 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right),$$

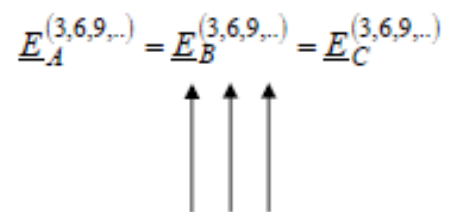
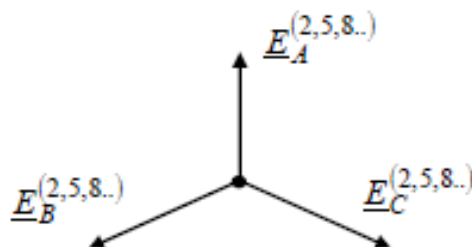
$$e_C^{(2)} = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + 2 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) = E_m^{(2)} \cdot \sin\left(2 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right).$$

Гармоніки з номерами $k = 3, 6, 9, \dots$ (кратні трьом) утворюють нульову послідовність чергування фаз, для якої початкові фази ЕРС всіх фаз однакові (векторна діаграма – рисунок 2.16). Якщо номер гармоніки $k = 3$, тоді:

$$e_A^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t);$$

$$e_B^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t - 120^\circ \cdot 3\right) \frac{2 \cdot \pi}{3} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t);$$

$$e_C^{(3)} = E_m^{(3)} \cdot \sin\left(3 \cdot \omega t + \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot 3\right) = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t).$$



ТЕМА 38. «ВИЩІ ГАРМОНІКИ У ТРИФАЗНИХ СИСТЕМАХ. БИТТЯ ТА МОДУЛЬОВАНІ КОЛИВАННЯ»

Мета – Ознайомити студентів з особливостями роботи трифазних систем за наявності вищих гармонік, пояснити формування прямої, зворотної та нульової послідовностей, а також розкрити фізичну природу явищ биття та амплітудної модуляції.

План

- Вищі гармоніки у фазних ЕРС.
- Пряма, зворотна та нульова послідовності.
- Струми та напруги кратних трьом гармонік у схемах зірка/трикутник.
- Явище зсуву нейтралі.
- Биття: природа та формула.
- Амплітудно-модульовані коливання.
- Розкладання модульованих сигналів на складові.

Ключові слова: трифазні гармоніки, пряма послідовність, нульова послідовність, биття, амплітудна модуляція, моделюючий сигнал.

Keywords: three-phase harmonics, direct sequence, zero sequence, beating, amplitude modulation, modeling signal.

Розглянемо деякі особливості розрахунку трифазних кіл, пов'язані з наявністю в гармонічному складі фазних ЕРС гармонік, кратних трьом.

1. Нехай обмотки трифазного генератора з'єднані як показано на (відкритий трикутник). Якщо у фазних ЕРС присутні гармоніки, кратні трьом, то на затискачах « n - В » буде напруга, діюче й миттєве значення якої

$$U_{nB} = 3 \cdot \sqrt{\frac{E_m^{(3)^2}}{2} + \frac{E_m^{(6)^2}}{2} + \frac{E_m^{(9)^2}}{2} \dots},$$

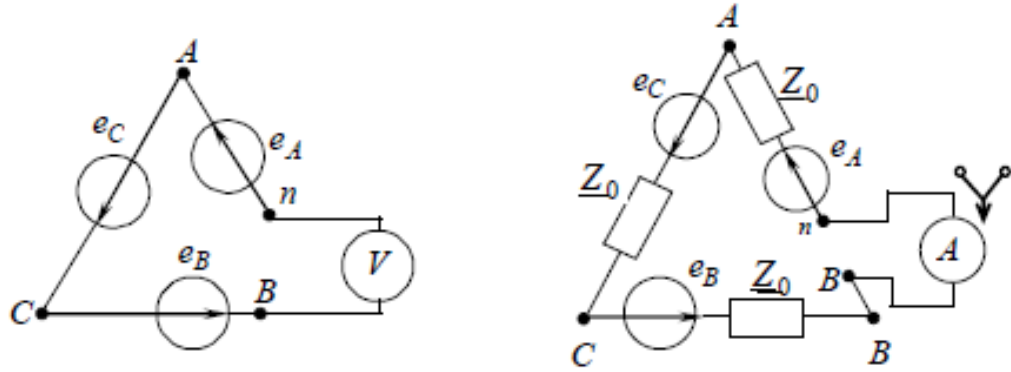
$$u_{nB} = 3 \cdot E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t + \varphi^{(3)}) + 3 \cdot E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t + \varphi^{(6)}) + \dots$$

При з'єднанні обмоток генератора в закритий трикутник по них протікатимуть струми гармонік, кратних трьом (за годинниковою стрілкою):

$$\underline{I}^{(3k)} = \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} = \frac{\underline{E}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}},$$

де $\underline{Z}_0^{(3k)}$ - опір обмотки кожної фази для гармоніки, кратної трьом,

$\underline{E}^{(3k)}$ - комплекс діючого значення гармоніки фазної ЕРС, кратної трьом.



