МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Інженерно-енергетичний
факультет
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 1:

курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності Н7 «Агроінженерія» денної та заочної форм здобуття вищої освіти

Миколаїв
2026

УДК 539.3(075.8)
М55

Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 20.10.26, протокол №2.

Укладачі:

Д. В. Бабенко – канд.техн. наук, професор, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет

Н. А. Доценко – д-р. пед. наук, канд.техн. наук, професор, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет

Рецензенти:

В. М. Зубко – д-р техн.наук, професор, професор кафедри механічної та електричної інженерії, Полтавський державний аграрний університет

О. С. Садовий – канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри агроінженерії, Миколаївський національний аграрний університет

© Миколаївський національний аграрний університет, 2026
© Доценко Н. А., 2026

Зміст

Лекція 1. Предмет і завдання курсу. Навантаження, розрахункові схеми та об’єкти вивчення 6
1.1. Завдання курсу «Механіки матеріалів і конструкцій» і його значення для інженерної освіти. Основні гіпотези та принципи в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій» 6
1.2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему 8
1.3. Об’єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій» 9
1.4. Основні властивості твердого деформованого тіла 11
Лекція 2. Гіпотези курсу, внутрішні зусилля та прості деформації стрижня. Напруження і деформації в точці 13
2.1. Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій» 13
2.2. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів ... 16
2.3. Види простих деформацій стрижня 17
2.4. Поняття про напруження та деформацію в точці 20
Лекція 3. Геометричні характеристики плоских перерізів 24
3.1. Загальні поняття 24
3.2. Моменти інерції простих фігур 26
3.3. Моменти інерції відносно паралельних осей 29
3.4. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей 31
3.5. Головні осі та головні моменти інерції 32
3.6. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості 33
Лекція 4. Центральний розтяг і стиск: поздовжні сили, напруження, деформації та переміщення 36
4.1. Поздовжні сили та їх епюри. Диференціальні залежності між навантаженням та поздовжньою силою 36
4.2. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску 38
4.3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень 41
4.4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня 43
Лекція 5. Механічні властивості матеріалів 46
5.1. Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в’язкості 46
5.2. Дійсна діаграма розтягу 49

5.3. Випробування матеріалів на стиск 50
5.4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів 52
5.5. Потенційна енергія при розтязі-стиску 53
Лекція 6. Розрахунок стрижнів при центральному розтягу-стиску 55
6.1. Перевірка міцності та визначення необхідних розмірів стрижня при розтязі-стиску 55
6.2. Статично-невизначенні системи (СНС) при розтягу- стиску 58
6.3. Вплив неточності виготовлення деталей і температури на величини зусиль у них 61
Лекція 7. Напружений стан у точці 65
7.1. Напружений стан в точці 65
7.2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані (ПНС) 68
7.3. Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані 68
7.4. Головні напруження та головні площини 71
7.5. Екстремальні дотичні напруження 72
7.6. Коло Мора 75
Лекція 8. Деформований стан у точці. Узагальнений закон Гука 77
8.1. Головні деформації 77
8.2. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці 80
8.3. Узагальнений закон Гука при об’ємному та плоскому напружених станах 82
8.4. Питома потенціальна енергія при об’ємному напруженому стані 87
Лекція 9. Теорії міцності 88
9.1. Загальні поняття про теорії міцності 88
9.2. І теорія міцності 90
9.3. ІІ теорія міцності 90
9.4. ІІІ теорія міцності 92
9.5. IV енергетична теорія міцності 92
9.6. Теорія міцності граничних напружених станів 94
9.7. Поняття про нові теорії міцності 95
Лекція 10. Зсув 97
10.1. Поняття про чистий зсув 97
10.2. Закон Гука при чистому зсуві 99

10.3. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві..... 101
10.4. Потенціальна енергія при чистому зсуві 102
10.5. Практичний розрахунок з'єднань, що працюють на зсув..... 103
Лекція 11. Кручення 107
11.1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр 107
11.2. Напруження та деформації при крученні круглого валу 109
11.3. Потенціальна енергія при крученні круглого валу..... 114
11.4. Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу..... 114
Лекція 12. Плоский згин: опори, балки, внутрішні зусилля та епюри 117
12.1. Основні типи опорних в'язей. Визначення опорних реакцій... 117
12.2. Внутрішні сили при згині. Диференційні залежності між M_X, Q_y та q . Правила спрощеної побудови епюр M_X та Q_y 119
12.3. Приклади побудови епюр M_X і Q_y 123
Лекція 13. Чистий згин..... 129
13.1. Загальні поняття про чистий згин..... 129
13.2. Визначення нормальних напружень при чистому згині... 130
13.3. Приклад чистого згину 134
Лекція 14. Поперечний згин. Центр згину..... 136
14.1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині. 136
14.2. Поняття про центр згину 144
Лекція 15. Міцність балок при згині. Метод початкових параметрів 147
15.1. Аналіз напруженого стану при згині..... 147
15.2. Перевірка міцності балок при згині..... 151
15.3. Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності..... 153
15.4. Приклади вирішення задач..... 156
Список використаних джерел: 159

Лекція 1. Предмет і завдання курсу. Навантаження, розрахункові схеми та об’єкти вивчення

Мета лекції. Після вивчення лекції слід ознайомитися з предметом механіки матеріалів і конструкцій, вимогами до надійності (міцність, жорсткість, стійкість), класифікацією навантажень, поняттям розрахункової схеми та основними властивостями твердого деформованого тіла.

План лекції

1.1. Завдання курсу «Механіки матеріалів і конструкцій» і його значення для інженерної освіти. Коротка історична довідка. Основні гіпотези та принципи в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

1.2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему

1.3. Об’єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

1.4. Основні властивості твердого деформованого тіла

Ключові поняття. міцність, жорсткість, стійкість, надійність, навантаження, розрахункова схема, стрижень, пластина, оболонка, масивне тіло, пружність, пластичність, повзучість, релаксація.

1.1. Завдання курсу «Механіки матеріалів і конструкцій» і його значення для інженерної освіти. Основні гіпотези та принципи в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

Підрозділ задає рамки всього курсу: інженер має підібрати раціональну форму та розміри елементів так, щоб конструкція була надійною за міцністю, жорсткістю й стійкістю, але не надто важкою та дорогою. Просте збільшення розмірів не завжди допомагає, бо зростають власна вага та сили інерції. Історична довідка показує, що основи науки закладено дослідами Галілея, законом Гука та працями багатьох учених.

Дисципліну Механіка матеріалів і конструкцій (ММіК) називають «абеткою» інженера, необхідною для формування інженерної думки майбутнього фахівця технічних спеціальностей.

Під час проектування інженерних об’єктів до них висувається вимога надійності, що передбачає виконання умов міцності, жорсткості та стійкості.

ММіК – це наука про інженерні методи розрахунку деталей машин та елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

Міцність – це здатність конструкції, її частин та деталей витримувати зовнішні навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням відносно деформацій.

Стійкість – це здатність конструкцій витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги.

Завдання інженера: для того, щоб конструкція у цілому відповідала вимогам надійності, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми, і знаючи властивості матеріалу, з якого вона буде виготовлятися, визначити відповідні розміри залежно від величини і характеру сил, що діють на неї. На перший погляд може здаватися, що для надійності конструкції достатньо збільшити розміри. Дійсно, інколи це призводить до бажаного результату. Але у тих випадках, коли власна вага складає суттєву частину діючих на конструкцію навантажень, збільшення розмірів її елементів, а значить і ваги, не призведе до підвищення міцності. Збільшення розмірів деталей механізмів, які рухаються, призводить до збільшення сил інерції, підвищує навантаження, що є небажаним. З іншого боку, збільшення розмірів конструкції – це збільшення її вартості.

Тому завдання інженерних розрахунків полягає в тому, щоб при менших витратах матеріалу забезпечити більшу надійність конструкції. Взагалі наука базується на теоретично-експериментальних засадах. У теоретичній частині наука базується на теоретичній механіці і математиці, а в експериментальній – на фізиці й матеріалознавстві.

Виникнення науки ММіК пов’язують з ім'ям видатного італійського вченого Галілео Галілея (1564–1642), який проводив досліди щодо вивчення міцності, хоча джерела цієї науки ми бачимо вже в твореннях великого Леонардо да Вінчі. У 1678 р. англійський вчений Роберт Гук (1635 – 1703) установив закон деформування пружних тіл, за яким деформація пружного тіла пропорційна діючому на нього зусиллю. Цей закон є основним у теорії ММіК.

1.2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему

Реальну конструкцію неможливо розраховувати з усіма деталями, тому її замінюють розрахунковою схемою – спрощеною моделлю, у якій враховано лише суттєві фактори. Навантаження класифікують за способом прикладання (зосереджені та розподілені), за характером зміни в часі (статичні й динамічні) і за тривалістю дії; від цього залежить вибір методу розрахунку.

Усі зовнішні навантаження поділяються за:

а) ***характером прикладання***

Зосереджена сила – якщо площа її прикладання досить мала і вважають, що вона прикладена в точці (рис. 1.1, а), має розмірність – (Н, кН).

Розподілене навантаження (рівномірно (рис. 1.1, б) та нерівномірно розподілене (рис. 1.1. в), яке може бути розподілене по поверхні, довжині і по об'єму. Навантаження розподілене по об'єму – це і є власна вага тіла, сила магнітних полів і т.д.

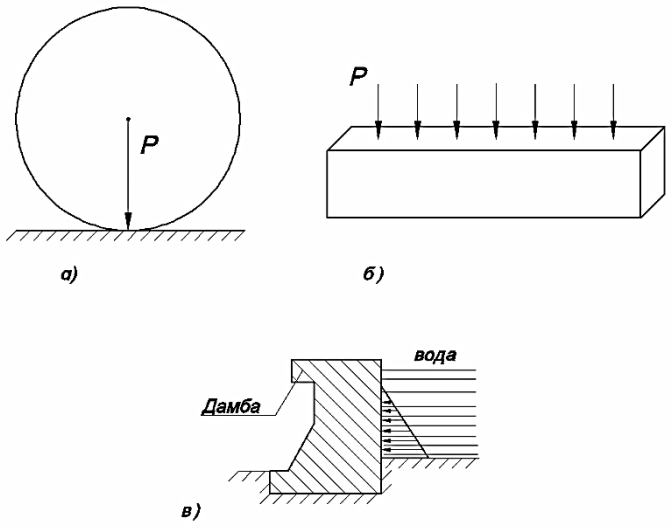


Рис. 1.1. Прикладання навантаження:
а – зосереджене навантаження; б – рівномірно розподілене навантаження; в – нерівномірно розподілене навантаження.

б) ***за характером зміни***

Статичне навантаження – швидкість прикладання незначна і не призводять до появи інших побічних навантажень.

Динамічні навантаження – швидкість прикладання яких значна і вони приводять до появи інерційних сил:

в) ***за тривалістю дії***

Постійної дії (сталі).

Тимчасової дії: можуть бути тривалої дії і короткотривалі.

Перш ніж почати розрахунок будь-якої конструкції (рис. 1.2, а, б) складають так звану розрахункову схему (рис. 1.3, а, б), де конструкцію відображають у вигляді осьової лінії з ідеалізованими опорами. Складаючи розрахункову схему можливими є відхилення від реальних умов: сила прикладається до осі, а не до верхньої площини балки, тому не враховуємо тертя в опорах.

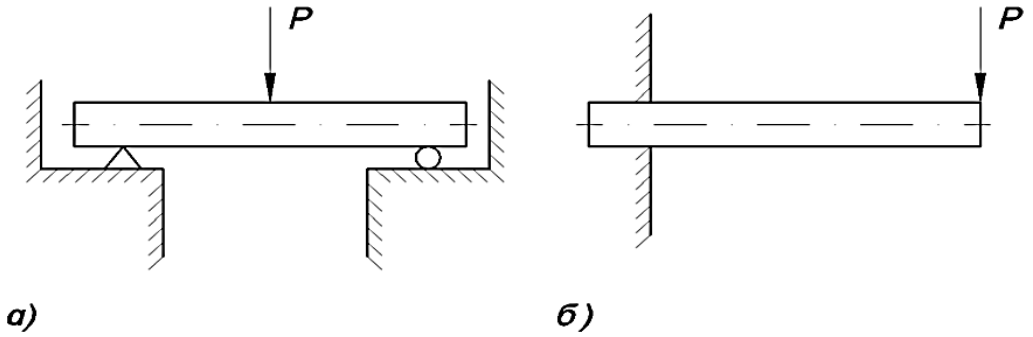


Рис. 1.2. Завантаження конструкцій.

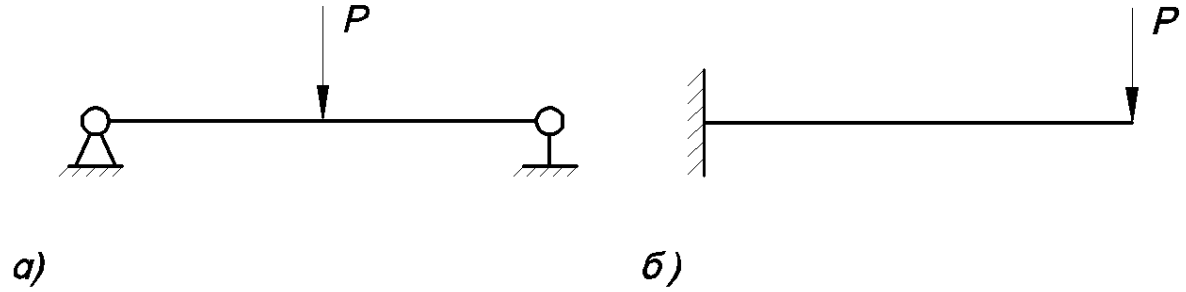


Рис. 1.3. Відповідні розрахункові схеми конструкцій.

1.3. Об'єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

> Усі елементи конструкцій зводять до чотирьох типових об'єктів залежно від співвідношення розмірів: стрижень (брус), пластина, оболонка та масивне тіло. Курс докладно вивчає саме стрижні, а розрахунок інших об'єктів розглядається в спеціальних курсах.

Незважаючи на велике розмаїття інженерних рішень, інженерні об'єкти складаються з окремих деталей, вузлів, які мають відповідну (подібну) форму, що можна узагальнити чотирьох видах, які є об'єктами розрахунку ММіК.

До них належать:

а) стрижень (брус) – це геометричне тіло, два розміри якого малі порівняно з третім – довжиною.

Розрізняють такі види стрижнів: прямолінійні, криволінійні, призматичні, постійного і змінного поперечного перерізу (рис.1.4).

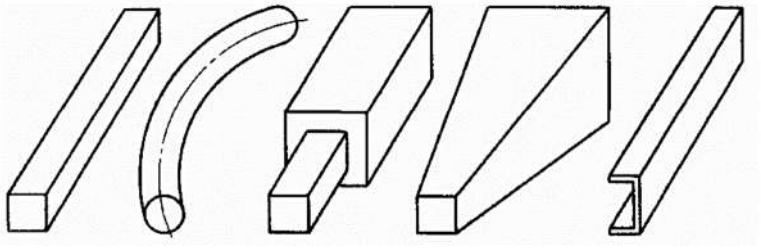


Рис. 1.4. Види стрижнів.

б) пластина – це геометричне тіло, два розміри якого досить великі порівняно із третім – товщиною (рис. 1.5). Пластинами можна вважати плоскі днища й кришки резервуарів, перекриття інженерних споруд та інше.

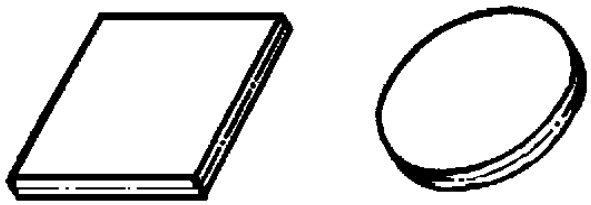


Рис. 1.5. Види пластин.

в) оболонка – це тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій поверхні одна від одної. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні, конічні, сферичні та ін. До оболонок належать неплоскі стінки резервуарів, котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу літаків та інше (рис. 1.6).

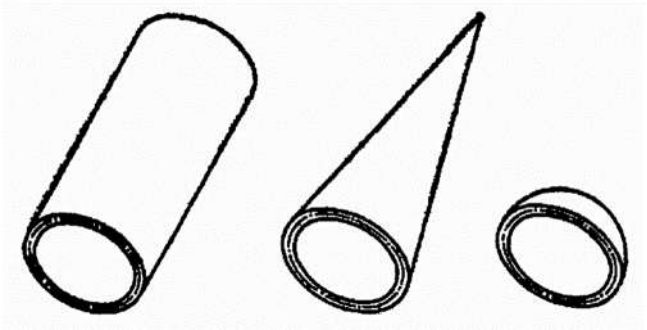


Рис. 1.6. Види оболонок

г) масивне тіло – якщо всі три розміри тіла (об’єкта) одного порядку. До них належать фундаменти споруд, підпірні стіни тощо (рис. 1.7).

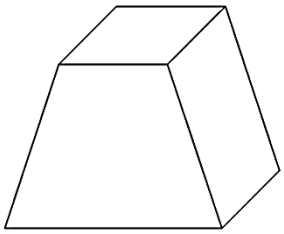


Рис. 1.7. Масивне тіло

1.4. Основні властивості твердого деформованого тіла

> Властивості матеріалу визначають, як тіло реагує на навантаження. Пружність дозволяє відновлювати форму після розвантаження, пластичність – залишатися деформованим, крихкість – руйнуватися при малих деформаціях. Однорідність, ізотропність і анізотропність описують залежність властивостей від точки та напрямку, а повзучість і релаксація – поведінку матеріалу в часі.

Під дією зовнішнього навантаження в результаті зміни взаємного розташування внутрішніх частин тіла, відбувається зміна форми, розмірів і об’єму деталі, тобто відбувається його *деформація.* Але маса тіла при цьому не змінюється.

Таким чином, під деформацією розуміють зміну взаємного розташування внутрішніх частин, що призводить, як правило, до зміни його розмірів, форми та об’єму.

Основними властивостями твердого деформованого тіла є:

Пружність – здатність матеріалу деформуватись під дією зовнішнього навантаження і поновлювати свою форму і розміри після його зняття;

Пластичність – здатність тіла деформуватися і залишатися в деформованому стані після зняття навантаження.

Крихкість – здатність матеріалу до руйнування при малих деформаціях (прикладом такого матеріалу є скло).

Однорідність – якщо механічні властивості матеріалу однакові у всіх його точках.

Ізотропність – якщо властивості матеріалу не залежать від напрямку дії навантаження (прикладом такого матеріалу є сталь, чавун, крейда).

Анізотропність – якщо властивості матеріалу залежать від напрямку дії стислого навантаження (прикладом такого матеріалу є дерево).

Повзучість – це здатність матеріалу до деформування за умови тривалої дії навантаження (рис.1.8).

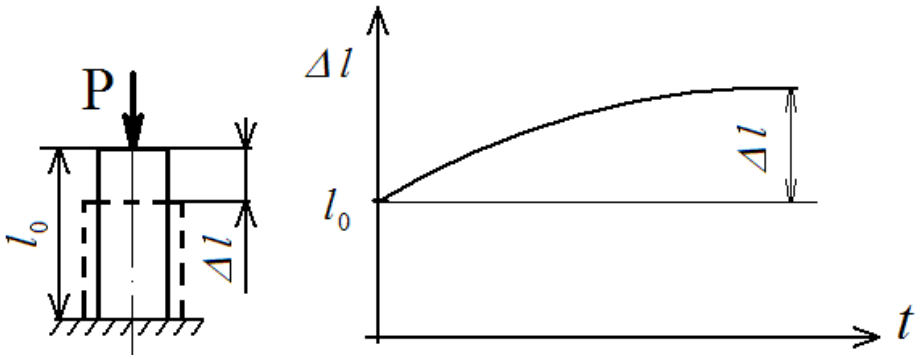


Рис. 1.8. Графічне зображення повзучості.

Релаксація напружень – це зменшення напружень у матеріалі з часом за умови обмеження деформації (рис. 1.9).

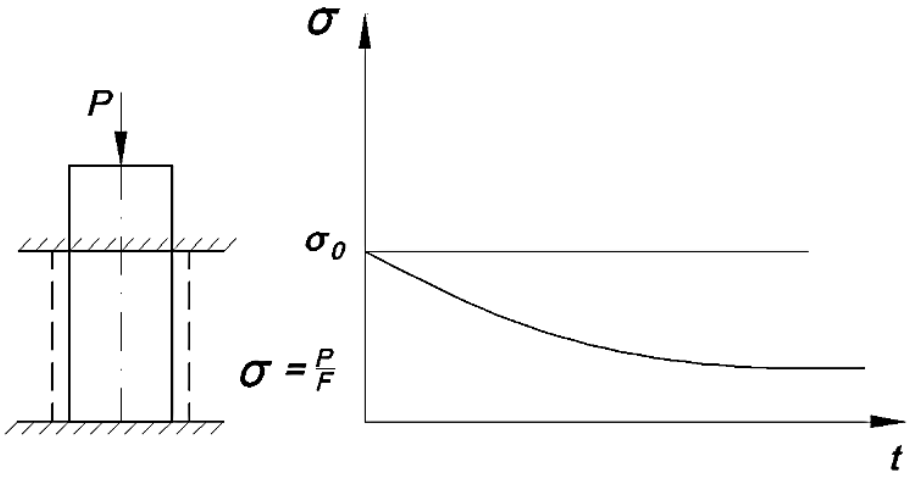


Рис. 1.9. Графічне зображення релаксації.

Контрольні запитання до лекції 1

1. Що таке міцність, жорсткість і стійкість?
2. Чому збільшення розмірів перерізу не завжди підвищує надійність конструкції?
3. Як класифікують навантаження за характером прикладання, зміною в часі та тривалістю дії?
4. Що таке розрахункова схема і навіщо вона потрібна?
5. Чим відрізняються повзучість і релаксація напружень?

Лекція 2. Гіпотези курсу, внутрішні зусилля та прості деформації стрижня. Напруження і деформації в точці

Мета лекції. Після вивчення лекції слід засвоїти основні гіпотези та принципи курсу, навчитися визначати внутрішні зусилля методом перерізів і розрізняти види простих деформацій; ввести поняття напруження та деформації в точці.

План лекції

2.1. Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

2.2. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів

2.3. Види простих деформацій стрижня

2.4. Поняття про напруження та деформацію в точці

Ключові поняття. гіпотеза плоских перерізів, принцип суперпозиції, закон Гука, метод перерізів, внутрішні зусилля, поздовжня й поперечна сили, згинальний і крутний моменти, напруження, лінійна та кутова деформації.

2.1. Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

Щоб спростити розрахунки, реальний матеріал замінюють ідеалізованою моделлю: однорідною, ізотропною, суцільною й абсолютно пружною. Деформації вважають малими порівняно з розмірами тіла, а залежність між навантаженням і деформацією – лінійною (закон Гука). Завдяки цьому діє принцип суперпозиції: результат дії кількох сил дорівнює сумі результатів дії кожної окремо. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі) стверджує, що плоский переріз до деформації залишається плоским і після неї.

Для спрощення методики розрахунків приймають низку гіпотез і принципів щодо властивостей матеріалів і характеру деформування, які в кінцевому результаті не призводять до значних похибок.

Існує низка гіпотез:

1. Гіпотеза про однорідність матеріалу вважає, що у всіх точках тіла властивості однакові.

2. Гіпотеза про ізотропність матеріалу вважає, що для деяких матеріалів їх властивості не залежать від напрямку дії сили.

3. Гіпотеза про абсолютну пружність матеріалу вважає, що після зняття навантаження деталь повністю відновлює свою форму.

4. Гіпотеза про суцільність матеріалу вважає, що матеріал повністю заповнює форму без пустот та тріщин.

5. Гіпотеза про незначність деформацій щодо до розмірів тіла вважає, що деякі деформації надто малі, щодо розмірів тіла значить ними можна нехтувати. Ця гіпотеза дає можливість застосування умов рівноваги для деформованих систем (рис. 2.1.).

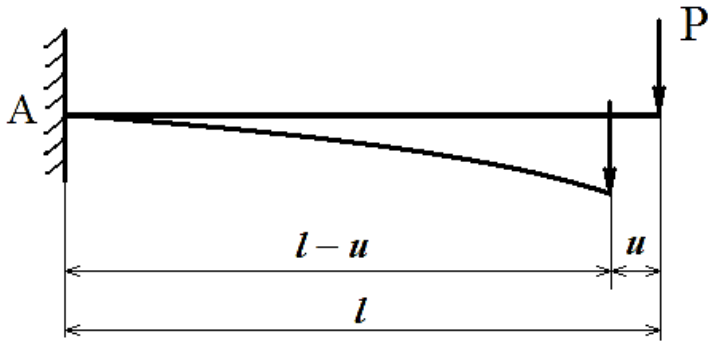


Рис. 2.1. Графічне зображення гіпотези незначності деформацій.

Згинальний момент в точці А:

$$M_A = P(l-u);$$

в якому два невідомих (M_A *і* u). Прийнявши $u = 0$, отримаємо

$$M_A = Pl.$$

6. Гіпотеза про лінійну залежність між деформацією і зусиллям (закон Гука): $\Delta l = kP$.

7. Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції), з яким величина будь-якого зусилля чи деформації від дії кількох зовнішніх сил може бути знайдена як алгебраїчна сума цих величин від дії кожної сили окремо (рис. 2.2).

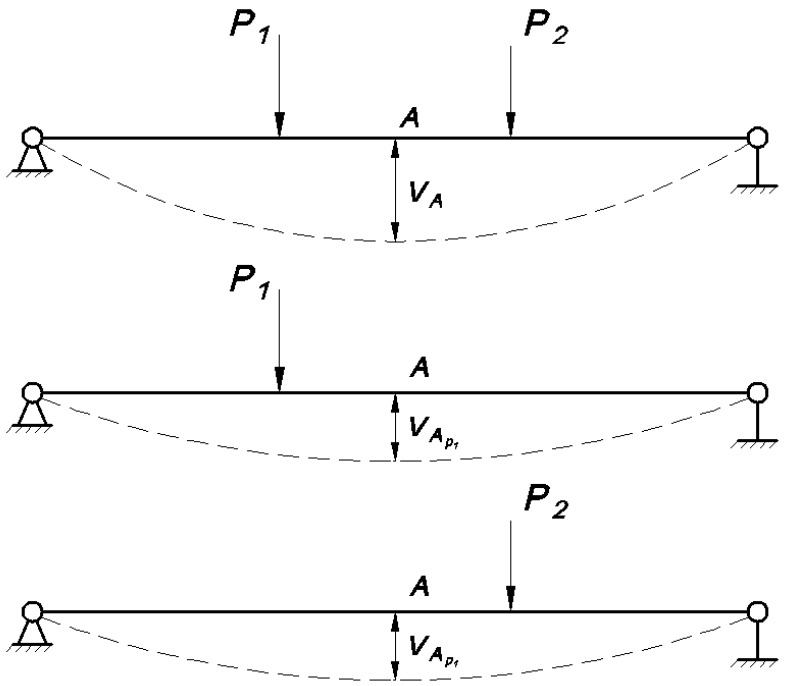


Рис. 2.2. Графічне зображення принципу суперпозиції.

Тобто прогин в точці *A* від дії двох сил P_1 і P_2 знайдемо:

$$V_A = V_{AP_1} + V_{AP_2} .$$

де: V_{AP_1} – прогин від дії сили P_1;

V_{AP_2} – прогин від дії сили P_2.

8. Гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі), згідно з якою поперечний переріз, плоский і нормальний до осі перед деформацією і залишається таким же і після деформації (рис. 2.3).

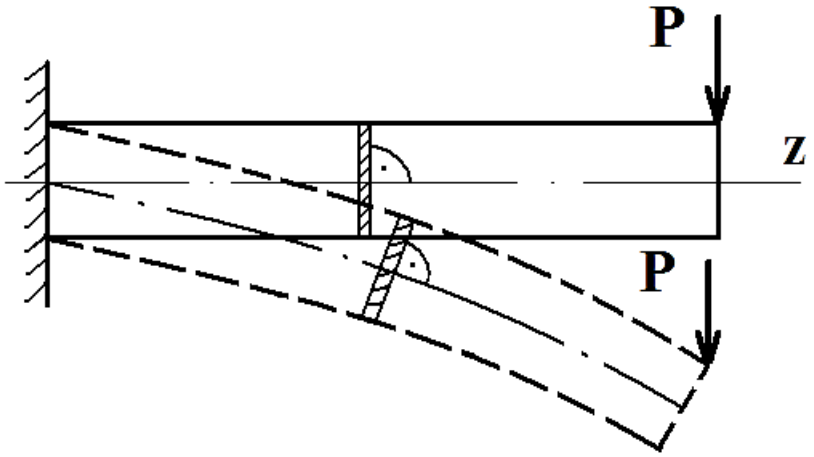


Рис. 2.3. Графічне зображення гіпотези плоских перерізів.

2.2. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів

> Метод перерізів – основний спосіб знаходження внутрішніх зусиль: тіло подумки розсікають, одну частину відкидають, а її дію на залишену частину замінюють внутрішніми зусиллями, які знаходять із рівнянь рівноваги. У загальному випадку в перерізі стрижня виникає шість зусиль: поздовжня сила, дві поперечні сили, два згинальні та один крутний момент – стільки ж, скільки рівнянь статики можна записати для залишеної частини.

У результаті дії зовнішнього навантаження в будь-якому перерізі деталі виникають внутрішні зусилля, які є результатом взаємодії внутрішньої частини тіла і забезпечують його цілісність і сумісність деформації. Для визначення внутрішніх зусиль застосовують метод перерізів, згідно з яким розтинають стрижень перерізом нормальним до осі на дві частини (рис. 2.4), відкидаючи одну із них, і розглядають рівновагу залишеної частини стрижня.

