МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП`ЮТЕРНА ГРАФІКА

Модуль №1 «Нарисна геометрія»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для виконання практичних і самостійних робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності H7 «Агроінженерія» денної і заочної форм здобуття вищої освіти

Миколаїв
2026

УДК 744:004.92
Н28

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету, протокол №_7_ від 21.04.2026 р.

Укладачі:

Полянський П.М. – канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін МНАУ.
Степанов С.М. – старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін МНАУ.
Комочкін М.С. – головний інженер ТОВ «Пульсар Експо Україна».

Рецензенти:

Марченко Д.Д. – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу МНАУ.
Галич І.В. - канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри агроінженерії Державний біотехнологічний університет, м. Харків.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації призначені для виконання практичних та самостійних робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за освітньо-професійною програмою «Агроінженерія» спеціальності H7 «Агроінженерія». Вони розроблені з метою систематизації теоретичних знань, розвитку практичних навичок та формування професійних компетентностей студентів у сфері нарисної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки.

Модуль, присвячений нарисній геометрії, охоплює правила оформлення креслень, роботу з форматами, масштабами, шрифтами та штрихуванням, а також методи побудови проекцій елементарних геометричних фігур, включаючи точку, пряму, площину та прямий кут. Особлива увага приділяється метричним і позиційним задачам, які включають визначення відстаней та кутів між геометричними об'єктами, а також способам перетворення проекцій, зокрема обертанню навколо проектуючих прямих та плоско-паралельному переміщенню.

Виконання практичних завдань за даними рекомендаціями спрямоване на розвиток просторового мислення, точності та уважності при побудові креслень, формування навичок аналітичного підходу до вирішення інженерних задач та підготовку студентів до використання сучасних засобів комп'ютерного моделювання. Послідовне освоєння тем дозволяє студентам переходити від базових операцій до складних конструктивних елементів, забезпечуючи глибоке розуміння принципів нарисної геометрії та її застосування у професійній діяльності.

Зміст методичних рекомендацій сприяє формуванню системного мислення, умінню правильно та точно виконувати креслення, а також розвитку здатності застосовувати отримані знання у проектно-конструкторській діяльності агроінженера. Метою цих рекомендацій є забезпечення високого рівня практичної підготовки студентів, формування професійних навичок та компетентностей, необхідних для ефективної інженерної діяльності у сфері аграрного машинобудування.

1. НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

1.1. Правила оформлення креслень.

1.1.1. Формати

Формати листів визначаються розмірами зовнішньої рамки. Кожному позначенню відповідає певний розмір основного формату. Позначення і розміри форматів наведені в табл.1.1.

Таблиця 1.1.

Формати

Позначення форматів	Розміри сторін формату, мм
А0	1189х841
А1	594х841
А2	594х420
А3	297х420
А4	297х210
А5	148х210

Допускається застосування додаткових форматів, утворених збільшенням коротких сторін основних форматів на величину, яка кратна їх розмірам (2,3…9), наприклад додатковий формат А3х4 має розміри 420х1189. Всі формати за винятком А4 можуть розміщуватися як вертикально, так і горизонтально. Кожне креслення має рамку, яка обмежує поле креслення. Внутрішню рамку проводять суцільними основними лініями: з трьох сторін на відстані 5 мм від краю листа, а зліва – на відстані 20 мм. З лівої сторони формату при цьому розміщується поле для підшивки креслення (рис.1.1).

На кресленнях необхідно виконати основний напис, що містить відомості про зображений виріб і інформацію про те, ким виконане дане креслення. Основний напис розміщується в правому нижньому кутку поля креслення. Зміст, розміщення і розміри граф основного напису для креслень представлені на рис. 1.2.

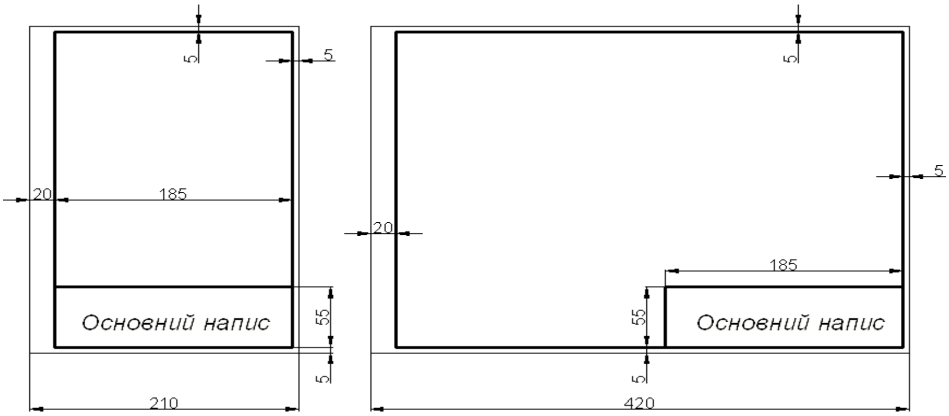


Рис.1.1. Розміщення основного напису на форматі

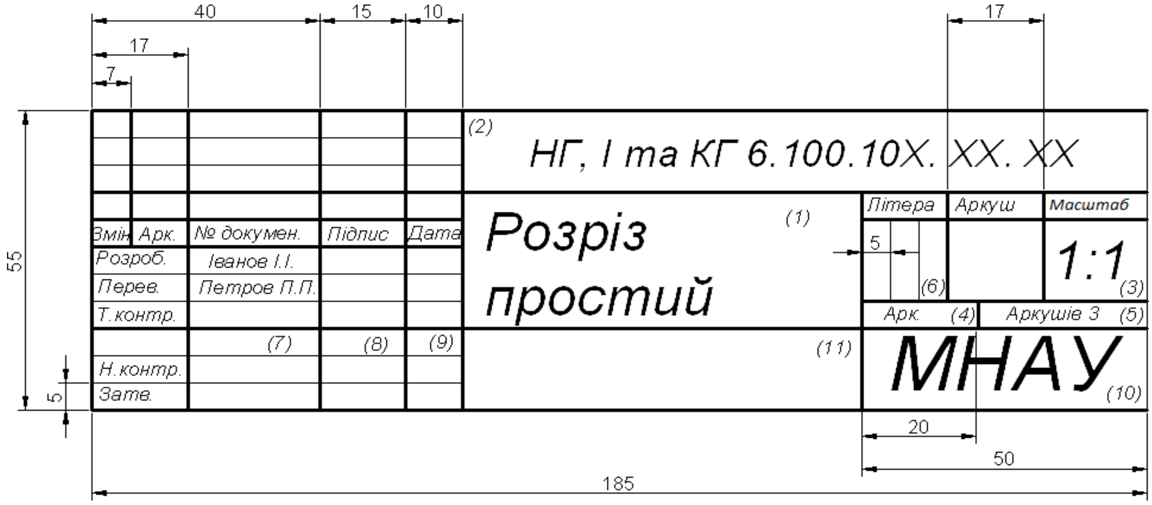


Рис. 1.2. Заповнення основного напису

1 – найменування виробу або найменування теми, яка вивчається. Запис ведеться в називному відмінку однини. Якщо назва складається із двох слів і більше, то перше слово повинно бути іменником, наприклад «Розріз простий»; ***2*** – позначення документа (рис.1.3); ***3*** – масштаб; ***4*** – порядковий номер аркушу (графу не заповнюють на документах, які виконані на одному аркуші); ***5*** – загальна кількість аркушів документу (графу заповнюють на першому аркуші); ***6*** – літера стадії розробки; ***7*** – прізвище; ***8*** – підпис;

9 – дата підпису документу; ***10*** – назва, індекс підприємства; ***11*** – позначення матеріалу (заповнюється на робочих кресленнях деталей).

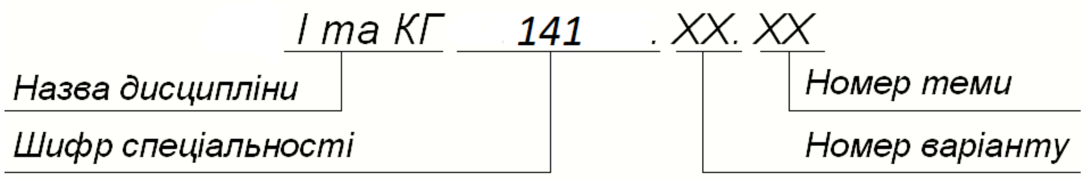


Рис. 1.3. Формування елементів основного напису

Всі креслення та ескізи, які виконані в навчальному семестрі і підписані викладачем, підлягають брошуруванню в альбом. Креслення збираються в послідовності виконання завдань – зверху титульний аркуш, під ним завдання 01 і т. д.

1.1.2. Масштаби.

Масштабом називається відношення лінійних розмірів зображення предмета на кресленні до дійсних лінійних розмірів предмета. В залежності від розмірів зображуваного предмету, його зображення на кресленнях можуть виконуватися як в натуральну величину, так і зі зменшенням або збільшенням (табл. 1.2).

Таблиця 1.2.

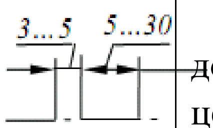
Масштаби

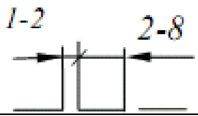
Масштаб зменшення	1:2	1:2,5	1:4	1:5	1:10	…
Масштаб збільшення	2:1	2,5:1	4:1	5:1	10:1	…
Натуральна величина	1:1					

В навчальних кресленнях найбільш часто використовують шість ***типів ліній*** (табл. 1.3).

Таблиця 1.3.

Типи ліній

	Суцільна товста основна лінія. Товщина s ≈ 0,5…1,4 мм (на навчальних кресленнях рекомендується s ≈ 0,8…1,4 мм). Призначення: зображення ліній видимого контуру, лінії контуру перерізу (винесеного і того, що входить в склад розрізу), внутрішня рамка креслення та ін..
	Суцільна тонка лінія. Товщина від s/3 до s/2. Призначення: зображення лінії контуру накладеного перерізу, лінії розмірні та виносні, лінії штриховки.
	**Штрих-пунктирна тонка лінія.** Товщина від s/3 до s/2. Призначення: зображення ліній осьових і центрових, ліній перерізу, які являються осями симетрії для накладених або винесених перерізів.

	**Штрихова лінія.** Товщина лінії від s/3 до s/2. Призначення: зображення ліній невидимого контуру.
	**Суцільна хвиляста лінія.** Товщина лінії від s/3 до s/2. Призначення: зображення лінії обриву, ліній розосередження виду і розрізу.
	Розімкнена лінія. Товщина лінії від s до 1,5s. Призначення: зображення положень січних площин простих і складних розрізів і перерізів.

Зазначимо, що штрих-пунктирні лінії, які застосовуються в якості осьових ліній, повинні перетинатися між собою довгими штрихами.

Штрих-пунктирну лінію, яку використовують в якості осьової лінії кола з діаметром менше 12 мм, рекомендується заміняти суцільною тонкою лінією. Штрихи (і проміжки між ними) повинні бути приблизно однакової довжини.

1.1.3. Шрифти.

Розмір ***шрифту*** визначається висотою прописних (заголовних) літер. Встановлені наступні розміри шрифту: 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14. Ширина літер визначається за відношенням до розміру шрифту або по відношенню до товщини лінії обводки d (рис. 1.4).

Стандарт встановлює наступні типи шрифту:

тип А без нахилу (d=h/14);
тип А з нахилом близько 75° (d=h/14);
тип Б без нахилу (d=h/10);
тип Б з нахилом близько 75° (d=h/10).

На навчальних кресленнях рекомендується використовувати шрифт типу Б з нахилом (для розмірних чисел і всіх написів).

Шрифти виконуються з використанням допоміжної сітки (рис. 1.4). Сітку будують тонкими, ледь помітними лініями. Це дозволяє витримувати конструкцію літертацифр.

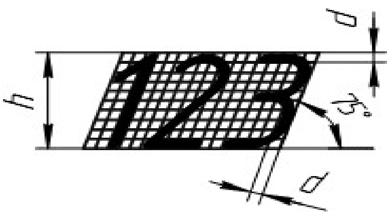


Рис. 1.4. Нахил шрифтів

Форма і конструкція арабських цифр шрифту Б з нахилом наведені на рис. 1.5.

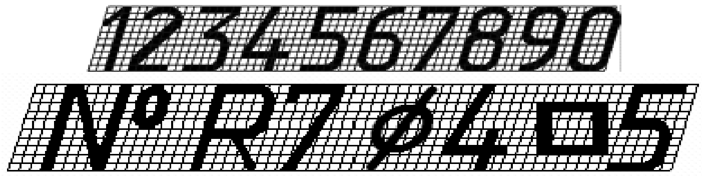


Рис. 1.5.Форма і конструкція арабських цифр

Форма прописних літер з нахилом українського алфавіту (кирилиця) представлено на рис. 1.6. Ширина літер залежить не тільки від розміру шрифту, а і від конструкції самої літери.

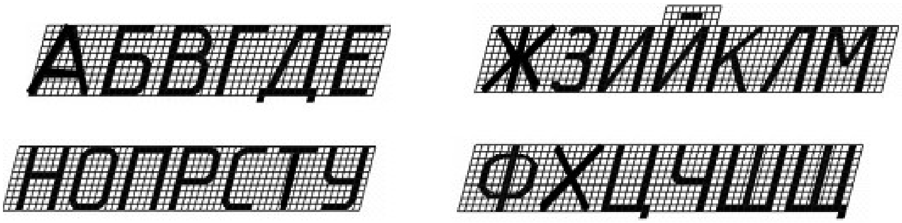


Рис. 1.6. Форма і конструкція великих букв

Форма і конструкція малих букв українського алфавіту шрифту типу Б з нахилом наведені на рис. 1.7.

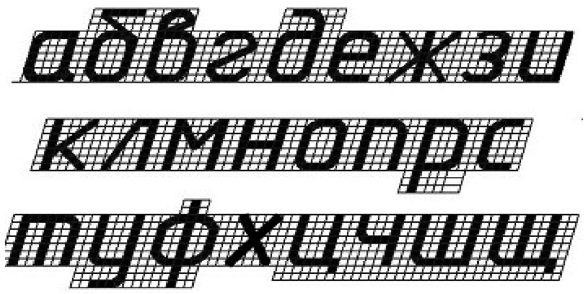


Рис. 1.7. Форма і розміри малих букв

1.2. Проекції елементарних геометричних фігур.

1.2.1. Проекції точки.

На рис.1.8 а і б представлені відповідно двовимірне та тривимірне комплексні креслення точок *G* і *H.* Креслення ці безвісні. Вони елементарні і особливих пояснень не потребують.

Іноді приходиться будувати комплексні креслення точок по їх координатам. *Координатами x, y, z* точки *M* називаються відповідно відстані від даної точки до фіксованих площин проекцій $П_3$, $П_2$, $П_1$ (рис.1.8 б).

Комплексне креслення в такому випадку буде мати осі проекцій. Вони будуть базами підрахунку координат: відстань MM_3 □ OM_x – координата *x* (абсциса) точки *M;* відстань MM_2 □ OM_y – координата *y* (ордината) точки *M;* відстань MM_1 □ OM_z – координата *z* (апліката) точки *M.*

Чисельні величини, що виражають координати *x ,y, z* точки в міліметрах, записують в скобках після її найменування. Наприклад: A (30,15,25).