Таким чином, діюче значення струму:

$$I = \sqrt{I^{(3)^2} + I^{(6)^2} + I^{(9)^2} + \dots}$$

3. Незалежно від того зіркою чи трикутником з'єднані обмотки генератора або трансформатора, в лінійній напрузі відсутні гармоніки кратні трьом.

Якщо обмотки з'єднані зіркою:

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}_A^{(3k)} - \underline{E}_B^{(3k)} = 0 \text{ (аналогічно для } \underline{U}_{BC}^{(3k)} \text{ і } \underline{U}_{CA}^{(3k)})$$

Якщо обмотки з'єднані трикутником:

$$\underline{U}_{AB}^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \underline{I}^{(3k)} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = \underline{E}^{(3k)} - \frac{3 \cdot \underline{E}^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Z}_0^{(3k)}} \cdot \underline{Z}_0^{(3k)} = 0.$$

Таким чином:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_\phi^{(1)^2} + U_\phi^{(2)^2} + U_\phi^{(4)^2} + \dots}$$

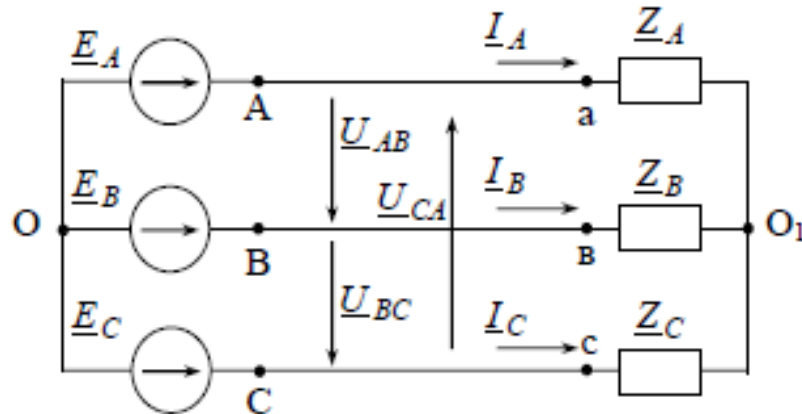
Діюче значення фазної напруги:

$$U_\phi = \sqrt{U_\phi^{(1)^2} + U_\phi^{(2)^2} + U_\phi^{(3)^2} + U_\phi^{(4)^2} + \dots}$$

Якщо у фазній напрузі присутні гармоніки кратні трьом, то співвідношення $\frac{U_L}{U_\phi} < \sqrt{3}$, а якщо у фазній напрузі немає гармонік, кратних

трьом, то співвідношення $\frac{U_L}{U_\phi} = \sqrt{3}$.

4. З'єднання «зірка – зірка» без нульового проводу (навантаження симетричне й несиметричне).



При цьому струми гармонік, кратних трьом, відсутні, тому що інакше не виконуватиметься 1-й закон Кірхгофа, але при цьому між нульовими точками існуватиме напруга зсуву нейтралі:

$$u_{0,0} = E_m^{(3)} \cdot \sin(3 \cdot \omega t) + E_m^{(6)} \cdot \sin(6 \cdot \omega t) + E_m^{(9)} \cdot \sin(9 \cdot \omega t) \dots$$

Комплекс діючого значення цієї напруги для гармонік, кратних трьом:

$$\underline{U}_{0,0}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} \cdot \underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{E}_B^{(3k)} \cdot \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{E}_C^{(3k)} \cdot \underline{Y}_C^{(3k)}}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \frac{\underline{E}_\delta^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\delta^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\delta^{(3k)}} = \underline{E}_\delta^{(3k)}$$

де $\underline{Y}_\Phi^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_\Phi^{(3k)}}$ - провідність фази для гармоніки, кратної трьом.

$\underline{Z}_\Phi^{(3k)}$ - опір фази для гармоніки кратної трьом.