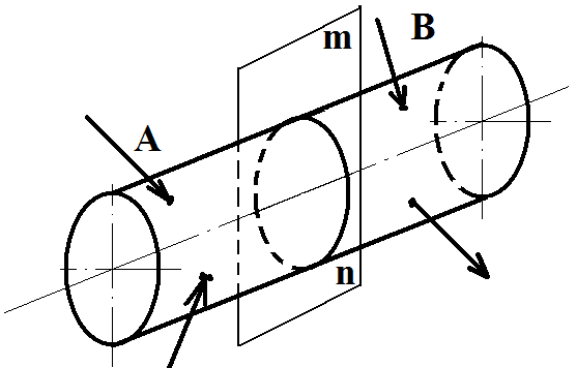


Рис. 2.4. Загальний випадок дії на тіло сил.

Дію відкинутої частини тіла на залишену заміняють внутрішніми зусиллями (рис. 2.5), величину і напрям яких визначають за допомогою рівнянь статики, використовуючи гіпотезу про малість деформації. Внутрішні зусилля узагальнюються до двох силових факторів: $\vec{R}$ – головний вектор; $\vec{M}$ – головний момент. Спроектувавши головний вектор і головний момент на координатній осі отримаємо ***шість внутрішніх зусиль***:

N_z – поздовжня сила;

Q_x, Q_y – поперечні сили;

M_x, M_y – згинальні моменти;

M_z – крутний момент.

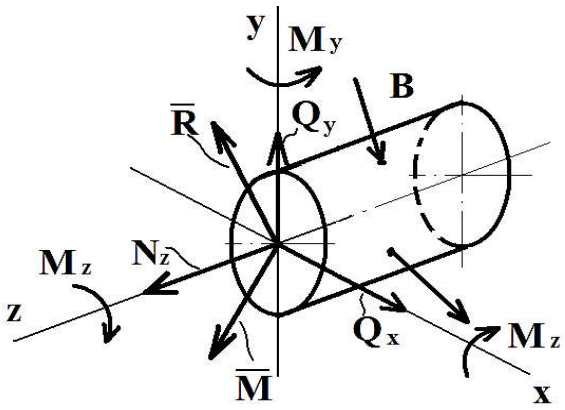


Рис. 2.5. Рівновага залишеної частини стрижня.

Внутрішні зусилля знаходять із рівнянь рівноваги:

$\Sigma X = 0, \Rightarrow Q_x;$

$\Sigma Y = 0, \Rightarrow Q_y;$

$\Sigma Z = 0, \Rightarrow N_z;$

$\Sigma M_x = 0, \Rightarrow M_x;$

$\Sigma M_y = 0, \Rightarrow M_y;$

$\Sigma M_z = 0, \Rightarrow M_z.$

Тобто із шести рівнянь статики знаходимо шість внутрішніх зусиль.

2.3. Види простих деформацій стрижня

> Коли з шести внутрішніх зусиль відмінне від нуля лише одне, стрижень зазнає простої деформації: центральний розтяг або стиск (діє поздовжня сила), зріз і зсув, кручення (крутний момент) чи чистий згин (згинальний момент). Складні деформації розглядають як сукупність простих, спираючись на принцип суперпозиції.

У разі, коли із шести внутрішніх зусиль не дорівнює нулю тільки одне, стрижень знаходиться в умовах простої деформації, до якої належать:

а) Центральний розтяг (рис. 2.6.).

У поперечному перерізі діє лише поздовжня сила ($N_z \neq 0$).

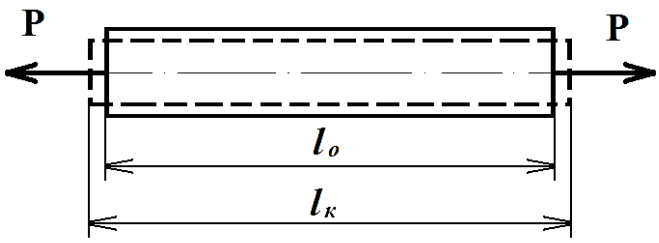


Рис. 2.6. Центральний розтяг.

Деформація характеризується:

$\Delta l = l_к - l_о$ – абсолютне подовження при розтягу;

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ – відносне подовження при розтягу.

б) Центральний стиск (рис. 2.7.).

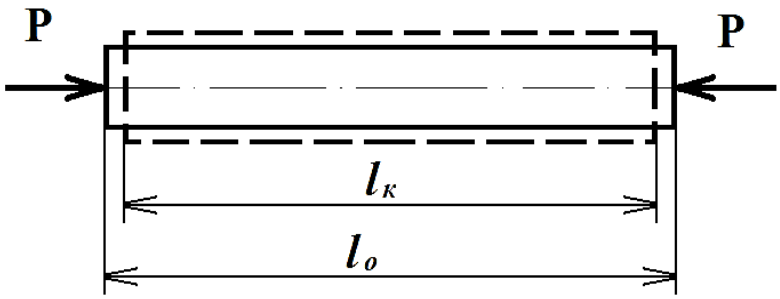


Рис. 2.7. Центральний стиск.

Деформація характеризується:

$\Delta l = l_к - l_о$ – абсолютне укорочення при стиску;

$\varepsilon = -\frac{\Delta l}{l_0}$ – відносне укорочення при стиску.

в) Зріз і зсув (рис. 2.8.–2.9.).

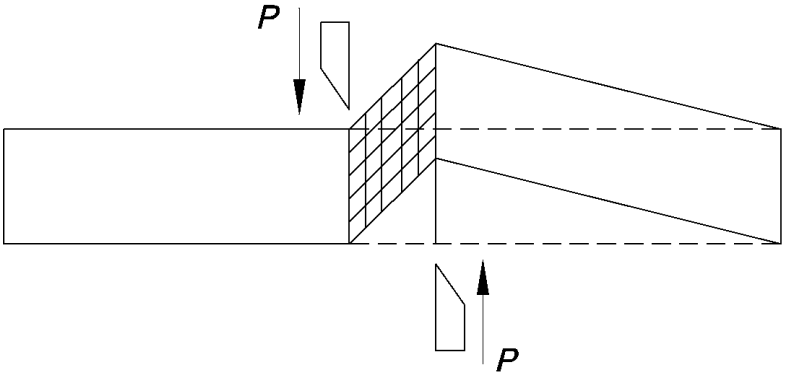


Рис. 2.8. Зріз (зсув).

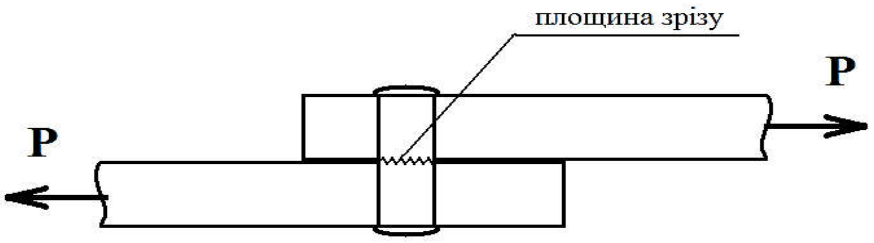


Рис. 2.9. Зріз заклепкового з’єднання.

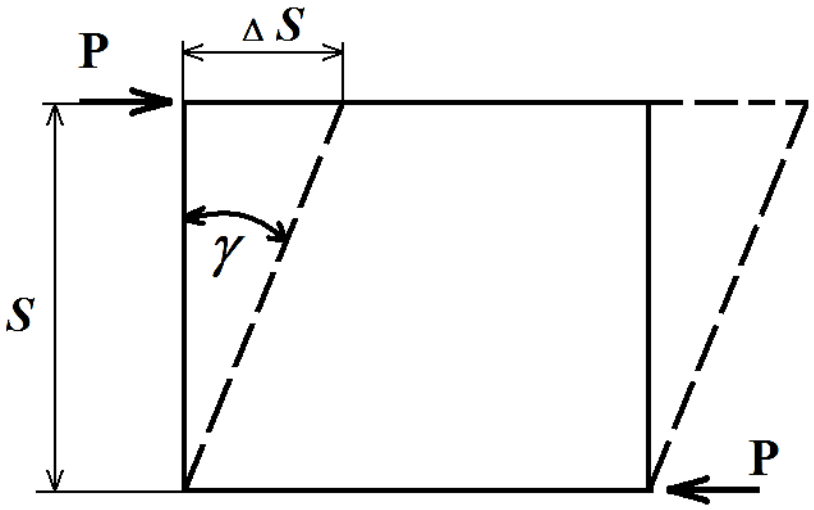


Рис. 2.10. Деформації зсуву.

При зсуві присутні такі деформаційні характеристики (рис.2.10):
ΔS – абсолютний зсув;

$\frac{\Delta S}{S} = tg\gamma \approx \gamma$ – відносний зсув (кут зсуву)

г) Кручення (рис. 2.11).

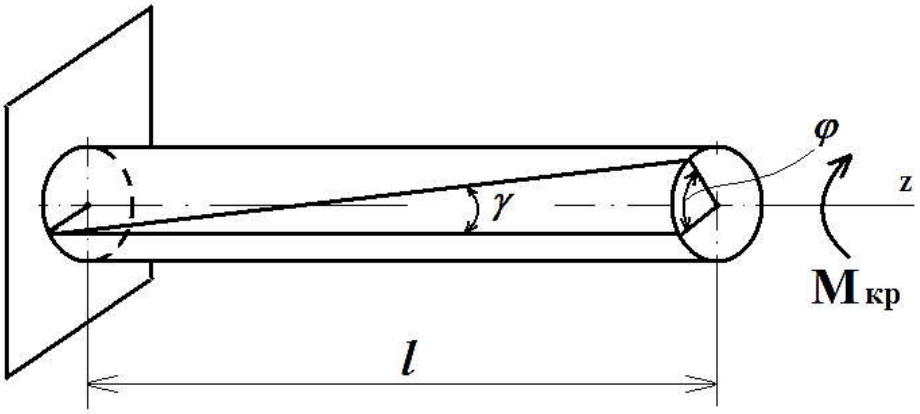


Рис. 2.11. Кручення.

Основні деформаційні характеристики при крученні:
γ – кут зсуву;
φ – кут повороту перерізу;

$\theta = \frac{\varphi}{l}$ – відносний кут повороту.

д) Чистий згин (рис. 2.12)

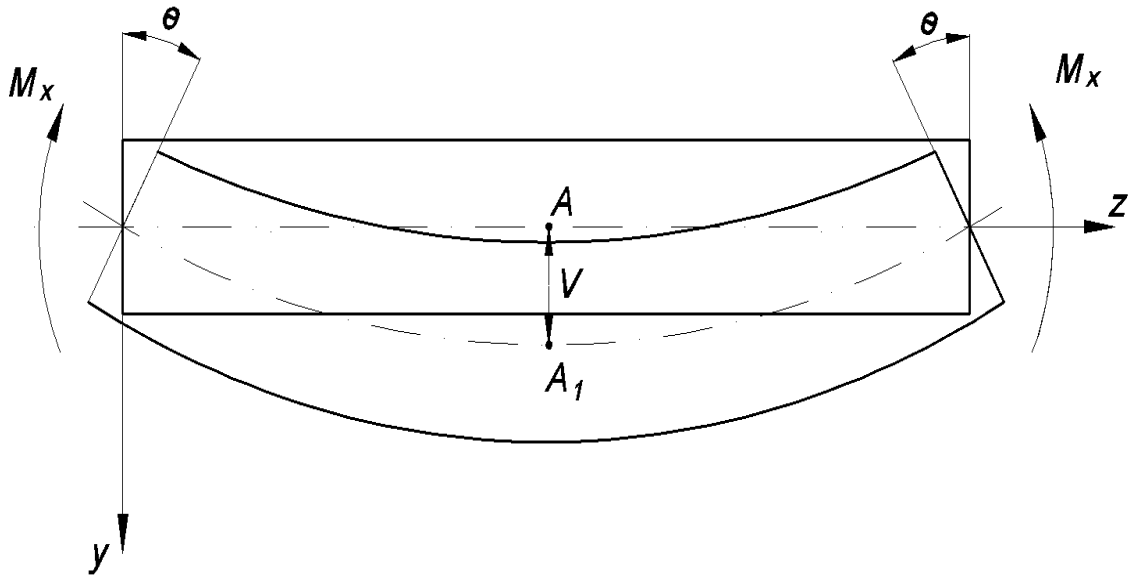


Рис. 2.12. Чистий згин.

При чистому згині у поперечному перерізі виникають деформації, викликані згинальними моментами $M_x \neq 0$.

Основні характеристики при деформаціях чистого згину:

$V_{(z)}$ – прогин;

$\theta_{(z)}$ – кут повороту перерізу.

2.4. Поняття про напруження та деформацію в точці

Внутрішні зусилля розподілені по перерізу, тому для оцінки міцності вводять напруження – інтенсивність внутрішньої сили, що припадає на одиницю площі. Повне напруження розкладають на нормальну та дотичну складові. Аналогічно деформацію описують у точці: три лінійні й три кутові деформації утворюють тензор деформацій.

На підставі гіпотези про суцільність матеріалу можна припустити, що внутрішні зусилля розподіленні по всьому поперечному перерізу. Виділимо точку К з елементарною площиною Δ F і прикладемо в цій точці рівнодіючу внутрішніх зусиль Δ R (рис. 2.13).

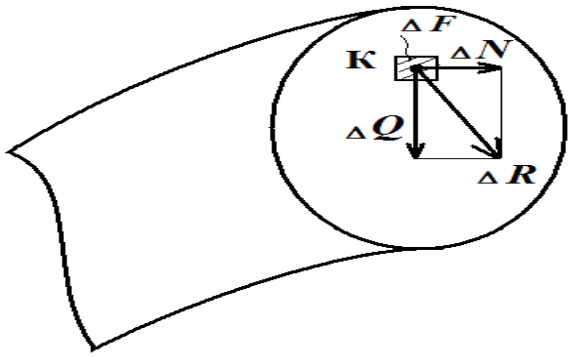


Рис. 2.13. Рівновага внутрішніх зусиль.

$\frac{\Delta R}{\Delta F} = P_{ср}$ – середнє напруження на площадці ΔF.

$\lim\limits_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = P$ – напруження в точці К.

Напруження – це міра інтенсивності внутрішнього зусилля (яка величина внутрішньої сили припадає на одиницю площі), (вимірюється в Н/м^2 чи Па (МПа), або за старою системою вимірів кгс/см^2).

Розкладено ΔR на складові: нормальну і дотичну. Отримаємо:

$\lim\limits_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \sigma$ – нормальне напруження;

$\lim\limits_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \tau$ – дотичне напруження.

Оскільки τ може мати довільний напрямок, то спроектувавши його на координатні осі, отримаємо τ_x, τ_y (рис. 2.14).

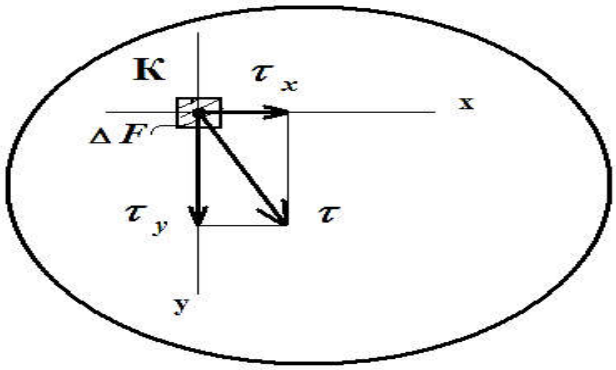


Рис. 2.14. Дотичні напруження.

У результаті прикладання до тіла зовнішнього зусилля та його деформування точка К переміститься в положення К$_1$, а відрізок S змінить свій напрямок і величину на ΔS (рис. 2.15).

$\lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta S}{S} = \varepsilon$ – відносна лінійна деформація в точці К за напрямом S .

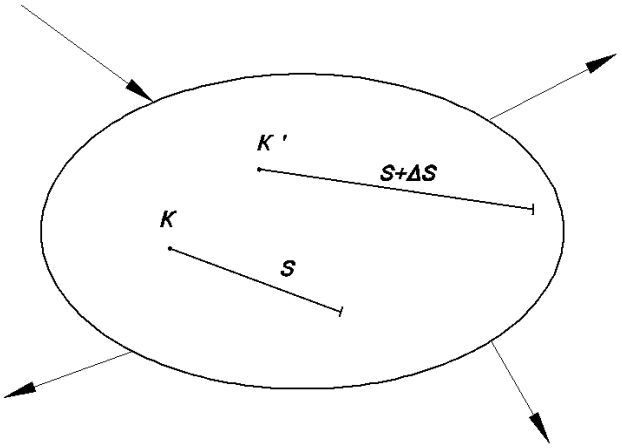


Рис. 2.15. Прикладання до тіла зовнішнього навантаження та його деформування.

Провівши в точці К уявно осі і спроектувавши ε на них, отримаємо три складові лінійної деформації (рис. 2.16).

Якщо уявно в точку К провести координатні осі, то в результаті деформації тіла, прямі кути між осями змінюються.

Таким чином, мають місце і кутові деформації (рис. 2.17), яких всього три.

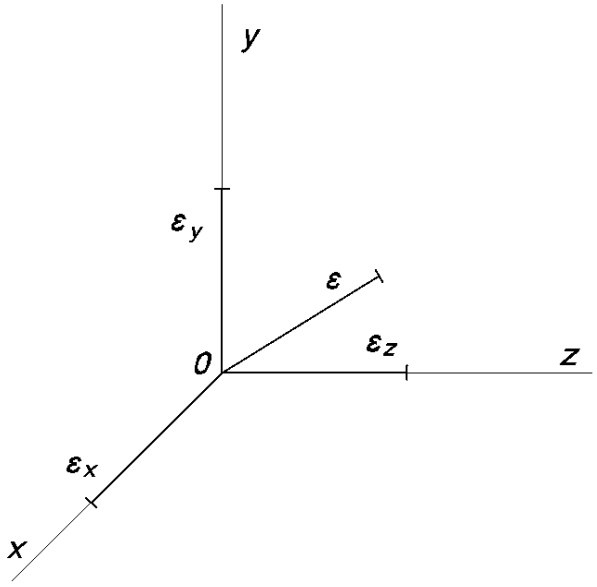


Рис. 2.16. Складові лінійної деформації.

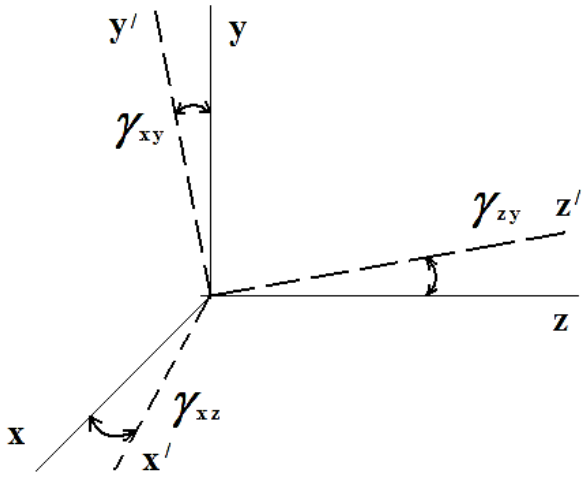


Рис. 2.17. Кутові деформації.

При цьому тензор деформації у математичному виразі для точки має вигляд:

$$T_D = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \qquad (2.1)$$

Це свідчить про те, що всього в точці може виникати три лінійні і три кутові деформації.

Контрольні запитання до лекції 2

1. Які гіпотези приймаються в курсі та для чого вони потрібні?
2. У чому полягає принцип суперпозиції?
3. Опишіть метод перерізів. Які внутрішні зусилля виникають у перерізі стрижня?
4. Назвіть види простих деформацій і внутрішні зусилля, що їм відповідають.
5. Що таке нормальне та дотичне напруження? Скільки лінійних і кутових деформацій має точка тіла?

Лекція 3. Геометричні характеристики плоских перерізів

Мета лекції. Після вивчення лекції слід вивчити геометричні характеристики перерізів, від яких залежать міцність і жорсткість стрижнів (статичні моменти, моменти інерції, момент опору, головні осі, радіуси інерції), та навчитися обчислювати їх для простих фігур і при зміні осей.

План лекції

3.1. Загальні поняття

3.2. Моменти інерції простих фігур

3.3. Моменти інерції відносно паралельних осей

3.4. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

3.5. Головні осі та головні моменти інерції

3.6. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості

Ключові поняття. статичний момент площі, осьовий, відцентровий і полярний моменти інерції, момент опору, паралельне перенесення осей, поворот осей, головні осі, радіус інерції, еліпс інерції.

3.1. Загальні поняття

Для розтягу-стиску достатньо знати площу перерізу, а для кручення та згину форма й розміри перерізу важливі значно більше. Тому вводять геометричні характеристики: статичні моменти площі (за ними знаходять центр ваги), осьові, відцентровий і полярний моменти інерції та момент опору. Їх розмірність – довжина в третьому або четвертому степені. Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно точки їх перетину. Осьові та полярний моменти завжди додатні, а відцентровий може бути додатним, від'ємним або нульовим.

На відміну від центрального розтягу-стиску, площа поперечного перерізу не може характеризувати опір стрижня при згині або крученні. Тому вводять інші характеристики, що називаються геометричними характеристиками плоских перерізів (ГХПП).

До них належать:

а) Статичний моментплощі (рис. 3.1)

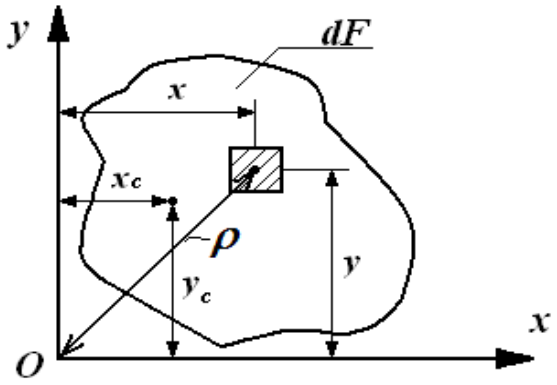


Рис. 3.1. Поняття про геометричні характеристики плоских перерізів.

який визначається за формулою 3.1:

$$S_x = \int_F y \cdot dF \; ; \qquad S_y = \int_F x \cdot dF \; . \tag{3.1}$$

Із курсу теоретичної механіки відомо, що координати центра ваги можна визначити за формулами 3.2, що виходять з виразу 3.1:

$$X_C = \frac{S_y}{F} ; \qquad y_C = \frac{S_x}{F} ; \tag{3.2}$$

Звідси маємо:

$$S_x = y_c \cdot F; \qquad S_y = x_c \cdot F. \tag{3.3}$$

Одиниці виміру (довжина)^3.

б) Осьові моменти інерції (рис. 3.1), визначають за формулою:

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF \; ; \qquad I_y = \int_F x^2 \cdot dF \; . \tag{3.4}$$

$$I_x > 0 .$$

Одиниці виміру (довжина)^4.

в) Відцентровий момент інерції (рис. 3.1):

$$I_{xy} = \int_F x \cdot y \cdot dF \; . \tag{3.5}$$

Відцентровий момент інерції може приймати як додатнє, так і від’ємне значення. Це означає, що можна знайти таке положення осей, відносно яких відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Осі, відносно яких відцентровий момент інерції $I_{xy} = 0$, називаються головними осями інерції. Дві взаємно перпендикулярні осі, із яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди будуть її головними осями інерції.

Одиниці виміру (довжина)^4.

г) Полярний момент інерції (рис. 3.2):

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \cdot dF = \int_F (x^2 + y^2) \cdot dF = I_x + I_y \qquad (3.6)$$

$$I_\rho > 0.$$

Одиниці виміру (довжина)^4.

Теорема: якщо через точку К провести дві пари координатних осей (рис. 3.2.), то в результаті матимемо відповідну рівність 3.7:

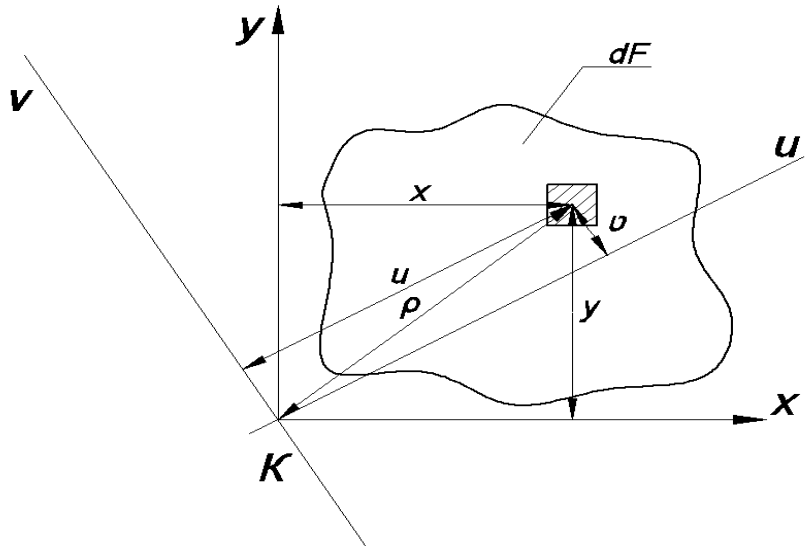


Рис. 3.2. Рисунок до теореми.

$$\underbrace{I_X + I_Y}_{I_\rho} = \underbrace{I_U + I_V}_{I_\rho}. \qquad (3.7)$$

д) Момент опору перерізу:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}, \qquad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \qquad (3.8)$$

Одиниці виміру (довжина)^3.

3.2. Моменти інерції простих фігур

> Для прямокутника, трикутника, круга та кільця моменти інерції виводять інтегруванням, після чого користуються готовими формулами. Наприклад, для прямокутника з основою b і висотою h осьовий момент інерції відносно центральної осі, паралельної основі, дорівнює $bh^3/12$. Складні перерізи розбивають на прості фігури та підсумовують їх характеристики.

Для деяких простих поперечних перерізів обчислимо значення осьових моментів інерції за загальними виразами:

Прямокутник (рис. 3.3):

$$I_x = \int_F y^2 \cdot dF \,, \qquad dF = b \cdot dy \,, \tag{3.9}$$

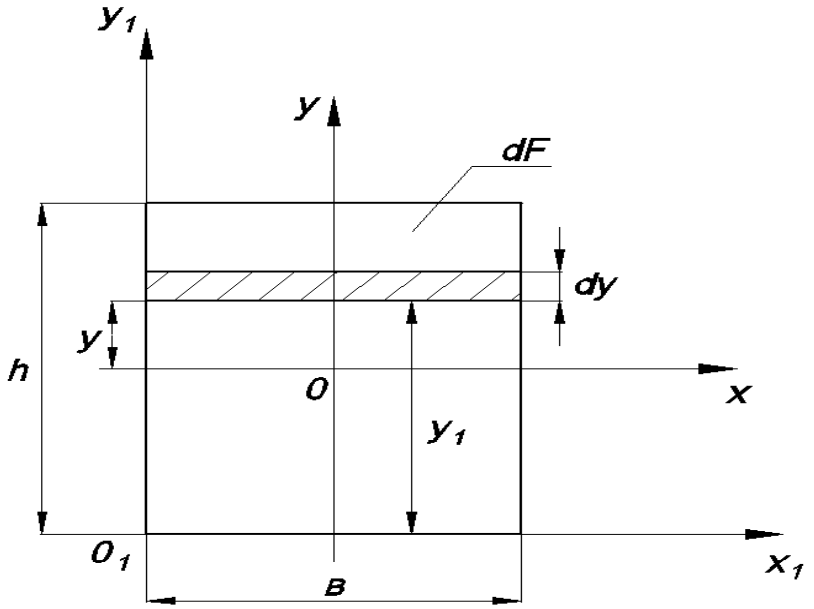


Рис. 3.3. Прямокутний поперечний переріз.

$$I_x = b\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{12} \,, \text{ відповідно. } I_y = \frac{hb^3}{12} \tag{3.10}$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6} \,, \text{ відповідно } W_y = \frac{hb^2}{6} \,. \tag{3.11}$$

$$I_{x_1} = \int_0^h y_1^2 \cdot dy = \frac{bh^3}{3} \,, \text{ відповідно } I_{y_1} = \frac{hb^3}{3} \,. \tag{3.12}$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 \cdot y_1 \cdot dF = \frac{b^2 h^2}{4} \,. \tag{3.13}$$

$$I_{xy} = 0 \,. \tag{3.14}$$

Трикутник (рис. 3.4):

$$I_x = \frac{bh^3}{36} \,, \qquad I_y = \frac{hb^3}{48} \,. \tag{3.15}$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} \,. \tag{3.16}$$

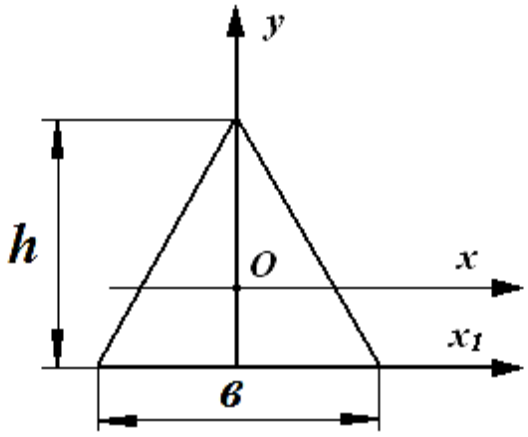


Рис. 3.4. Поперечний переріз трикутної форми.

$$\begin{cases} W_x = \dfrac{I_x}{y_{\max}} = \dfrac{bh^3}{36} : \dfrac{2}{3}h = \dfrac{bh^2}{24} \\ W_y = \dfrac{I_x}{x_{\max}} = \dfrac{hb^3}{48} : \dfrac{b}{2} = \dfrac{hb^2}{24} \end{cases}, \tag{3.17}$$

Круг (рис. 3.5):

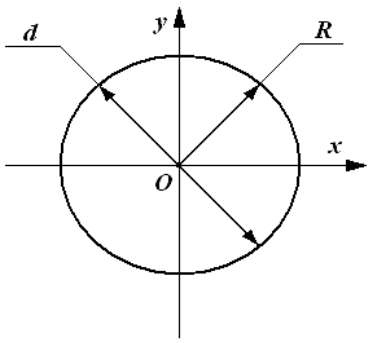


Рис. 3.5. Поперечний переріз форми круга

$$\mathrm{I}_\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{3.18}$$

$$\mathrm{I}_x = \mathrm{I}_y = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}. \tag{3.19}$$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{R} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32}. \tag{3.20}$$

Кільце (рис. 3.6):

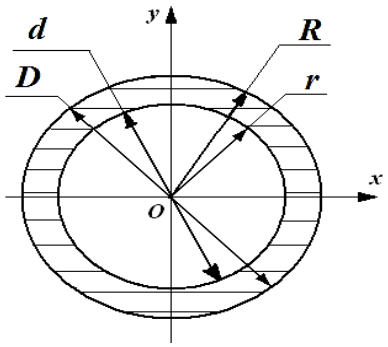


Рис. 3.6. Поперечний переріз форми кільця.

$$\mathrm{I_x} = \mathrm{I_y} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha)^4 = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4), \qquad (3.21)$$

де $\alpha = \frac{D}{d}$.

$$\mathrm{I}_\rho = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4). \qquad (3.22)$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1-\alpha^4). \qquad (3.23)$$

3.3. Моменти інерції відносно паралельних осей

Під час переходу до осі, паралельної центральній, момент інерції збільшується на добуток площі на квадрат відстані між осями. Отже, з усіх паралельних осей найменший момент інерції мають саме центральні осі – це використовують при обчисленні характеристик складних перерізів.