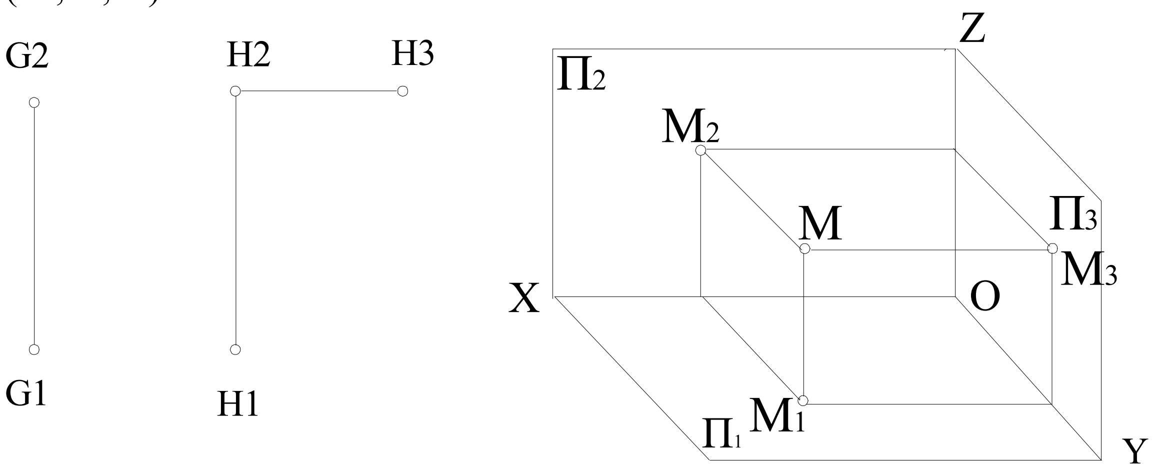


Рис. 1.8. Комплексні креслення

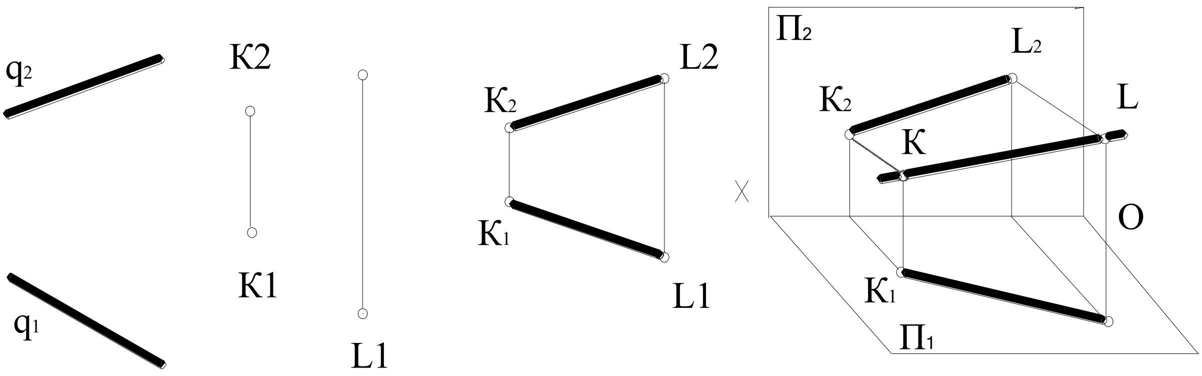
1.2.2. Проекції прямої. Спосіб прямокутного трикутника.

Пряма нескінченна, тобто вона може бути продовжена. Якщо пряма лінія не співпадає з напрямом проектування, то її проекція також являється прямою. В протилежному випадку вона проектується в точку.

На комплексному кресленні пряма лінія може бути задана безпосередньо своїми проекціями (пряма *q* на рис. 1.9, а), проекціями двох її точок (точки *K* і *L* на рис. 1.9, б) або проекціями її відрізка (відрізок *KL* на рис. 1.9, в).

Відновлюючи пряму лінію, що розглядається, по її зображенням (проекціям) – рис. 1.9, г, визначаємо, що дана пряма не паралельна і не перпендикулярна ні одній з площин проекцій: Π_1 , Π_2 , Π_3 . Такі прямі називаються *прямими загального положення.*

Аналізуючи рис. 1.9, в, г, робимо висновок, що проекції K_1L_1 і K_2L_2 не дорівнюють по довжині самому відрізку-оригіналу, тобто вони коротші за нього, так як при проектуванні відрізок KL знаходився під кутом до площини проекцій Π_1 і Π_2.



а б в г

Рис. 1.9. Пряма на комплексному кресленні

Часто доводиться розв‘‘язувати задачі визначення натуральної довжини відрізка прямої загального положення по його комплексному кресленню (рис. 1.10). Проведемо з точки P пряму $PS \,//\, \Pi_1$. Отримаємо прямокутний трикутник *PQS.* Побудуємо в площині проекцій Π_1 трикутник P_1Q_1T , що дорівнює трикутнику *PQS.* Для цього до катету P_1Q_1 з точки Q_1 побудуємо другий катет Q_1T, що дорівнює відрізку QS , тобто перевищенню ΔZ одного кінця відрізку над другим (або різниці відстаней кінців відрізка від площини Π_1).

Таким чином, трикутник P_1Q_1T дорівнює трикутнику PQS. Тодігіпотенуза P_1T буде дорівнювати гіпотенузі PQ , тобто самому відрізку-оригіналу PQ.

Звертаючись до комплексного креслення (рис. 1.10), помічаємо, що всі необхідні елементи для розв‟язання поставленої задачі тут є. Є катет P_1Q_1 (горизонтальна проекція відрізка PQ) і відома довжина другого катета Q_1T (вона дорівнює перевищенню □Z одного кінця відрізку над другим). Виконавши необхідні побудови в площині $П_1$, отримуємо прямокутний трикутник P_1Q_1T, гіпотенуза P_1T

якого дорівнює натуральній величині даного відрізка. Такий спосіб визначення довжини відрізка прямої загального положення по його комплексному кресленню отримав назву способу *прямокутного трикутника*.

Повернемося до першого зображення на рис.1.9. Кут α між гіпотенузою P_1і проекцією P_1Q_1 дорівнює куту нахилу відрізка-оригіналу PQ до горизонтальної площині проекцій $П_1$. Таким чином,в даній задачі одночасно була визначена і натуральна величина кута нахилу прямої загального положення (відрізка PQ) до горизонтальної площини проекцій $П_1$.

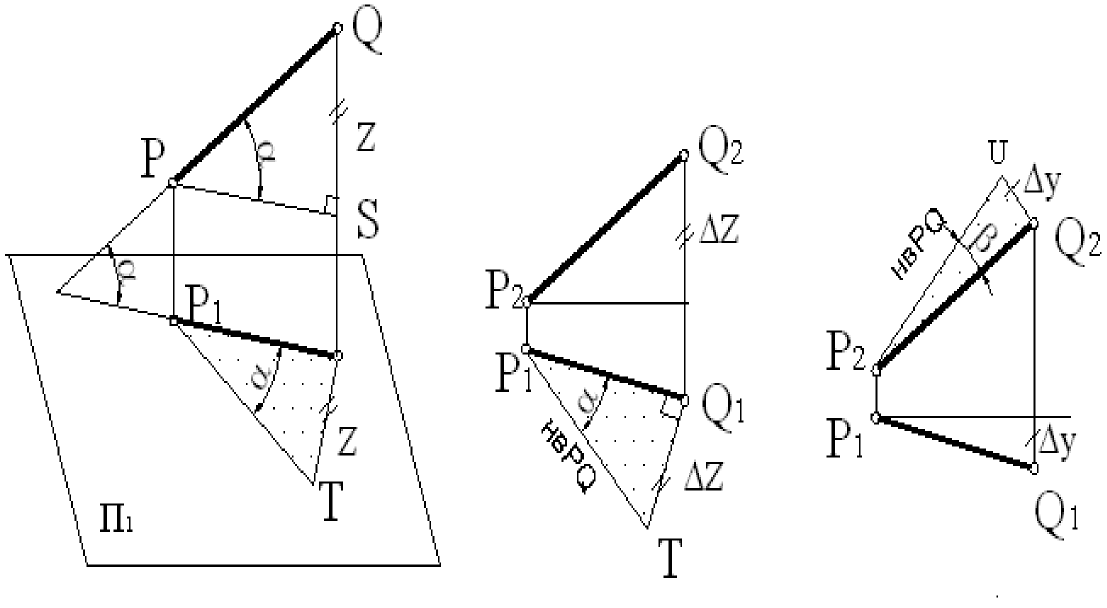


Рис. 1.10. Визначення натуральної величини відрізка

Розмірковуючи аналогічним чином у відношенні фронтальної площини проекцій $П_2$, знову визначимо ту ж саму натуральну величину відрізка PQ до фронтальної площини проекцій $П_2$. Читачеві рекомендується самостійно виконати схему, взявши замість площини $П_1$ площину $П_2$.

Повернемося до комплексного креслення (рис. 1.10). Прямокутний трикутник будуємо у фронтальній площині проекцій Π_2 . Тут одним з катетів буде проекція P_2Q_2 , а другим – відрізок Q_2U ,що дорівнює різниці відстаней Δy кінців відрізка від площини проекцій Π_2 . Тоді гіпотенуза P_2U є таж сама натуральна величина відрізка PQ, а кут α між гіпотенузою і проекцією P_2Q_2 являється натуральною величиною кута α нахилу відрізка-оригіналу PQ до фронтальної площини проекцій Π_2.

Прямі окремого положення – це прямі, або паралельні, або перпендикулярні кожній з площин проекцій: Π_1, Π_2, Π_3 .

Прямі паралельні до площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3 називаються *прямими рівня*, так як всі точки такої прямої знаходяться на одному рівні по відношенню до відповідної площини проекцій. Прямі перпендикулярні до площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3 називаються *проектуючими прямими*, так як вони співпадають з напрямом проектування.

На рис. 1.11 представлені наочні зображення першої групи прямих окремого положення – прямих рівня. В відповідності з назвою площини проекцій, до якої вони паралельні, ці прямі отримали наступні назви:

пряма ***h*** – *горизонталь*, так як $h // \Pi_1$;

пряма ***f*** – *фронталь,* так як $f // \Pi_2$;

пряма ***p*** – *профільна* пряма, так як $p // \Pi_3$.

На рис. 1.12 представлені комплексні креслення горизонталі ***h*** і фронталі ***f***. Ці прямі в якості допоміжних достатньо часто будуть зустрічатися в рішеннях задач, тому на них необхідно звернути увагу. По своєму зображенню на комплексних кресленнях вони взаємно зворотні. Одна з їх проекцій горизонтальна, а друга нахилена і уявляє собою натуральну величину прямої. Кути α і β визначають кути нахилу цих прямих до відповідних площин проекцій Π_2 і Π_1 .

Що ж стосовно профільної прямої ***p*** , то для неї двокартинне креслення являється незворотнім (рис. 1.13, а), так як не визначає дійсного положення даної прямої у просторі. В такому випадку креслення необхідно доповнити або третім зображенням (профільною проекцією p_3) – рис. 1.14, б, або задати на цій прямій дві будь-які точки A і B.

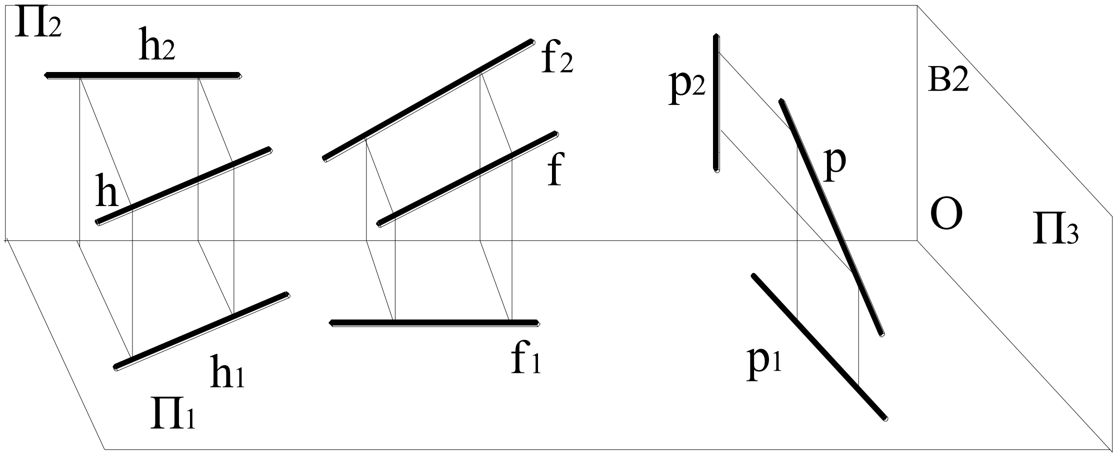
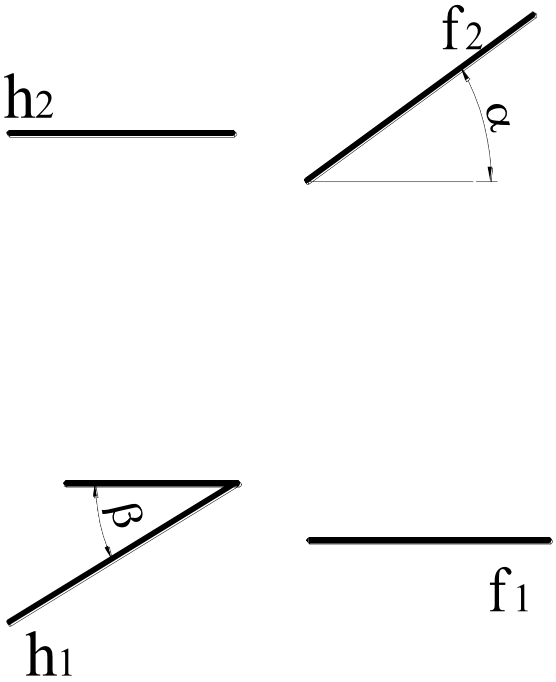
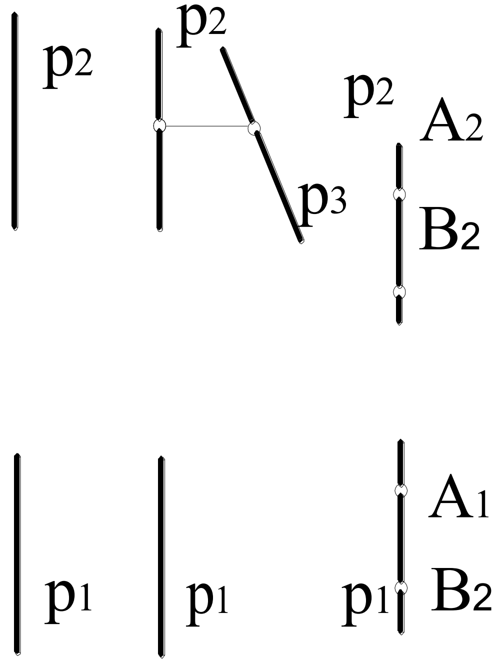


Рис.1.11. Наочні зображення прямих рівня



а б



а б в

Рис. 1.12. Комплексні креслення
креслення фронталі і горизонталі

Рис. 1.13. Комплексні
профільної прямої

На рис.1.14 представлені наочні зображення другої групи прямих окремого положення – проектуючих прямих.