Тоді лінійні струми для гармонік кратних трьом:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\Phi^{(3k)} - \underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_\Phi^{(3k)}} = 0.$$

При несиметричному навантаженні напруга зсуву нейтралі (рис.):

$$\underline{U}_{0,0}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\Phi^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)}} = \underline{E}_\Phi^{(3k)}.$$

Тоді лінійні струми для гармонік, кратних трьом:

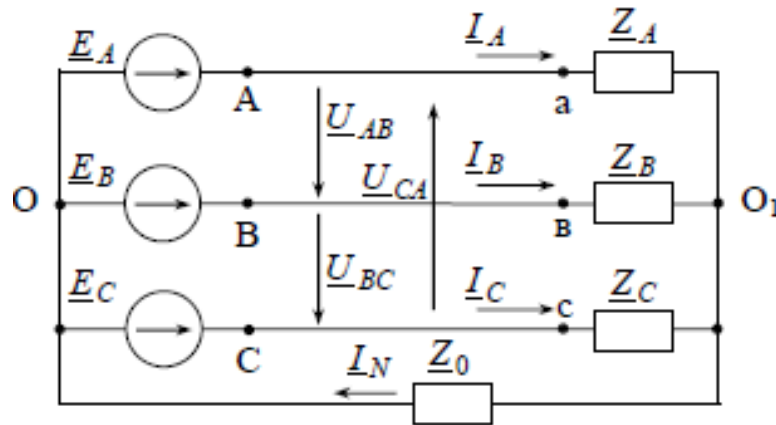
$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = \frac{0}{\underline{Z}_A^{(3k)}} = 0, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}} = 0,$$

$$\underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}} = 0,$$

Діюче значення напруги зсуву нейтралі при симетричному та несиметричному навантаженні:

$$U_{0,0} = \sqrt{\frac{E_m^{(3)2}}{2} + \frac{E_m^{(6)2}}{2} + \frac{E_m^{(9)2}}{2} + \dots}, \quad U_{0,0} = \sqrt{\frac{E_m^{(1)2}}{2} + \frac{E_m^{(2)2}}{2} + \frac{E_m^{(3)2}}{2} + \dots}$$

5. Схема «зірка – зірка» з нульовим проводом при симетричному навантаженні і наявності опору в нульовому проводі.



По нульовому проводу протікатимуть струми гармонік, кратних трьом. Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік кратних трьом:

$$\underline{U}_{0,0}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}},$$

де $\underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{1}{\underline{Z}_0^{(3k)}}$ - провідність опору $\underline{Z}_0^{(3k)}$ в нульовому проводі для гармоніки

кратної трьом.

Струм нульового проводу:

$$\begin{aligned} \underline{I}_0^{(3k)} &= \frac{\underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{U}_{0,0}^{(3k)} \cdot \underline{Y}_0^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}} \cdot \frac{1}{1/\underline{Y}_0^{(3k)}} = \\ &= \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot 3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)} \cdot \left(1 + \frac{\underline{Y}_0^{(3k)}}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}\right) \cdot \frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}}} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)}}{\left(\frac{1}{\underline{Y}_0^{(3k)}} + \frac{1}{3 \cdot \underline{Y}_\phi^{(3k)}}\right)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)} + \frac{\underline{Z}_\phi^{(3k)}}{3}}. \end{aligned}$$

Фазні струми:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \underline{I}_B^{(3k)} = \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{I}_0^{(3k)}}{3}.$$

6. Схема зірка – зірка з нульовим проводом при несиметричному навантаженні і наявності опору Z_0 у нульовому проводі (рис. 2.20).

Комплекс діючого значення напруги зсуву нейтралі для гармонік кратних трьом:

$$\underline{U}_{0,0}^{(3k)} = \frac{\underline{E}_\phi^{(3k)} \cdot (\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)})}{\underline{Y}_A^{(3k)} + \underline{Y}_B^{(3k)} + \underline{Y}_C^{(3k)} + \underline{Y}_0^{(3k)}}.$$

Струми знаходять так:

$$\underline{I}_A^{(3k)} = \frac{\underline{E}_A^{(3k)} - \underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_A^{(3k)}}, \quad \underline{I}_B^{(3k)} = \frac{\underline{E}_B^{(3k)} - \underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_B^{(3k)}}, \quad \underline{I}_C^{(3k)} = \frac{\underline{E}_C^{(3k)} - \underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_C^{(3k)}},$$

$$\underline{I}_0^{(3k)} = \frac{\underline{U}_{0,0}^{(3k)}}{\underline{Z}_0^{(3k)}} = \underline{I}_A^{(3k)} + \underline{I}_B^{(3k)} + \underline{I}_C^{(3k)}.$$

Несинусоїдні криві з періодичною обвідною. Биття

Окрім несинусоїдних періодичних функцій, які розкладаються в тригонометричний ряд на гармонійні складові з частотами, кратними основній частоті,

в електротехніці зустрічаються несинусоїдні криві з періодичними обвідними

(ці криві також розкладаються на гармонійні складові). До числа явищ, які характеризуються такими кривими, відносяться биття і модульовані коливання.