Припустимо, що нам відома площа поперечного перерізу та значення осьових моментів інерції відносно осей x і y. Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно осей, паралельних заданим (рис. 3.7).

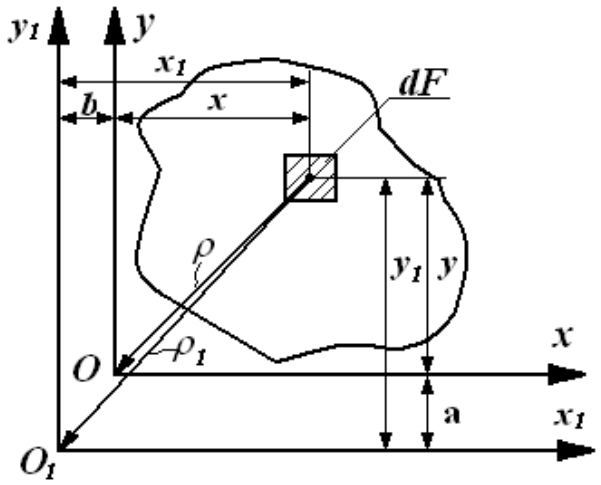


Рис. 3.7. Залежність між осьовими моментами інерції відносно паралельних осей.

$y_1 = y + a$, $x_1 = x + b$.

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \int_F (y+a)^2 dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2a\int_F y \cdot dF + a^2 \int_F dF \quad (3.24)$$

Отримаємо вираз (3.25):

$$I_{x_1} = I_x + 2aS_x + a^2 F$$

$$\text{відповідно : } I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2 F; \quad (3.25)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x+b)(y+a)dF = \ldots = I_{xy} + aS_y + bS_x + ab. \quad (3.26)$$

Припустимо, що осі x і y – центральні, тоді $S_x = 0$, $S_y = 0$. Відповідно до цього вирази (3.25) і (3.26) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 F \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 F \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abF \end{aligned} \quad (3.27)$$

Склавши два перших рядки виразу (3.27), отримаємо:

$$I_{X_1} + I_{Y_1} = I_X + I_Y + (a^2 + b^2)F \; ; \quad (3.28)$$

або ж, враховуючи (3.6) отримуємо:

$$I_{\rho_1} = I_\rho + (a^2 + b^2)F \quad (3.29)$$

Якщо припустити, що відомі осьові моменти інерції відносно довільних осей, то можемо знайти їх значення відносно центральних осей паралельних даним.

$$I_x = I_{x_1} - a^2 F$$
$$I_y = I_{y_1} - b^2 F. \qquad (3.30)$$

Як видно із виразу (3.30): із всіх паралельних осей, момент інерції буде найменшим відносно центральної осі (рис. 3.8).

3.4. Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

> При повороті координатних осей на кут α осьові та відцентровий моменти інерції змінюються, але сума осьових моментів залишається сталою. Ця властивість (інваріантність) зручна для перевірки обчислень.

Припустимо, що відома площа поперечного перерізу, значення осьового моменту інерції відносно осей ***x*** і ***y***. Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно осей ***u*** та ***v*** (рис. 3.10), повернутих на кут ***α***.

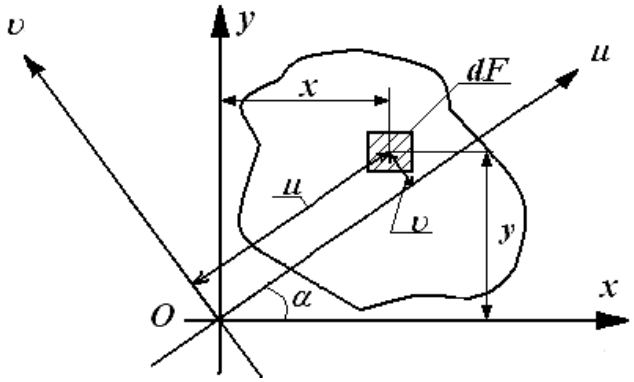


Рис. 3.8. Поворот координатних осей на кут α.

Із рис. 3.8 видно, що:

$$v = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha$$
$$u = y \cdot \sin\alpha + x \cdot \cos\alpha \qquad (3.31)$$

Звідки матимемо:

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha)^2 dF =$$
$$= \cos^2\alpha \cdot \underbrace{\int_F y^2 dF}_{I_X} + \sin^2\alpha \cdot \underbrace{\int_F x^2 dF}_{I_Y} - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \underbrace{\int_F xy dF}_{I_{XY}}. \qquad (3.32)$$

За аналогією знайдемо I_u

Враховуючи, що $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, маємо

$$I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$
$$I_v = I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha. \qquad (3.33)$$

Знайдемо відцентровий момент інерції:

$$I_{uv} = \int_F vudF = \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha)\cdot(y\sin\alpha + x\cos\alpha)dF = \ldots$$
$$\ldots = -\frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha \qquad (3.34)$$

Склавши два рядки виразу (3.33), отримаємо, що

$$I_u = I_v = I_x + I_y = const\ . \qquad (3.35)$$

Вираз (3.35) це – властивість інваріантності осьових моментів інерції.

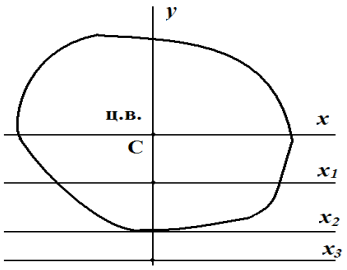


Рис. 3.9. Порівняльні осі.

$$I_x = \min < I_{x1} < I_{x2} < I_{x3}\ .$$

3.5. Головні осі та головні моменти інерції

> Існує такий кут повороту осей, при якому відцентровий момент інерції дорівнює нулю, а осьові моменти набувають екстремальних значень. Ці взаємно перпендикулярні осі називають головними, а відповідні моменти – головними моментами інерції. Якщо головні осі проходять через центр ваги, їх називають головними центральними осями.

Із виразу (3.33) очевидно, що осьові моменти інерції змінюються відносно кута $\boldsymbol{\alpha}$, тобто є функцією кута $\boldsymbol{\alpha}$.

Очевидно, що існує таке значення кута α_0, при якому згідно з виразом (3.35) моменти інерції набувають екстремальних значень (максимального та мінімального). При цьому візьмемо похідну виразу (3.33) і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dI_u}{d\alpha_0} = -2I_x \cos\alpha_0 \sin\alpha_0 + 2I_y \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0, \quad (3.36)$$

Враховуючи, що $\sin\alpha_0 \cdot \cos\alpha_0 = \frac{1}{2}\sin 2\alpha_0$ отримаємо:

$$I_x \sin 2\alpha_0 - I_y \sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

або

$$(I_x - I_y)\sin 2\alpha_0 + 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0. \quad (3.37)$$

Поділимо вираз 3.37 на $\cos 2\alpha_0$, отримаємо:

$$(I_x - I_y)\, tg2\alpha_0 + 2I_{xy} = 0. \quad (3.38)$$

Звідси кут, що визначається положенням головних осей:

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (3.39)$$

Існує дві перпендикулярні осі, відносно яких осьові моменти інерції набувають екстремального значення. Ці осі називаються головними, а моменти інерції відносно них – головними моментами інерції перерізу.

Значення головних осьових моментів інерції визначається:

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (3.40)$$

Формула для визначення положення осей ***max***та ***min***:

$$tg\,2\alpha_1 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\max}}; \qquad tg2\alpha_2 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\min}}. \quad (3.41)$$

3.6. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості

> Радіус інерції – допоміжна величина, що дорівнює кореню квадратному з відношення моменту інерції до площі фігури. Якщо відкласти радіуси інерції вздовж головних осей як півосі, утвориться еліпс інерції; за ним графічно знаходять момент інерції відносно будь-якої осі, що проходить через центр еліпса.

Введемо нову геометричну характеристику – ***радіус інерції***, а також припустимо, щоосі ***x*** і ***y*** – головні осі. Знайдемо значення осьових моментів інерції відносно вісі ***u***, повернутої на кут ***α,*** що відносно осі ***x*** (рис. 3.10).

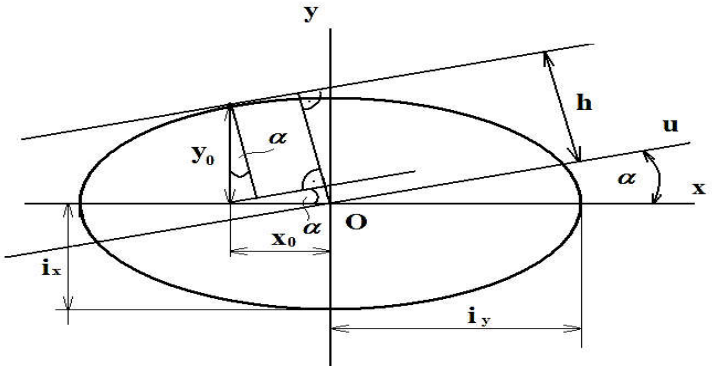


Рис. 3.10. Еліпс інерції.

Введемо нову величину - радіус інерції фігури відносно якої-небудь осі. Радіусом інерції відносно, наприклад, осі ***x*** називається величина

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}\,, \tag{3.42}$$

де I_x – момент інерції відносно осі ***x***, а F – площа фігури.
Звідси:

$$I_x = i_x^2 \cdot F\,.$$

Момент інерції I_u відносно осі *u* визначається за формулою (3.33). Але вісь *ox* є головною віссю, та відцентовий момент I_{xy}.

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha \tag{3.43}$$

Розділимо вираз 3.43 на F, отримаємо:

$$i_u^2 = i_x^2 \cos^2\alpha + i_y^2 \sin^2\alpha \tag{3.44}$$

Побудуємо еліпс, напіввісі якого є радіусами інерції (рис.3.10).

Рівняння еліпса: $\dfrac{y^2}{i_x^2} + \dfrac{x^2}{i_y^2} = 1$ (3.45)

Проведемо дотичну до еліпса, паралельну осі ***u***, і знайдемо відстань від центру еліпса до цієї дотичної.

Рівняння дотичної до еліпса:

$$\frac{yy_0}{i_x^2} + \frac{xx_0}{i_y^2} = 1 \tag{3.46}$$

Відстань ***h*** знайдемо за формулою:

$$h = y_0 \cos\alpha + x_0 \sin\alpha\,; \tag{3.47}$$

Розділимо на ***h*** обидві частини рівності (3.47):

$$\frac{y_0 \cos\alpha}{h} + \frac{x_0 \sin\alpha}{h} = 1 \tag{3.48}$$

Прирівняємо вирази (3.46) і (3.48) і отримаємо:

$$\frac{y}{i_x^2} = \frac{\cos\alpha}{h};$$

$$\frac{x}{i_y^2} = \frac{\sin\alpha}{h} \qquad (3.49)$$

Піднесемо до квадрату вираз (3.49):

$$\frac{y^2}{i_x^2} = \frac{i_x^2\cos^2\alpha}{h^2}; \quad \frac{x^2}{i_y^2} = \frac{i_y^2\sin^2\alpha}{h^2} \qquad (3.50)$$

Підставивши вираз (3.50) в вираз (3.45), отримаємо:

$$\frac{i_x^2\cos^2\alpha}{h^2} + \frac{i_y^2\sin^2\alpha}{h^2} = 1; \qquad (3.51)$$

Перетворивши вираз (3.51):

$$i_x^2\cos^2\alpha + i_y^2\sin^2\alpha = h^2 \qquad (3.52)$$

Порівнявши (3.52) і (3.44), можемо отримати такі рівності:

$$i_u = h; \quad I_u = h^2F. \qquad (3.53)$$

Це дає нам можливість графічним шляхом знаходити значення осьових моментів інерції відносно будь-якої осі, паралельної головній осі.

Контрольні запитання до лекції 3

1. Що таке статичний момент площі та як за ним знайти положення центра ваги?
2. Назвіть осьові, відцентровий і полярний моменти інерції та їх розмірність.
3. Як змінюється момент інерції при паралельному перенесенні осей?
4. У чому полягає інваріантність осьових моментів інерції при повороті осей?
5. Які осі називають головними та як знайти їх положення?
6. Що таке радіус інерції та еліпс інерції?

Лекція 4. Центральний розтяг і стиск: поздовжні сили, напруження, деформації та переміщення

Мета лекції. Після вивчення лекції слід навчитися будувати епюри поздовжніх сил, визначати напруження та деформації при розтязі-стиску, користуватися законом Гука, знаходити переміщення перерізів і напруження в похилих перерізах.

План лекції

4.1. Поздовжні сили та їх епюри. Диференціальні залежності між навантаженням та поздовжньою силою

4.2. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску

4.3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень

4.4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня

Ключові поняття. поздовжня сила, епюра, напруження, закон Гука, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, жорсткість при розтязі, переміщення перерізів, похилий переріз.

4.1. Поздовжні сили та їх епюри. Диференціальні залежності між навантаженням та поздовжньою силою

Центральний розтяг-стиск – найпростіший вид деформації: у перерізах виникає лише поздовжня сила. Її знаходять методом перерізів; сила, напрямлена від перерізу (розтяг), вважається додатною, а до перерізу (стиск) – від'ємною. Наочну картину зміни сили по довжині дає епюра. Між розподіленим навантаженням і поздовжньою силою існує диференціальна залежність, яка дозволяє будувати епюру без відсікання частин стрижня.

В інженерній практиці досить часто зустрічається такий вид деформацій стрижня, як розтяг або стиск. Найбільш простий випадок – центральний розтяг-стиск, коли в поперечному перерізі із шести внутрішніх зусиль лише поздовжня сила N_z не дорівнює нулю. Воно виникає тоді, коли точка прикладання зовнішньої сили або рівнодіючої збігається з центром ваги перерізу і лінія її дії збігається з віссю. Для визначення поздовжньої сили N_z використовують метод перерізів (рис. 4.1).

Правило знаків:

$N_z > 0$ – коли вона напрямлена від перерізу, і викликає розтяг стрижня, і навпаки – «від'ємна», викликаючи стиск.

Для наочного представлення характеру зміни N_z по довжині стрижня будують епюру N_z – графік, кожна ордината якого показує значення N_z в поперечному перерізі (графічний закон зміни N_z).

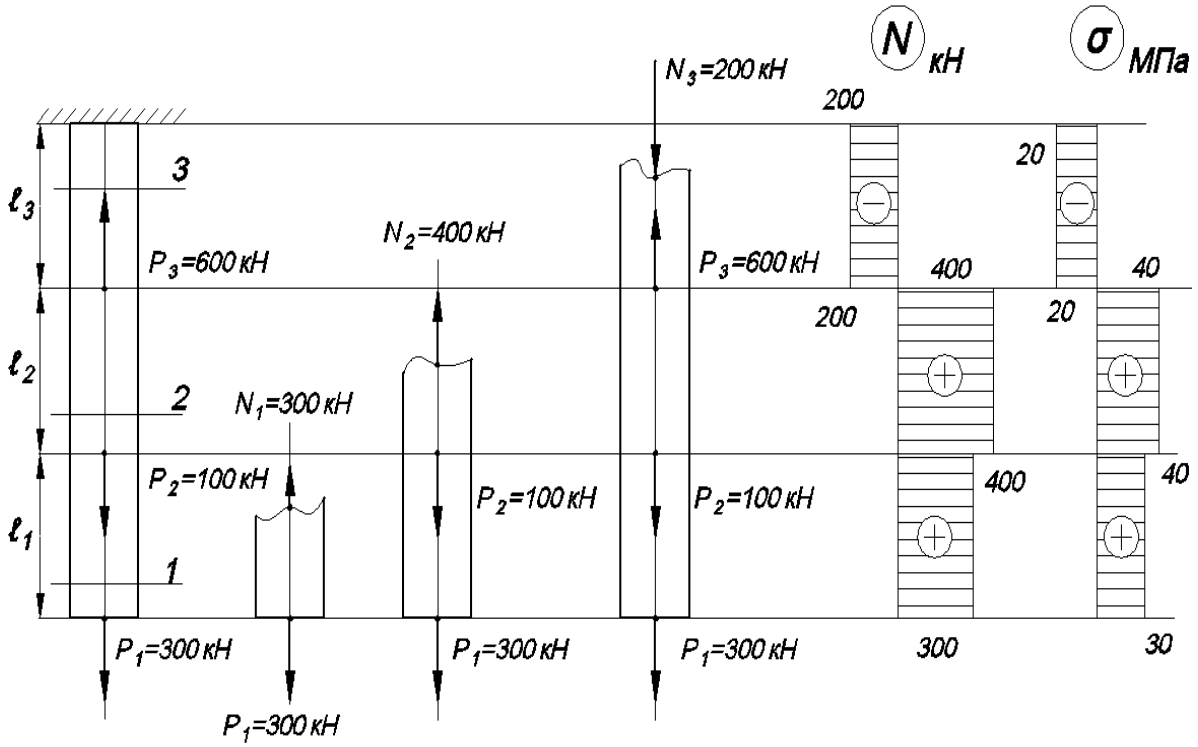


Рис. 4.1. Метод перерізів при розтязі-стиску.

$$N_I = P_1 = 300 \ кН \ , N_{II} = P_1 + P_2 = 400 \ кН \ , \ N_{III} = P_1 + P_2 - P_3 = -200 \ кН$$

У тому разі, коли характер зміни зовнішнього навантаження по довжині стрижня досить складний, вказаний метод унеможливлює швидке розв'язання задачі.

Розглянемо ділянку стрижня довжиною ***dz*** (рис. 4.2).

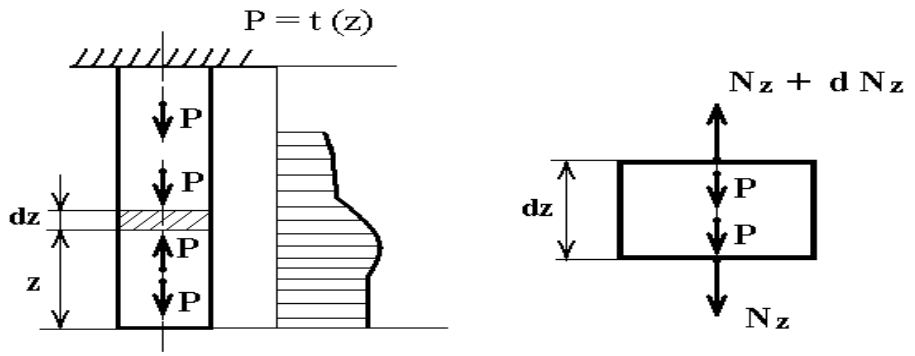


Рис. 4.2. Диференціальна залежність між зовнішнім навантаженням і поздовжньою силою.

$$\sum z = 0,$$

$$N_z + dN_z - N_z - P \cdot dz = 0,$$

$$P = \frac{dN_z}{dz}, \tag{4.1}$$

Звідси:

$$N_z = \int_0^l P \cdot dz. \tag{4.2}$$

Вираз (4.2) дає можливість не будувати відсічені частини стрижня, а одразу записувати аналітичні вирази для визначення N_z в характерних перерізах, межами яких є: початок та кінець стрижня; точки прикладання зовнішніх навантажень; точки, в яких змінюється поперечний переріз.

Запишемо значення N_z в характерних перерізах:

$$N_{1-1} = P_1 = -300 \ кН = N_{2-2},$$

$$N_{3-3} = P_1 + P_2 = 400 \ кН = N_{4-4},$$

$$N_{5-5} = P_1 + P_2 - P_3 = -200 кН = N_{6-6}.$$

4.2. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску

На основі гіпотези плоских перерізів показують, що при розтязі-стиску нормальні напруження розподіляються по перерізу рівномірно й дорівнюють поздовжній силі, поділеній на площу перерізу. Подовження стрижня супроводжується поперечним звуженням; відношення поперечної та поздовжньої деформацій (коефіцієнт Пуассона) – стала матеріалу. Закон Гука зв'язує напруження з деформацією через модуль пружності Е, а добуток модуля пружності на площу називають жорсткістю при розтязі-стиску.

Завантажимо призматичний стрижень рівномірно-розподіленим навантаженням на кінцях (рис. 4.3).

Із умов рівноваги маємо:

$$N_z = P$$

Зрозуміло, що в перерізі m–n:

$$N_z = \int_F \sigma \cdot dF \tag{4.3}$$

Із виразу (4.3) неможливо знайти характер зміни σ за поперечним перерізом. Тому розглядають характер деформації стрижня, наносячи на бокові поверхні сітку (рис. 4.3). Після завантаження стрижня отримуємо, що поперечні риски не викривлені і однаково віддалені одна від одної. Це дає можливість стверджувати, що як зовнішні, так і внутрішні волокна подовжуються однаково, тобто справедливою є гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі).

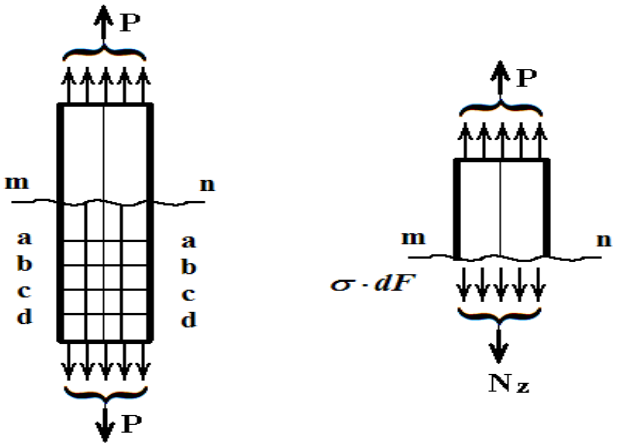


Рис. 4.3. До гіпотези плоских перерізів.

$$\varepsilon = const\ ,\quad \sigma = const\ ,$$
$$N_z = \sigma \int_F dF = \sigma \cdot \int_r dF = \sigma \cdot F\ , \tag{4.4}$$

Звідки:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \tag{4.5}$$

Тобто напруження σ по поперечному перерізу розподіляється рівномірно.

Для розв'язання задач міцності будують епюру σ. При цьому в характерних перерізах визначають її величину.

Для прикладу побудуємо епюру σ при $F = 10$ см^2 (рис. 4.1)

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = \frac{N_{1-1}}{F} = \frac{300 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 300 МПа\ ,$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{N_{3-3}}{F} = \frac{400 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 400\ \ МПа\ ,$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{N_{5-5}}{F} = -\frac{200 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -200 \ \ МПа \ .$$

Розглянемо деформацію стрижня (рис. 4.4):

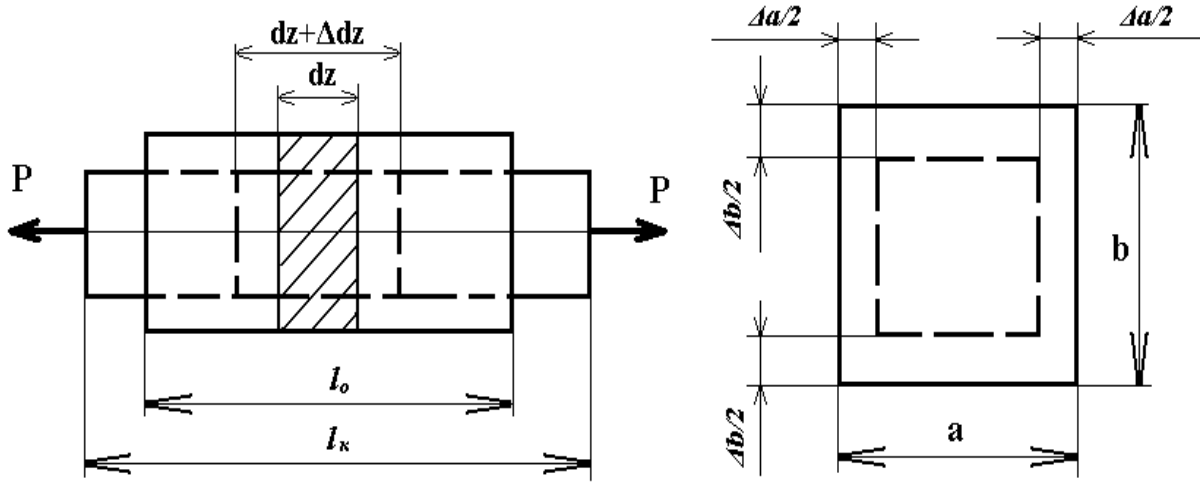


Рис. 4.4. Деформація стрижня.

Очевидно, що $\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}$; $\Delta dz = \varepsilon \cdot dz$; $\Delta l = l_к - l_0$.

Враховуючи гіпотезу плоских перерізів, маємо:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon \cdot dz = \varepsilon \int_l dz = \varepsilon \cdot l \ . \tag{4.6}$$

Тобто відносне подовження стрижня (деформація) визначається:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \ . \tag{4.7}$$

При цьому поперечна деформація:

$$\varepsilon'_a = -\frac{\Delta a}{a}, \quad \varepsilon'_b = -\frac{\Delta b}{b}, \quad \varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon' \ . \tag{4.8}$$

Експериментально встановлено, що відношення відносних поперечних деформацій до поздовжніх (в межах пружних деформацій) є величиною сталою і називається її коефіцієнтом Пуассона (коефіцієнт поперечної деформації):

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| . \tag{4.9}$$

Закон Гука

Відомо з курсу фізики, що:

$$\Delta l = k \cdot P. \tag{4.10}$$

Зробимо деякі перетворення виразу 4.10:

$$\frac{\Delta l \cdot l}{l \cdot F} = \frac{k \cdot P}{F}, \tag{4.11}$$

Маючи такі рівності: $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$; $\frac{P}{F} = \sigma$. (4.12)

Підставимо рівності 4.12 у вираз 4.11, отримаємо:

$$\frac{\varepsilon \cdot l}{F} = k \cdot \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{l}{k \cdot F} \cdot \varepsilon. \tag{4.13}$$

Позначимо $\frac{l}{kF} = E$ – модуль пружності першого роду (або модуль Юнга) при розтязі, $E\,(Па; МПа)$.

Тоді закон Гука при розтязі-стиску має вигляд:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{4.14}$$

Із виразом 4.14 зробимо перетворення:

$$\frac{N}{F} = \frac{E \cdot \Delta l}{l}, \text{ тоді } \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}, \tag{4.15}$$

де добуток: $E \cdot F$ – жорсткість при розтязі-стиску.

4.3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень

> Абсолютне подовження ділянки визначається поздовжньою силою, довжиною та жорсткістю. Для ступінчастого стрижня обчислюють подовження кожної ділянки та підсумовують. Переміщення перерізу відносно защемлення дорівнює сумі подовжень ділянок між защемленням і цим перерізом; за цими значеннями будують епюру переміщень.

Для стрижня з постійними (сталими) ***N*** і ***F*** загальна деформація визначається виразом (4.15).

Для стрижня ступенево-змінного поперечного перерізу загальна деформація визначається як сума деформацій ділянок стрижня із сталими ***N*** і ***F***, тобто:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot F_i} \ . \qquad (4.16)$$

Приклад: Для стрижня (рис. 4.5) визначити його деформацію і побудувати епюру абсолютного подовження ($E = 2 \cdot 10^5 \ МПа$).

Дано: $P_1 = 2$ кН; $P_2 = 5$ кН; $P_1 = 7$ кН.

$F_1 = 10$ см^2; $F_2 = 20$ см^2;

$l_1 = 0{,}5$ м; $l_2 = 0{,}8$ м; $l_3 = 0{,}4$ м; $l_4 = 0{,}6$ м.