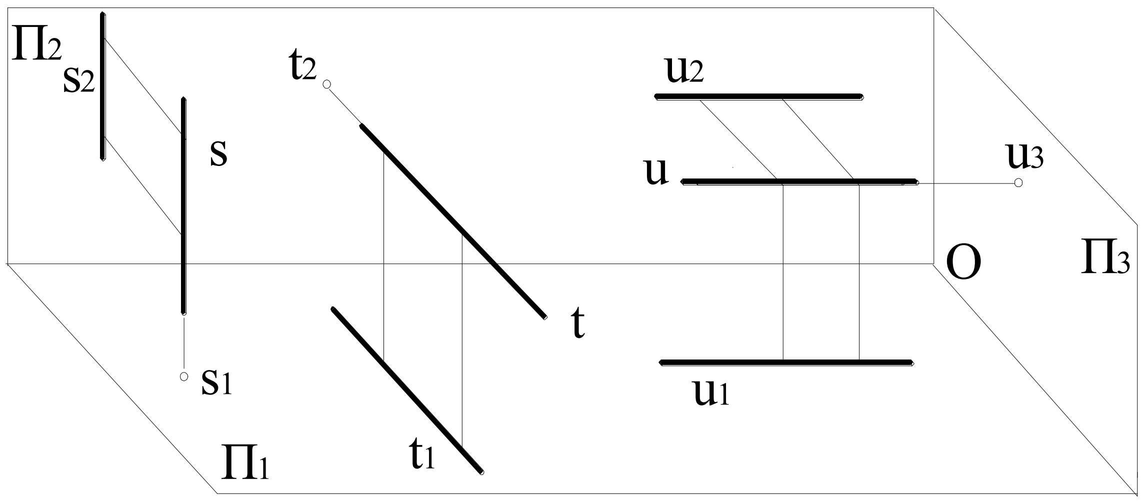


Рис.1.15. Наочні зображення проектуючих прямих

У відповідності з назвою площини проекцій, якої вони перпендикулярні, ці прямі отримали наступні назви:

пряма ***s*** – горизонтально-проектуюча, так як s Π_1;

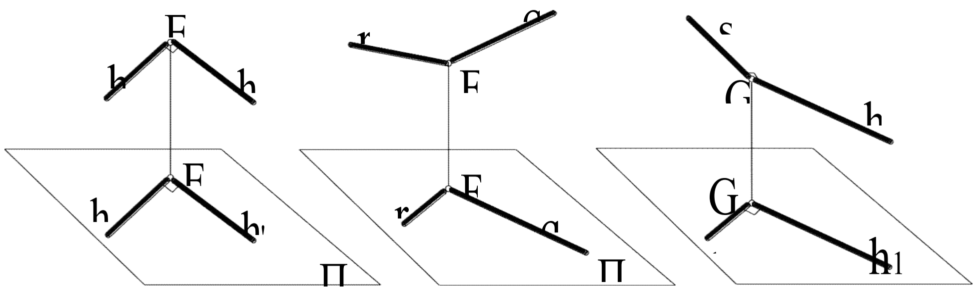
пряма ***t*** – фронтально-проектуюча, так як t Π_2;

пряма ***u*** – профільно-проектуюча, так як u Π_3.

1.2.3. Проекції прямого кута.

Можливі три випадки розташування сторін прямого кута по відношенню до площин проекцій (рис.1.16). В першому випадку (рис. 1.13а) обидві сторони прямого кута *hEh* паралельні площині проекцій Π_1. Зрозуміло, що цей прямий кут зпроектується на площину Π_1 в натуральну величину.

Зайвими будуть докази для ствердження, що в другому випадку (рис. 1.23б) прямий кут не зпроектується на площину Π_1 в натуральну величину, так як обидві його сторони r і q являються прямими загального положення.



а б в

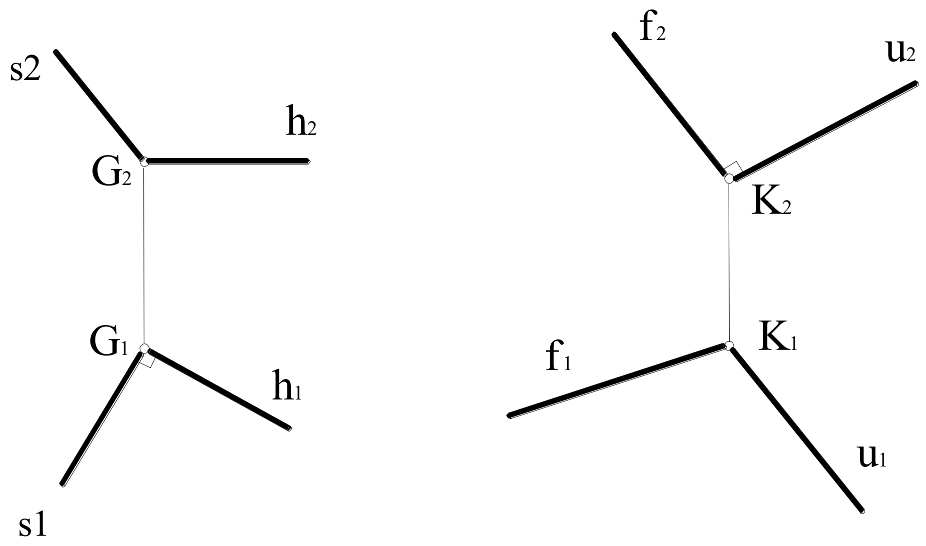
Рис.1.16. Три випадки розташування сторін прямого кута по відношенню до площин проекцій

Розглянемо докладніше третій випадок (рис.1.15в), коли тільки одна сторона прямого кута паралельна площині проекцій. Неважко довести, що в цьому випадку прямий кут *sGh* зпроектується на площину $П_1$ в натуральну величину.

Нехай через прямі s і GG_1 проходить площина. Тоді горизонталь h, так як h s і h GG_1 (пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна двом перетинаючимся прямим цієї площини). А так як $h // h$,то h_1. Значить, h_1 s_1 (тобто пряма h_1 буде перпендикулярна будь-якій прямій в площині , в тому числі і прямій s). Таким чином, ми довели, що кут s G h $90°$. Всі наведені вище міркування стосовно проекцій прямих кутів справедливі і в відношенні фронтальної площини проекцій $П_2$. Тільки там в якості прямої рівня повинна розглядатися фронталь.

На рисунках 1.16, а, б наводяться комплексні креслення прямих кутів, коли одна із їх сторін являється горизонталлю (рис. 1.17, а) або фронталлю (рис. 1.17, б).

Таким чином, доведену вище *теорему про проекції прямого кута* можна сформулювати так: якщо одна сторона прямого кута паралельна площині проекцій, то на цю площину даний прямий кут проектується в натуральну величину.



а б

Рис. 1.17. Комплексні креслення прямих кутів

1.2.4. Проекція площини.

Площина – простий вид поверхні. Вона відноситься до незамкнених поверхонь, тобто може буди продовжена, не має товщини. В задачах будемо вважати її непрозорою. Площина, не паралельна і не перпендикулярна ні до однієї з площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3, називається площиною *загального положення.* Площина загального положення на кресленні не може бути задана безпосередньо своїми проекціями (як, наприклад, точка чи пряма), так як вона не має меж і покриває собою все поле проекцій. Тому її задають або відсіком в вигляді *n*-кутньої пластинки (рис. 1.18, а) , або елементами її визначаючими:

- трьома точками – *L, M, N* , що не лежать на одній прямій (рис. 1. 18, б);
- прямою *a* і точкою *M* за її межами (рис. 1. 18, в);
- двома паралельними прямими – *b* і *c* (рис. 1. 18, г);
- двома перетинними прямими – *d* і *e* (рис. 1. 18, д).

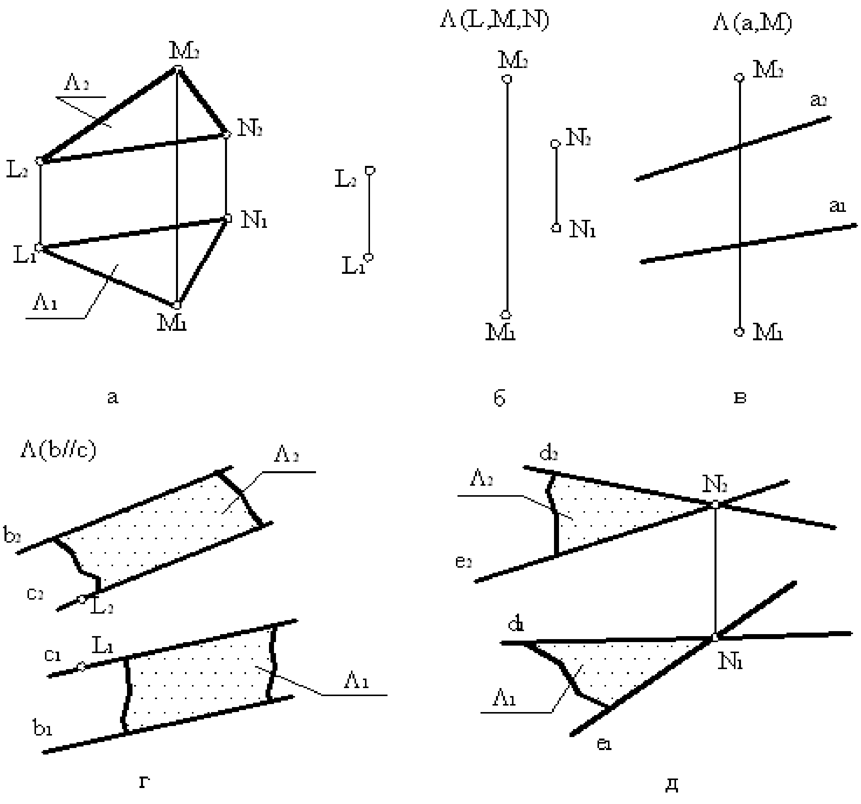
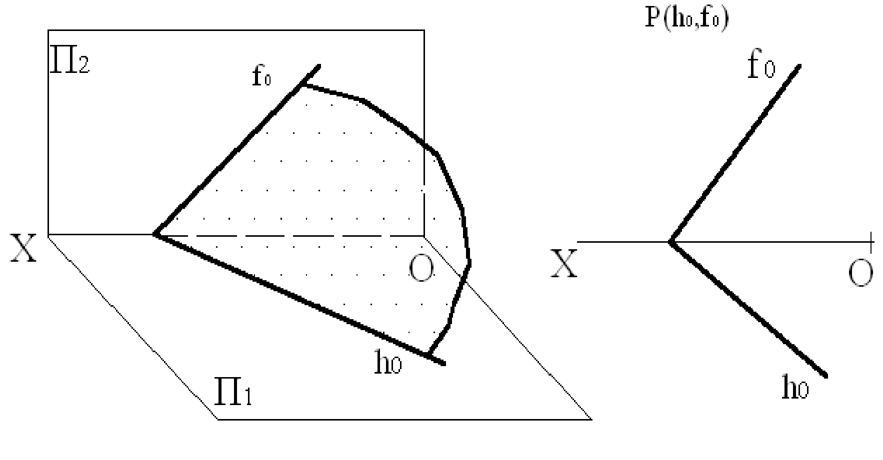


Рис. 1.18. Площина загального положення на комплексному кресленні

Необхідно відмітити, що в основі усіх цих способів завдання знаходяться три точки, що визначають єдину площину. Можна, по бажанню, легко переходити від одного способу завдання до другого.



а б

Рис. 1. 19. Завдання площини на комплексному кресленні слідами

Переходимо до розгляду *площин окремого положення*. Це площини, або перпендикулярні до будь-якої з площин проекцій, або паралельні їй.

Площини перпендикулярні до площин проекцій $П_1$, $П_2$, $П_3$ називаються *проектуючими площинами*, так як вони співпадають з напрямом проектування

(рис. 1.20).

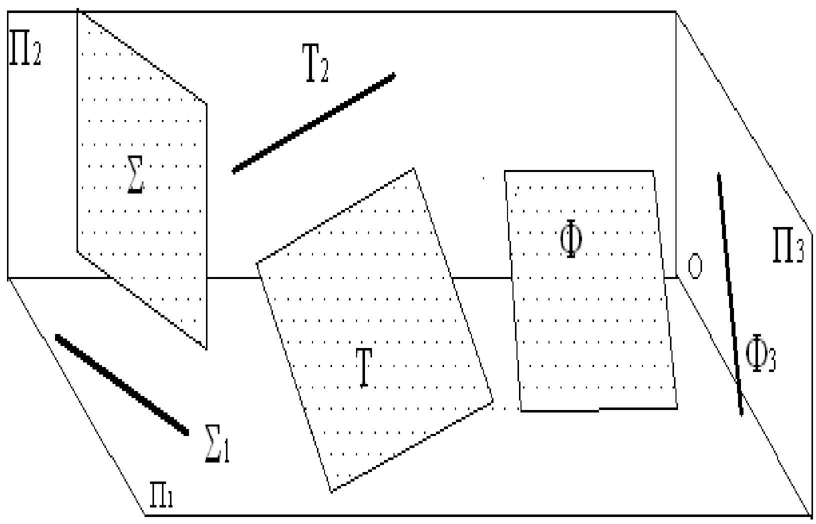


Рис. 1.20. Площини окремого положення

У відповідності з назвою площини проекцій, якій вони перпендикулярні, ці площини окремого положення отримали наступні назви:

- площина Σ (сигма) – *горизонтально - проектуюча,* так як $\Sigma \perp П_1$;

- площина Т (тау) – *фронтально - проектуюча.* Так як $T \perp \Pi_2$;
- площина Ф (фі) – *профільно - проектуюча,* так як $Ф \perp \Pi_3$.

Таким чином, на відміну від площин загального положення площини окремого положення можуть задаватися на комплексному кресленні безпосередньо своїми проекціями.

Друга група площин окремого положення – площини рівня представлені на рисунку 1.21.

Площини рівня – це площини паралельні до площин проекцій Π_1, Π_2, Π_3..

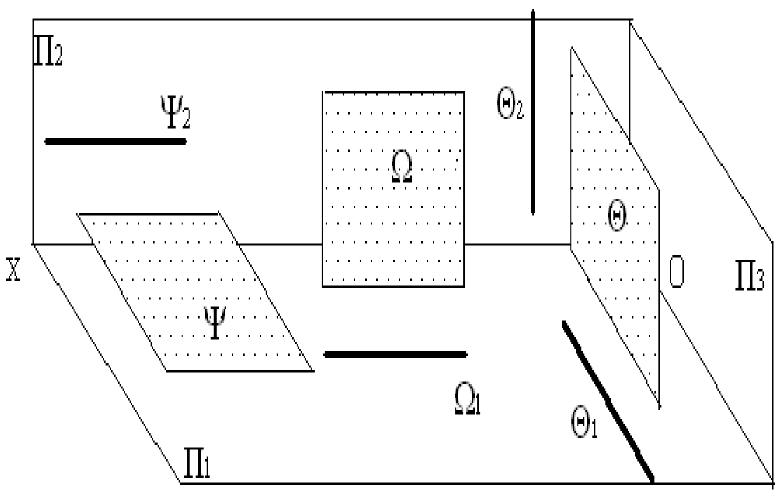


Рис. 1.21. Площини рівня

У відповідності з назвою площин проекцій, яким вони паралельні, ці площини окремого положення отримали наступні назви:

- площина Ψ (псі) – горизонтальна площина рівня, так як $\Psi // \Pi_1$;
- площина Ω (омега) – фронтальна площина рівня, так як $\Omega // \Pi_2$;
- площина Θ (тета) – профільна площина рівня, так як $\Theta // \Pi_3$.

На комплексних кресленнях ці площини мають неповні зображення, що складаються з горизонтальних і вертикальних прямих.

1.3. Метричні та позиційні задачі.

В інженерній графіці розглядаються два види задач: *позиційні і метричні.* В основі рішення позиційних і метричних задач лежать позиційні і метричні властивості пар їх проекцій.

Задачі, пов'язані з рішенням питань взаємного розташування геометричних фігур на комплексному кресленні, називаються ***позиційними.***

До ***метричних*** відносяться задачі, пов'язані з визначенням істинних (натуральних) величин відстаней, кутів і плоских фігур на комплексному кресленні. Можна виділити три групи метричних задач.

При рішенні позиційних задач з'ясовують взаємне розташування (позицію) двох і більшого числа геометричних фігур. Поняття *взаємне розташування* включає також приналежність однієї фігури іншій. При цьому можливі випадки:

1) повної належності, наприклад, точка належить прямій, пряма належить площині (пряма є підмножина площини); 2) перетини, наприклад, пряма перетинається з площиною (пряма не є підмножиною площини), одна площина перетинається з іншою, 3) відсутність належності, наприклад, у двох прямих, що схрещуються.

До метричних задач відносять такі, в умові або рішенні яких присутні геометричні поняття, пов'язані з чисельною характеристикою. Рішенням метричних задач визначаються перпендикулярність геометричних фігур і чисельні характеристики фігур: відстань, площа, кут і т.п.