Коливальний процес, який виникає в результаті складання двох синусоїдальних коливань з рівними амплітудами і близькими, але не рівними частотами ω_1 і ω_2 , називається биттям:

$$f(t) = A_m \cdot (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t).$$

Припустимо $\omega_1 > \omega_2$ ($\omega_1 \approx \omega_2$)

Скористаємося тригонометричним перетворенням:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Отримаємо:

$$f(t) = 2 \cdot A_m \cdot \cos \left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) \cdot t \right) \cdot \sin \left(\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) \cdot t \right).$$

Позначимо

$$\Omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \text{ і } \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

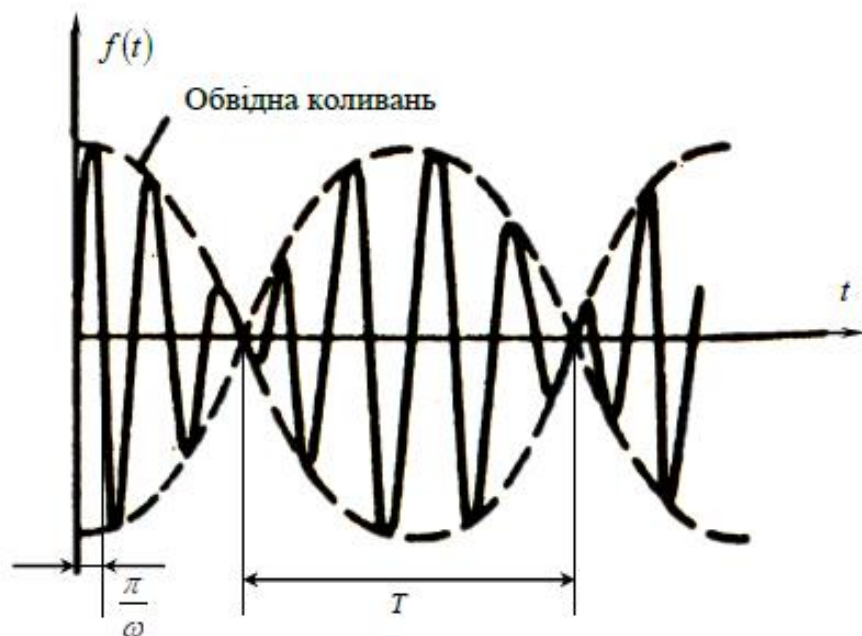
Зрозуміло, що $\Omega < \omega$.

Тому, з урахуванням позначень, вважатимемо, що крива $f(t)$ є синусоїдою з кутовою частотою ω , амплітуда якої змінюється за косинусоїдою із значно меншою кутовою частотою Ω :

$$f(t) = \underbrace{2 A_m \cdot \cos(\Omega t)}_{\text{амплітуда}} \cdot \sin(\omega t)$$

Графік коливання, що відповідає рівнянню, зображений на рисунку. Період биття T є величиною зворотною до частоти биття f_Ω та дорівнює числу максимумів обвідної кривої в одиницю часу:

$$T = \frac{1}{f_\Omega} = \frac{\pi}{\Omega}.$$



Несинусоїдні криві з періодичною обвідною. Модульовані коливання

У радіотехніці широко застосовують модульовані коливання.

Модульованим коливанням називають таке коливання, в якому амплітуда A_m , кутова частота ω , початкова фаза ψ або і ті, й інші разом змінюються в часі.

Зміна в часі одного з параметрів - A_m , ω , або ψ , називають модуляцією за цим параметром (модуляція буває амплітудною, частотною або фазовою):

$$f(t) = A_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

Коливання, в яких змінюється тільки амплітуда ($0 < A_m < \infty$) називають коливаннями, модульованими за амплітудою. Коливання, в яких змінюється тільки фаза – це коливання, модульовані за фазою. Коливання, в яких змінюється тільки частота – це коливання, модульовані за частотою.