Розв'язок:

$$N_{1-1} = N_{2-2} = P_1 = 2 \ \ кН \ ;$$

$$N_{3-3} = N_{4-4} = N_{5-5} = N_{6-6} = P_1 - P_2 = 2 - 5 = -3 \ \ кН \ ;$$

$$N_{7-7} = N_{8-8} = P_1 - P_2 + P_3 = 4 \ \ кН \ .$$

Абсолютні деформації ділянок стрижня:

$$\Delta l_I = \frac{N_{1-1} \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}001} = 5 \cdot 10^{-6} \ \ м \ ;$$

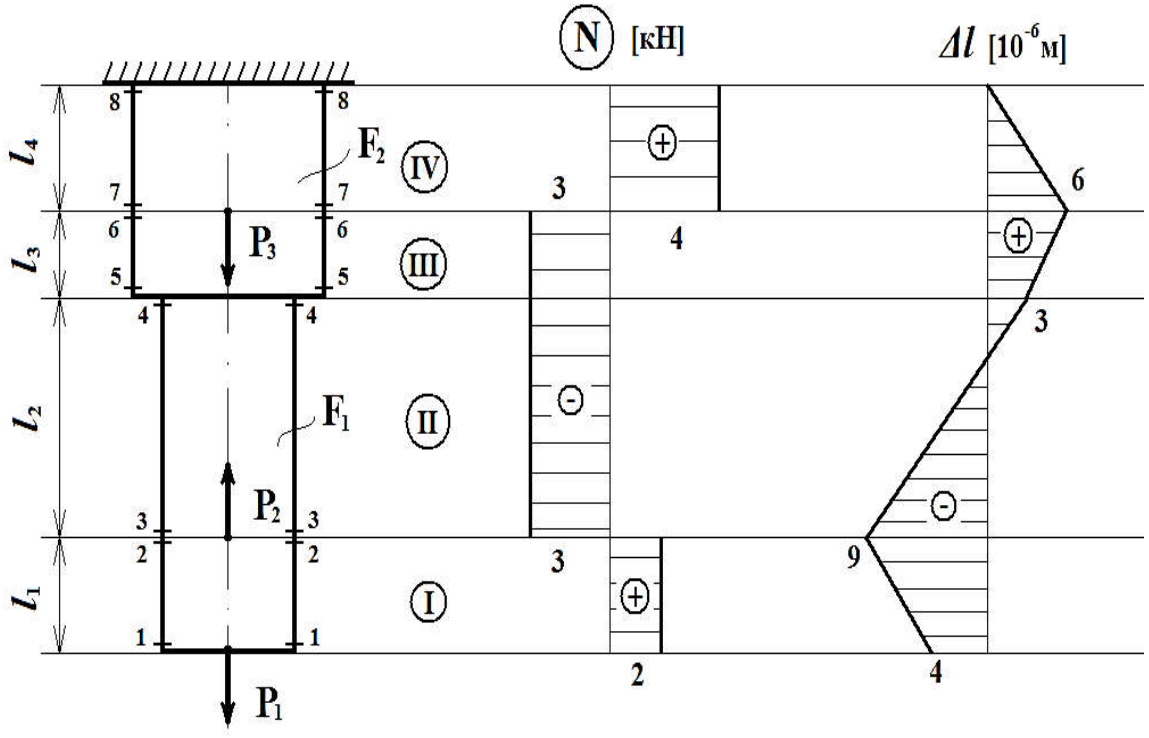


Рис. 4.5. Рисунок до задачі.

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{3-3} \cdot l_2}{E \cdot F_1} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}001} = -12 \cdot 10^{-6} \ \ м \ ;$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{5-5} \cdot l_3}{E \cdot F_2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}002} = -3 \cdot 10^{-6} \ м;$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{N_{7-7} \cdot l_4}{E \cdot F_2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0{,}002} = 6 \cdot 10^{-6} \ м;$$

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} = (5 - 12 - 3 + 6) \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-4} см$$

Побудуємо епюру ***Δl***, яка будується від затиснення стрижня.

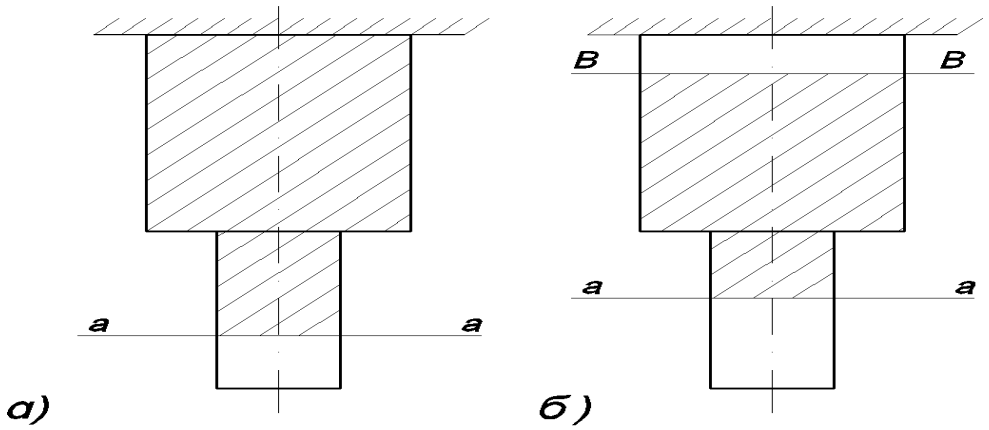


Рис. 4.6. Визначення переміщень:
а) – переріз *а–а* відносно затиснена; б) – двох суміжних перерізів.

Часто виникає необхідність визначити переміщення між перерізом і защемленням або між перерізами *а–а* і *в–в*. У цих випадках переміщення дорівнює абсолютній деформації (заштрихованих частин на рис. 4.6).

4.4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня

> Якщо розсікти стрижень площиною, нахиленою до поперечного перерізу, у цій площині виникають і нормальні, і дотичні напруження. Нормальне напруження найбільше в поперечному перерізі, а дотичне досягає максимуму в площині, нахиленій під кутом 45° до осі; у поздовжніх перерізах напруження відсутні.

Розітнемо стрижень площиною А (рис. 4.7), нахиленою до поперечного перерізу під кутом α і розглянемо рівновагу лівої частини стрижня, знайшовши напруження в нахиленому перерізі (рис. 4.8).

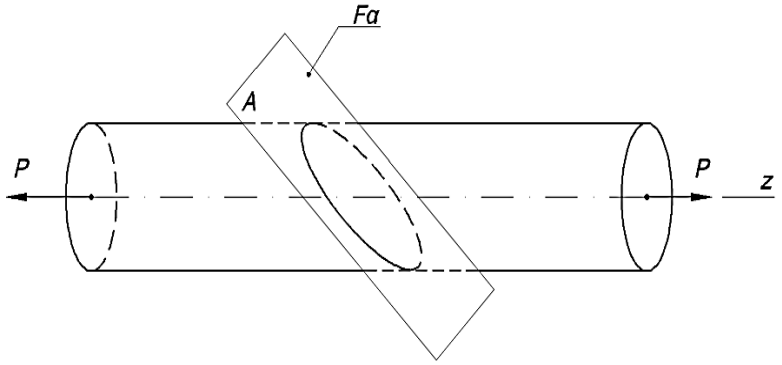


Рис. 4.7. Розтин стрижня площиною нахиленою під кутом α до осі z.

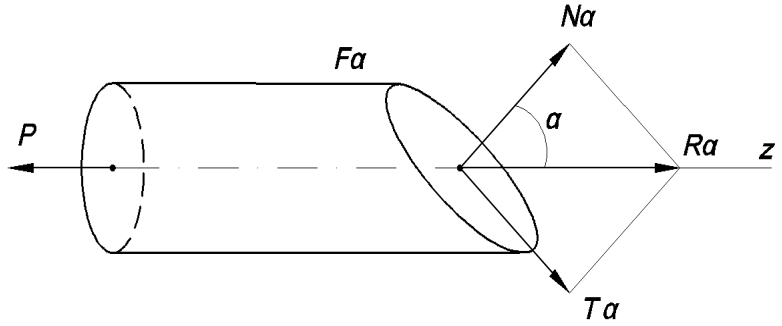


Рис. 4.8. Рівновага лівої частини стрижня.

$$\text{Відомо, що: } F_\alpha = \frac{F_0}{\cos\alpha}, \quad R_\alpha = P \tag{4.17}$$

Розкладемо R_α на складові, враховуючи (4.17)

$$\left.\begin{aligned} N_\alpha &= R_\alpha \cos\alpha = P\cos\alpha \\ T_\alpha &= R_\alpha \sin\alpha = P\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

При цьому виникають напруження:

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{F_\alpha} = \frac{P\cos\alpha}{F_0/\cos\alpha} = \sigma_0 \cos^2\alpha \tag{4.19}$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{F_\alpha} = \frac{P\sin\alpha}{F_0/\cos\alpha} = \frac{1}{2}\sigma_0 \sin 2\alpha \tag{4.20}$$

де: $\sigma_0 = \dfrac{P}{F_0}$ – максимальне напруження в поперечному перерізі(4.21)

Зробимо аналіз (4.19) і (4.20) залежно від кута нахилу перерізу:

1) $\alpha = 0$: $\sigma_{\alpha=0} = \sigma_0 = \sigma_{\max}$, $\tau_{\alpha=0} = 0$;

2) $\alpha = 45°$: $\sigma_{\alpha=45°} = \dfrac{\sigma_0}{2}$, $\tau_{\alpha=45°} = \dfrac{\sigma_0}{2} = \tau_{\max}$;

3) $\alpha = 90°$: $\sigma_{\alpha=90°} = 0$, $\tau_{\alpha=90°} = 0$.

У поздовжніх перерізах відсутні нормальні й дотичні напруження; σ_{max} виникають у поперечних перерізах, а τ_{max} – в перерізах, нахилених до поперечного перерізу під кутом $45°$.

Контрольні запитання до лекції 4

1. Яке правило знаків для поздовжньої сили?
2. Як побудувати епюри поздовжніх сил і напружень?
3. Сформулюйте закон Гука при розтязі-стиску. Що таке жорсткість при розтязі?
4. Що таке коефіцієнт Пуассона?
5. Як визначити подовження ступінчастого стрижня та побудувати епюру переміщень?
6. Як змінюються напруження в похилому перерізі залежно від кута нахилу?

Лекція 5. Механічні властивості матеріалів

Мета лекції. Після вивчення лекції слід ознайомитися з методикою випробувань матеріалів на розтяг і стиск, характеристиками міцності, пластичності та в'язкості, факторами, що впливають на властивості матеріалів, і потенційною енергією деформації.

План лекції

5.1. Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості

5.2. Дійсна діаграма розтягу

5.3. Випробування матеріалів на стиск

5.4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів

5.5. Потенційна енергія при розтязі-стиску

Ключові поняття. діаграма розтягу, границя пропорційності, границя пружності, границя плинності, тимчасовий опір, відносне подовження, відносне звуження, в'язкість, потенційна енергія.

5.1. Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості

Властивості матеріалів визначають експериментально на стандартних зразках, тому результати різних лабораторій можна порівнювати. За діаграмою розтягу виділяють характеристики міцності (границі пропорційності, пружності, плинності й тимчасовий опір), пластичності (відносні подовження та звуження після розриву) і в'язкості (робота, витрачена на руйнування зразка).

Для вивчення поведінки матеріалів під навантаженням проводять випробування зразків, виготовлених із цього матеріалу в лабораторних умовах на спеціальних машинах, що, як правило, поділяються на машини з механічним та гідравлічним приводами.

Оскільки властивості матеріалів залежать від розмірів зразка, то для того, щоб була можливість порівняти результати досліджень різних лабораторій, встановлюють нормами форми та розміри зразків випробування.

Найбільш розповсюдженим є випробування на розтяг, оскільки найбільш просто та повно отримують механічні властивості матеріалів. Під час випробування на розтяг приймають круглі та плоскі зразки.

Круглий зразок з параметрами: ∅ = 20 мм, $\boldsymbol{l}$ =10·d називають нормальними. Решту – пропорційними.

Зразки бувають довгими і короткими:

$\boldsymbol{l}$ =10·d – довгий зразок;

$\boldsymbol{l}$ =5·d – короткий зразок.

У результаті випробувань отримують графік залежності P=f(Δl), який називають діаграмою розтягу; кожен матеріал має свою форму діаграми. Для м'якої сталі (Сталь 3) діаграму зображено на рис. 5.1.

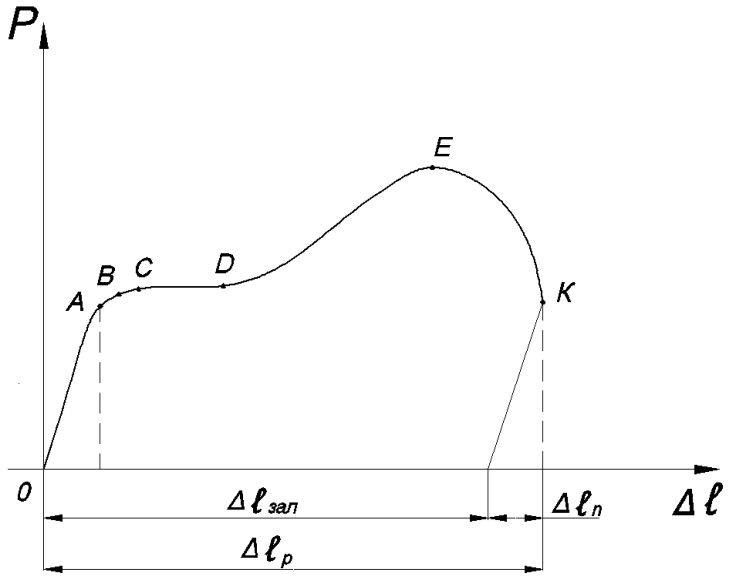


Рис. 5.1. Діаграма випробування на розтяг м'якої сталі.

Зручно цю діаграму відобразити у відносних величинах σ–ε (рис. 5.2):

де: $\sigma = \frac{P}{F_0}$; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$. ($F_0$ – початкова площа поперечного перерізу;

l_0 – довжина робочої частини зразка до завантаження).

У початковій стадії завантаження залежність між P і Δl – лінійна (від O до точки A), потім лінійність зникає. Точка B – границя пружності. За деякої сили (точка C) матеріал деформується при сталій величині сили P (текучість матеріалу).

В подальшому ділянка DE – зона зміцнення матеріалу, точка Е – з'являється шийка; у подальшому ЕК – падаюча гілка діаграми. У точці К – руйнування.

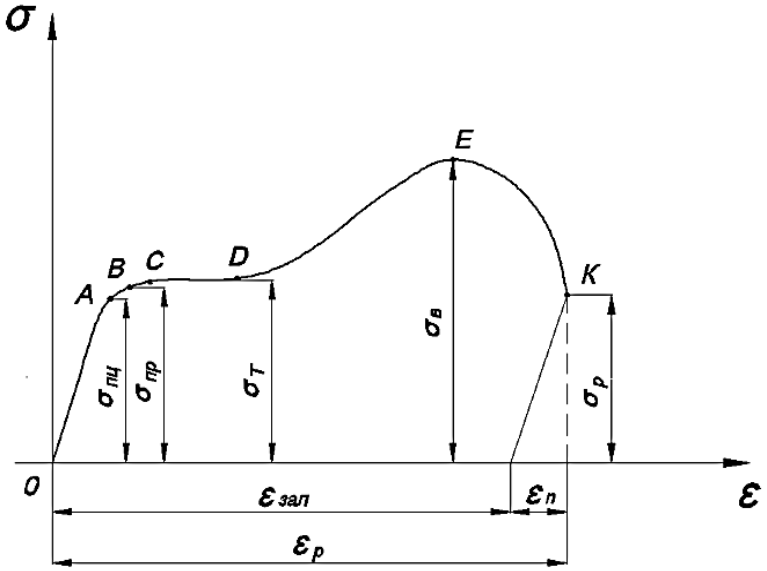


Рис. 5.2. Діаграма розтягання м'якої сталі у відносних координатах σ–ε.

Відповідно до цього отримують такі механічні властивості матеріалу:

а) ***характеристики міцності:***

$\sigma_{пц}$ – границя пропорційності (точка А), найбільш напружена точка, де справедливим є (виконується) закон Гука $\sigma = E\varepsilon$.

$\sigma_{пр}$ – границя пружності (точка В), коли зразок відновлює свої розміри після зняття навантаження (відсутня залишкова деформація).

$\sigma_т$ – границя плинності – матеріал деформується (тече) при сталій величині сили Р.

$\sigma_в$ – тимчасовий опір – це найбільше навантаження, яке витримує зразок.

$\sigma_р$ – напруження в момент руйнування.

б) ***характеристики пластичності:***

- відносне подовження після руйнування:

$$\delta = \frac{\Delta l_{зал}}{l_0} \cdot 100\%; \qquad (5.1)$$

- відносне звуження зразка в точці розриву:

$$\Psi = \frac{F_0 - F_{Ш}}{F_0} \cdot 100\% . \qquad (5.2)$$

де: $l_{зал}$ – залишкова абсолютна деформація;

$F_{ш}$ – площа поперечного перерізу в шийці після руйнування.

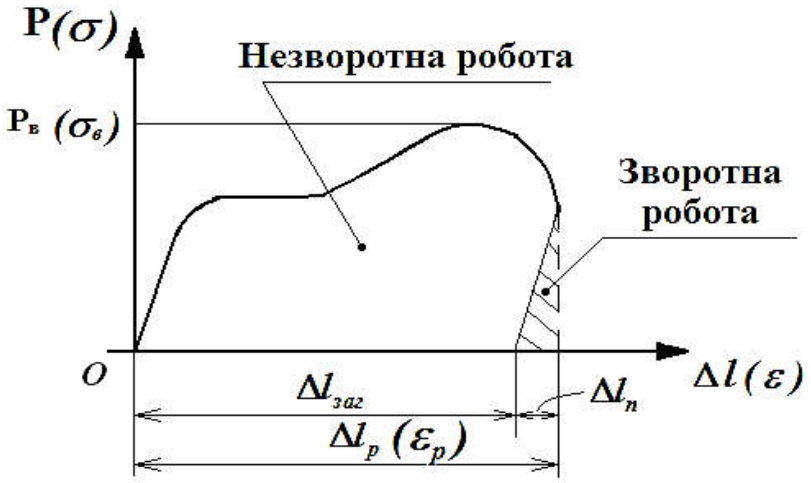


Рис. 5.3. Графічне відображення роботи

в) ***характеристики в'язкості:***

В'язкість – це здатність матеріалу поглинати механічну енергію в незворотному вигляді. Вона характеризується питомою роботою деформації.

Повна робота деформацій визначається (рис. 5.4):

$$A = \eta \cdot P_в \cdot \Delta l_р , \qquad (5.3)$$

η – коефіцієнт повноти діаграми розтягу.

Питома робота – робота, що затрачена на руйнування одиниці об'єму зразка, визначається:

$$u = \frac{A}{V_0} = \eta \cdot \underbrace{\frac{P_в}{F_0}}_{\sigma_B} \cdot \underbrace{\frac{\Delta l_р}{l_0}}_{\varepsilon_P} = \eta \cdot \sigma_в \cdot \varepsilon_р . \qquad (5.4)$$

5.2. Дійсна діаграма розтягу

Умовна діаграма будується за початковими розмірами зразка та не враховує зменшення площі перерізу в шийці. Дійсна діаграма враховує фактичну площу, тому на заключній стадії суттєво відрізняється від умовної; у межах пропорційності вони практично збігаються – цього достатньо для більшості розрахунків.

Розглянута діаграма σ–ε є умовною. Умовність полягає в тому, що не враховується зміна площі поперечного перерізу F_0 і початкової довжини l_0 та рахуємо їх однаковими на всіх етапах навантаження, що не відповідає дійсності. Для дійсної діаграми справджується ряд залежностей:

$$\sigma_Д = \frac{P}{F_Д}; \tag{5.5}$$

$$\Psi = \frac{F_0 - F_Д}{F_0} = 1 - \frac{F_Д}{F_0}; \tag{5.6}$$

$$F_Д = F_0(1 - \Psi); \tag{5.7}$$

Без виведення отримаємо:

$$\varepsilon_Д = \frac{\Psi}{1 - \Psi}. \tag{5.8}$$

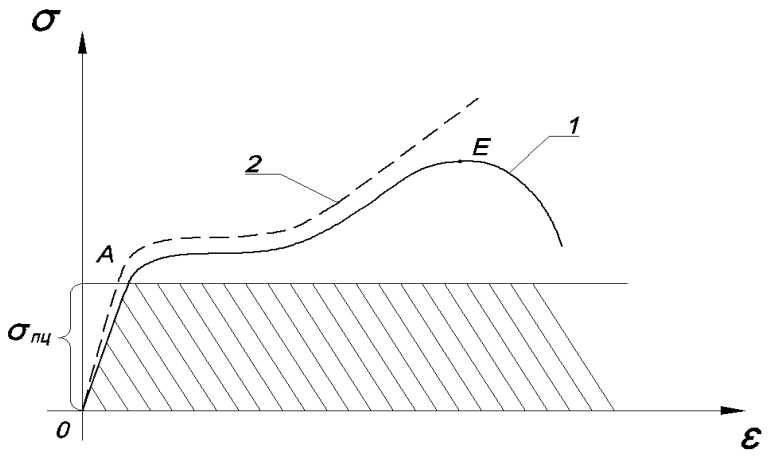


Рис. 5.4. Дійсна (2) та умовна (1) діаграми розтягу м’якої сталі.

Наклавши дійсну діаграму на умовну (рис. 5.4) побачимо, що на початковій стадії (особливо до точки Е) розбіжність між ними невелика, вона починається з моменту утворення шийки.

Оскільки нас цікавить напруження в межах пропорційності (заштрихована зона), то дійсна діаграма має чисто теоретичний інтерес і її використовують лише в спеціальних розрахунках.

5.3. Випробування матеріалів на стиск

За виглядом діаграми матеріали поділяють на пластичні та крихкі. Пластичний матеріал при стиску не руйнується, а сплющується; крихкі матеріали (чавун, бетон) на стиск працюють значно краще, ніж на розтяг.

Анізотропні матеріали, наприклад деревина, мають різну міцність уздовж і впоперек волокон.

У природі всі тверді матеріали поділяються на пластичні та крихкі.

Пластичні матеріали – це такі, у яких діаграма розтягу подібна до діаграми розтягу м'якої сталі.

Крихкі – діаграма подібна діаграмі чавуну.

Зрозуміло, що пластичний матеріал при стиску неможливо зруйнувати (він сплющується), і встановлено, що для пластичних матеріалів механічні характеристики при розтязі і стиску однакові, тому випробування пластичних матеріалів на стиск проводять досить обмежено.

Для крихких матеріалів міцність на стискання значно перевищує міцність на розтяг. Чавун – в 10 – 15 разів, бетон – в 15 – 20 разів.

Під час випробувань на стиск для уникнення проблем стійкості випробовують короткі зразки циліндричної або кубічної форми $h = (2 \div 3)d$. Для випробування деяких матеріалів використовують циліндричний зразок. У результаті випробування він набуває форми бочки і руйнується по площині під кутом 45° до вісі стрижня (рис. 5.5).

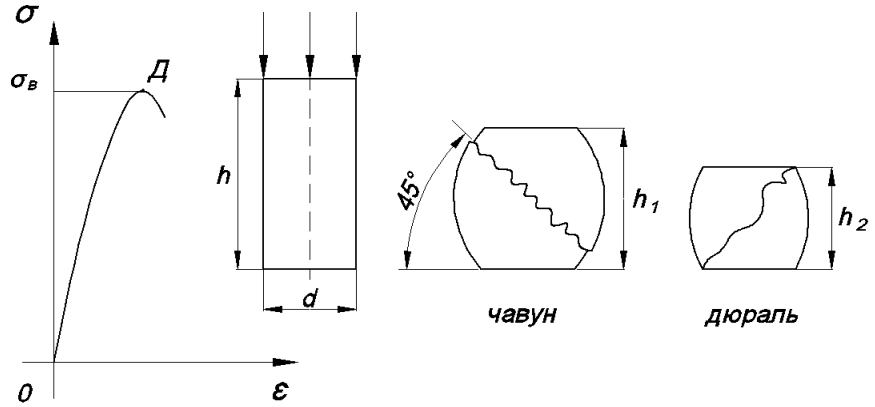


Рис. 5.5. Діаграма «Стиск і характер руйнування зразків крихких матеріалів».

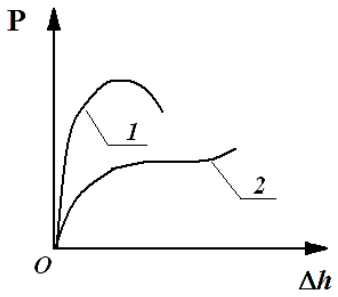


Рис. 5.6. Діаграма стиску дерева:
1 – вздовж волокон; 2 – впоперек волокон.

Особливим є випробування на стиск анізотропних матеріалів (рис. 5.6) таких, як дерево, що відрізняється випробуванням вздовж та впоперек волокон. Міцність деревини вздовж волокон значно вища, ніж впоперек.

5.4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів

> На діаграму впливають температура, радіаційне опромінення, термічна обробка (відпалювання, гартування, відпуск) і швидкість навантаження. З підвищенням температури міцність зазвичай зменшується, гартування підвищує міцність, але знижує пластичність, а зі зростанням швидкості навантаження характеристики міцності збільшуються, а пластичності – зменшуються.

На механічні характеристики матеріалів впливають різні фактори. Розглянемо найбільш суттєві.

Вплив температури – з підвищенням температури характеристики міцності зменшуються, а пластичності збільшуються.

Радіаційне опромінення – загальна характеристика;

– характеристики міцності збільшуються;

– пластичність збільшується.

Для деяких видів пластмас можливим є збільшення пластичності при γ-випромінюванні.

Термічна обробка:

а) *відпалювання* – виконується для зняття початкових напружень, викликаних холодним обробітком деталі. Відпалювання знижує міцність і збільшує пластичність.

б) *гартування* – підвищує міцність і сильно зменшує пластичність (з’являється крихкість).

в) *відпуск* – виконується для зниження крихкості й збільшення пластичності із зниженням міцності.

г) *вплив швидкості навантаження* – із збільшення швидкості навантаження деталі характеристики міцності збільшуються, а пластичності зменшуються (рис. 5.7).

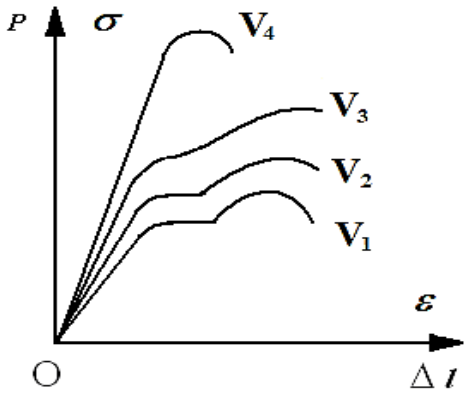


Рис. 5.7. Вплив швидкості навантаження на вид діаграми розтягу $V_4>V_3>V_2>V_1$.

5.5. Потенційна енергія при розтязі-стиску

> У пружній зоні робота зовнішньої сили повністю накопичується в тілі у вигляді потенційної енергії деформації. Вона дорівнює площі під лінією діаграми в пружній стадії. Питома потенційна енергія – це енергія, що припадає на одиницю об'єму матеріалу.

У результаті розтягу матеріалу сила виконує роботу на викликаних деформаціях. При цьому в середині зразка накопичується потенційна енергія (енергія деформацій), за рахунок якої зразок відновлює розміри та форму після зняття навантаження.

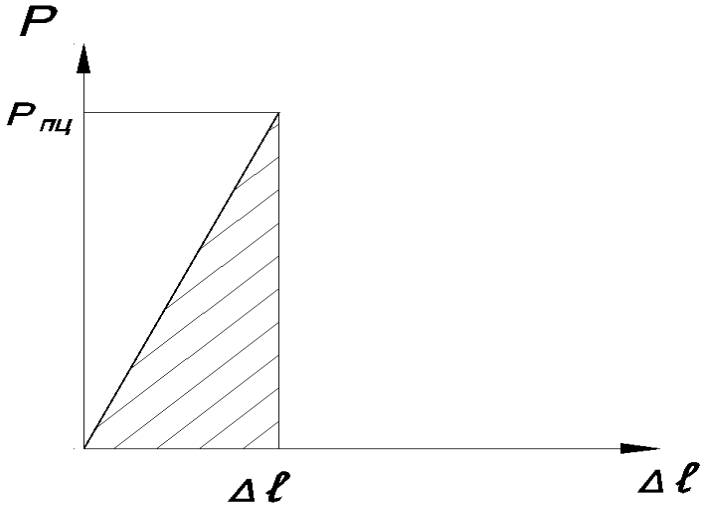


Рис. 5.8. Пружна частина діаграми розтягу-стиску.

У зоні пружних деформацій робота дорівнює потенційній енергії і визначається (рис. 5.8):

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta l \,, \qquad (5.9)$$

Знаючи, що: $\boldsymbol{P = N}$, $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$, можемо отримати:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot F} \tag{5.10}$$

Вираз (5.10) – це повна потенційна енергія.

Питома потенційна енергія – це енергія, затрачена на деформацію одиниці об'єму зразка:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot \Delta l}{F_0 \cdot l_0} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}; \tag{5.11}$$

Враховуючи, що: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

Отримаємо кінцевий вираз:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{5.12}$$

Контрольні запитання до лекції 5

1. Які характерні точки та ділянки має діаграма розтягу м'якої сталі?
2. Як визначають відносне подовження та відносне звуження після розриву?
3. Чим відрізняється умовна діаграма розтягу від дійсної?
4. Чим відрізняється поведінка пластичних і крихких матеріалів при стиску?
5. Як температура та швидкість навантаження впливають на механічні характеристики?
6. Що таке питома потенційна енергія при розтязі-стиску?

Лекція 6. Розрахунок стрижнів при центральному розтягу-стиску

Мета лекції. Після вивчення лекції слід освоїти методи розрахунку на міцність (за руйнівними навантаженнями, допустимими напруженнями та граничними станами), розв'язування статично невизначених систем і врахування неточності виготовлення та температури.

План лекції

6.1. Перевірка міцності та визначення необхідних розмірів стрижня при розтязі-стиску

6.2. Статично-невизначенні системи (СНС) при розтягу- стиску

6.3. Вплив неточності виготовлення деталей і температури на величини зусиль у них

Ключові поняття. умова міцності, допустиме напруження, коефіцієнт запасу, граничні стани, статично невизначена система, рівняння сумісності деформацій, температурні напруження.

6.1. Перевірка міцності та визначення необхідних розмірів стрижня при розтязі-стиску

Розрахунок на міцність застосовують для перевірки існуючих елементів і підбору розмірів нових. Три методи – за руйнівними навантаженнями, за допустимими напруженнями та за граничними станами – по-різному вводять запас міцності. За методом допустимих напружень максимальне напруження не повинно перевищувати допустимого, що дозволяє розв'язувати задачі перевірки міцності, підбору перерізу й визначення допустимого навантаження. Коефіцієнт запасу вводять через розкид дослідних даних, неточність навантажень і методик та похибки виготовлення.

Одним із питань курсу механіки матеріалів і конструкцій є питання практичного характеру, а саме: це визначення розмірів стрижня при заданому навантаженні та матеріалі або ж визначення того допустимого навантаження, яке стрижень здатний сприйняти при заданих розмірах та виді матеріалу.