Нижче розглянуті метричні і позиційні властивості проекцій найпростіших геометричних фігур в поєднанні їх по дві, сформульовані відповідні властивості і слідства, що витікають з них.

1.3.1. Точка і пряма.

Точка може належати прямій або не належати їй. Для вирішення питання про належність достатньо досліджувати їх проекції, взявши до уваги наступну властивість: точка належить прямій, якщо її проекції належать тим же проекціям прямої, і не належить прямій, якщо хоча б одна її проекція не належить тій же проекції прямій.

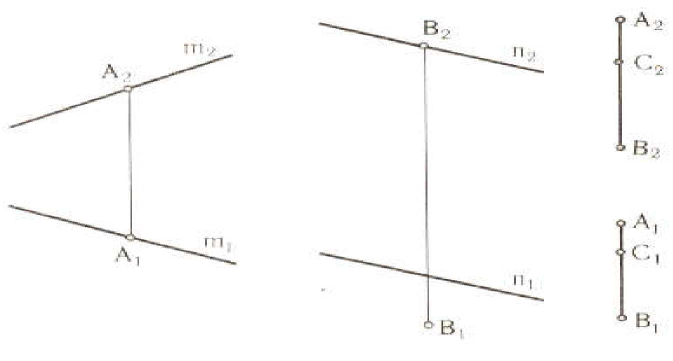


Рис.1.22 Прямі *m* і *n* .

На рис. 1.22 показані прямі *m* і *n* . Точка *A,* проекції якої інцидентні відповідним проекціям прямої *m,* належить цій прямій. Точка *B* не належить прямій *n,* оскільки її горизонтальна проекція не інцидентна горизонтальній проекції прямій. Для двох проекцій (фронтальній і горизонтальній) профільної прямої умови інцидентності недостатньо, оскільки якщо пряма і точка належать одній профільній площині, то проекції точок завжди інцидентні проекціям прямих. В цьому випадку необхідно внести визначеність, що полягає в тому, що на профільній прямій фіксується двома точками її відрізок, а точка, що належить прямій, повинна ділити проекції цього відрізка в одному і тому ж відношенні на фронтальній і горизонтальній проекціях.

Метричні характеристики двох геометричних фігур виражаються, як правило, у визначенні відстаней і кутів між ними. Розглянемо такі положення геометричних фігур, при яких ці відстані і кути проектуються у натуральну величину.

Почнемо з взаємного розташування точки і прямої.

При загальному розташуванні прямої відстань від точки до прямої проектується у натуральну величину, якщо ця пряма є лінією нахилу площини, яка задається точкою і прямою. В цьому випадку відрізок, що виміряє відстань від точки до прямої, паралельний одній з площин проекцій, а значить проектується на неї без спотворення. На рис. 1.22 показана пряма *m* і точка *A*. Пряма є лінією нахилу (лінією ската) щодо площини $П_1$. Відстань від точки до прямої вимірюється відрізком горизонтальної прямої.

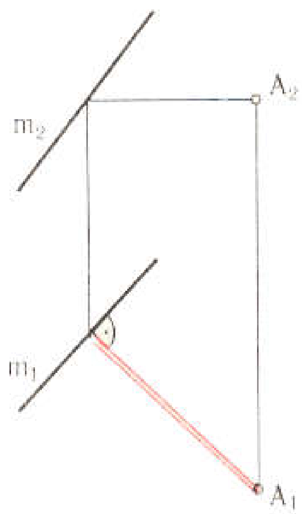


Рис.1.23 Розташування точки і прямої.

Сформулюємо властивість: відстань від точки до прямої проектується в натуральну величину, якщо пряма є лінією нахилу площини, заданою точкою і прямою, до однієї з площин проекцій.

З цієї властивості можна вивести два слідства:

Слідство 1. Відстань від точки до прямої проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо пряма вертикальна, і на фронтальній, якщо пряма фронтально-проектуюча.

На рис. 1.24, *а* показана вертикальна пряма m і точка *A,* відстань між прямою і точкою зобразиться без спотворення на горизонтальній проекції.

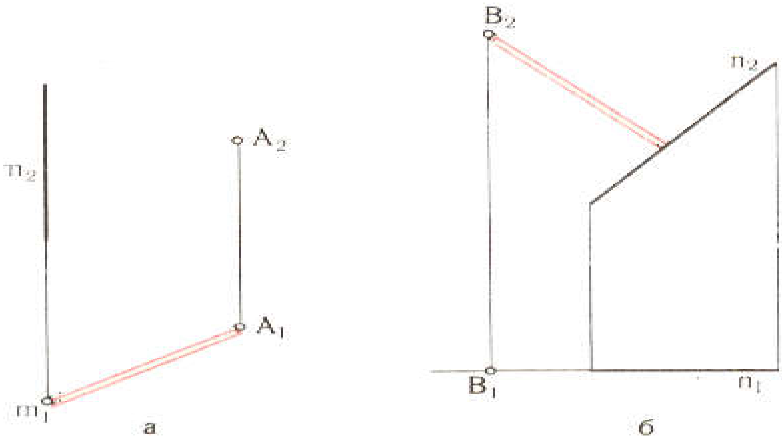


Рис.1.23 а) вертикальна пряма m і точка *A*,
б) пряма *n* і точка В.

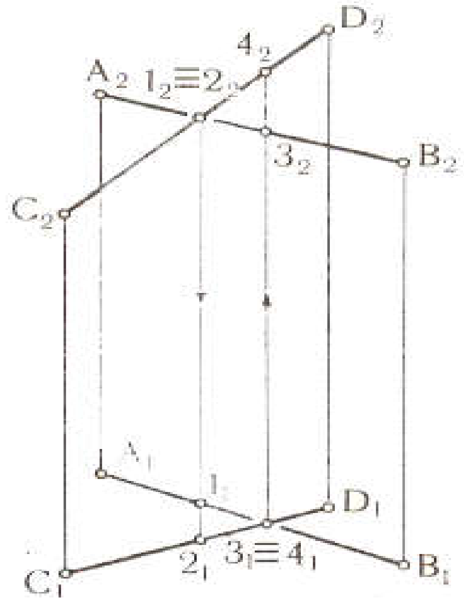
Слідство 2. Відстань від точки до прямої проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина, задана точкою і прямою, горизонтальна, і на фронтальній проекції, якщо ця площина фронтальна.

На рис. 1.24, б показана пряма *n* і точка В, що дають фронтальну площину. Відстань від точки до прямої зобразиться без спотворення на фронтальній проекції.

1.3.2. Дві прямі.

Прямі перетинаються, якщо мають одну загальну власну або невласну точку; прямі схрещуються, якщо не мають загальну точку. Дві прямі в просторі в загальному положенні схрещуються. В цьому випадку, як відомо з середньої школи, через них можна провести єдину пару площин, паралельних площині паралелізму (це площина, паралельна двом прямим, що схрещуються). Її можна задати, якщо через довільну точку простору провести дві прямі, паралельні прямим, що схрещуються. Відстань між прямими дорівнює відстані між цими площинами. При зменшенні цієї відстані до нуля дві площини зливаються в одну і прямі стають пересічними. Якщо точка їх перетину віддаляється в нескінченність — прямі паралельні. По проекціях прямих на комплексному кресленні можна судити про те, яке вони займають положення.

Сформулюємо властивості: якщо точки перетину однойменних проекцій прямих загального положення належать одній вертикальній лінії зв'язку, прямі перетинаються; якщо однойменні проекції прямих паралельні між собою, прямі паралельні ; якщо точки перетину однойменних проекцій прямих не належать одній вертикальній або горизонтальній лінії зв'язку, прямі схрещуються .



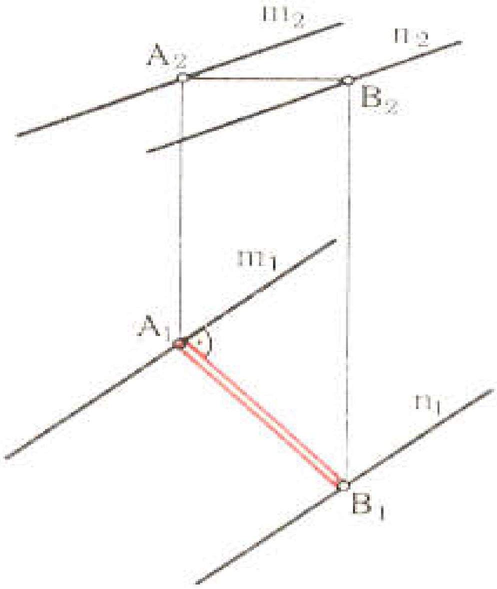


Рис. 1.25 Відрізки *AB* і *CD*   Рис. 1.26 Лінії нахилу *m* і *n*

На рис. 1.25 приведено два відрізки прямих *AB* і *CD, що* схрещуються. Для визначення «перекриття» їх на проекціях відзначені конкуруючі точки *1* і *2* щодо площини Π_2 і точки *3, 4* щодо площини Π_1. При цьому точки *1* і *3* належать відрізку *AB,* а точки *2* і *4* — відрізку *CD.* Оскільки точка *4* розташована вище за точку *3,* на площині Π_1 відрізок *CD* «перекриває» відрізок *A B*. *Точка 2* розташована ближче за точку *1*, тому на площині Π_2 відрізок *CD* «перекриває» відрізок *AB*.

Розглянемо метричні властивості двох паралельних прямих. На підставі властивості відстані від точки до прямої сформулюємо властивість, що стосується відстані між паралельними прямими

Відстань між двома паралельними прямими загального положення зображається у натуральну величину, якщо прямі є лініями нахилу площини, яку вони задають, до однієї з площин проекцій. Так, якщо на одній з паралельних прямих узяти точку, то ця задача може бути зведена до попередньої задачі на відстань від точки до прямої, що є лінією нахилу.

На рис. 1.26 показана відстань між двома лініями нахилу m і n, що вимірюється відрізком горизонтальної прямої AB.

З приведеної вище властивості можна вивести два слідства:

1. Відстань між паралельними прямими проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо прямі вертикальні, і на фронтальній, якщо прямі фронтально-проектуючі (рис. *1.27*, а).

2. Відстань між паралельними прямими зображається у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо задана ними площина горизонтальна, і на фронтальній, якщо ця площина фронтальна (рис. *1.27*, б).

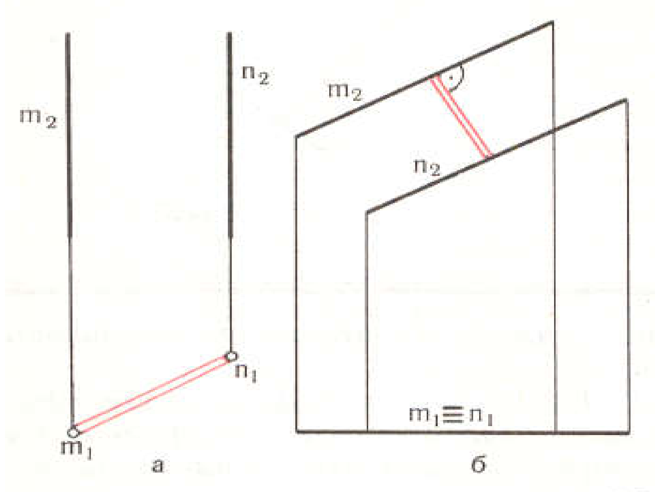


Рис. 1.27 Прямі фронтально-проектуючі

Кут між прямими, що схрещуються або являються пересічними, проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо прямі горизонтальні, і на фронтальній, якщо прямі фронтальні (рис. *1.28*).

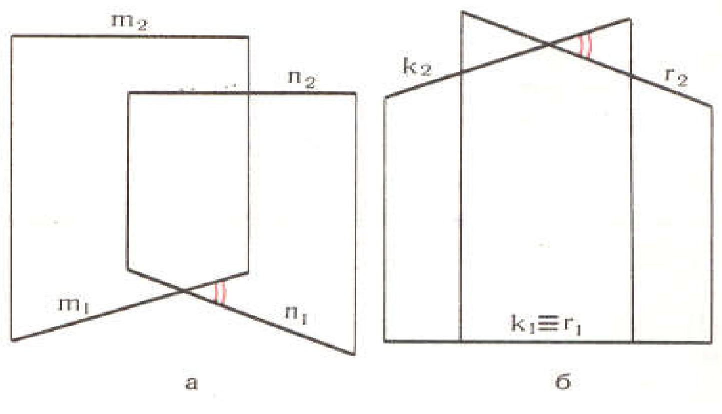


Рис. 1.28 Кут між прямими,

Оскільки взаємно перпендикулярними можуть бути дві прямі, пряма і площина і дві площини, розглянемо послідовно всі ці випадки на прикладах. На рис. 1.29 показані дві взаємно перпендикулярні площини — горизонтальна Π_1 і вертикальна Π_4. Окрім цього, задана горизонтальна пряма m, що належить Π_4, і вертикальна площина Π_5, перпендикулярна до прямої m в точці A, а значить і до площини Π_4.

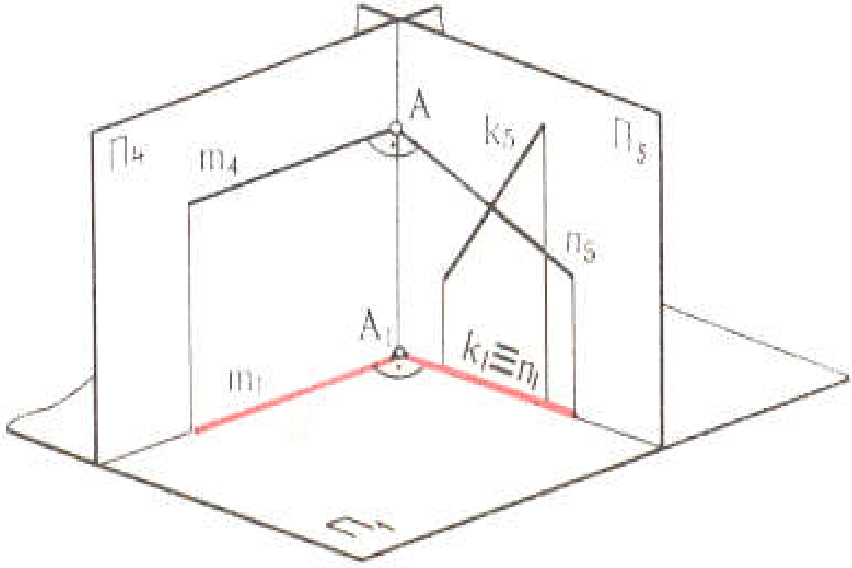


Рис. 1.29 Взаємно перпендикулярні площини

Через точку *A* проходить пряма *n, що* належить площині $П_5$ і яка створює, як відомо, з прямою m прямий кут. Цей кут проектується без спотворення на горизонтальну площину проекцій $П_1$, оскільки його сторони лежать на гранях горизонтально-проектуючого прямого двогранного кута, утвореного площинами $П_4$ і $П_5$. Неважко помітити, що якщо в площині $П_5$ узяти довільну пряму *k* (яка завжди буде перпендикулярна до *m*), що схрещується з прямою *m*, то цей прямий кут схрещення також зпроектується без спотворення на горизонтальну площину проекцій.

На підставі приведених міркувань можна сформулювати наступну властивість.

Прямий кут перетину або схрещення проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо хоча б одна його сторона горизонтальна, і на фронтальній, якщо хоча б одна сторона його фронтальна. При цьому друга сторона прямого кута не повинна бути проектуючою, оскільки в цьому випадку проекція прямого кута перетину перетворюється в лінію. На рис. 1.30, *а* *є* показаний прямий кут перетину, одна сторона якого горизонтальна, і прямий кут схрещення, одна сторона якого фронтальна (рис. 1.30, б*),* ці кути проектуються в першому випадку на $П_1$, а в другому — на $П_2$ у натуральну величину.