Найпростіше амплітудно-модульоване коливання (АМ) – це коливання, в якому амплітуда модульована за законом синуса:

$$f(t) = A_0 \cdot (1 + m \cdot \sin \Omega t) \cdot \sin(\omega t + \psi),$$

де Ω - моделююча частота ($\Omega \ll \omega$),

m - коефіцієнт модуляції (глибина), як правило, $m < 1$; він характеризує ступінь відмінності максимальної і мінімальної амплітуди від середнього значення A_0 .

Графік коливань, що відповідає, зображений на рисунку

Амплітудна модуляція широко застосовується в радіомовленні й радіозв'язку, де частота ω - це частота радіозв'язку, а моделюючою частотою служить, наприклад, одна із звукових частот звуку, що передається.

При визначенні струмів і напруг в колах, схеми яких містять джерела ЕРС, модульовані за амплітудою, останні можуть бути розкладені на синусоїдні складові.

Скористаємося тригонометричним перетворенням:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta).$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cdot \sin(\omega t + \psi) + m \cdot A_0 \cdot \overbrace{\sin \Omega t}^{\beta} \cdot \overbrace{\sin(\omega t + \psi)}^{\alpha} = \\ &= A_0 \cdot \sin(\omega t + \psi) + \frac{m \cdot A_0}{2} \cdot [\cos(t \cdot (\omega - \Omega) + \psi) - \cos((\omega + \Omega) \cdot t + \psi)]. \end{aligned}$$

Тобто модульоване за амплітудою коливання може бути представлено у

вигляді суми трьох коливань.

Частоти $(\omega - \Omega)$ і $(\omega + \Omega)$ називають бічними частотами.

Приклад.

Треба розкласти на гармонійні складові функцію

$$f(t) = 20 \cdot \left(1 + 0,6 \cdot \sin \underbrace{1000 \cdot t}_{\Omega} \right) \cdot \sin \underbrace{10^5 t}_{\omega}$$

відповідно до рівняння (2.71):

Бічні частоти - $\omega - \Omega = 99 \cdot 10^3$; $\omega + \Omega = 101 \cdot 10^3$

$$\frac{m \cdot A_0}{2} = \frac{0,6 \cdot 20}{2} = 6.$$

Отже: $f(t) = 20 \cdot \sin(10^5 \cdot t) + 6 \cdot \cos(99 \cdot 10^3 \cdot t) - 6 \cdot \cos(101 \cdot 10^3 \cdot t)$.



СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Рудик А. В., Филипчук Л. В., Кулик Н. І. Теоретичні основи електротехніки. Частина 1. Практикум : навч. посіб. Рівне : НУВГП, 2024. 113 с. <https://files.znu.edu.ua/files/Bibliobooks/Inshi78/0057613.pdf>
2. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки : навчальний посібник / А. Ю. Воробкевич, В. С. Маляр, Р. Я. Совин та ін. ; за ред. А.Ю. Воробкевича і О.І. Шегедина. Львів : Новий Світ-2000, 2024. 224 с.
3. Хілов В. С., Койфман О. О., Рухлов А. В. Практикум з дисципліни «Теоретичні основи електротехніки» : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. 1. Стаціонарні процеси у лінійних колах постійних, гармонійних однофазних, трифазних і полігармонійних струмів. Одеса : Олді+, 2024. 186 с. URL: <https://surl.li/lqrloz>
4. Хілов В. Теоретичні основи електротехніки. Київ : Каравела, 2021. 468 с.
5. Шегедин О., Маляр В. Теоретичні основи електротехніки. Ч. 1 : навчальний посібник. Львів : Новий Світ – 2000, 2024. 168 с.
6. Кунденко М. П., Мардзявко В. А., Руденко А. Ю. Аналіз технології генерації НВЧ випромінювання з визначенням адаптивного типу діодів для подальшого конструювання апаратів для знезараження. *Інтегровані технології та енергозбереження*. 2023. № 2. С. 24–37.
7. Кунденко М. П., Піх Є. О. Розробка технологічної схеми НВЧ–установки для сушіння зерна. *Енергетика і автоматика*. 2021. № 2. С. 75–85.
8. Форкун Я. Б., Глебова М. Л. Теоретичні основи електротехніки : конспект лекцій. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекет., 2022. 111 с.

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ

Частина I та Частина II

конспект лекцій

Укладач: **Циганов** Олександр Миколайович

Руденко Андрій Юрійович

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 12,4.

Тираж 20 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.