Актуальною при цьому є проблема економії матеріалів. Для цього необхідно провести спеціальні розрахунки, мета яких – забезпечити надійність і довголіття конструкції. Існують три методи розрахунків:

а) за руйнуючими навантаженнями;

б) за допустимими напруженнями;

в) за граничними станами (спецкурс).

Кожен із методів повинен забезпечити надійність експлуатації системи.

а) Метод руйнуючих навантажень

Умова міцності цього методу полягає в тому, що величина максимального навантаження на стрижень P_{max} не повинна перевищувати допустиме значення [P], яке дорівнює руйнуючому (небезпечному) навантаженню $P_{руйн}$, поділеному на коефіцієнт запасу міцності $n>1$.

$$\mathrm{P}_{\max} \le [P] = \frac{P_{руйн}}{n} \tag{6.1}$$

Величина допустимого навантаження на руйнування [P] приймається залежно від виду матеріалу:

а) для пластичних матеріалів (рис. 6.1).

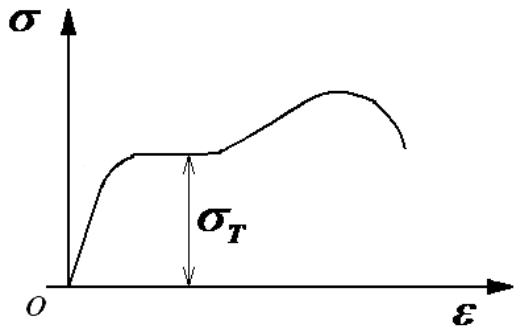


Рис. 6.1. Діаграма розтягу-стиску пластичних матеріалів.

б) для крихких матеріалів (рис.6.2):

$$\mathrm{P}_{\text{руйн}} = \sigma_T \cdot F, \quad [P] = \frac{P_{руйн}}{n} = \frac{\sigma_T \cdot \mathrm{F}}{\mathrm{n}}; \tag{6.2}$$

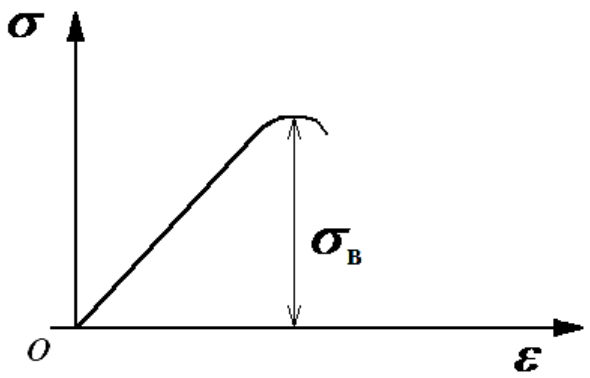


Рис. 6.2. Діаграма розтягу-стиску крихких матеріалів.

$$\mathrm{P}_{\text{руйн}} = \sigma_B \cdot F\ , \qquad [P] = \frac{\sigma_B \cdot \mathrm{F}}{\mathrm{n}}\ ; \tag{6.3}$$

Недолік цього методу полягає в тому, що прийняття однакового ***n*** для пластичних та крихких матеріалів призводить до перевитрат матеріалів у конструкціях, виготовлених із пластичних матеріалів.

б) Метод допустимих напружень

Умова міцності цього методу полягає в тому, що величина максимальних напружень σ_{max} в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиме значення напруження [σ] поділеного на ***n*** – коефіцієнт запасу міцності.

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F_{netto}} \le [\sigma] = \frac{\sigma_{небезп}}{n}\ . \tag{6.4}$$

На основі виразу (6.4) можна розв'язати дві інженерні задачі:

1. Визначити необхідну площу поперечного перерізу стрижня при заданому зусиллі та матеріалі:

$$F_{необ} \ge \frac{N}{[\sigma]}; \tag{6.5}$$

2. Визначити допустиме навантаження на стрижень при заданих розмірах і матеріалі.

$$N_{доп} \le [\sigma] \cdot F\ . \tag{6.6}$$

Величина $[\sigma]$ залежить від матеріалу:

– для крихких матеріалів $[\sigma] = \frac{\sigma_в}{n_1}$;

– для пластичних матеріалів $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_2}$.

Очевидно, що $n_1 > n_2$.

Коефіцієнт запасу міцності ***n*** вводять з таких причин:

а) різниця в дослідних даних σ_T і $\sigma_в$;

б) неможливість точно визначити навантаження;

в) недосконаліть методик розрахунку;

г) неточність виготовлення деталей.

Величина ***n*** залежить:

а) від якості та однорідності матеріалу;

б) від важливості конструкції (умови та термін експлуатації);

в) рівень розвитку техніки.

в) За граничними станами

Розрахунки проводять за двома групами граничних станів:

1) за тримальною здатністю (міцністю);

2) за придатністю до нормальної експлуатації (жорсткість, наявність тріщин).

При цьому справджується рівність:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \le R; \tag{6.7}$$

R – розрахунковий опір матеріалу;

$$R = \frac{R^н}{n}; \tag{6.8}$$

$R^н$ – нормативний опір (приводиться в нормах);

n – коефіцієнт запасу міцності;

N розрахункове навантаження.

$$N = N_1^н \cdot K_1^н + N_2^н \cdot K_2^н + ... + N_n^н \cdot K_n^н,$$

де: $N_i^н$ – нормативне навантаження;

$K_i^н$ – коефіцієнт перевантаження.

6.2. Статично-невизначенні системи (СНС) при розтягу- стиску

> Система є статично невизначеною, якщо зусилля в її елементах неможливо знайти лише з рівнянь статики. Різниця між кількістю невідомих зусиль і числом рівнянь статики – ступінь статичної невизначеності. Для її розкриття до рівнянь статики додають рівняння сумісності деформацій і закон Гука. Задачу розв'язують у чотири кроки: статична, геометрична та фізична сторони й синтез.

Під час розв'язання задач міцності та жорсткості при розтягу-стиску у розрахункові формули: $\sigma = \frac{N_Z}{F}$; $\Delta l = \frac{N_Z \cdot l}{E \cdot F}$ входить поздовжня сила N_z, з визначення якої починається розрахунок.

У тому разі, якщо N_z визначається за допомогою рівнянь статики задача є статично визначеною.

У практиці інженерних розрахунків зустрічаються системи, зусилля в стрижнях яких неможливо визначити за допомогою рівнянь статики, оскільки їх більше ніж цих рівнянь. Такі системи називають статично невизначеними (СНС).

Різниця між кількістю невідомих зусиль і числом рівнянь статики, які можемо скласти для їх визначення, називається ступенем статичної невизначеності системи.

Для розкриття статичної невизначеності системи, окрім рівнянь статики (*статична сторона задачі*), складають додаткові рівняння, що пов'язують між собою додаткові невідомі зусилля. Такі рівняння отримують, розглянувши деформацію системи. Вони пов'язують між собою деформації стрижнів з невідомими зусиллями. Їх називають рівняннями сумісності деформацій (*геометрична сторона задачі*). Оскільки нас цікавить не деформація, а зусилля, то за допомогою закону Гука $\Delta l = \frac{N_z l}{EF}$ виражаємо деформації через зусилля (*фізична сторона задачі*).

Сумісне розв'язання рівнянь статики і рівнянь сумісності деформацій означає розкриття статичної невизначеності системи (*синтез різних сторін задачі*).

Приклад: Визначити максимальні напруження в призматичному стрижні, затисненому обома кінцями і завантаженого силою P, що зображено на рис. 6.3.

1) Статична сторона задачі:

Відкидаючи затиснення та складаючи рівняння статики, отримуємо:

$\Sigma Z = 0$;

$$\Sigma Z = P - R_A - R_B = 0, \;\; R_A + R_B = P$$

2) Геометрична сторона задачі: $\Delta l = 0$.

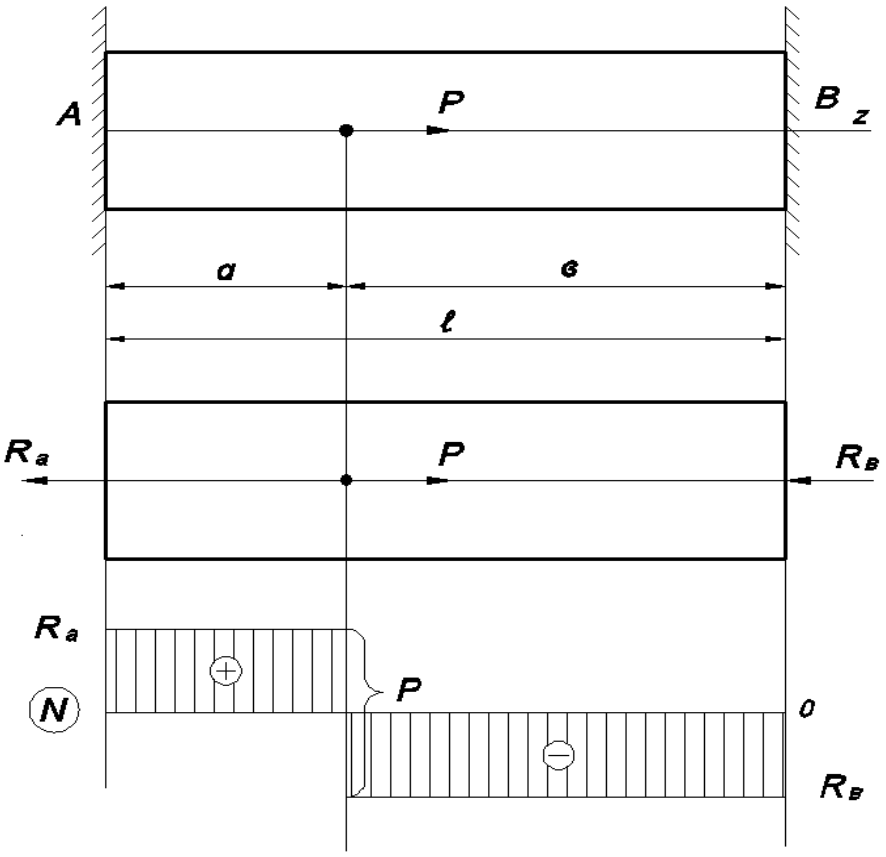


Рис. 6.3. Схема завантаження та епюра N_z до прикладу

3) Фізична сторона задачі:

Деформацію можна представити двома способами (вирази 6.9. та 6.10):

$$\Delta l = \frac{P \cdot a}{E \cdot F} - \frac{R_B \cdot l}{E \cdot F} = 0; \tag{6.9}$$

або

$$\Delta l = \frac{(P - R_B) \cdot a}{E \cdot F} - \frac{R_B \cdot b}{E \cdot F} = 0. \tag{6.10}$$

4) Синтез різних сторін задачі:

Із виразу (6.9) знаходимо, що:

$$R_B = P \cdot \frac{a}{l};$$

Із рівняння статики ($P = R_a + R_B$): $R_A = P \cdot \frac{в}{l}$

Побудуємо епюру N_z.

Знайдемо максимальні напруження $\sigma_{\max} = \frac{R_A}{F} = \frac{P \cdot в}{F \cdot l}$.

6.3. Вплив неточності виготовлення деталей і температури на величини зусиль у них

> У статично невизначених системах неточність виготовлення елемента та зміна температури викликають додаткові зусилля навіть без зовнішнього навантаження. У статично визначених системах нагрівання лише подовжує стрижень і напружень не створює, а при закріпленні обох кінців це подовження обмежується – виникають температурні напруження.

Приклад 1. Жорсткий брус необхідно шарнірно закріпити в точці А і підвісити за допомогою двох стрижнів (рис. 6.4).

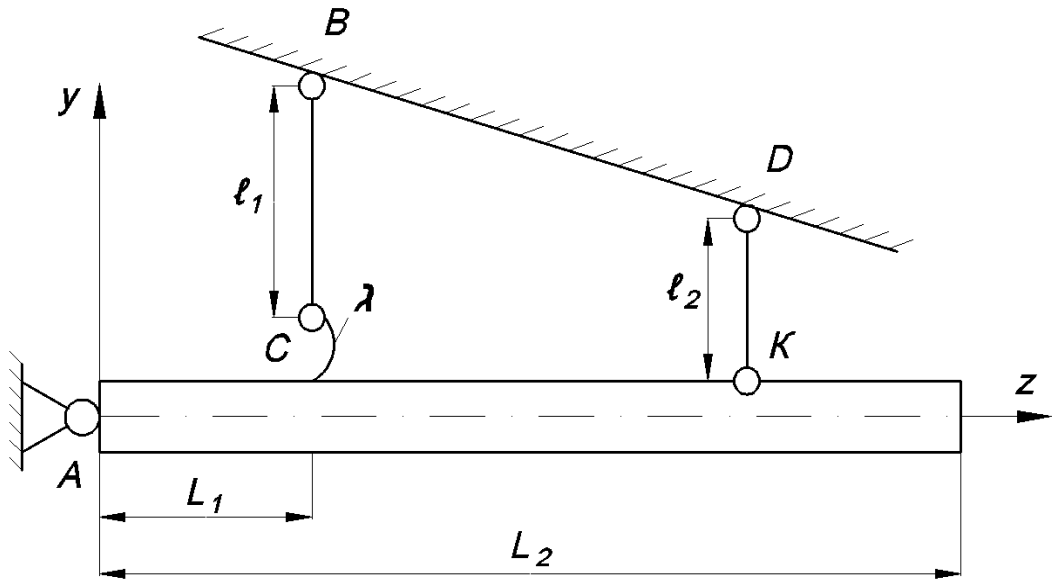


Рис. 6.4. Схема статично невизначеного брусу.

Під час виготовлення стрижня ВС допущено технологічну неточність – його зроблено коротшим на величину λ. Під час монтажу системи довелося витягнути цей стрижень, що викликало зусилля в іншому. Знайти зусилля у стрижнях ВС і DK.

А) Статична сторона задачі.

Виділяємо абсолютно жорсткий брус і докладаємо до нього зусилля реакцій відкинутих в’язей (план сил). Використовуємо з теоретичної механіки таке твердження: якщо стрижень невагомий, на кінцях має шарнірні з’єднання, то реакція цього стрижня напрямлена пл. стрижню. Реакції N_1 і N_2 напрямлені по стрижнях (рис. 6.5).

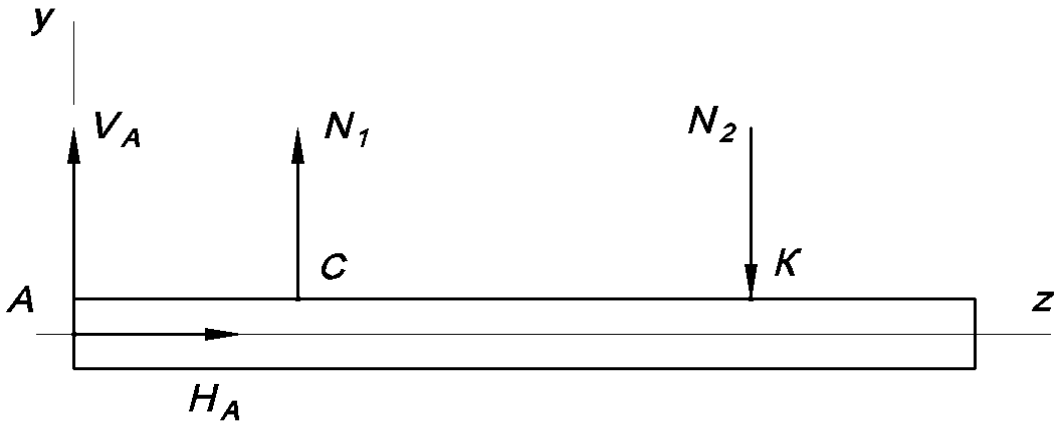


Рис. 6.5. План сил.

Рівняння статики:

1) $\Sigma Z = 0\,;\ H_A = 0\,;$

2) $\Sigma_Y = 0\,;\ \Sigma_Y = V_A + N_1 - N_2 = 0\,;$

3) $\Sigma M_a = 0\,;\ \mathrm{N_1 \cdot L_1 - N_2 \cdot L_2 = 0}\,.$ (6.11)

Система один раз статично невизначена (чотири невідомих зусилля і три рівняння статики).

Б) Геометрична сторона задачі (рис. 6.6).

Надамо брусу АК можливість переміщення. В даному випадку брус має можливість обертатися навколо точки А. Повернемо брус на малий кут dφвідносно точки А. Тоді точки С і К кріплення стрижнів будуть рухатись по дугам радіусами АС і АК. Внаслідок того, що кут dφ малий, то криволійнійні переміщення точок С і К замінимо прямолінійними відрізками CC_1 і KK_1.

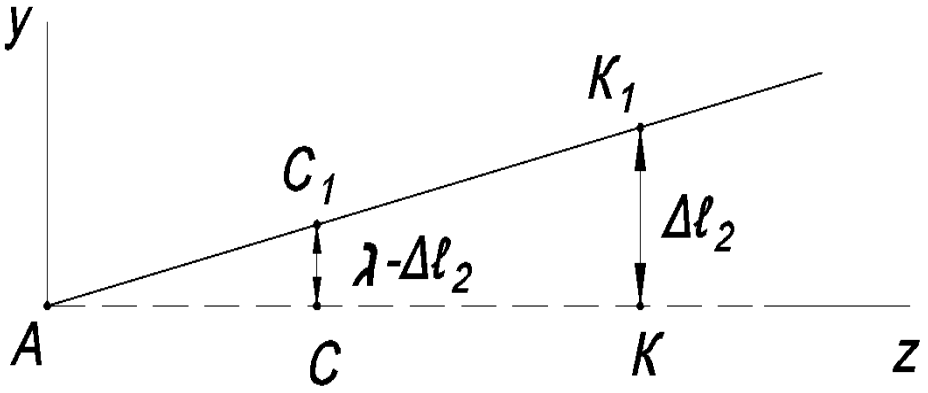


Рис. 6.6. План переміщень.

Із подібності трикутників маємо:

$$\frac{KK_1}{AK} = \frac{CC_1}{AC}\ \text{, або}\ \frac{\Delta l_2}{L_2} = \frac{\lambda - \Delta l_1}{L_1}$$

Звідси маємо:

$$\Delta l_2 \cdot L_1 = (\lambda - \Delta l_1) L_2 . \qquad (6.12)$$

в) Фізична сторона задачі: розпишемо деформації за допомогою закону Гука.

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} \cdot L_1 = (\lambda - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1}) \cdot L_2 \qquad (6.13)$$

г) Синтез різних сторін задачі:

Розв'язавши сумісно (6.11) та (6.12) маємо:

$$N_1 = \lambda \cdot \frac{L_2^2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot E}{l_2 \cdot L_1^2 \cdot F_1 + l_1 \cdot L_2^2 \cdot F_2} ; \qquad (6.14)$$

$$\mathrm{N}_2 = \lambda \cdot \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot E}{l_2 \cdot F_1 \cdot L_1^2 + l_1 \cdot F_2 \cdot L_2^2} . \qquad (6.15)$$

Висновок: у статично невизначених системах наявність зусилля в одному із стержнів викликає зусилля у всіх інших, тобто відбувається перерозподіл зусиль на всі стрижні системи.

Приклад 2. Визначити напруження від рівномірного нагрівання призматичного стрижня, затисненого обома кінцями (рис.6.7).

Система статично невизначена один раз.

Відкинемо праве затиснення.

Рівняння сумісності деформацій:

$\boldsymbol{\Delta l = 0}$.

Або ж:

$$\Delta l_t = \Delta l_N . \qquad (6.16)$$

Розпишемо деформації:

а) від нагрівання стрижня:

$$\Delta l_t = l \cdot \alpha \cdot t^0 , \qquad (6.17)$$

де: α – коефіцієнт лінійного розширення;

t^0 – температура, на яку нагріто стрижень.

$\Delta l_N = \frac{Nl}{EF}$ – закон Гука. (6.18)

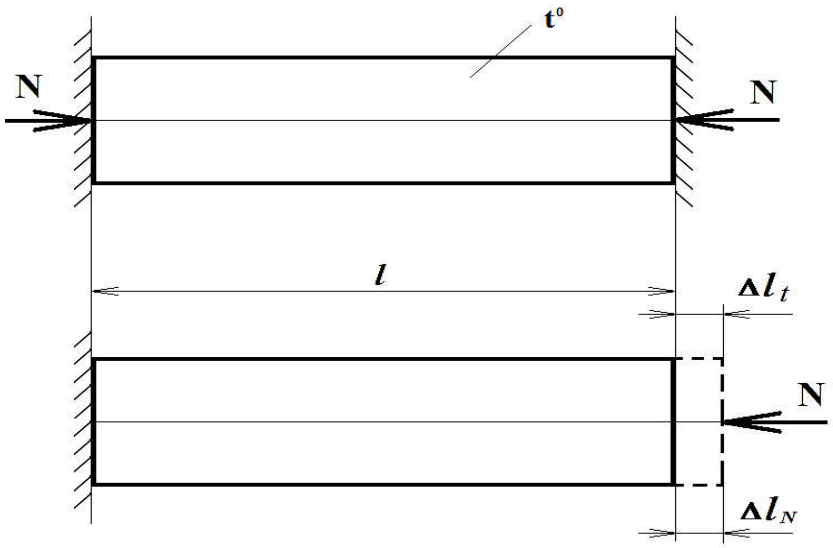


Рис. 6.7. Схема до прикладу 2.

Підставивши вирази (6.17) і (6.18) у вираз (6.16), отримаємо:

$$\frac{Nl}{EF} = l \cdot \alpha \cdot t^0, \tag{6.19}$$

Звідки:

$$\mathrm{N} = \mathrm{E} \cdot \mathrm{F} \cdot \alpha \cdot \mathrm{t}^0, \tag{6.20}$$

Напруження визначиться за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} = E \cdot \alpha \cdot t^0. \tag{6.21}$$

Контрольні запитання до лекції 6

1. У чому полягають методи розрахунку за руйнівними навантаженнями, допустимими напруженнями та граничними станами?
2. Від чого залежить коефіцієнт запасу міцності?
3. Яку систему називають статично невизначеною та як визначити ступінь невизначеності?
4. З яких етапів складається розв’язання статично невизначеної задачі?
5. Чому нагрівання стрижня, закріпленого обома кінцями, викликає напруження?

Лекція 7. Напружений стан у точці

Мета лекції. Після вивчення лекції слід засвоїти поняття напруженого стану в точці, закон парності дотичних напружень, навчитися визначати напруження в нахилених площинах, головні та екстремальні напруження й користуватися колом Мора.

План лекції

7.1. Напружений стан в точці

7.2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані (ПНС)

7.3. Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані

7.4. Головні напруження та головні площини

7.5. Екстремальні дотичні напруження

7.6. Коло Мора

Ключові поняття. напружений стан, плоский напружений стан, закон парності дотичних напружень, головні напруження, головні площадки, екстремальні дотичні напруження, коло Мора.

7.1. Напружений стан в точці

Через точку тіла можна провести безліч площадок, і на кожній діють свої напруження. Сукупність напружень на всіх площадках, що проходять через точку, називають напруженим станом у точці. Його описують напруженнями на гранях елементарного паралелепіпеда. Залежно від кількості ненульових головних напружень розрізняють лінійний, плоский та об’ємний напружені стани.

На відміну від центрального розтягу-стиску, в загальному випадку навантаження тіла задача з визначення σ_{max} та τ_{max} є досить складною. Тобто виникає проблема так званого напруженого стану в точці (рис. 7.1).

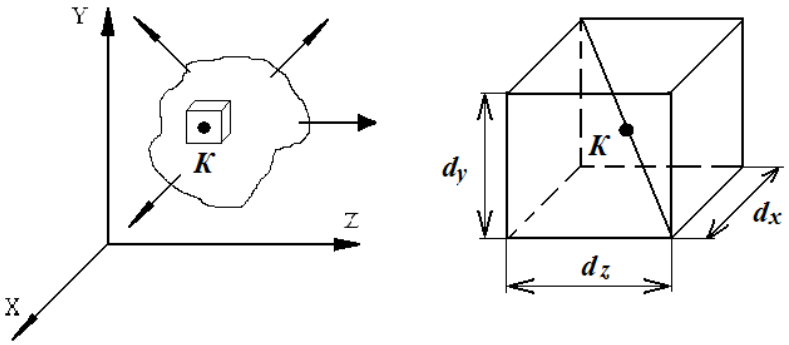
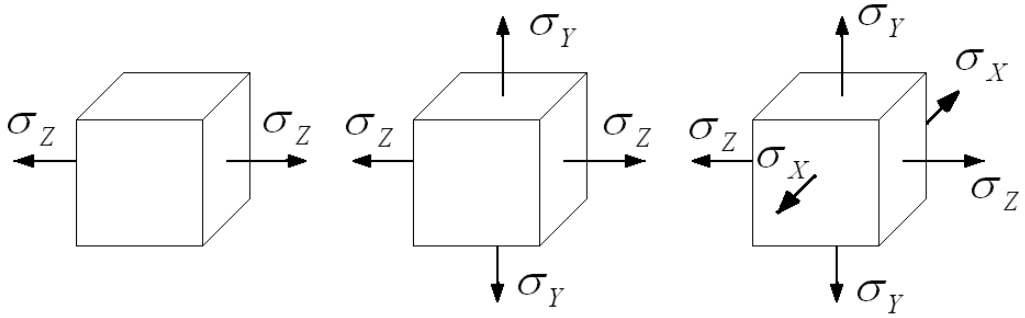


Рис. 7.1. Напружений стан у точці.

Напруженим станом у точці називають сукупність нормальних σ та дотичних τ напружень у всіх площинах, що проходять через задану точку.

Для з'ясування цього питання навколо точки K вирізають елементарний паралелепіпед (рис. 7.1). Внаслідок невеликої площі сторін вважають, що напруження у всіх точках його середини однакові й дорівнюють напруженням у точці K. Напруження на гранях паралелепіпеда розподілені рівномірно. Якщо припустити, що напруження на гранях нам відомі, то розітнувши паралелепіпед площиною, що проходить через точку K, за допомогою рівнянь статики, знаходять σ та τ на цій площині, виразивши їх через відомі напруження на гранях паралелепіпеда.

Існує таке положення паралелепіпеда, коли грані вільні від τ , а діють тільки σ. При цьому існують три види напруженого стану (рис.7.2): ***лінійний***, ***плоский***, ***об'ємний***.



а) б) в)

Рис. 7.2. Напружені стани в точці:
а – лінійний одноосьовий; б – плоский двохосьовий;
в – об'ємний трьохосьовий.

На практиці найбільше розповсюдження отримав плоский напружений стан (ПНС) (рис. 7.3).

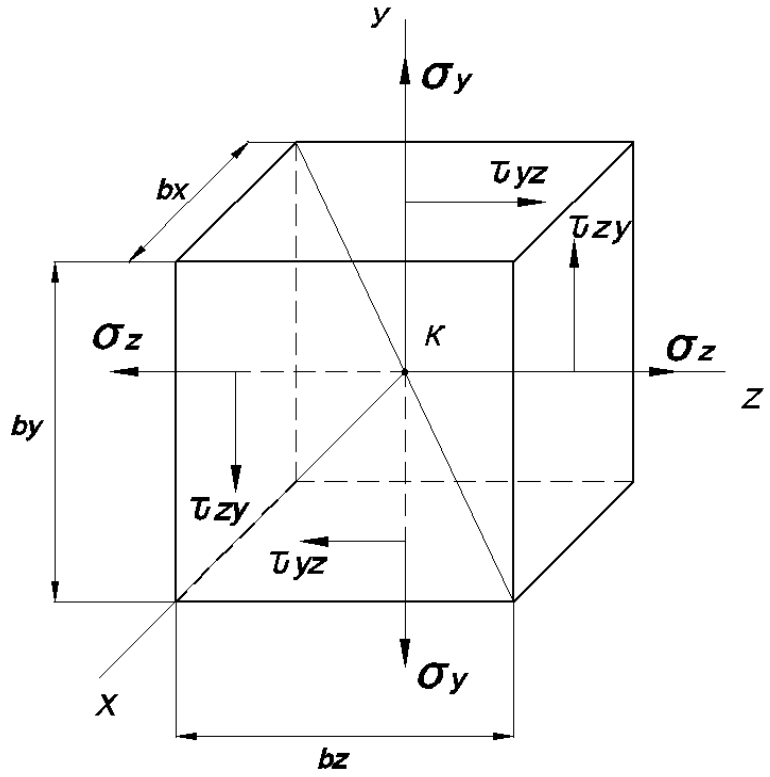


Рис. 7.3. Плоский напружений стан.

Правило знаків:

$\sigma > 0$, коли викликає розтяг;

Знак τ визначається за правилом зовнішньої нормалі: якщо нормаль до площини збігається з додатним напрямом осі, то $\tau > 0$ якщо його напрям відповідає додатному напряму відповідної вісі (рис. 7.4).

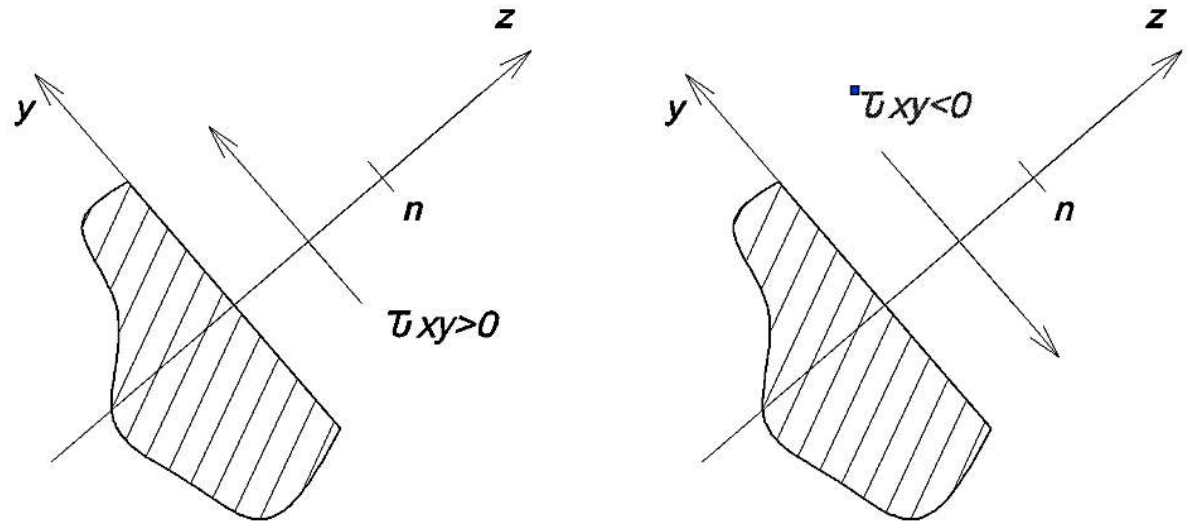


Рис. 7.4. Правило знаків для дотичних напружень τ.