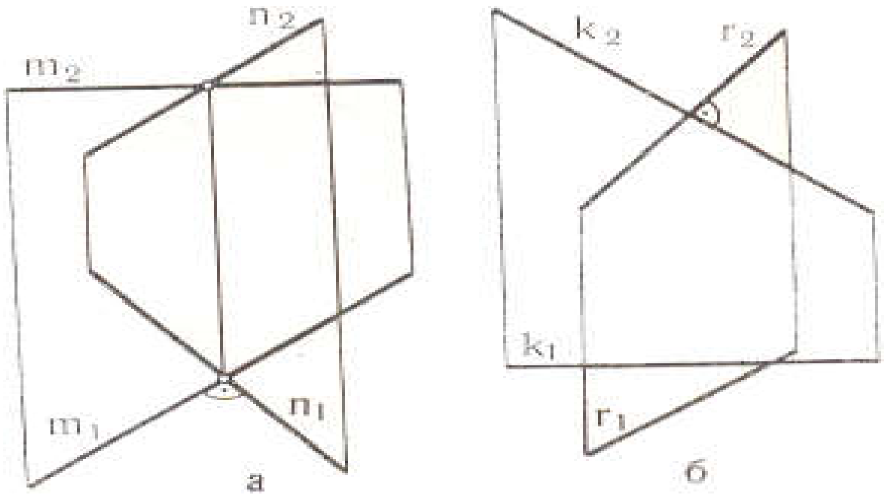


Рис. 1.30 Прямий кут перетину

1.3.3. Пряма і площина.

Щоб з'ясувати взаємне положення прямої і площини, скористаємося *способом перетину*

Алгоритм рішення складається з трьох операцій:

1) пряма заключається в допоміжну площину;

2) визначається лінія перетину заданої площини з допоміжною;

3) з'ясовується взаємне положення двох прямих: заданої і лінії перетину.

При цьому можливі три випадки:

дві прямі перетинаються в одній точці, значить, пряма перетинається з площиною в цій точці;

дві прямі паралельні, значить, пряма паралельна площині;

дві прямі співпадають, значить, пряма є підмножина площини.

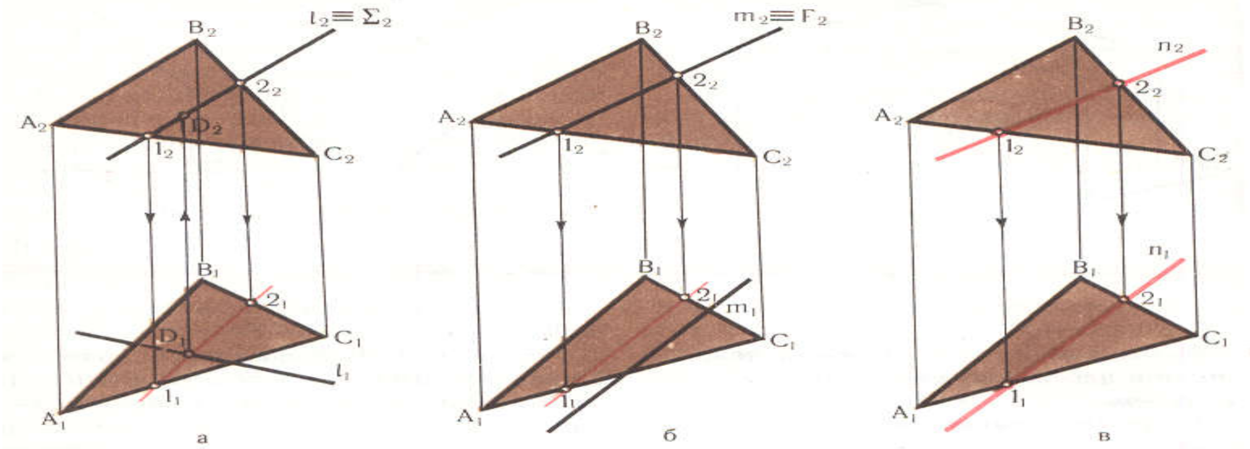


Рис. 1.31 Трикутний відсік *ABC*

На рис. 1.31, *а* зображений трикутний відсік *ABC* і пряма загального положення *l*. Для визначення їх взаємного положення використана фронтально-проектуюча площина Σ, проведена через пряму l . Знайдена лінія перетину двох площин — пряма *l* —2.

З розгляду горизонтальних проекцій прямих l_1 і $1_1 2_1$ видно, що пряма l перетинається з площиною в точці *D,* фронтальна проекція якої визначається по вертикальній відповідності.

В символічному записі $\Sigma_2 \supset l_2, 1_2 2_2 \equiv l_2, 1_1 2_1 \times l_1 = D_1$

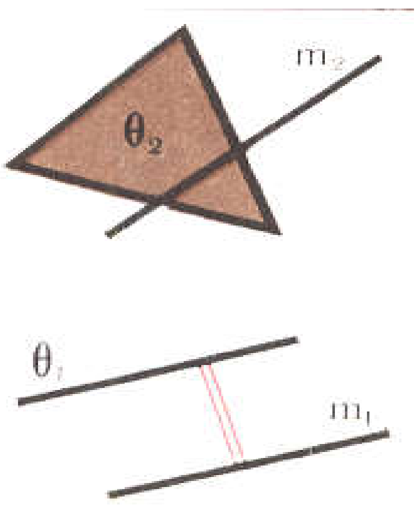
На рис. 1.31, *и* побудована пряма *m,* паралельна площині відсіку *ABC.* Для цього також була побудована пряма *1—2,* отримана в результаті перетину трикутного відсіку з фронтально-проектуючою площиною *Г.* Горизонтальна проекція прямої m_1 повинна бути паралельна горизонтальній проекції прямої *1—2*

$$(\Gamma_2 \supset m_2, 1_2 2_2 \equiv m_2, m_1 \| 1_1 2_1).$$

На рис. 1.32, в показана пряма *n,* проекції якої співпадають з проекціями прямої *1—2,* , що належить площині. Значить, пряма належить площині $(1_2 2_2 \equiv n_2, 1_1 2_1 \equiv n_1)$.

Визначення точки перетину прямої з площиною — перша основна позиційна задача курсу інженерної графіки. До неї можна звести більшість позиційних задач.

Метричні характеристики поєднання — пряма і площина — торкаються визначення відстані між прямою і паралельною їй площиною, а також кута між прямою і площиною, якщо пряма і площина не паралельні. Відстань від прямої до паралельної їй площини проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина вертикальна, і на фронтальній, якщо вона фронтально-проектуюча.. На рис. 1.32 показана відстань між вертикальною площиною Θ і прямою т.



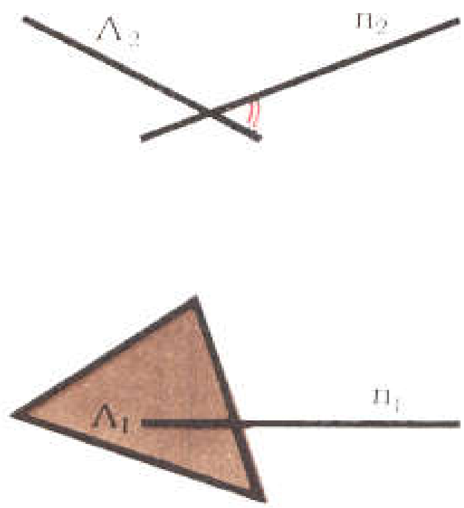


Рис. 1.32 Відстань між площиною Θ і прямою m   Рис. 1.33 Кут Λ

Кут між прямою і площиною визначається такою властивістю: кут між прямою і площиною проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина вертикальна, а пряма горизонтальна, і на фронтальній проекції, якщо площина фронтально-проектуюча, а пряма фронтальна.

На рис. 1.33 показаний кут між фронтально-проектуючою площиною Λ і фронтальною прямою n.

Як відомо, пряма перпендикулярна площині, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, що належать площині. Беручи до уваги властивості проекцій прямого кута, зі всієї безлічі прямих площини доцільно в якості цих ліній вибрати лінії рівня, тобто горизонталь і фронталь.

На рис. 1.34 показаний трикутний відсік, сторона якого АС є горизонталлю, а АВ — фронталлю. Щоб з точки D опустити перпендикуляр на площину цього відсіку, достатньо провести фронтальну проекцію його перпендикулярно до фронтальної проекції фронталі A_2B_2, а горизонтальну — перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі A_1C_1.

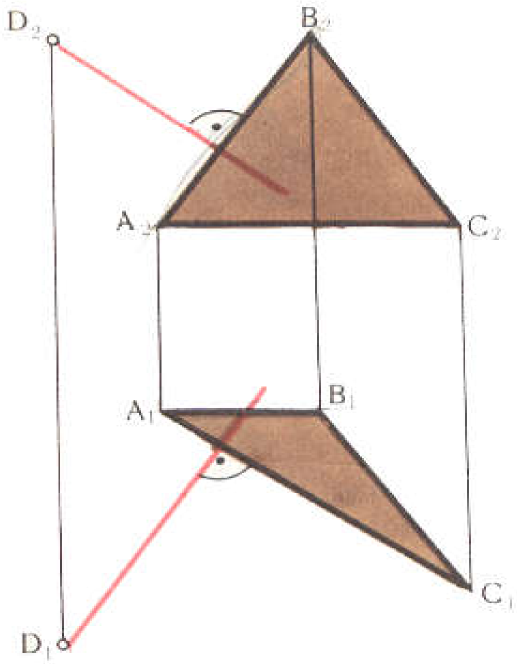


Рис. 1.34 Точка перетину перпендикуляра з площиною

Сформулюємо властивість: проекція прямої, що перпендикулярна до площини, на горизонтальній проекції площини перпендикулярна до проекції горизонталі, на фронтальній — перпендикулярна до проекції фронталі площини.

На рис. 1.34 точка перетину перпендикуляра з площиною, тобто його основа, відсутня. Щоб її знайти, достатньо вирішити першу основну позиційну задачу, тобто визначити точку перетину прямої з площиною.

Якщо на кресленні площини горизонталь і фронталь не показані, для проведення перпендикуляра до площини їх необхідно провести.

1.3.4. Точка і площина.

Точка може належати площині або не належати їй. Це визначається за допомогою прямої, що належить площини.

На рис. 1.35 показаний трикутний відсік *ABC* і задані точки *1* і *2*. Точка *1* належить площині, оскільки вона належить прямій *BD,* яка являється підмножиною площини, точка *2* не належить площині, оскільки тільки фронтальна проекція її належить фронтальній проекції прямої D_2B_2, а горизонтальна проекція не належить D_1B_1.

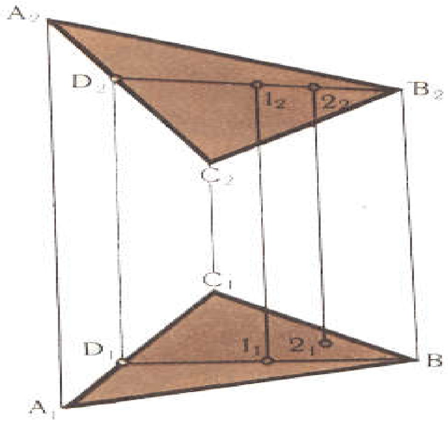


Рис. 1.35 Трикутний відсік *ABC* і задані точки *1* і *2.*

Можна сформулювати наступну властивість: точка належить площині, якщо обидві її проекції співпадають з тими ж проекціями прямої, що належить площині..

Метрична характеристика визначається такою властивістю: відстань від точки до площини проектується у натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площина вертикальна, і на фронтальній, якщо площина фронтально-проектуюча. На рис. 1.37 показані точка А і вертикальна площина Φ, відстань між ними проектується без спотворення на горизонтальній площині проекцій.

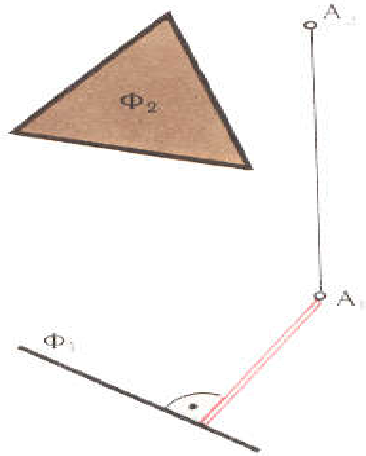


Рис. 1.36 Точка *A* і вертикальна площина *Ф*

1.3.5. Дві площини.

Дві площини завжди між собою перетинаються. Якщо лінія їх перетину — невласна пряма, площини паралельні. Тому щоб з'ясувати взаємне положення двох площин, знаходять лінію їх перетину — **друга основна позиційна задача**. Для цього достатньо визначити дві точки, що належить цій лінії. Рішення такої задачі можна звести до попередньої, тобто до перетину прямої з площиною, повторивши його двічі. На рис. 1.38 показано дві площини: одна задана трикутним відсіком, а інша — двома паралельними прямими. Знаходимо точку перетину кожній з паралельних прямих з трикутним відсіком. Для цього скористаємося фронтально-проектуючими допоміжними площинами Σ і Ω, які перетнуть трикутний відсік по прямих 1—2 і 3—4. Точки D і E визначають лінію перетину двох площин:

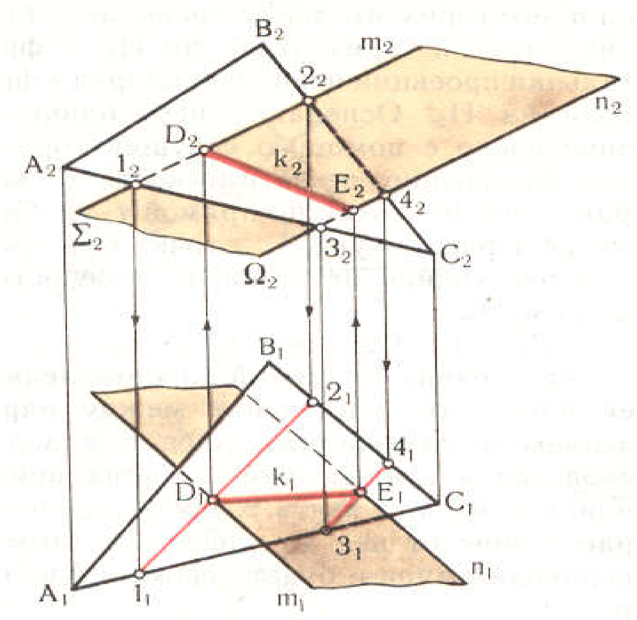


Рис. 1.37 Дві площини:

$$\Sigma_2 \supset m_2;\ \Omega_2 \supset n_2;\ 1_2 2_2 \equiv m_2;\ 3_2 4_2 \equiv n_2;$$
$$1_1 2_1 \times m_1 = D_1;\ 3_1 4_1 \times n_1 = E_1;\ \ \kappa \supset DE.$$

Таким чином, для визначення лінії перетину двох площин способом перетинів знаходять дві точки перетину прямих однієї з площин з іншою площиною.

На рис. 1.38 зображено дві площини: одна задана трикутним відсіком, друга — двома паралельними прямими m і n. Ці площини паралельні, оскільки прямі т і п паралельні прямим 1—2 і 3—4, отриманим в результаті перетину відсіку фронтально-проектуючими площинами Λ і Г.

Із елементарної геометрії відомо: якщо дві пересічні прямі однієї з площин відповідно паралельні двом пересічним прямим іншої площини, то площини паралельні:

$$\Lambda_2 \supset m_2;\quad \Gamma_2 \supset n_2;\qquad m_2 \equiv 1_2 2_2;\qquad n_2 \equiv 3_2 4_2;\ m_1 \| n_1 \| 1_1 2_1.$$

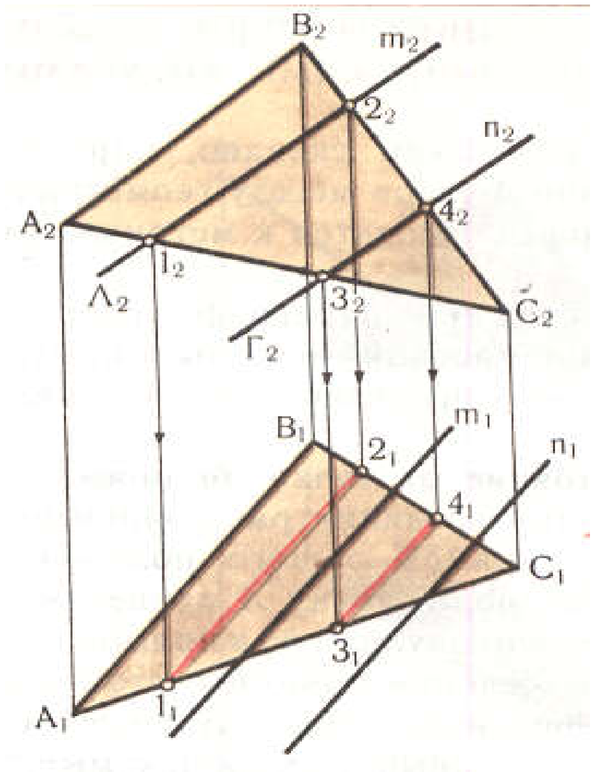


Рис. 1.38 Дві площини:

Розглянемо метричні характеристики — відстані і кути між двома площинами.

Відстань між паралельними площинами проектується у натуральну величину на горизонтальну площину проекцій, якщо площини вертикальні, і на фронтальну, якщо площини фронтально проектуючи.

На рис. 1.39 показана відстань між двома паралельними вертикальними площинами *Θ* і *Φ*, що проектується без спотворення на горизонтальну площину проекцій.

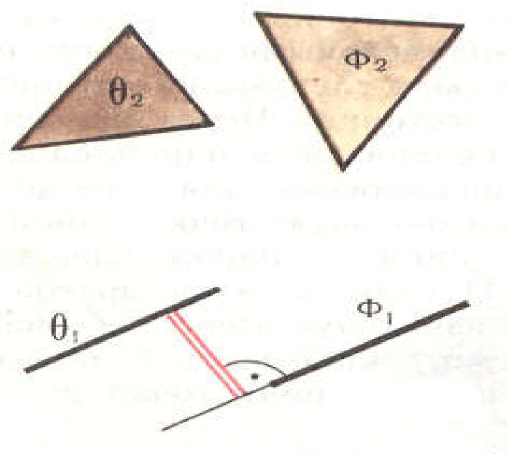
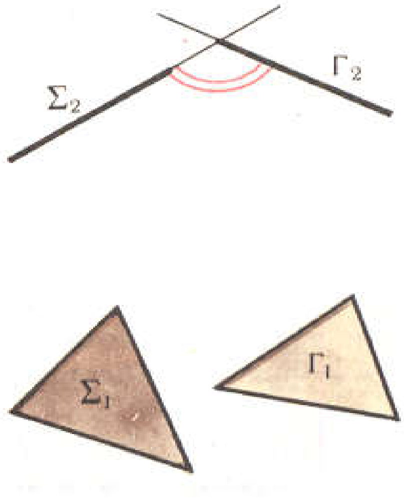


Рис.1.39 відстань між паралельними вертикальними площинами *Θ* і *Φ*

Кут між двома площинами (двогранний кут) проектується в натуральну величину на горизонтальній проекції, якщо площини вертикальні, і на фронтальній, якщо площини фронтально- проектуючі.

На рис. 1.40 показано дві фронтально-проектуючі площини, кут між якими проектується без спотворення на фронтальну проекцію.



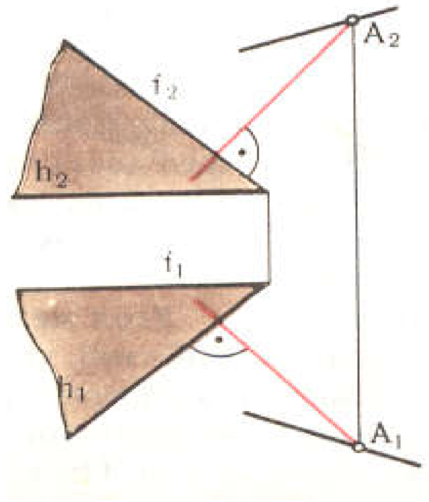


Рис. 1.40 Рис. 1.41

Проведемо площину, перпендикулярну до заданої, використовуючи властивість, розглянуту в п.3 і що стосується проведення перпендикуляра до площини. На рис. 1.41 площину задано горизонталлю h і фронталлю f. Через точку A до цієї площини проведений перпендикуляр. Якщо через точку A провести довільну пряму, то вона разом з перпендикуляром задасть площину, перпендикулярну до заданої. Оскільки пряма проводиться довільно, таких площин — незліченна множина.

Сформулюємо властивість: площина перпендикулярна до іншої площини, якщо вона містить перпендикуляр до неї

1.3.6. Побудова проекцій відстаней і кутів між геометричними фігурами.

Як вже було сказано, визначення відстаней і кутів між геометричними фігурами відноситься до метричних задач.

В даному параграфі розглянемо побудову проекцій шуканих відстаней і кутів без визначення їх натуральних величин.

Відстань від точки до прямої. Для визначення проекції відстані від точки A до прямої загального положення m (рис. 1.42) через точку A проведемо площину, перпендикулярну до прямої, знайдемо точку перетину прямої з цією площиною і з'єднаємо знайдену точку з точкою A. Отриманий відрізок шуканий.

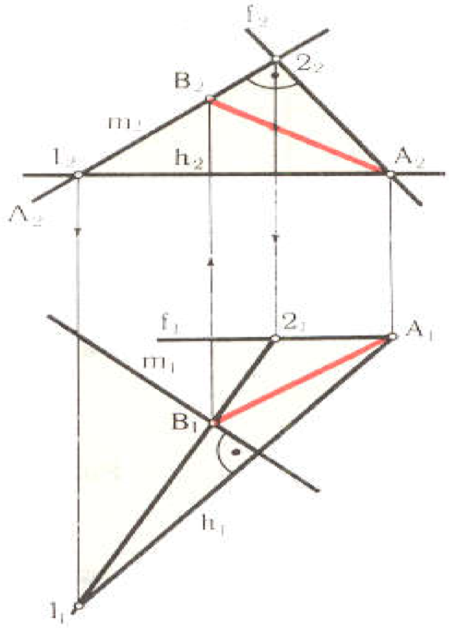


Рис. 1.42

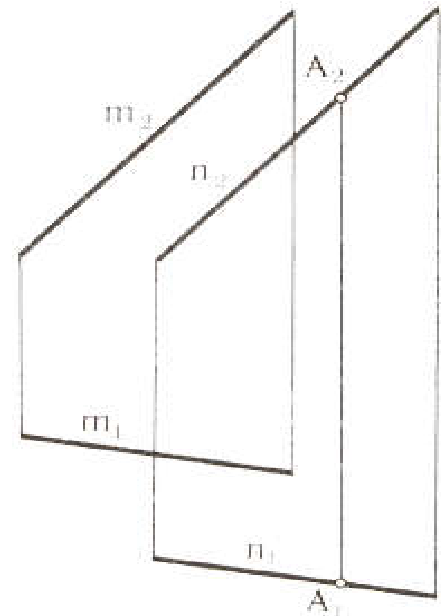


Рис. 1.43

Площину задамо горизонталлю *h* і фронталлю *f*, при цьому на полі $П_1$ горизонтальна проекція горизонталі перпендикулярна до m_1, а на $П_2$ фронтальна проекція фронталі перпендикулярна до m_2.

Для знаходження точки перетину прямої m_2 з площиною скористаємося січною фронтально-проектуючою площиною $Λ$, що проходить через *m*, яка перетне площину по прямій $1_2 2_2$. Перетином горизонтальної проекції $2_1 1_1$ з m_1 визначають шукану точку *B*. Відрізок *AB* є проекцією відстані від точки до прямої:

$$Λ_2 \supset m_2;\ 1_2 2_2 \equiv m_2;\ 1_1 2_1 \times m_1 = B_1.$$

Відстань між паралельними прямими. Якщо на одній з прямих узяти довільну точку, наприклад *A*, то ця задача може бути зведена до попередньої, тобто до визначення відстані від точки до прямої (рис. 1.43).

Відстань від точки до площини. Для визначення відстані від точки до площини необхідно з точки опустити перпендикуляр на площину і знайти його основу. На рис. 1.44 показаний трикутний відсік, сторона *AC* якого — горизонталь, а сторона *AB* — фронталь. З точки *D* проведені проекції перпендикуляра *n,* його горизонтальна проекція перпендикулярна до горизонталі на $П_1$, а фронтальна проекція перпендикулярна до фронталі на $П_2$. Основа перпендикуляра визначена за допомогою січної горизонтально-проектуючої площини *Г*, яка перетне відсік по прямій *1—2.* Основа перпендикуляра — точка *E, а* проекції відстані від точки до площини — D_1E_1 і D_2E_2:

$$Г_1 \supset n_1;\ 1_1 2_1 \equiv n_1;\ 1_2 2_2 \times n_2 = E_2.$$

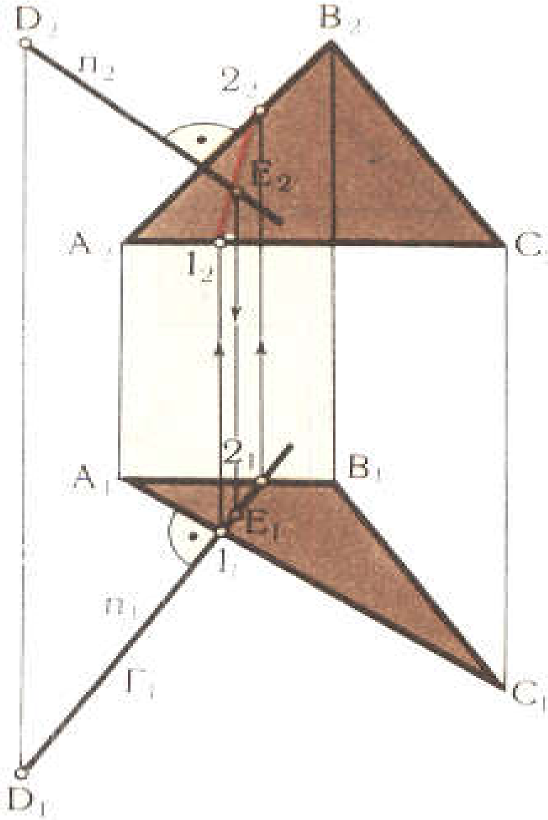


Рис. 1.44 Трикутний відсік

Відстань від прямої до паралельної їй площини, відстань між паралельними площинами. Обидві ці задачі зводяться до попередньої, якщо на прямій або в площині узяти точку і визначити відстань від неї до площини. Відрізок перпендикуляра і буде шуканою відстанню.

Відстань між прямими, що схрещуються. Відомо (див. п.2), що відстань між прямими, що схрещуються, дорівнює відстані між їх площинами, паралельними площині паралелізму.

Звідси наступний алгоритм визначення відстані. Через одну з прямих проводиться площина, паралельна площині паралелізму, для чого достатньо через довільну точку однієї прямої провести пряму, паралельну іншій прямій. І якщо на цій іншій прямій узяти довільну точку, задача зводиться до розглянутої вище задачі по визначенню відстані від точки до площини (рис. 1.46):

$$A \in m;\ \ A_1B_1 \,||\, n_1;\ \ A_2B_2 \,||\, n_2.$$

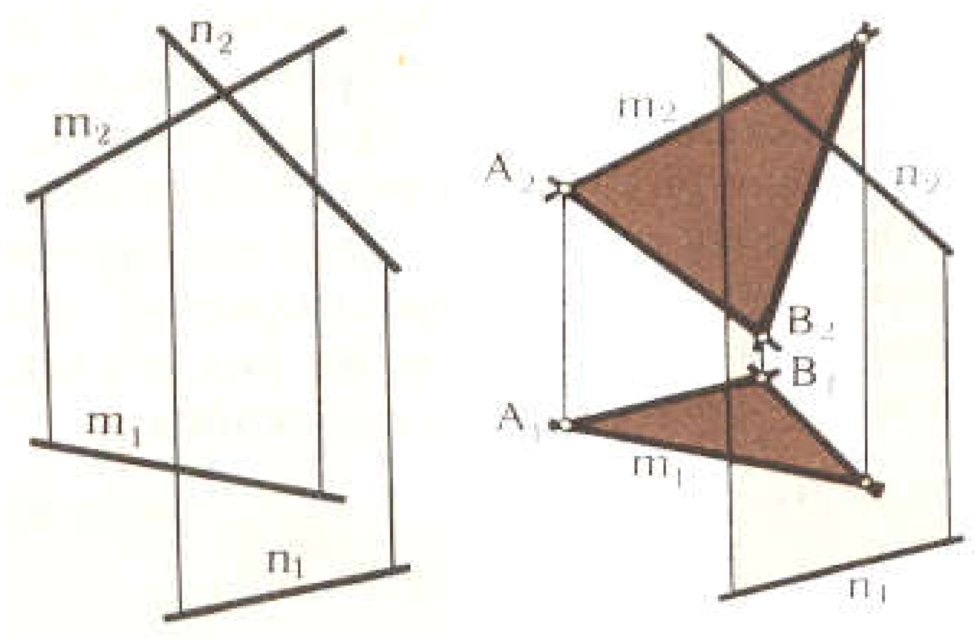


Рис. 1.45 Відстань між прямими, що схрещуються

Кут між прямими, що схрещуються, вимірюється кутом перетину, для чого достатньо через довільну точку однієї з прямих, що схрещуються, провести пряму, паралельну другій прямій.

Кут між прямою і площиною. Як відомо, кут між прямою і площиною вимірюється кутом між прямою і її прямокутною проекцією на дану площину. Звідси можливий прямий шлях побудови цього кута, для чого необхідно через пряму провести площину, перпендикулярну до даної площини. Лінія їх перетину і є проекція прямої на цю площину.

Оскільки отриманий при цьому трикутник *ABC* (рис. 1.46) прямокутний, сума кутів при вершинах *A* і *B* завжди рівна 90°.

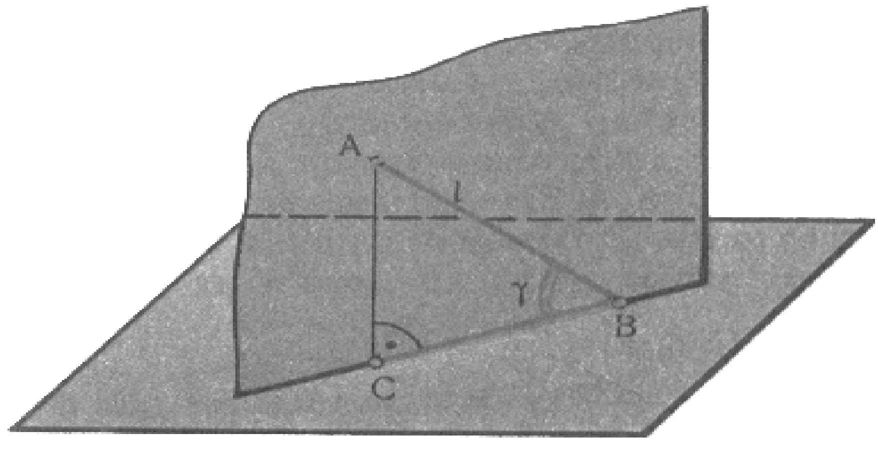


Рис. 1.46 Кут між прямою і площиною

Звідси можливий більш простий спосіб визначення кута між прямою і площиною: достатньо з точки, що належить прямої, опустити перпендикуляр на площину. Отриманий при цьому кут доповнить шуканий до прямого кута (рис. 1.47):

$$A \in l;\ n \supset A;\ n_2 \perp f_2;\ n_1 \perp h_1.$$

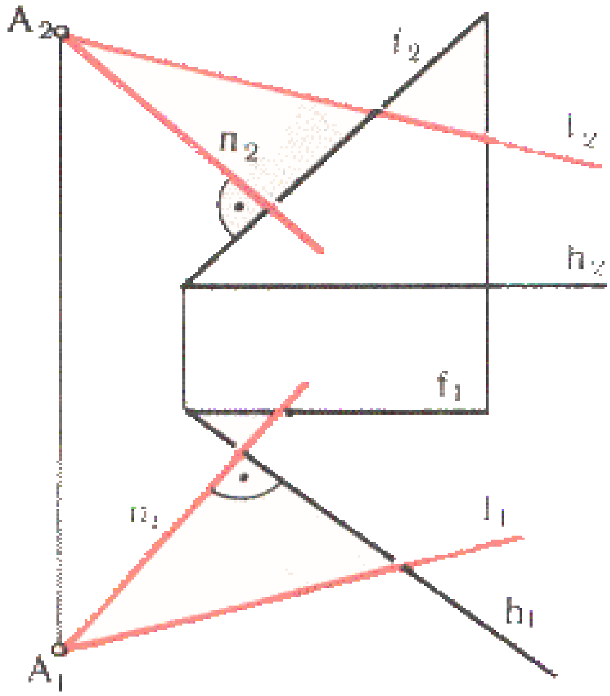


Рис. 1.47 Кут між прямою і площиною

Кут між двома площинами. Для визначення двогранного кута знаходять лінію перетину двох площин (ребро двогранного кута). Перпендикулярно до цього ребра проводять площину, яка перетне двогранний кут по шуканому лінійному куту.