7.2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані (ПНС)

На двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження однакові за величиною й напрямлені так, що обидва або до спільного ребра, або від нього. Це закон парності дотичних напружень; він випливає з рівноваги елемента та суттєво спрощує аналіз плоского напруженого стану.

Оскільки об'єкт знаходиться в рівновазі, то маємо суму моментів відносно точки К, яка дорівнює нулю (рис.7.3).

$$\sum M_K = 0,\ (\tau_{zy} \cdot dy \cdot 1)dz - (\tau_{yz} \cdot dz \cdot 1)dy = 0. \qquad (7.1)$$

Звідки матимемо:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} \qquad (7.2)$$

Вираз 7.2. – ***закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані***.

Тобто у двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження рівні за величиною і напрямлені так, що прагнуть обертати площини у різні сторони (рис.7.5):

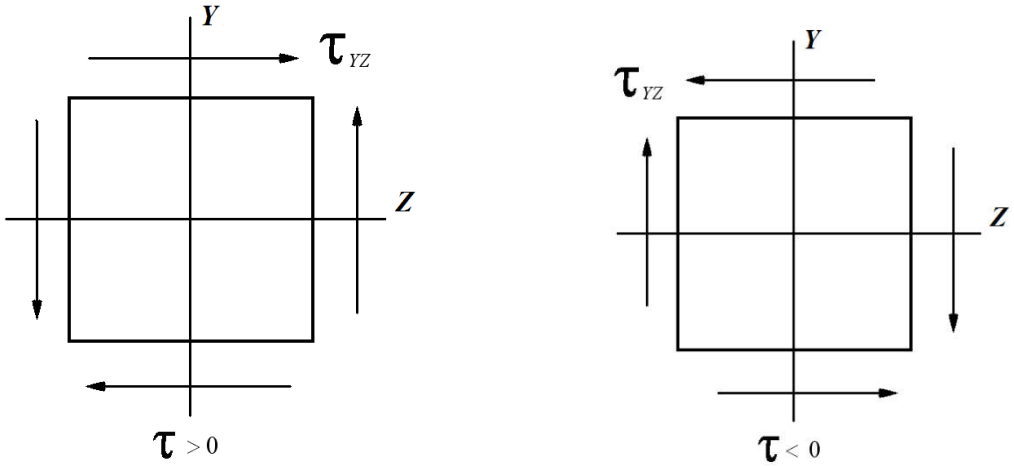


Рис. 7.5. Закон парності дотичних напружень.

7.3. Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані

Площадку, нахилену під заданим кутом, розсікають і з умов рівноваги відсіченої частини знаходять нормальне та дотичне напруження на ній. Так за відомими напруженнями на двох взаємно перпендикулярних площадках

визначають напруження на будь-якій іншій; сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках від кута не залежить.

Розітнемо елементарний паралелепіпед (рис. 7.3) площиною, перпендикулярною площині *ZKY*, нахиленою під кутом α до осі *z*і розглянемо рівновагу нижньої відсіченої частини (рис 7.6).

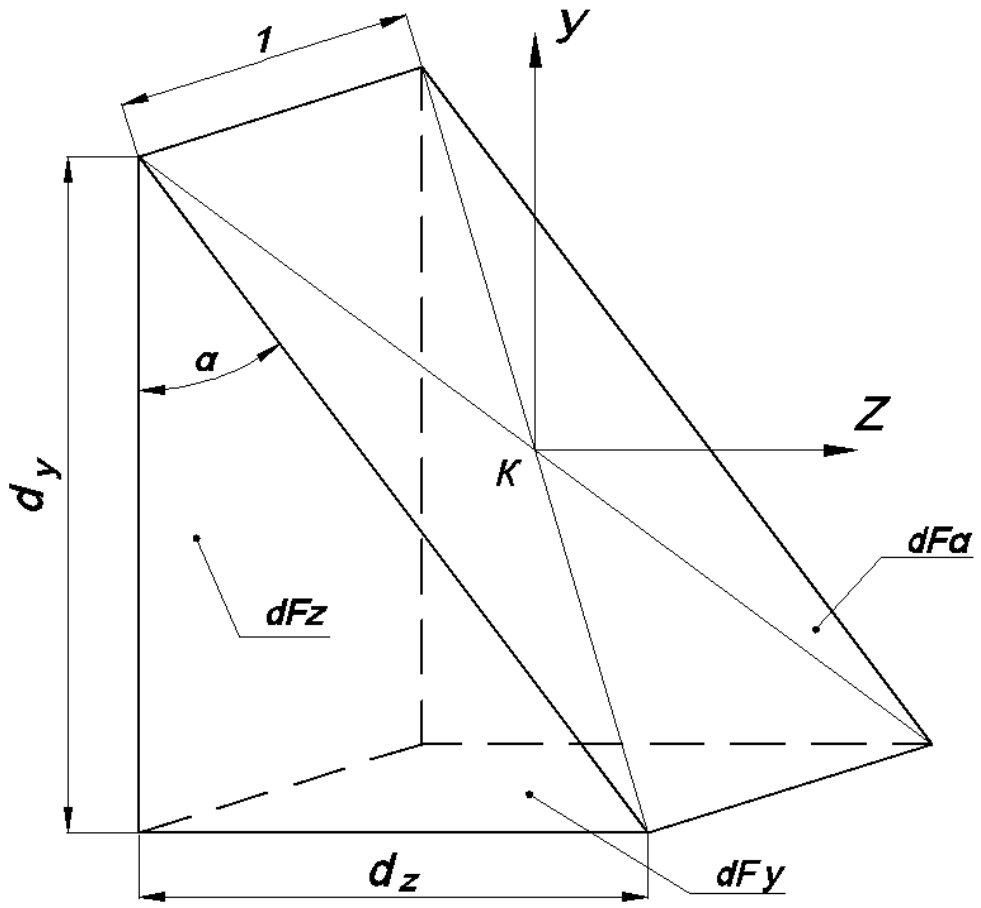


Рис. 7.6. Розсічена нижня частина паралелепіпеда.

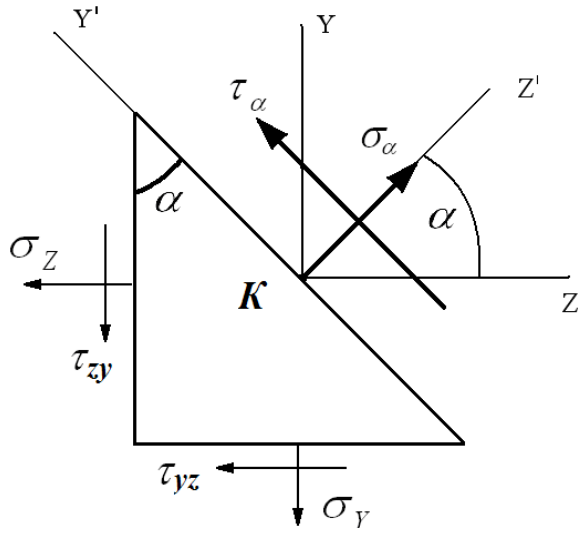


Рис. 7.7. Відсічена частина паралелепіпеда на площині.

Положення нахиленої площини визначається кутом α – це кут між нормаллю до площини і додатним напрямком вісі z(рис. 7.7).

Правило знаків: $\alpha > 0,$ якщо відповідає короткому шляху повертання осі z до y (проти годинникової стрілки).

Очевидно, що:
$$\begin{cases} dFz = dF_\alpha \cdot \cos\alpha \\ dFy = dF_\alpha \cdot \sin\alpha \end{cases} \quad (7.3)$$

Для знаходження σ_α та τ_α спроектуємо всі зусилля на осі z' та y'.

$$\sum Z' = 0;\ \sigma_\alpha - \sigma_z \cos\alpha - \tau_{yz} \cos\alpha - \tau_{zy} \sin\alpha = 0$$

$$\sum y' = 0;\quad \tau_\alpha - \tau_y \cos\alpha - \tau_{yz} \sin\alpha - \tau_{zy} \cos\alpha = 0$$

Виконуючи це, використавши вираз (7.2) та (7.3) і здійснюючи тригонометричні перетворення, отримаємо:

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha \quad (7.4)$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha \quad (7.5)$$

Враховуючи, що: $\cos^2 = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, $\sin^2 = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

Вираз 7.5 набуває вигляду:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha \quad (7.6)$$

Підставивши у вираз 7.6 замість $\alpha \to \alpha + 90,$ отримаємо:

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha \quad (7.7)$$

Склавши вирази (7.6) і (7.7), отримаємо властивість інваріантності нормальних напружень при плоскому напруженому стані (рис.7.8):

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_z + \sigma_y = const\ . \quad (7.8)$$

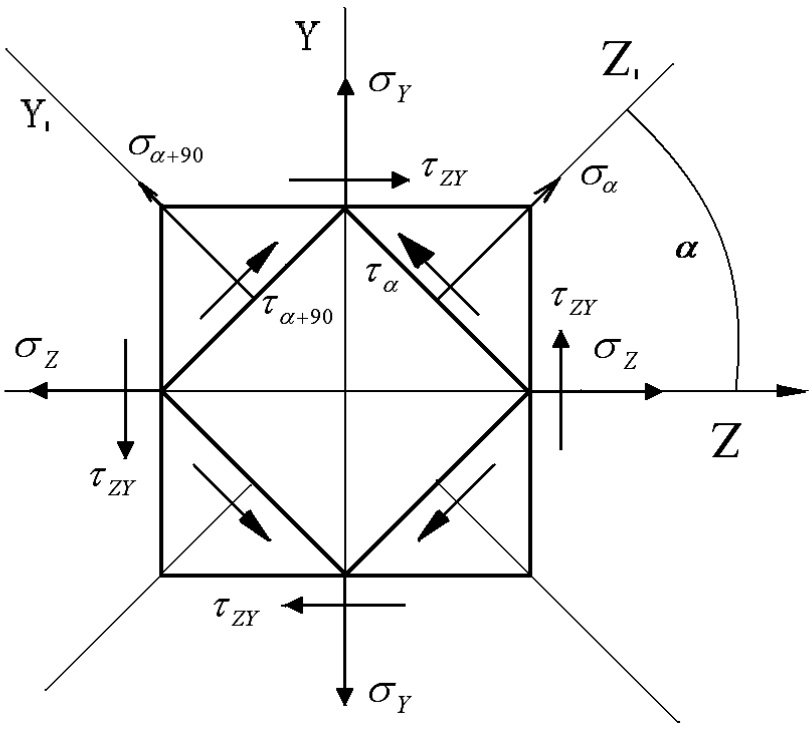


Рис. 7.8. Зображення інваріантності напружень.

Тобто сума нормальних напружень у двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через довільну точку є величиною постійною.

7.4. Головні напруження та головні площини

> Головні площадки – це площадки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю; нормальні напруження на них називають головними та позначають σ1 ≥ σ2 ≥ σ3. Положення головних площадок і значення головних напружень знаходять з умови рівності нулю дотичного напруження.

Якщо повертати координатні осі z та y (рис.7.8), то будуть змінюватися напруження σ_α та τ_α. Відповідно до виразу (7.8), очевидно, що при деякому куті α_0, нормальні напруження σ набувають екстремальних значень, тобто одне буде максимальним, а інше мінімальним. Для цього візьмемо першу похідну від виразу 7.6 по α_0:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha_0} = 2(\underbrace{-\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{zy}\cdot\cos 2\alpha_0}_{\tau_\alpha}) = 0, \qquad (7.9)$$

або ж: $$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha_0} = 2\cdot\tau_\alpha = 0. \qquad (7.10)$$

Тобто з'ясовано, що в площинах, у яких діють екстремальні нормальні напруження ($\sigma_{\max}$ або $\sigma_{\min}$), дотичні напруження дорівнюють нулю ($\tau = 0$). Площини, де діють екстремальні напруження σ, $\tau = 0$ називають ***головними площинами***, а нормальні напруження, що виникають у них – ***головними напруженнями***.

Для визначення положення цих площин, розділимо вираз 7.9 на $\cos 2\alpha$, і отримаємо:

$$tg\,2\alpha_0 = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}. \qquad (7.11)$$

Підставимо 7.11 у формулу 7.6, зробимо перетворення та отримаємо вираз для визначення головних напружень (7.12).

$$\sigma_{\substack{\max\\\min}} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \qquad (7.12)$$

Візьмемо елементарну площину і зобразимо всі напруження (рис. 7.9). Візуально бачимо, що σ_{max} діє у тих чвертях, де сходяться дотичні напруження τ_{zy} і τ_{yz}.

Формула для визначення кута повороту головних площин така:

$$tg_{1,2} = \frac{\tau_{zy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y}. \qquad (7.13)$$

7.5. Екстремальні дотичні напруження

Екстремальні дотичні напруження діють на площадках, нахилених під кутом 45° до головних, і дорівнюють половині різниці головних

напружень. Окремий випадок – чистий зсув, коли на площадках діють лише дотичні напруження.

Один і той же напружений стан може бути заданий різними вихідними даними – різними площинами та напруженнями в них. Оскільки на головних площинах відсутні дотичні напруження τ, то вони найбільш просто визначають напружений стан у точці.

Приймають, що: $\sigma_1 > \sigma_2$

Звідси вираз (7.5) і (7.6) набувають вигляду:

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \tag{7.14}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha \tag{7.15}$$

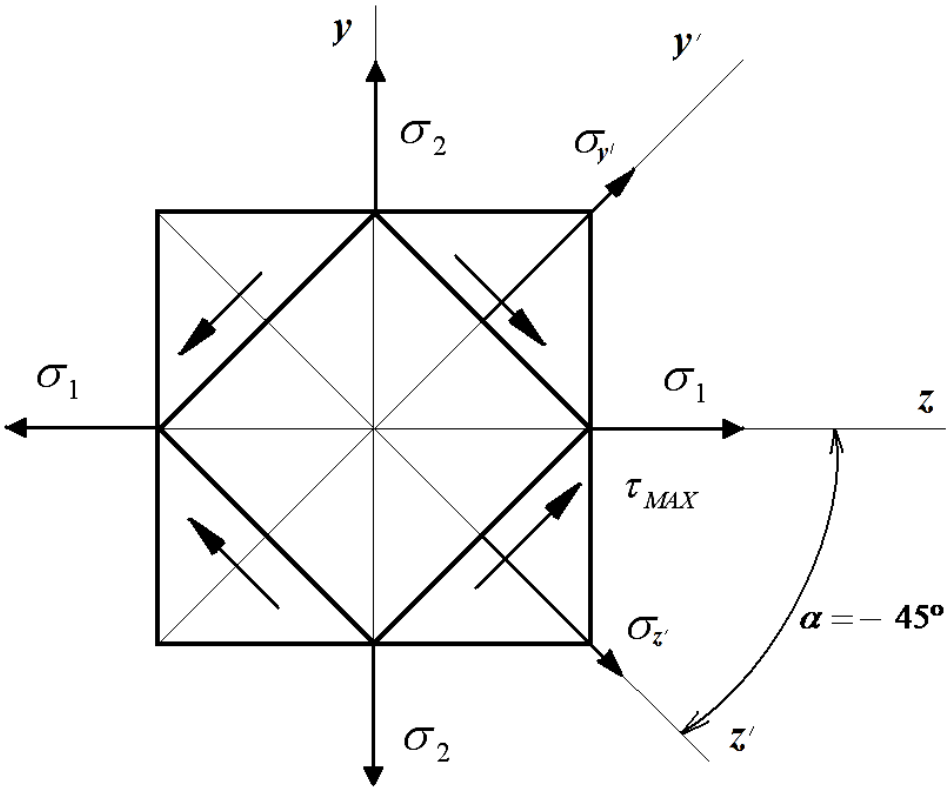


Рис. 7.9. Екстремальні дотичні напруження.

Із аналізу виразу (7.14) очевидно, що τ_{max} буде при куті $\alpha = -45°$ (рис.7.9), тобто:

$$\tau_{(\alpha=-45)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{7.16}$$

Якщо підставити вираз (7.12) у вираз (7.16), то отримаємо вираз для визначення максимальних дотичних напружень τ через напруження, у будь-яких площинах:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2} \ . \qquad (7.17)$$

Із виразу 7.15 очевидно, що в площинах з екстремальними дотичними напруженнями нормальні напруження не дорівнюють нулю, і визначаються за формулою:

$$\sigma_{\alpha=-45} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_Z + \sigma_Y}{2} = const. \qquad (7.18)$$

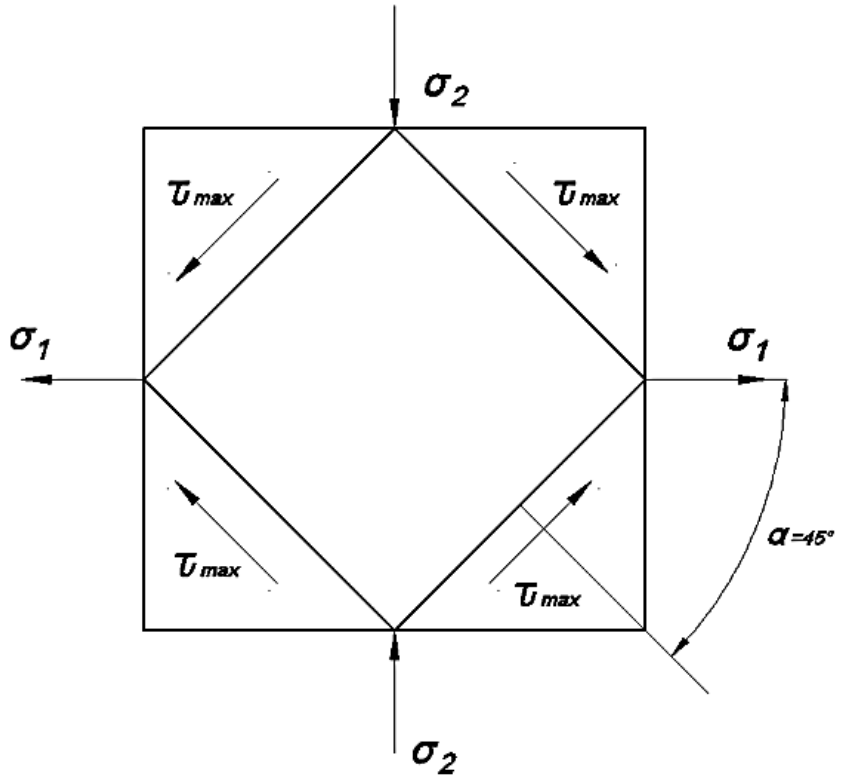


Рис. 7.10. Чистий зсув.

В єдиному випадку, коли $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ (рис. 7.10) у площинах з екстремальними дотичними напруженнями із виразу (7.18) нормальні напруження відсутні. Це єдиний випадок напруженого стану, який називається ***чистим зсувом***.

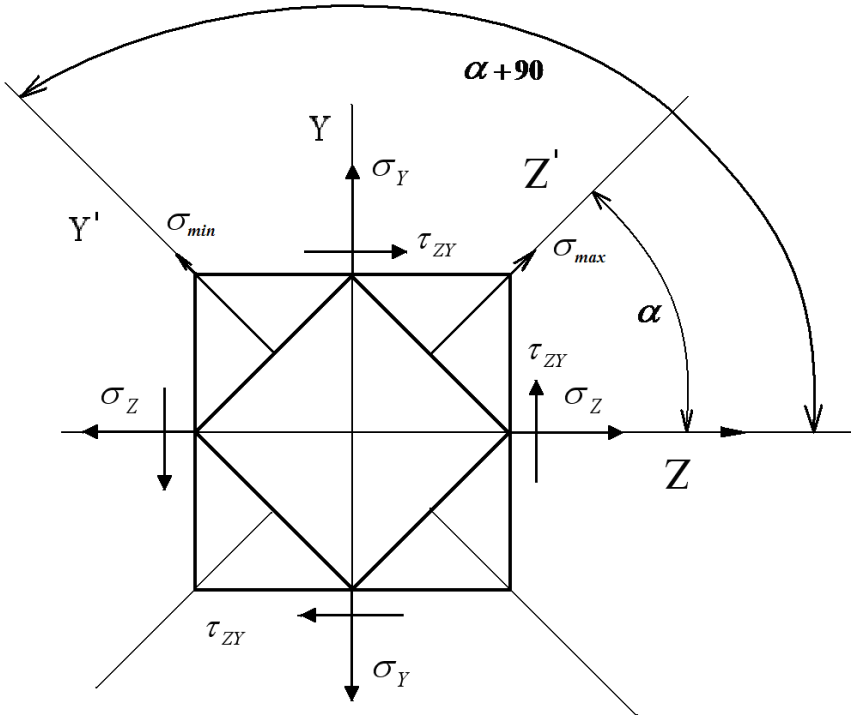


Рис. 7.11. Головні нормальні напруження.

7.6. Коло Мора

> Коло Мора – графічне зображення плоского напруженого стану: точки кола відповідають напруженням на всіх площадках, що проходять через точку. За колом наочно знаходять головні та екстремальні напруження й перевіряють аналітичні розрахунки.

Поряд з аналітичним розв'язанням задач напруженого стану в точці, їх можна вирішувати графічним методом за допомогою кола Мора. Вирази (7.14) і (7.15) мають просту геометричну інтерпретацію.

Приймемо $\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=a$; $\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=R$.

Підставивши у вираз (7.19):

$$\begin{cases}\sigma_\alpha=\dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha\\ \tau_\alpha=-\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha\end{cases} \tag{7.19}$$

матимемо:

$$\sigma_\alpha=a+R\cos 2\alpha. \tag{7.20}$$

$$\tau_\alpha=-R\sin 2\alpha \tag{7.21}$$

Вирази (7.20) і (7.21) – рівняння кола в параметричному вигляді.

Тобто розв'язання задач визначення σ_α і τ_α, а також знаходження площин, в яких вони виникають, можливо здійснювати за графічним зображенням (рис. 7.12).

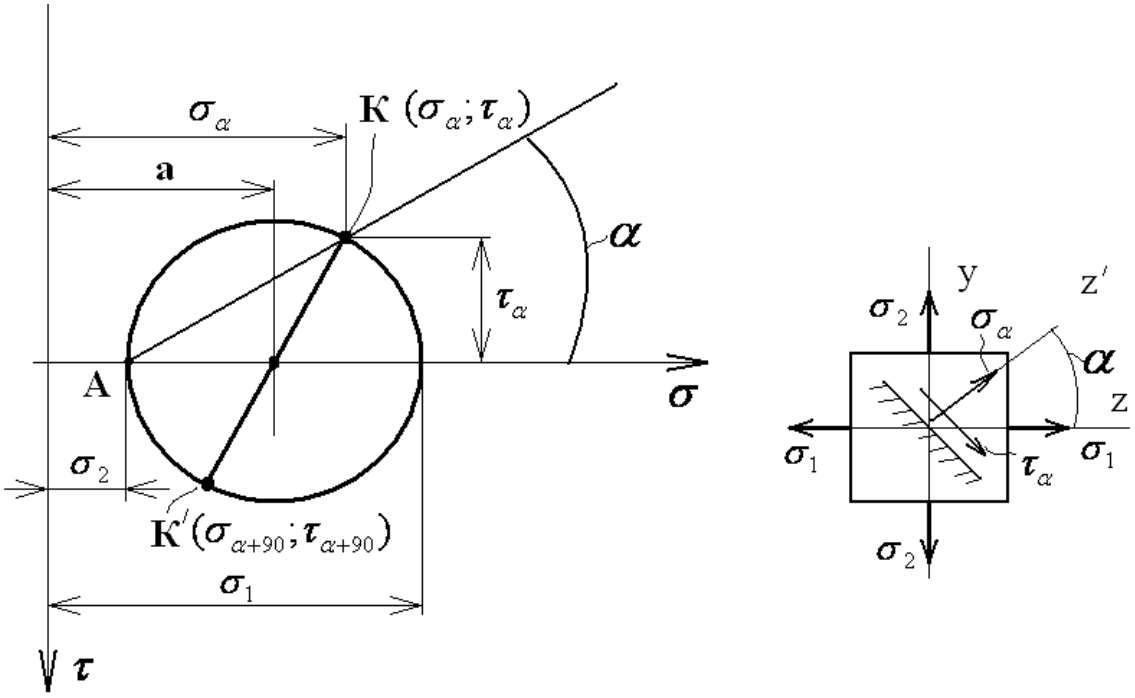


Рис. 7.12. Коло Мора.

Точку К називають визначальною, що визначає напружений стан в площині з кутом α, а точка К′ визначає напружений стан у площині з кутом α+90.

Додатний напрямок τ вниз викликаний тим, що при прийнятому додатному значенні кута α проти годинникової стрілки у виразі 7.14 τ повинно бути від'ємним.

Можливим є: вирішення зворотної задачі – за напруженням σ і τ у довільних площинах визначають значення головних напружень та положення площин, в яких вони виникають.

Контрольні запитання до лекції 7

1. Що називають напруженим станом у точці? Які бувають види напружених станів?
2. Сформулюйте закон парності дотичних напружень.
3. Як визначити напруження на площадці, нахиленій під заданим кутом?
4. Що таке головні площадки та головні напруження?
5. Як побудувати коло Мора для плоского напруженого стану?

Лекція 8. Деформований стан у точці. Узагальнений закон Гука

Мета лекції. Після вивчення лекції слід засвоїти поняття деформованого стану в точці та головних деформацій, аналогію між напруженим і деформованим станами, узагальнений закон Гука та вираз питомої потенціальної енергії при об'ємному напруженому стані.

План лекції

8.1. Головні деформації

8.2. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці

8.3. Узагальнений закон Гука при об'ємному та плоскому напружених станах

8.4. Питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані

Ключові поняття. деформований стан, головні деформації, кут зсуву, узагальнений закон Гука, об'ємна деформація, всебічний стиск, питома потенціальна енергія, зміна об'єму та форми.

8.1. Головні деформації

Деформований стан у точці задають лінійними деформаціями вздовж осей і кутовими деформаціями (кутами зсуву) між ними. Для плоского стану визначають деформації в довільному напрямку та знаходять головні деформації – екстремальні лінійні деформації, при яких кути зсуву дорівнюють нулю.

У загальному випадку плоского напруженого стану (ПНС) (рис. 8.1.) виникають нормальні (σ) і дотичні (τ) напруження. При цьому напруження σ викликає лінійну деформацію Δd_Z та Δd_Y (рис.8.2), а напруження τ – кутову деформацію γ_{ZY} (кут зсуву).

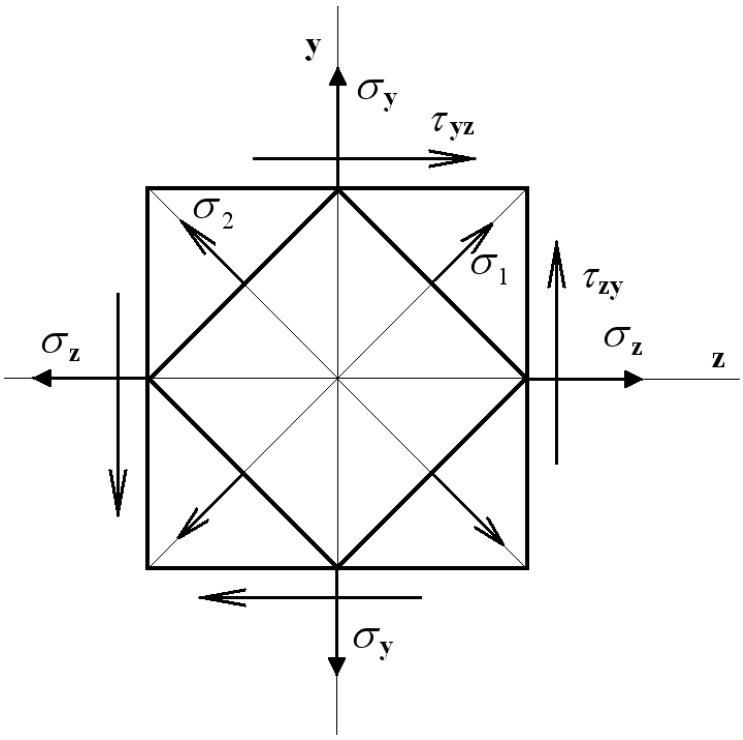


Рис. 8.1. Плоский напружений стан.

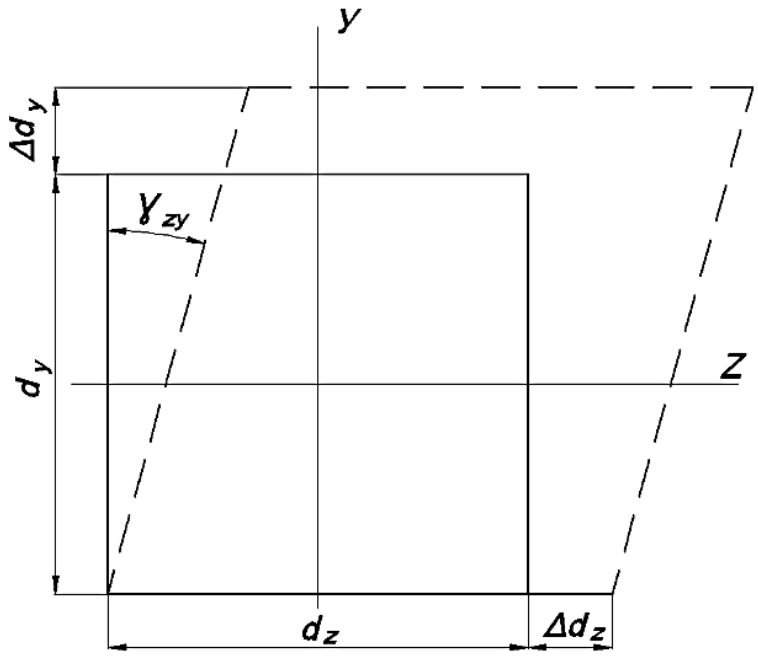


Рис. 8.2. Деформації при плоскому напруженому стані.