Можливий інший, більш простий шлях: достатньо взяти до уваги, що кут між площинами рівний куту між перпендикулярами до них, проведеними з довільної точки.

На рис. 1.48 показано дві площини Φ і Ω. Для визначення двогранного кута в просторі узята довільна точка A і з неї опущені перпендикуляри на обидві площини:

$$n \supset A;\ n_2 \perp B_2C_2;\ n_1 \perp A_1C_1;\ m \supset A;$$
$$m_2 \perp D_2E_2;\ m_1 \perp D_1F_1.$$

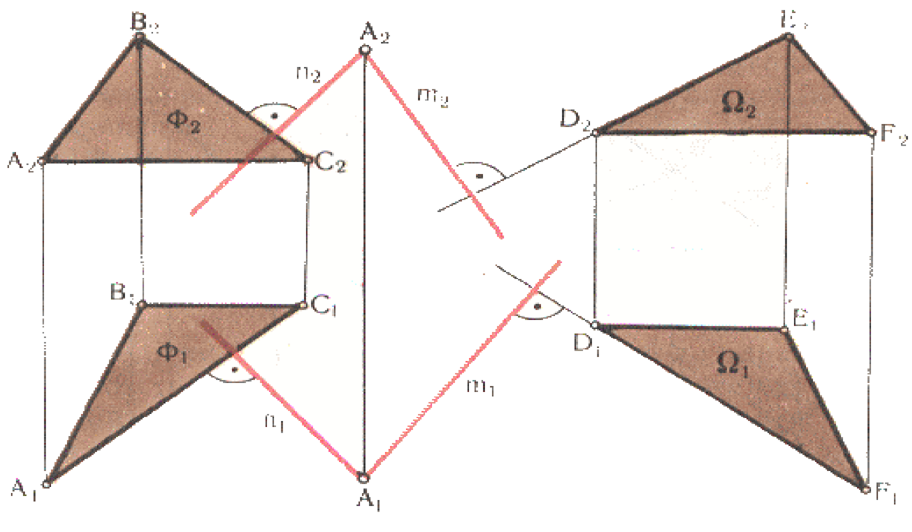


Рис. 1.48 Площини Φ і Ω

1.4. Способи перетворення проекцій.

Існують різноманітні способи перетворення. Розглянемо два, які найбільш часто використовуються в практиці:

1.Зміна положення геометричного образу по відношенню до площин проекцій (обертання навколо проектуючих прямих і прямих рівня).

2. Зміна положення площин проекцій по відношенню до геометричного образу(заміна площин проекцій).

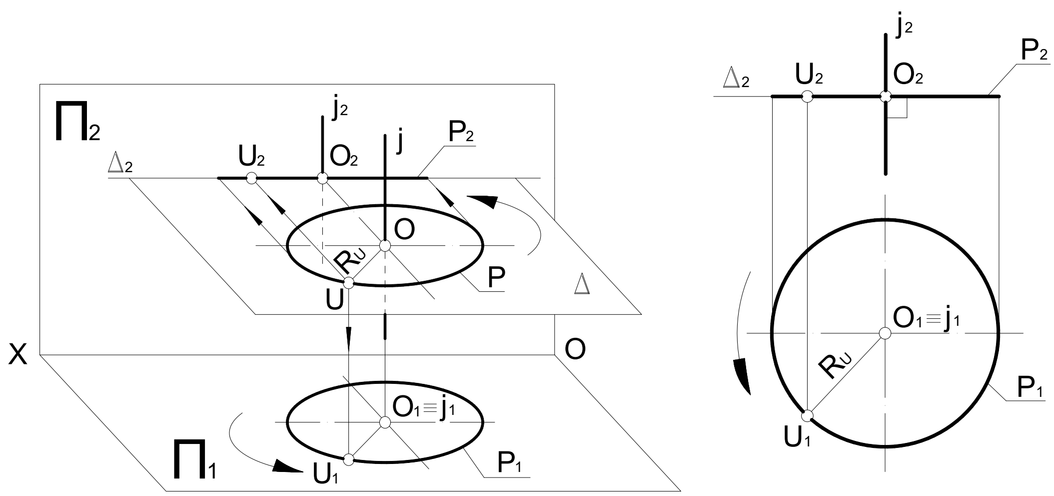
1.4.1. Обертання навколо проектуючих прямих.

Обертання широко використовується в інженерної практиці при дослідженні траєкторії точок елементів механізмів та машин, які обертаються. Головне в процесі обертання при вивченні його на кресленні – це чітке уявлення траєкторії руху точки в просторі і в проекціях. Кожному відомо, що траєкторія точки , яка обертається навколо нерухомої осі, є окружність.

І якщо вісь обертання перпендикулярна одній з площин проекцій, тобто являється проектуючою прямою, то траєкторія точки, що обертається, буде знаходиться в відповідній площині рівня.

На рис. 1.49 вісь обертання *i* являється горизонтально-проектуючою прямою, а траєкторія-коло p точки U разом з її центром обертання O належить горизонтальній площині рівня Δ. Радіусом обертання точки U являється відрізок OU ,тобто $R_v = OU$.

Спроектуємо ортогонально траєкторію повного оберта точки U на площини проекцій Π_2 і Π_1. В результаті на комплексному кресленні (рис. 1.49, б) фронтальна проекція траєкторії p представляє собою горизонтальний відрізок прямої p_2 , по довжині рівний діаметру, а горизонтальна проекція p_1 - коло p в натуральну величину.



а б

Рис. 1.49 Вісь обертання *i*

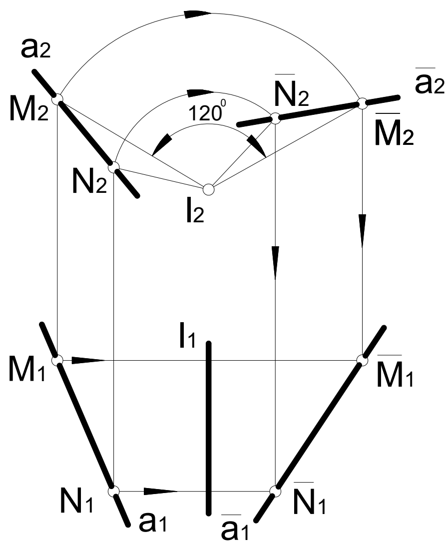
При повороті точки або іншого геометричного образу на потрібний кут необхідно вказувати напрям повороту, інакше задача буде мати два рішення.

Наприклад, на рис. 1.49 задана точка T повернута навколо профільно-проектуючої вісі i на кут 60^0 по руху часової стрілки (якщо дивитися на площину Π_3 в напряму вісі i).

Спочатку в усіх трьох проекціях намічається траєкторія точки T, яка обертається. Вона знаходиться в профільній площині рівня θ, на горизонтальній і фронтальній проекціях співпадає з вертикальною лінією зв'язку , а на профільній зображається в натуральну величину, тобто дугою окружності радіусом $R_T = i_3 T_3$.

Залишається повернути на потрібний кут в вказаному напрямі радіус R_T і зафіксувати нове положення точки T, яке відмічається однією горизонтальною рискою над літерним позначенням, тобто

$\bar{T}_3$



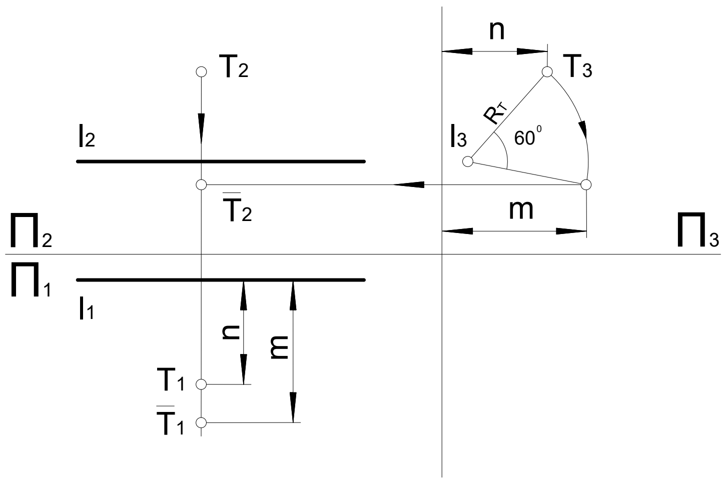


Рис.1.50

Потім по законам побудови профільної проекції визначаємо інші проекції $\bar{T}_2$ і $\bar{T}_1$ нового положення точки T після її повороту на кут 60^0.

Для повороту прямої на потрібний кут достатньо повернути на цей кут кожну з її двох точок. На рис. 1.50 пряма a повернута на кут 120^0 по руху годинникової стрілки навколо фронтально-проектуючої прямої i . Тут також необхідно Рис. 1.50 починати з нанесення в тонких лініях траєкторій обертання точок M і N, які знаходяться в фронтальних площинах рівня Λ і Р.

Значить, в горизонтальній проекції це будуть горизонтальні прямі, а в фронтальній – дуги окружності.

Повернувши кожен з радіусів R_M і R_N на кут 120^0 в заданому напрямі, фіксуємо нові положення $\bar{M}_2$ і $\bar{N}_2$ точок M і N, а потім за допомогою ліній зв'язку визначаємо проекції $\bar{M}_1$ і $\bar{N}_1$. З'єднавши нові однойменні проекції точок прямими лініями, отримаємо проекції $\bar{a}_2$ і $\bar{a}_1$ нового положення прямої a, повернутої на кут 120^0.

Для повороту площини на потрібний кут необхідно повернути на цей кут три її точки, які не лежать на одній прямій.

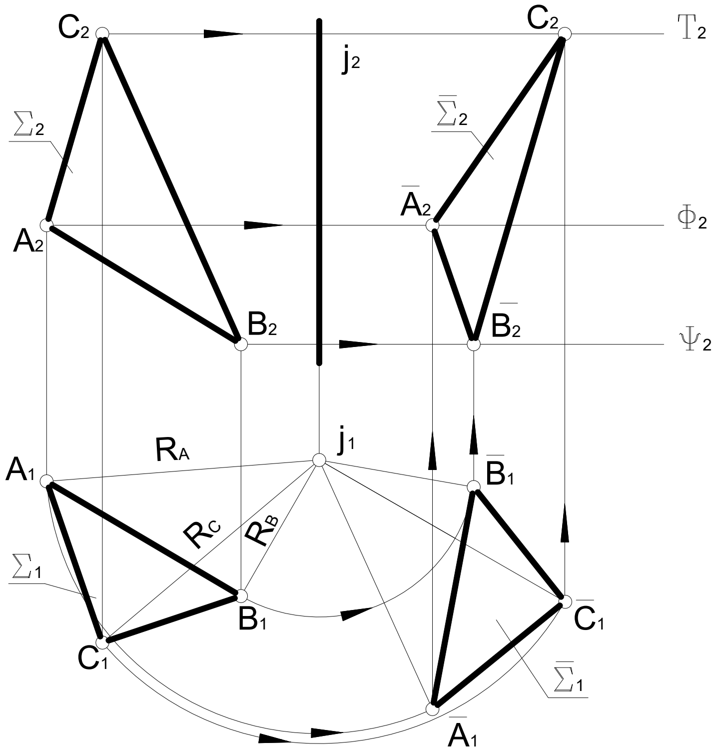
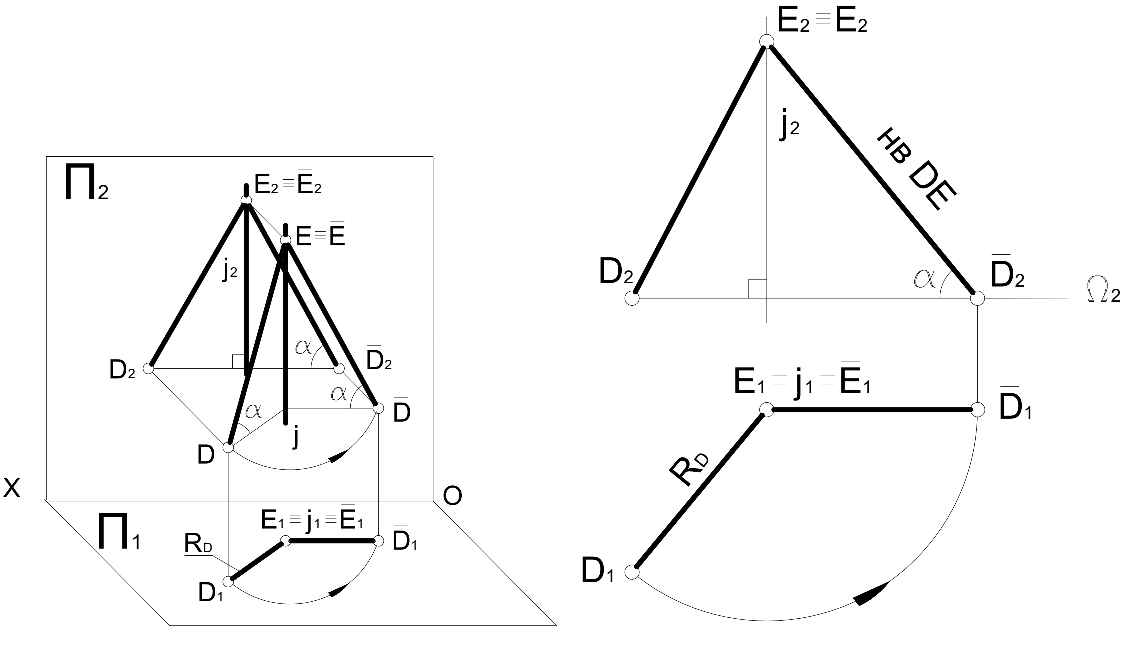


Рис. 1.51 Площина Σ

На рис. 1.51 площина Σ, задана трикутним відсіком ABC, повернута на кут 90^0 проти руху годинникової стрілки навколо горизонтально-проектуючої вісі i. Попередніх прикладів достатньо , щоб зрозуміти хід розв'язання цієї задачі.

Тепер використаємо обертання для визначення натуральної величини відрізку прямої загального положення. Спочатку звернемося до просторової моделі задачі (рис. 1.52, а).