Відносні деформації визначаються:

$$\varepsilon_Z = \frac{\Delta d_Z}{d_Z}, \qquad \varepsilon_Y = \frac{\Delta d_Y}{d_Y} \tag{8.1}$$

При повороті координатних осей на деякий кут змінюватиметься величина σ і τ, а також відповідно ε та γ.

Таким чином, деформаційним станом у точці називають сукупність лінійних і кутових деформацій при всіх можливих положеннях координатних осей *Z* та *Y*.

З'ясовано, що у головних площинах відсутні дотичні напруження (τ), а значить у таких площинах відбуватимуться тільки лінійна деформація ($\gamma = 0$). При цьому лінійні деформації набувають екстремальних значень, такі деформації називають головними лінійними деформаціями і позначають ε_1 та ε_2. При цьому прийнято, що $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Знайдемо лінійну деформацію відрізка АС, який проходить під кутом α до напряму ε_1 (рис. 8.3).

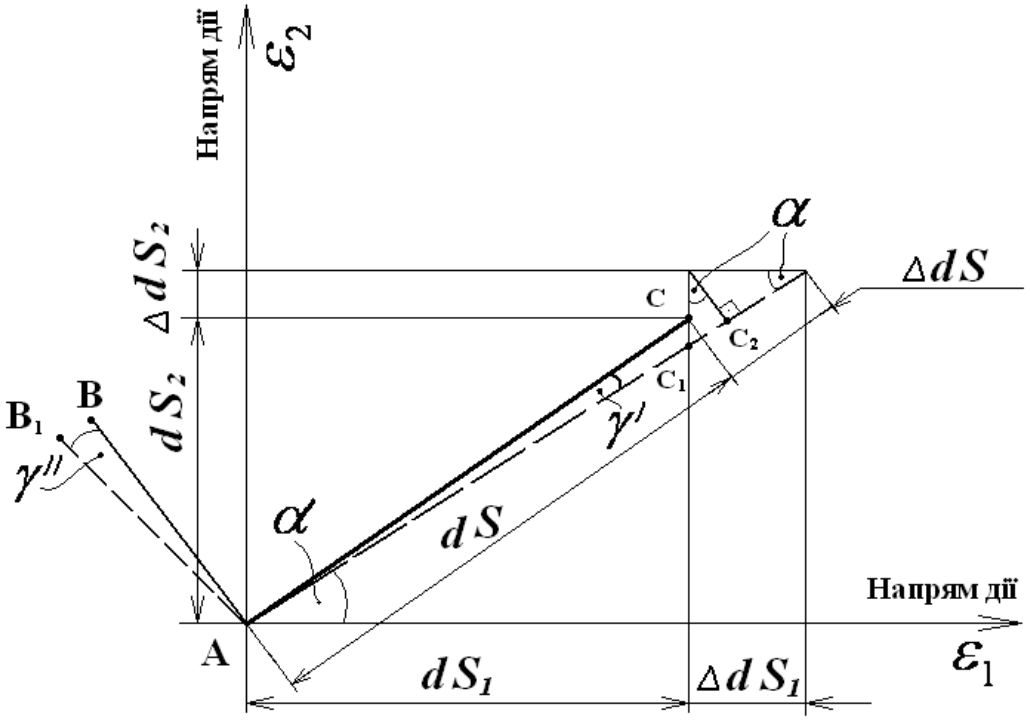


Рис. 8.3. Визначення деформацій у площинах через головні деформації.

ε_1 та ε_2 – головні деформації, які задано.

Із рисунка зрозуміло, що:

$$\Delta dS = \Delta dS_1 \cdot cos\,\alpha + \Delta dS_2 \cdot \sin\alpha. \qquad (8.2)$$

Тоді відносна деформація відрізка АС дорівнює:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta dS}{dS} = \frac{\Delta dS_1}{dS} \cdot cos\,\alpha + \frac{\Delta dS_2}{dS} \cdot \sin\alpha. \qquad (8.3)$$

Якщо врахувати геометричне відношення з (рис. 8.3):

$$\cos\alpha = \frac{dS_1}{dS}; \quad \sin\alpha = \frac{dS_2}{dS}. \tag{8.4}$$

Отримаємо:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta dS}{dS} = \underbrace{\frac{\Delta dS_1}{dS_1}}_{\varepsilon_1} \cdot \cos^2\alpha + \underbrace{\frac{\Delta dS_2}{dS_2}}_{\varepsilon_2} \cdot \sin^2\alpha = \tag{8.5}$$

$$= \varepsilon_1 \cdot \cos^2\alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2\alpha$$

Виконавши тригонометричні перетворення, формула (8.5) набуде вигляду:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \tag{8.6}$$

Із аналізу формули (8.6) видно:

при $\alpha = 0$, *cos 2α=1* , $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\max} = \varepsilon_1$.

при $\alpha = 90^0$; $\cos 2(\alpha + 90) = -\cos 2\alpha = -1$

$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\min} = \varepsilon_2$.

8.2. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці

> Залежності для деформованого стану за структурою збігаються із залежностями для напруженого стану: нормальне напруження замінюють лінійною деформацією, а дотичне – половиною кута зсуву. Така аналогія дозволяє не виводити формули заново.

Знайдемо кут зсуву між відрізками АС та АВ. Із рис.8.3. видно, що:

$$\gamma' = \frac{CC_2}{dS} = \frac{\Delta dS_1 \cdot \sin\alpha}{dS} - \frac{\Delta dS_2 \cdot \cos\alpha}{dS} =$$

$$= \frac{\Delta dS_1 \cdot \sin\alpha}{dS_1 / \cos\alpha} - \frac{\Delta dS_2 \cdot \cos\alpha}{dS_2 / \sin\alpha} =$$

$$= \frac{\Delta dS_1}{dS_1} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - \frac{\Delta dS_2}{dS_2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

В остаточному варіанті маємо:

$$\gamma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \tag{8.7}$$

Для визначення кута γ'' необхідно у вираз (8.7) підставити $\alpha + 90^0$ і отримаємо:

$$\gamma'' = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha. \tag{8.8}$$

Різні знаки виразів (8.7) та (8.8) свідчать про те, що відрізки повертаються в різні боки і загальний кут γ дорівнює:

$$\gamma = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \sin 2\alpha \ . \tag{8.9}$$

Відтворимо напружений та деформований стан у точці через головні площини (головні напруження і головні деформації):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos\alpha \\ \frac{\gamma_\alpha}{2} &= -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Очевидно, що між виразами (8.10) та (8.11) маємо математичну аналогію у зміні напружень і деформацій у точці.

Вираз для визначення головних деформацій через довільні деформації має вигляд:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_Z + \varepsilon_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\varepsilon_Z - \varepsilon_Y)^2 + 4 \cdot (\frac{\gamma_{ZY}}{2})^2} \tag{8.12}$$

Якщо скласти ліву і праву частину виразу (8.12), то отримаємо властивість інваріантних лінійних деформацій:

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_Z + \varepsilon_Y = const$.

Відповідно до цього, тензор деформації Та для плоского напруженого стану має вигляд:

$$T_Д = \begin{vmatrix} \varepsilon_Z; & \frac{1}{2}\cdot\gamma_{ZY} \\ \frac{1}{2}\cdot\gamma_{YZ}; & \varepsilon_Y \end{vmatrix}, \qquad (8.13)$$

А тензор напружень:

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_Z; & \tau_{ZY} \\ \tau_{YZ}; & \sigma_Y \end{vmatrix}. \qquad (8.14)$$

8.3. Узагальнений закон Гука при об'ємному та плоскому напружених станах

Узагальнений закон Гука описує зв'язок між напруженнями та деформаціями при об'ємному й плоскому напружених станах. Лінійна деформація в напрямку кожної осі залежить не лише від напруження вздовж цієї осі, а й від напружень у двох інших напрямках через коефіцієнт Пуассона. Закон застосовують і для об'ємної деформації та всебічного стиску.

Закон Гука при лінійному напруженому стані $\sigma = E \cdot \varepsilon$.

Встановимо кількісний зв'язок між напруженням та деформацією:

– при лінійному напруженому стані (розтяг–стиск) (рис. 8.4).

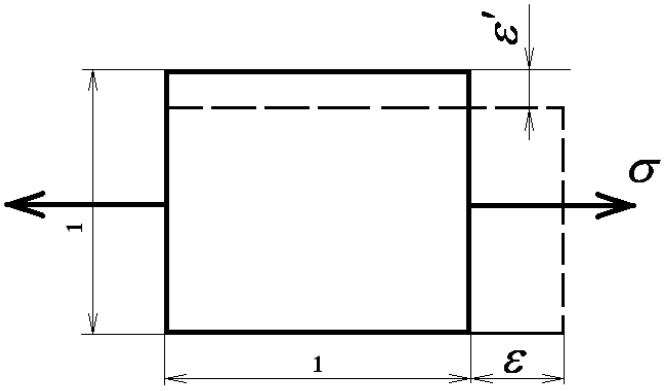


Рис.8.4. Деформації при лінійному напруженому стані.

Очевидно, що: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

Відносна поперечна деформація:

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E} \qquad (8.15)$$

$$\left|-\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| = \mu \text{ - коефіцієнт Пуансона} \qquad (8.16)$$

– при об’ємному напруженому стані (рис.8.5):

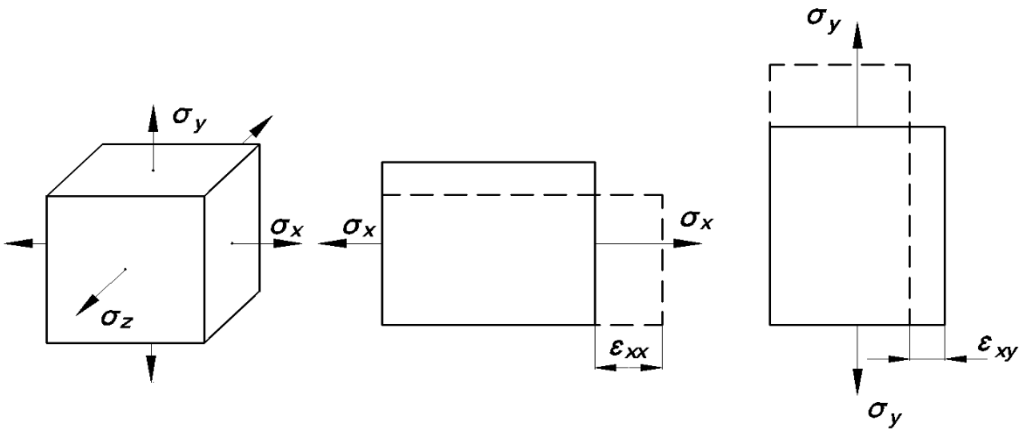


Рис. 8.5. Деформації при об’ємному напруженому стані.

$$\varepsilon = \varepsilon_{XX} + \varepsilon_{XY} + \varepsilon_{XZ}\,. \qquad (8.17)$$

Використавши вираз (8.15), отримаємо таку залежність:

$$\varepsilon_X = \frac{\sigma_X}{E} - \mu\cdot\frac{\sigma_Y}{E} - \mu\cdot\frac{\sigma_Z}{E}\,. \qquad (8.18)$$

Аналогічно для напряму осей YtaZ отримаємо узагальнений закон Гука при об’ємному напруженому стані.

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_X &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_X - \mu\left(\sigma_Y + \sigma_Z\right)\right] \\ \varepsilon y &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_Y - \mu\left(\sigma_X + \sigma_Z\right)\right] \\ \varepsilon z &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_Z - \mu\left(\sigma_Y + \sigma_X\right)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (8.19)$$

Для плоского напруженого стану, коли $\sigma_X = 0$.

Узагальнений закон Гука має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_Y &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_Y - \mu\cdot\sigma_Z\right] \\ \varepsilon_Z &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_Z - \mu\cdot\sigma_Y\right] \end{aligned}\right\} \qquad (8.20)$$

Коли $\sigma_X = 0$: лінійна деформація у цьому напрямку не дорівнює нулю, а визначається:

$$\varepsilon_X = -\frac{\mu}{E} \cdot \left[\sigma_Y + \sigma_Z\right]. \tag{8.21}$$

Інколи виникає необхідність виражати напруження через деформації. Для цього другий рядок виразу (8.20) множать на μ та складають з першим:

$$\varepsilon_Y + \mu \cdot \varepsilon_Z = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_Y - \mu^2 \cdot \sigma_Y\right],$$

Звідси знаходять σ_y і σ_z:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_Y &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_Y + \mu \cdot \varepsilon_Z\right) \\ \sigma_Z &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\varepsilon_Z + \mu \cdot \varepsilon_Y\right) \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

4.2.4.Зміна об'єму матеріалу під час деформації

Відомо, що під час дії напружень відбувається зміна об'єму матеріалу. Знайдемо абсолютну і відносну зміну об'єму матеріалу при об'ємному напруженому стані (рис. 8.6).

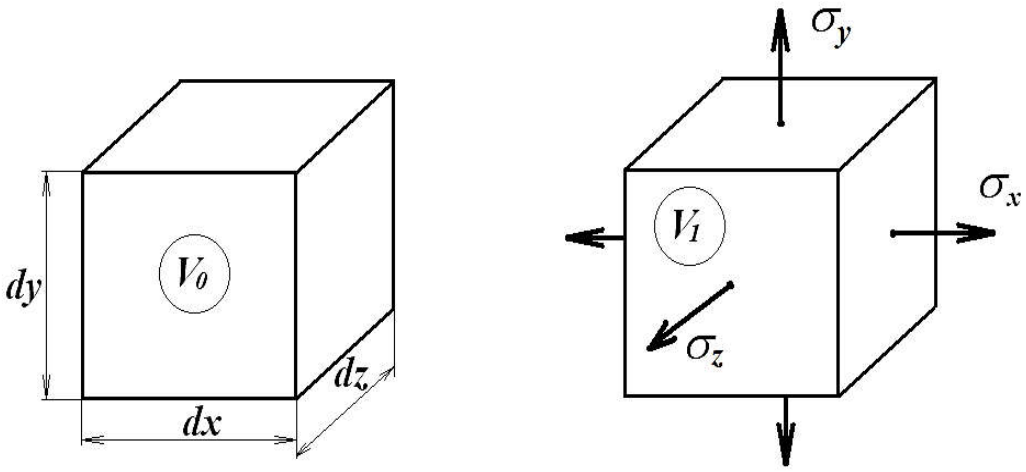


Рис. 8.6. Зміна об'єму при об'ємному напруженому стані.

де: V_0 – початковий об'єм;

V_1 – об'єм при прикладанні зусилля (після деформації).

Нехай до деформації розміри сторін елементарного паралелепіпеда дорівнювали: dx, dy, dz, а після прикладання навантажень – $dx + \Delta dx$; $dy + \Delta dy$; $dz + \Delta dz$.

Початковий об'єм дорівнює:

$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz\,; \tag{8.23}$$

Після деформації:

$$V_1 = (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz)\,. \tag{8.24}$$

Абсолютна зміна об’єму елемента:

$$\Delta V = V_1 - V_0 =$$

$$= (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz) -$$

$$- dx \cdot dy \cdot dz =$$

$$= dx \cdot dy \cdot dz \left(1 + \underbrace{\frac{\Delta dx}{dx}}_{\varepsilon_x} \right) \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\Delta dy}{dy}}_{\varepsilon_y} \right) \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\Delta dz}{dz}}_{\varepsilon_z} \right) - \tag{8.25}$$

$$- dx \cdot dy \cdot dz.$$

Зробивши перетворення у виразі (8.25), а також врахувавши, що $V_0 = dx \cdot dy \cdot dz$, отримаємо:

$$\Delta V = V_0 \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_Z) + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_z \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z, \tag{8.26}$$

Враховуючи незначність величин $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y$; $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_z$; $\varepsilon_z \cdot \varepsilon_y$; $\varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z$, якими нехтуємо, отримуємо:

$$\Delta V = V_0 \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_Z)_z\,. \tag{8.27}$$

Відносна зміна об’єму матеріалу дорівнює:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_Z\,. \tag{8.28}$$

Використовуючи узагальнений закон Гука при об’ємному напруженому стані, виразимо відносну зміну об'єму матеріалу θ через напруження:

$$\theta = \frac{(1 - 2 \cdot \mu)}{E} \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \right). \tag{8.29}$$

З виразу (8.29) очевидно, що μ не може бути більшим 0,5 і знаходиться в межах $0 \le \mu \le 0{,}5$.

Розглянемо всебічний гідростатичний стиск (рис. 8.7).

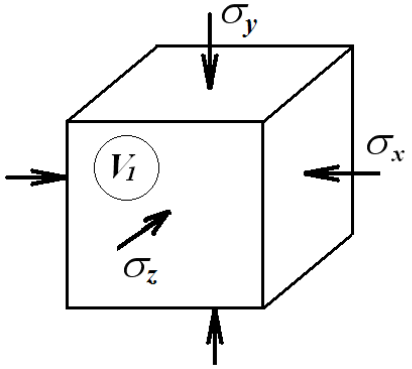


Рис. 8.7. Всебічний гідростатичний стиск.

При цьому: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$. (8.30)

Підставивши вираз (8.30) у (8.29), отримаємо:

$$\theta = 3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu) \cdot \frac{\sigma}{E}. \qquad (8.31)$$

Якщо $\mu \prec 0{,}5$, то $\theta > 0$, це значить, що буде відбуватиметься збільшення об'єму матеріалу, що суперечить істині.

При $\mu = 0{,}5$ маємо $\theta = 0$. Це означає, що в момент текучості матеріалу змінюється тільки форма зразка, а об'єм залишається незмінним (рис. 8.8).

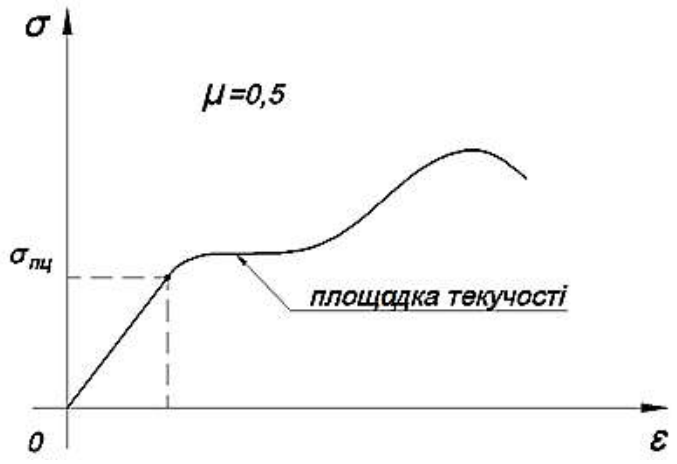


Рис. 8.8. Діаграма розтягу-стиску пластичного матеріалу.

8.4. Питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані

> Питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані складається з двох частин: енергії зміни об'єму та енергії зміни форми. Саме на цьому поділі ґрунтується енергетична теорія міцності, що розглядається в наступній лекції.

Очевидно, що при об'ємному напруженому стані деформації відбуваються в трьох напрямах (рис. 8.9), а в одиниці об'єму матеріалу накопичується питома потенціальна енергія – питома енергія деформації. За рахунок цієї енергії матеріал відновлює свою форму, розміри та об'єм після зняття напружень.

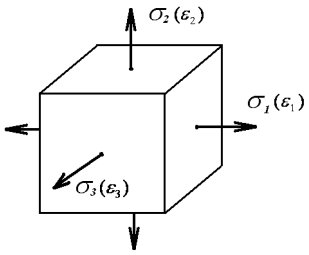


Рис. 8.9. Графічне зображення деформацій при об'ємному напруженому стані.

Питома потенціальна енергія при центральному розтягу-стиску визначається:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon ; \tag{8.32}$$

При об'ємному напруженому стані:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3 . \tag{8.33}$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразивши деформації через напруження, формула (8.33) набуде вигляд:

$$U = \frac{1}{2E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3) \right]. \tag{8.34}$$

Контрольні запитання до лекції 8

1. Які деформації характеризують деформований стан у точці?
2. Що таке головні деформації?
3. У чому полягає аналогія між напруженим і деформованим станами?
4. Запишіть і поясніть узагальнений закон Гука.
5. З яких складових складається питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані?

Лекція 9. Теорії міцності

Мета лекції. Після вивчення лекції слід ознайомитися з гіпотезами про причини настання небезпечного стану матеріалу при складному напруженому стані та навчитися користуватися першою, другою, третьою, четвертою (енергетичною) теоріями міцності та теорією Мора.

План лекції

9.1. Загальні поняття про теорії міцності
9.2. I теорія міцності
9.3. II теорія міцності
9.4. III теорія міцності
9.5. IV енергетична теорія міцності
9.6. Теорія міцності граничних напружених станів
9.7. Поняття про нові теорії міцності

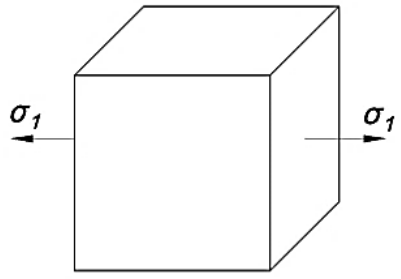
Ключові поняття. теорія міцності, еквівалентне напруження, найбільше нормальне напруження, найбільша лінійна деформація, найбільші дотичні напруження, енергія зміни форми, теорія Мора.

9.1. Загальні поняття про теорії міцності

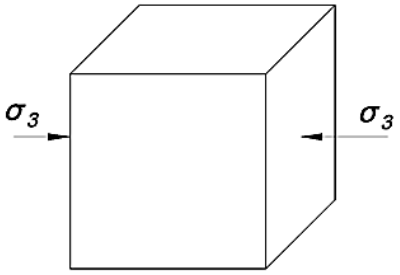
Теорії міцності дозволяють перейти від простих дослідів (розтяг) до складного напруженого стану. Кожна теорія містить гіпотезу про те, який фактор – напруження, деформація чи енергія – спричиняє настання небезпечного стану. Складний стан замінюють рівнонебезпечним одновісним розтягом і порівнюють еквівалентне напруження з допустимим.

Основним питанням механіки матеріалів і конструкцій є оцінка міцності матеріалу за заданим напружено-деформованим станом, тобто за головними напруженнями (максимальними напруженнями $\sigma_{\max}$ та $\tau_{\max}$).

Для лінійного (одноосного) напруженого стану, яким є центральний розтяг або стиск, ця задача розв’язується досить просто й умови міцності такі:



$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \le [\sigma_+] = \frac{\sigma_{неб}}{n}; \qquad (9.1)$$



$$\sigma_{\min} = \sigma_3 \le [\sigma_-] = \frac{\sigma_{неб.}}{n}; \qquad (9.2)$$

де: $\sigma_{неб.}$ – небезпечне напруження, що залежить від виду матеріалу (рис. 9.1); n – коефіцієнт запасу міцності.

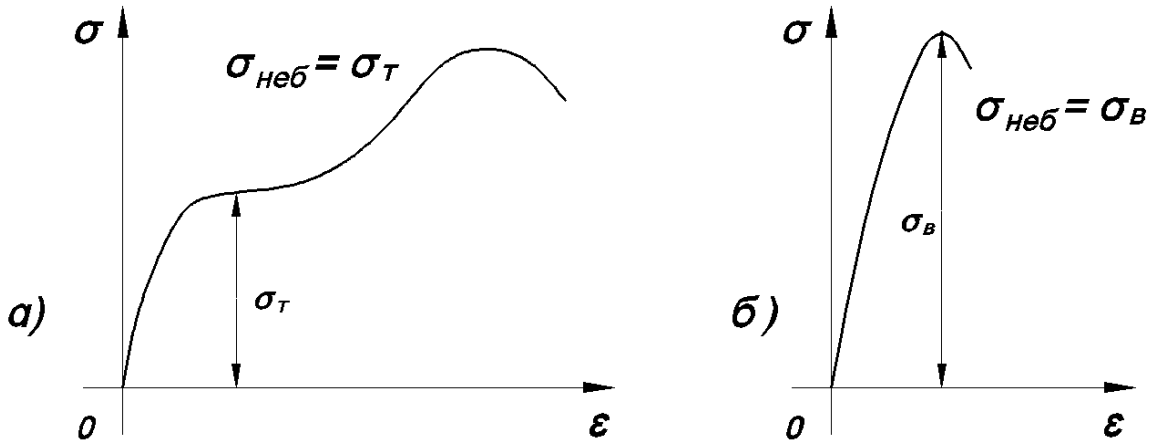


Рис. 9.1. Діаграми розтягу-стиску:
а) пластичний матеріал; б) крихкий матеріал.

При більш складних видах напруженого стану, коли два або три головні напруження не дорівнюють нулю, як підтвердили досліди, небезпечний стан (руйнування) залежить не тільки від $\sigma_{\max}$ і $\sigma_{\min}$, але й від співвідношення між ними, яких може бути безліч.

Вважають, що: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$; (9.3)

Тому прямий шлях розв'язання задачі неможливий не тільки через складність досліду, але й через їх нескінченну кількість.

Роблять так: вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактору (σ, τ, ε, u) івважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина цього фактору досягне граничного значення, яке встановлюється під час розтягу або стиску. Таким чином, ми встановлюємо еквівалентність складного напруженого стану і лінійного (одноосьового). На сьогодні існує декілька таких гіпотез, які отримали назву «Теорії міцності».

9.2. І теорія міцності

> Перша теорія міцності за критерій приймає найбільше нормальне напруження. Вона задовільно описує поведінку крихких матеріалів, але не враховує вплив двох інших головних напружень.

І теорія міцності (теорія найбільших нормальних напружень), запропонована Галілео Галілеєм у XVII ст.

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина максимальних нормальних напружень $\sigma_{\max}$ досягне граничного стану $\sigma_{неб.}$, яке встановлюється при простому розтягу, і умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \le [\sigma] = \frac{\sigma_{неб.}}{n}. \qquad (9.4)$$

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія не може застосовуватись (дає великі похибки) практично для всіх матеріалів. Вона дає більш-менш правдиві дані під час розтягу дуже крихких матеріалів (скло, граніт, цегла тощо).

9.3. ІІ теорія міцності

> Друга теорія міцності за критерій приймає найбільшу відносну лінійну деформацію. Для визначення еквівалентного напруження використовують узагальнений закон Гука з коефіцієнтом Пуассона. Теорія узгоджується з поведінкою деяких крихких матеріалів, проте погано підтверджується для пластичних.

ІІ теорія міцності (теорія найбільшої лінійної деформації), запропонована Едме Маріоттом в 1682 році.

Згідно з якою вважають, що міцність матеріалу буде порушена, коли величина максимальної лінійної деформації ε_{max} досягне

граничного значення $\varepsilon_{неб.}$, яке встановлюється під час центрального розтягу (лінійному одноосному стані) і умова міцності має вигляд:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \le [\varepsilon] = \frac{\varepsilon_{неб.}}{n} \tag{9.5}$$

Враховуючи закон Гука при об'ємному напруженому стані, маємо:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)], \tag{9.6}$$

При лінійному напруженому стані:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}, \qquad => \qquad \varepsilon_{неб.} = \frac{\sigma_{неб.}}{E}. \tag{9.7}$$

Підставивши 9.6 та 9.7 в 9.5, маємо:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]. \tag{9.8}$$

де: μ – коефіцієнт поперечної деформації.

$$\mu = \left| -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \tag{9.9}$$

Досліди підтвердили, що ця теорія непридатна для більшості матеріалів, її можна застосовувати лише для крихких матеріалів (міцних легованих та вуглеводистих сталей). При цьому максимальне напруження σ_1 повинно бути додатним ($\sigma_1 > 0$), тобто розтягу.

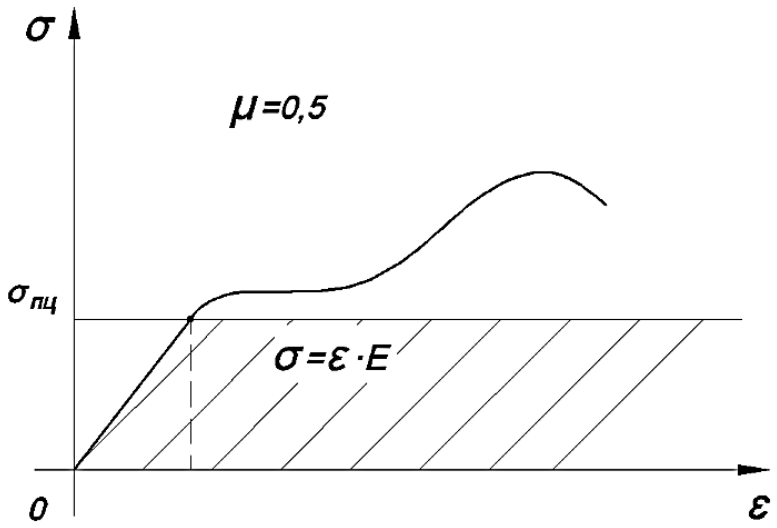


Рис. 9.2. Графічна зона пропорційності.

Недолік: можливо застосовувати лише в зоні пропорційності (рис. 9.2).

9.4. III теорія міцності

> Третя теорія міцності (теорія найбільших дотичних напружень) визначає небезпечний стан за максимальним дотичним напруженням, яке дорівнює половині різниці найбільшого та найменшого головних напружень. Її застосовують для пластичних матеріалів.

III теорія міцності (теорія найбільших дотичних напружень). Ця теорія запропонована Шарлем Огюстеном Кулоном в 1773 році.