Щоб відрізок DE зпроектувався в натуральну величину, його необхідно повернути до положення прямої рівня – горизонталі або фронталі. Для зручності розв'язання задачі проведемо вісь обертання через один із кінців відрізку (наприклад, через точку E). Хай віссю обертання буде горизонтально-проектуюча пряма i. Повернувши відрізок DE навколо вісі i до положення фронталі $\bar{D}\bar{E}$ і спроектувавши його ортогонально на площину Π_2, отримаємо натуральну величину відрізку DE. І так як під час руху відрізку DE навколо вісі i кут α нахилу до площини Π_1 не мінявся, то одночасно отримуємо його натуральну величину.



а б

Рис. 1.52 Просторова модель задачі

На комплексному кресленні (рис. 1.53, б) спочатку намічаємо траєкторію обертання точки D. Радіусом обертання точки D є сама горизонтальна проекція D_1E_1 відрізку.

Щоб відрізок зайняв положення фронталі, треба його горизонтальну проекцію повернути до горизонтального положення. Точка D при цьому оберталася в горизонтальній площині рівня Ω. За допомогою ліній зв'язку визначаємо проекцію D_2 нового положення точки D. Точка E не змінила свого положення, так як вона знаходиться на вісі обертання i. З'єднуємо її прямою лінією з новим положенням точки D.

Таким чином, ми перетворили креслення, тобто отримали нові, додаткові до основних проекції $\bar{D}_1\bar{E}_1$ і $\bar{D}_2\bar{E}_2$ відрізку, які утворюють нове комплексне креслення. На цьому кресленні пряма DE загального положення стала прямою рівня. Значить, нова проекція $\bar{D}_2\bar{E}_2$ визначає натуральну величину відрізку DE, а кут α - натуральну величину кута нахилу відрізка DE до горизонтальної площини проекцій Π_1. Раніше ці параметри прямої загального положення ми визначали способом прямокутного трикутника.

1.4.2. Плоскопаралельне переміщення.

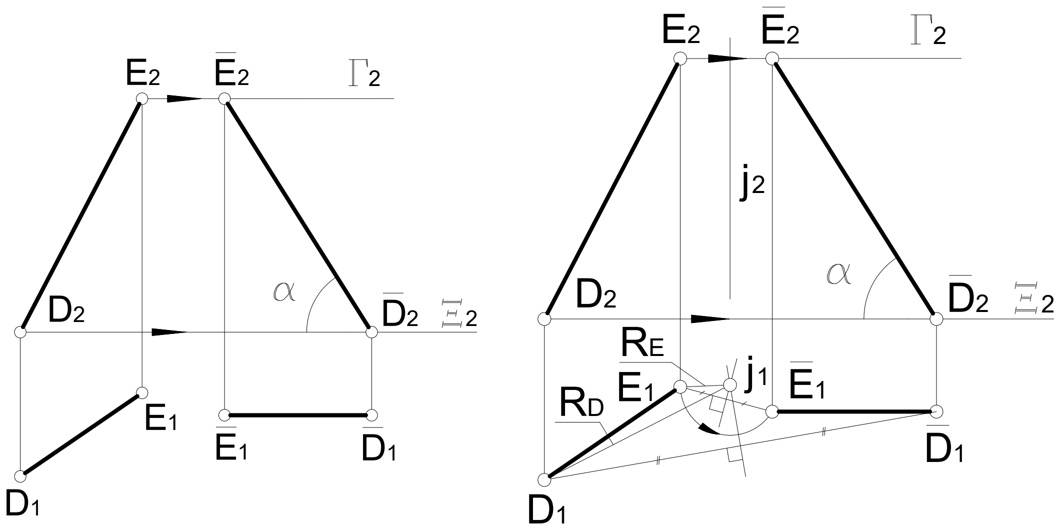
Перетворення креслення обертанням геометричних об'єктів з вказівкою проектуючих осей має суттєву незручність, яка заключається в тому, що нові, додаткові проекції або примикають до основних, або налягають на них. Це затрудняє як сам процес розв'язання задачі, так і читання вже розв'язаних задач. Цю незручність усуває так назване плоско паралельне переміщення. Сама назва цього способу перетворення пояснює, що переміщення елементів геометричних образів проходить в паралельних площинах.

Повернемося до рис. 1.52, б і звернемо увагу на наступне. Горизонтальна проекція $\bar{D}_1\bar{E}_1$ відрізку DE при його обертанні навколо вертикальної вісі не змінюється по довжині, так як не змінюється кут α нахилу відрізка до площини проекцій Π_1 (рис. 1.52, а).

Використовуючи цю особливість, спробуємо друге положення горизонтальної проекції відрізку (після його повороту) зразу помістити в любому вільному полі креслення, не міняючи довжини проекції, тобто $\bar{D}_1\bar{E}_1 = D_1E_1$ (рис. 1.53, а).

Це значить, що відбулося таке переміщення відрізку DE в його нове положення $\bar{D}\bar{E}$, при якому кут α його нахилу до площини Π_1 не мінявся , а точки D і E переміщувались відповідно в паралельних площинах рівня Ξ і Γ(горизонтальних). За допомогою ліній зв'язку будуємо фронтальну проекцію $\bar{D}_2\bar{E}_2$ нового положення відрізку DE.

Таким чином, перетворення креслення здійснено способом плоско паралельного переміщення. Тут відбулося обертання відрізку навколо відсутньої на кресленні вертикальної вісі ("неявної " вісі).



а б

Рис. 1.53 Горизонтальна проекція відрізку

При бажанні можна визначити положення цієї "неявної" вісі обертання, а також вказати горизонтальну проекцію дуг кіл, по яким переміщалися точки D і E (рис. 1.53, б). З'єднавши однойменні горизонтальні проекції точок прямими і побудувавши до середини відрізків $D_1\bar{D}_1$ і $E_1\bar{E}_1$ перпендикуляри, ми знаходимо в точці i_1 їх перетину проекцію тій самої “неявної” вісі обертання, навколо якої відбулося обертання відрізку DE .Тепер, маючи радіуси обертання R_D і R_E точок D і E , можемо побудувати горизонтальні проекції траєкторій-дуг точок, які обертаються.

Але необхідності в таких побудовах немає. Треба тільки зрозуміти, що плоско паралельне переміщення є обертання навколо проектуючої прямої , яка не вказана на кресленні. І головне тут – тільки результат руху, а не сам процес безперервної зміни геометричного образу в просторі.

Такий вид обертання цікавить тим, що дає можливість в процесі перетворення відділити нове комплексне креслення від старого, основного. Зменшується також кількість ліній на кресленні (відсутні вісі обертання і проекції-дуги). Все це робить креслення більш чітким та зрозумілим.

В основі розв’язання багатьох задач нарисної геометрії знаходяться наступні чотири задачі перетворення креслення.

1.Перетворення прямої загального положення в пряму рівня.

2. Перетворення прямої рівня в проектуючи пряму.

3.Перетворення площини загального положення в проектуючи площину.

4.Перетворення проектуючої площини в площину рівня.

Першу основну задачу перетворення ми вже розв’язали (див. рис. 1.55), тобто способом плоско паралельного переміщення перетворили пряму загального положення в пряму рівня – фронталь.

Переходимо до розв’язання другої основної перетворення прямої рівня в проектуючи пряму. Розв’яжемо цю задачу як продовження попередньої. В подальшому буде часто виникати необхідність в об’єднанні цих двох задач (при перетворенні прямої загального положення в проектуючи пряму).

Щоб пряма рівня стала на новому комплексному кресленні проектуючою прямою, треба її проекцію – натуральну величину - розташувати вертикально.

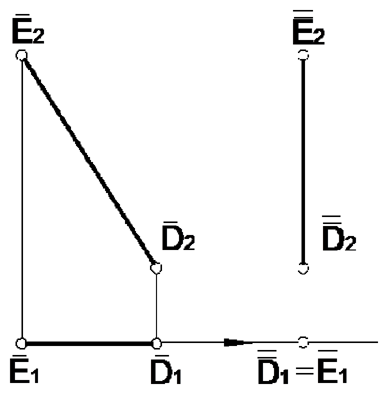


Рис.1.54 фронталь $\bar{D}\bar{E}$

На рис. 1.54 маємо фронталь $\bar{D}\bar{E}$ в її початковому положенні. Не змінюючи довжини проекції $\bar{D}_2\bar{E}_2$, розташовуємо її вертикально в вільному полі креслення. Нове положення відрізку відмічають дві горизонтальні риски над їх літерним позначенням ($\bar{\bar{D}}_2\bar{\bar{E}}_2$).

Обидва кінця відрізку, тобто точки $\bar{D}$ і $\bar{E}$, переміщувались в одній фронтальній площині рівня Δ, а "неявною " віссю обертання була фронтально-проектуюча пряма. Її місце розташування і фронтальні проекції траєкторій-дуг нас не цікавлять. За допомогою ліній зв'язку визначаємо нову горизонтальну проекцію $\bar{\bar{D}}_1\bar{\bar{E}}_1$ відрізку, яка зображається точкою $\bar{\bar{D}}_1 \equiv \bar{\bar{E}}_1$.

Таким чином, в результаті перетворення (плоско паралельного переміщення) ми отримали нове комплексне креслення, на якому пряма рівня стала проектуючою прямою.

Третя основна задача полягає в перетворенні площини загального положення в проектуючи площину.

Перетворюючи пряму рівня деякої площини в проектуючу пряму, ми тим самим перетворюємо в проектуючу і саму площину (рис. 1.55).

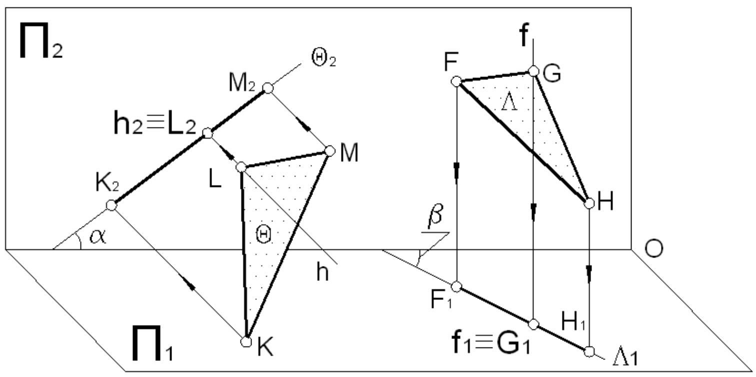


Рис. 1.55 Проекція прямої

Почнемо з горизонталі. На комплексному кресленні (рис.1.57) задана площина загального положення θ своїм трикутним відсіком *NPQ*. Побудуємо в ній горизонталь *h* і приведемо горизонтальну проекцію відсіку, не міняючи його форму та розміри, в таке положення, щоб проекція – натуральна величина *h* його горизонталі стала вертикальною. Тому і почнемо побудову з горизонталі. На вільному полі креслення будуємо нове положення горизонталі – вертикальну пряму $\bar{h}_1$, а потім за допомогою засічок із точок *Q* і *O* будуємо вершини *N* і *P* відсіку таким чином, щоб нова проекція $\bar{N}_1\bar{P}_1\bar{Q}_1$ залишилася рівною проекції $N_1 P_1 Q_1$ початкового положення відсіку.

При цьому точки N, Q , P (вершини відсіку) переміщалися в відповідних площинах рівня Σ, Φ, T. За допомогою ліній зв'язку визначаємо нову фронтальну проекцію $\bar{N}_2 \bar{P}_2 \bar{Q}_2$ відсіку. Вона повинна бути прямою лінією. В результаті отримуємо нове комплексне креслення, на якому площина загального положення θ стала фронтально-проектуючою.

Так як кут α нахилу площини θ до площини проекцій Π_1 (див. рис. 1.56) при переміщенні, тобто обертанні навколо "неявної" горизонтально-проектуючої вісі, залишався незмінним, можна стверджувати, що даним перетворенням ми визначили натуральну величину цього кута.

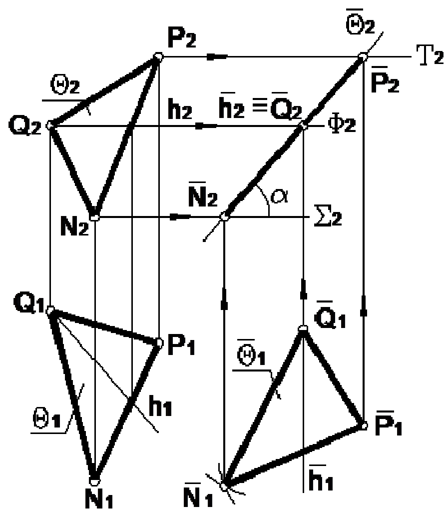


Рис.1.56. Фронтально-проектуюча площина θ

ЛІТЕРАТУРА

1. Bethune J., Byrnes D. Engineering Graphics with AutoCAD 2023. Peachpit Press, 2022. 832 p.

2. Jim Bethune, David Byrnes. Engineering Graphics with AutoCAD 2023 1st. Peachpit Press. 2022. 792 p.

3. Бенке Й. З. Збірник тестів з інженерної графіки. Технічне креслення : навчальний посібник. Київ : Кондор, 2024. 184 с.

4. Браілов О.Ю. Інженерна геометрія. Підручн. 2023 р. 516 с.

5. Веселовська Г.В. Комп’ютерна графіка. Навч. пос. 2024 р. 584 с.

6. Інженерна графіка : навчальний посібник / уклад. В. І. Ковбашин, А. І. Пік. Тернопіль : Підручники і посібники, 2023. 240 с.

7. Інженерна та комп’ютерна графіка: практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища : навч. посіб. / [Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко та ін.] ; за ред. Професора Д. В. Бабенка. – Миколаїв : МНАУ, 2020. – 256 с.

8. Інженерна та комп’ютерна графіка: практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища: навч. посіб. / Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко, С. М. Степанов. Миколаїв: МНАУ, 2020. 256 с. URL: http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/8072

9. Інженерна та комп'ютерна графіка. Частина 1 [Електронний ресурс] : навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за інженерними спеціальностями / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: С. В. Залевський, О. П. Колосова, М. П. Волоха. – Електрон. текст. дані (1 файл: 7,05 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2025. 113 с.

10. Козяр М.М., Стрілець О.Р., Сафоник А.П. Інженерна графіка. Машинобудівне креслення. Монографія. 2024 р. 476 с.

11. Козяр М.М., Фещук Ю.В. Комп’ютерна графіка: AutoCAD. Стереотипне видання. Навч. посіб. 2025 р. 304 с.

12. Колосова О. П., Баскова Г. В., Лазарчук М. В. Навчальні завдання з нарисної геометрії, інженерної та комп’ютерної графіки для програмованого навчання : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 94 с.

13. Костюкова Т. І. Інженерна графіка: практикум : навчальний посібник. Львів : Новий Світ–2000, 2025. 365 с.

14. Крівцов В.В., Козяр М.М., Полінчук А.Е. Розв’язування задач підвищеної складності з нарисної геометрії. Стереотипне видання. Навч. посіб. 2025 р. 224 с.

15. Надкернична Т. М., Лебедєва О. О. Курс комп’ютерної графіки в середовищі AutoCAD. Теорія. Приклади. Завдання : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. 191 с.

16. Основи інженерної графіки з елементами професійного конструювання. Підручник. З електронною версією на CD. За ред. доц.Чермних І. О. 2024 р. 240 с.

17. Основи інженерної графіки з елементами професійного конструювання: підручник / за ред. І. О. Чермних. Київ: Кондор, 2020. 240 с.

18. Пустюльга С. І., Самчук В. П., Воробчук М. С. Інженерна та комп’ютерна графіка : навчальний посібник. Луцьк : Просто Друк, 2024. 324 с.

Навчально-методичне видання

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП`ЮТЕРНА ГРАФІКА

Модуль №1 «Нарисна геометрія»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

для виконання практичних і самостійних робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності H7 «Агроінженерія» денної і заочної форм здобуття вищої освіти

Укладачі:

Полянський Павло Миколайович

Степанов Сергій Миколайович

Комочкін Микола Сергійович

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 3.0
Тираж 30. Зам. № ___.

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету.
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9.

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК №4490 від 20.02.2013 р.