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан (руйнування) матеріалу відбудеться тоді, коли величина максимального дотичного напруження $\tau_{\max}$ досягне граничного стану $\tau_{неб.}$, який встановлюється при центральному розтягу і умова міцності має вигляд:

$$\tau_{\max} \le [\tau] = \frac{\tau_н}{n}. \qquad (9.10)$$

Відомо, що $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а при центральному розтягу-стиску $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$

Підставивши, отримаємо: $\sigma_1 - \sigma_3 \le (\sigma)$. (9.11)

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія спрацьовує для пластичних матеріалів, в яких механічні властивості однакові як на розтяг, так і на стиск. Недолік – вона не враховує середнього напруження σ_2.

9.5. IV енергетична теорія міцності

> Четверта (енергетична) теорія виходить із того, що небезпечний стан настає, коли питома потенціальна енергія зміни форми досягає граничного значення. Для пластичних матеріалів вона добре підтверджується дослідами.

IV енергетична теорія міцності (теорія формозміни).

Вона запропонована Губером (Максиміліаном Титусом Губером) в 1904 році. Згідно з цією теорією припускають, що порушення міцності матеріалу відбудеться тоді, коли питома потенційна енергія формозміни при об'ємному напруженому стані досягне граничного стану, який встановлюється при центральному розтягу в момент настання плинності матеріалу.

Момент настання плинності матеріалу при лінійному напруженому стані (рис.9.3):

$$U_ф \le [U_ф]_T \tag{9.12}$$

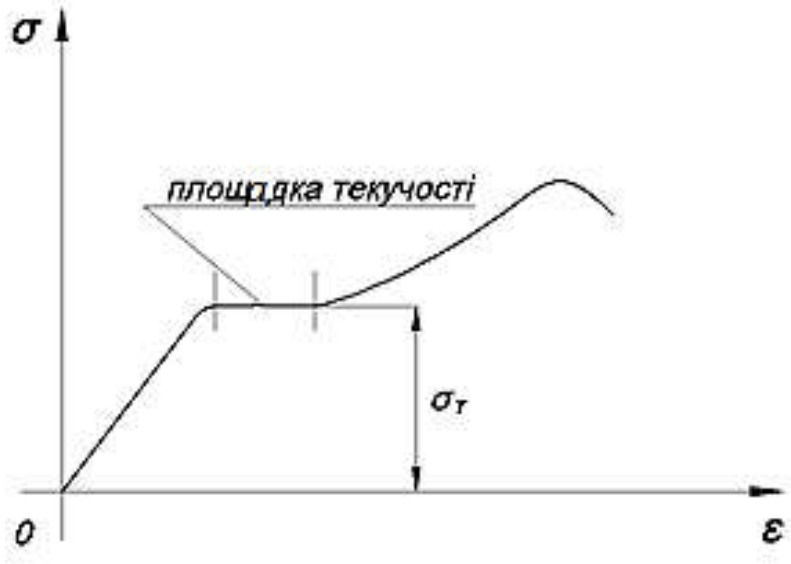


Рис. 9.3. Діаграма розтягу-стиску.

Відомо, що при об'ємному напруженому стані питома потенційна енергія дорівнює:

$$u_ф = \frac{1+\mu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\right]. \tag{9.13}$$

При центральному розтягу (лінійному напруженому стані), коли $\sigma_2=\sigma_3=0$, а $\sigma_1=\sigma_T$ матимемо:

$$(U_ф)_T = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_T^2 . \tag{9.14}$$

Порівнявши (9.13) і (9.14), маємо:

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}=\sigma_T ; \tag{9.15}$$

Вираз (9.15) зручно представити так:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sigma_T. \qquad (9.16)$$

Із виразу (9.16) отримаємо умову міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le [\sigma]=\frac{\sigma_T}{n}. \qquad (9.17)$$

Дослідна перевірка підтвердила, що IV теорія міцності успішно застосовується практично для всіх матеріалів.

Для плоского напруженого стану, який виникає при згині стрижня, умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{екв}^{IV}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2} \le [\sigma]. \qquad (9.18)$$

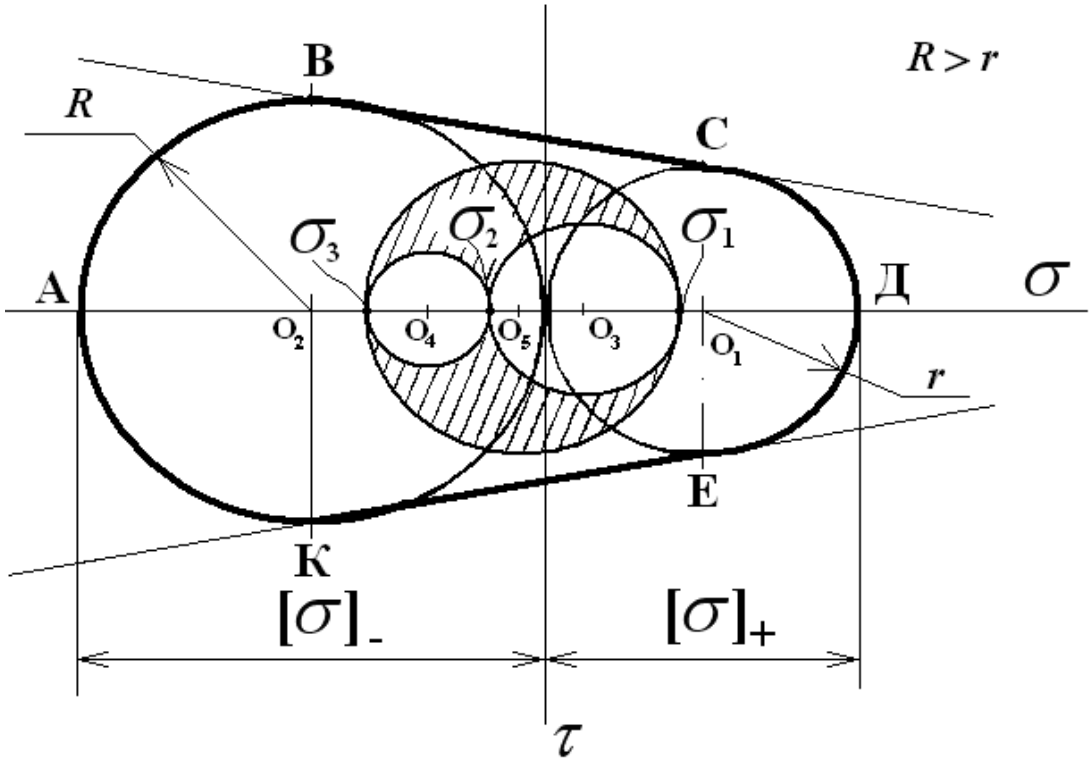
9.6. Теорія міцності граничних напружених станів

> Теорія Мора (теорія граничних напружених станів) враховує, що матеріали по-різному чинять опір розтягу й стиску. Граничні стани зображають колами Мора; їх обвідна визначає граничну поверхню, на основі якої формулюють умову міцності.

Теорія міцності граничних напружених станів (теорія Отто Христиана Мора).

Запропонована в XX ст. Отто Мором, згідно з якою вважають, що на міцність матеріалу впливає найбільше – σ_1 і найменше – σ_3 напруження, а вплив σ_2 є несуттєвим. Для цієї теорії будують граничну обгинаючу для кожного матеріалу (рис. 9.4).

Випробовуючи матеріал на розтяг і стиск знаходять величини допустимих нормальних напружень $[\sigma]_+$ та $[\sigma]_-$. Далі будують граничну обгинаючу АВСДЕК (рис. 9.4) , а потім у тому ж масштабі будуємо кола Мора по σ_1, σ_2 та σ_3. Якщо побудоване коло $\sigma_1-\sigma_3$ не виходить за межі обгинаючої, то міцність матеріалу забезпечено. При цьому наочно зрозуміло, що σ_2 не може суттєво вплинути на міцність матеріалу, оскільки воно знаходиться в колі $\sigma_1-\sigma_3$.



$R>r$ – крихкий матеріал.

Рис. 9.4. Графічне відображення теорії міцності Мора.

Недоліки:

1) складність у побудові граничної обгинаючої.

2) не врахування середнього значення напруження σ_2.

Перевага: теорія, що будується на дослідних даних не потребує теоретичного підтвердження.

9.7. Поняття про нові теорії міцності

> Нові теорії міцності спираються на діаграми механічних властивостей матеріалів та інші критерії. Їх розглядають у спеціальних курсах, а в загальному курсі обмежуються поняттям про них.

Поява пластмасових та композиційних матеріалів виявила в розглянутих теоріях міцності низку невирішених проблем, що стало значним поштовхом у розвитку нових сучасних теорій міцності таких, як:

а) теорія Янга – описує той чи інший напружений стан у точці поліномою різного ступеню (для об'ємного напруженого стану – це циліндрична поверхня). При цьому отримані теоретичні викладки є достатньо громіздким із застосуванням складного математичного апарату;

б) теорія міцності Лебедєва-Писаренка (1967 р) – вважається, що на міцність матеріалу впливає: τ – для його руйнування від зсуву та σ – для відриву. Ця теорія є удосконаленням теорії Мора і забезпечує врахування σ_2;

в) теорія Фрідмана (теорія механічного стану) – базується на використанні діаграм механічного стану.

Але у цілому всі теорії призводять до порівняння напружень σ_1, σ_2 та σ_3, а руйнування відбувається через відрив або зсув частинок. При цьому за допомогою виразів $F(\sigma_1;\sigma_2;\sigma_3)=0$ описують граничні поверхні, які для кожної теорії міцності, враховуючи σ – відрив і τ – зсуву мають свій вигляд.

Контрольні запитання до лекції 9

1. Для чого потрібні теорії міцності та що таке еквівалентне напруження?
2. Який критерій покладено в основу першої, другої та третьої теорій міцності?
3. У чому суть четвертої (енергетичної) теорії міцності?
4. Коли застосовують теорію Мора?
5. Які теорії міцності доцільно застосовувати для пластичних, а які для крихких матеріалів?

Лекція 10. Зсув

Мета лекції. Після вивчення лекції слід засвоїти поняття чистого зсуву, закон Гука при зсуві, залежність між модулями пружності при розтязі та зсуві, потенціальну енергію зсуву й навчитися виконувати практичний розрахунок з'єднань на зріз і зминання.

План лекції

10.1. Поняття про чистий зсув
10.2. Закон Гука при чистому зсуві
10.3. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві
10.4. Потенціальна енергія при чистому зсуві
10.5. Практичний розрахунок з'єднань, що працюють на зсув

Ключові поняття. чистий зсув, кут зсуву, модуль зсуву, закон Гука при зсуві, потенціальна енергія зсуву, зріз, зминання, заклепкове та зварне з'єднання.

10.1. Поняття про чистий зсув

Чистий зсув – такий напружений стан, коли на гранях елемента діють лише дотичні напруження, а нормальні відсутні. Його характеризує кут зсуву – зміна початково прямого кута. Чистий зсув еквівалентний одночасній дії розтягу та стиску на площадках, нахилених під 45°.

У деяких випадках міцність і жорсткість конструкції пов'язана з опором матеріалу деформаціям зсуву, які викликані дотичними напруженнями τ . Розглянемо найбільш простий випадок зсуву – чистий зсув. Чистий зсув – коли в двох взаємно перпендикулярних площинах діють тільки дотичні напруження τ. При цьому подовження сторін відсутнє, а виникає тільки кутова деформація (рис. 10.1).

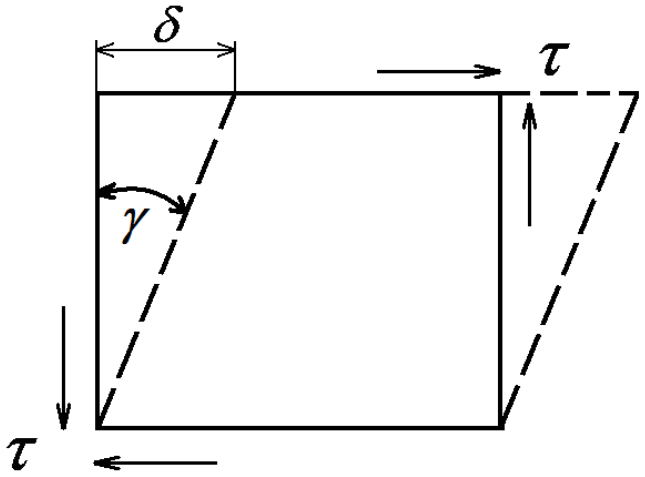


Рис. 10.1. Деформація при чистому зсуві.

Прийнявши площадки чистого зсуву за вихідні, напруження в інших площинах визначатимуться за формулами (рис. 10.2):

$$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha\,, \tag{10.1}$$

$$\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha\,. \tag{10.2}$$

оскільки $\sin 2(\alpha + 90) = -\sin 2\alpha$.

Очевидно із виразу (10.1):

$$\sigma_\alpha = -\sigma_{\alpha+90}\,, \tag{10.3}$$

Вираз (10.3) є законом парності нормальних напружень при чистому зсуві.

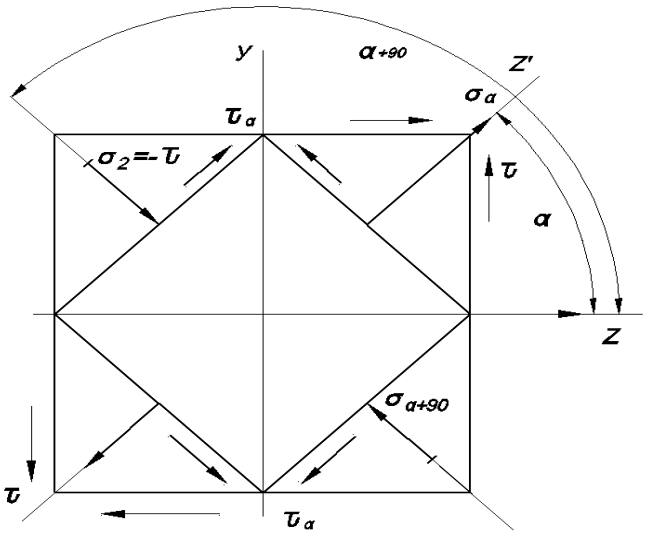


Рис. 10.2. Визначення напружень при повороті площин чистого зсуву.

Із аналізу виразів (10.1) і (10.2) маємо такі рівності (рис. 10.3):

$\alpha = 0$, $\sigma_\alpha = 0$, $\tau_\alpha = \tau_{\max}$.

$\alpha = 45^0$, $\sigma_\alpha = \tau$, $\tau_\alpha = 0$.

$\alpha = 135^0$, $\sigma_\alpha = -\tau$, $\tau_\alpha = 0$.

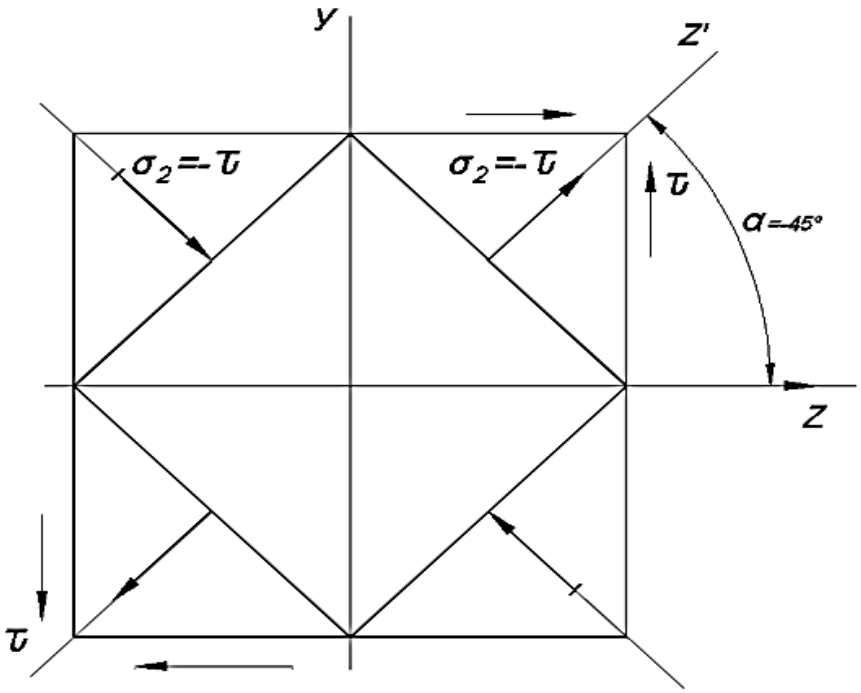


Рис. 10.3. Напруження в площинах при куті 45 º що до площин чистого зсуву.

Таким чином головні площини із площинами чистого зсуву становлять кут 45º. Головні напруження за модулем дорівнюють дотичним. Чистий зсув – це єдиний випадок напруженого деформованого стану, при якому змінюється форма зразка, а об'єм лишається незмінним. Це зрозуміло із виразу:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3); \qquad (10.4)$$

$$\sigma_3 = 0; \;\; \sigma_1 = -\sigma_2 = \tau \,.\, \theta = 0 \,.$$

10.2. Закон Гука при чистому зсуві

> У пружній зоні кут зсуву пропорційний дотичному напруженню; коефіцієнт пропорційності G називають модулем пружності другого роду (модулем зсуву). Графік залежності між ними – пряма лінія, аналогічна діаграмі розтягу.

Деформація зразка при чистому зсуві характеризується (рис. 10.4):

δ – абсолютний зсув;

$\frac{\delta}{a} = \gamma$ – відносний зсув (кут зсуву).

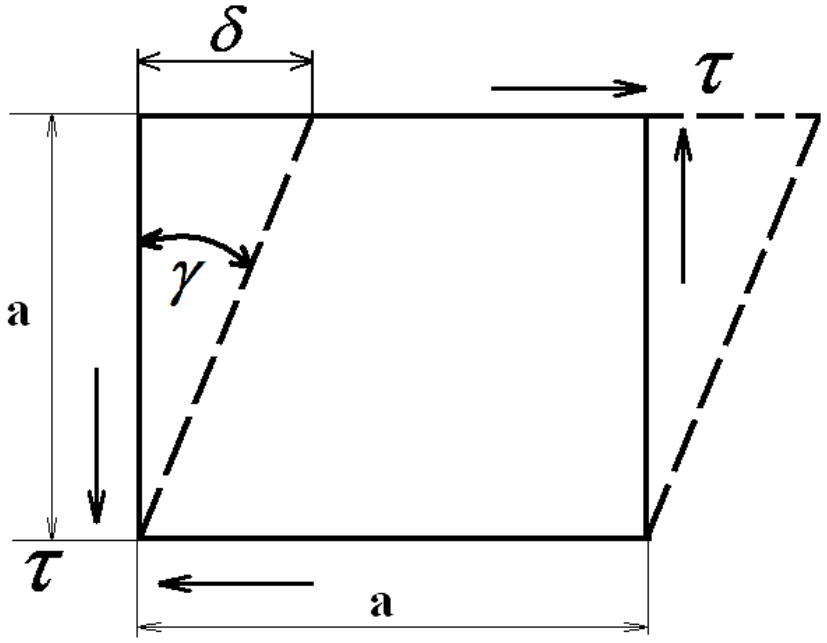


Рис. 10.4. Деформації при чистому зсуві.

Для пластичних матеріалів ця залежність $\tau - \gamma$ має вигляд (рис. 10.5).

У зоні пропорційності між τ і γ існує лінійна залежність, яка називається законом Гука при зсуві:

$$\tau = G \cdot \gamma \,. \tag{10.5}$$

G – модуль пружності 2–го роду, або модуль пружності при зсуві.

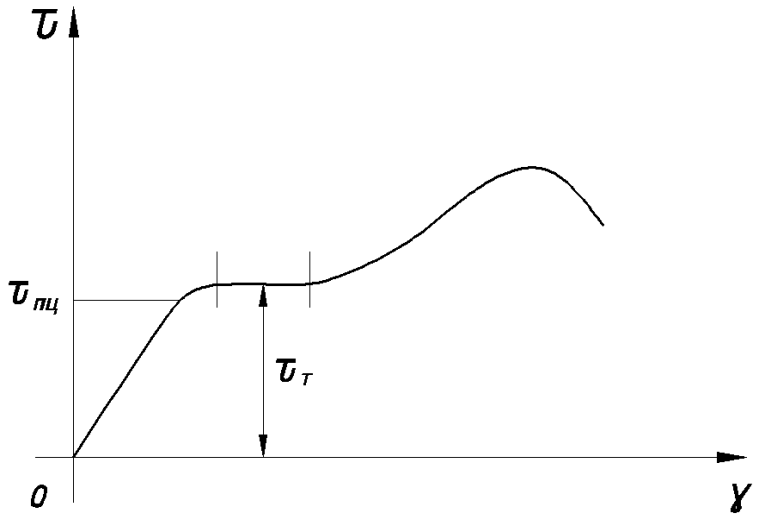


Рис. 10.5. Діаграма τ – γ для пластичних матеріалів.

Цікаво відмітити, що для більшості матеріалів має місце така залежність:

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}. \qquad (10.6)$$

10.3. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві

Модулі пружності E та G і коефіцієнт Пуассона не є незалежними: для ізотропного матеріалу G визначається через E і ν. Тому достатньо експериментально знайти дві з цих трьох констант.

Розглянемо плоский напружений стан в точці і покажемо в ній площадки чистого зсуву й головні площини з відповідними напруженнями (рис. 10.6).

Із рис. 10.6 видно, що деформацію діагоналі елемента можна представити двояко. З одного боку, вона викликана деформацією зсуву, а значить залежить від дотичних напружень τ , пов'язаних з модулем пружності G. З другого боку, цю діагональ можна уявити як волокно, яке розтягується від напруження σ_1 і стискається від напруження σ_2, а значить залежить від модуля пружності E. Тобто очевидно, що між G та E існує залежність.

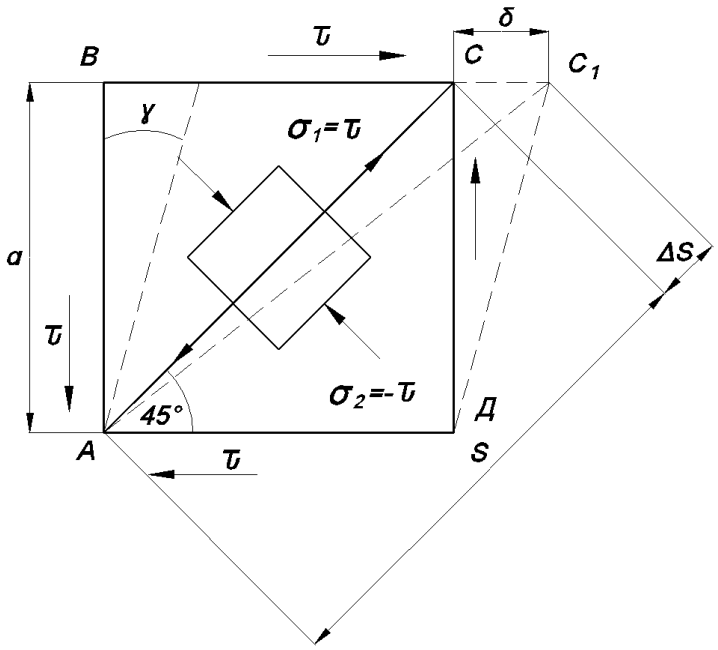


Рис. 10.6. Деформація елемента при чистому зсуві.

Із (рис.10.6) очевидно:

$$\Delta S = \delta \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \gamma, \qquad (10.7)$$

$$a = S \cdot \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S\,; \qquad \gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Тоді: $\Delta S = \dfrac{\tau}{2 \cdot G} \cdot S$. (10.8)

З іншого боку – вид розтягу можна записати:

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2)\,; \tag{10.9}$$

$$\sigma_1 = \tau\,, \quad \sigma_2 = -\tau\,.$$

$$\Delta S = \frac{(1+\mu)\tau}{E} \cdot S\,. \tag{10.10}$$

Порівнявши (10.8) та (10.10), маємо теоретичну залежність між модулями пружності при розтягу-стиску E та зсуві G

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)}\,. \tag{10.11}$$

10.4. Потенціальна енергія при чистому зсуві

При зсуві накопичена енергія дорівнює роботі дотичних сил на кутовому переміщенні. Для питомої потенціальної енергії отримують вираз, аналогічний виразу при розтязі, у якому нормальні величини замінено дотичними.

При чистому зсуві роботу виконує дотична сила T (рис. 10.7).

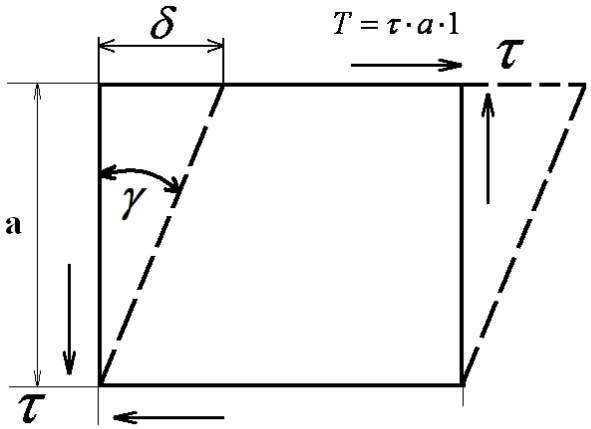


Рис. 10.7. Дія дотичної сили та викликані деформації.

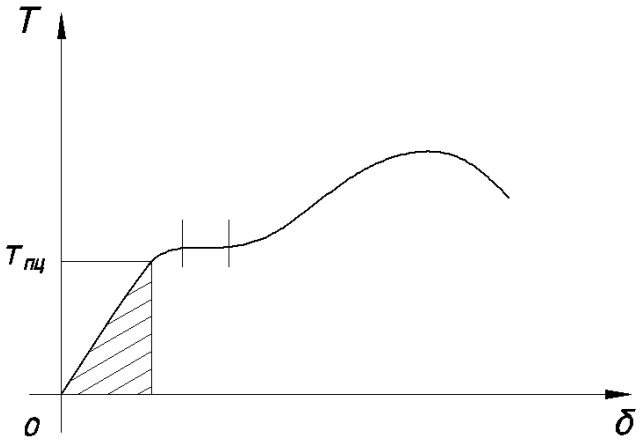


Рис. 10.8. Графічне відображення роботи, що виконує дотична сила.

У зоні границі пропорційності робота, яку виконує сила T дорівнює потенціальній енергії і визначається за формулою (рис. 10.8):

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \delta . \qquad (10.12)$$

Враховуючи, що $T = \tau \cdot a \cdot 1$; $\delta = \gamma \cdot a$;

$$U = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot 1 \qquad (10.13)$$

Питома потенційна енергія:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \text{, де } V_0 = a^2 \cdot 1 . \qquad (10.14)$$

Замінивши γ у виразі (10.14) ($\gamma = \frac{\tau}{G}$), матимемо:

$$u = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} . \qquad (10.15)$$

Цей вираз аналогічний виразу при центральному розтягу-стиску.

10.5. Практичний розрахунок з'єднань, що працюють на зсув

Практичний розрахунок з'єднань (заклепкових, болтових, зварних) проводять за спрощеною схемою: вважають, що дотичні напруження розподілені по площині зрізу рівномірно. Перевіряють міцність на зріз і на зминання, визначають кількість заклепок; для зварних швів розглядають зріз по бісекторній площині.

Дійсна деформація заклепкового або зварного з'єднання дуже складна і лише наближено може бути розглянута як деформація

чистого зсуву. Тому методика, що розглядатиметься, має умовний характер, але вона досить проста і підтверджується експериментальними даними на практиці, що забезпечує її широке застосування в інженерній практиці.

а) Розрахунок заклепкового з'єднання (рис. 10.9).

Руйнування з'єднання може відбуватися з двох причин:

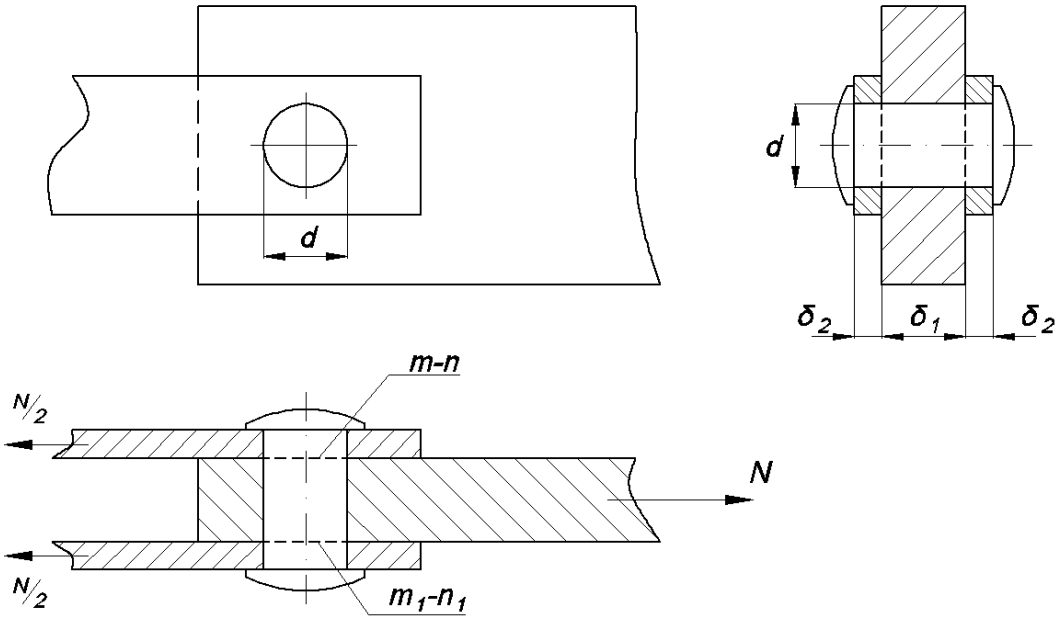


Рис. 10.9. Схема заклепкового з'єднання.

1) від зрізу заклепки по площинах $n-m$ та n_1-m_1 (рис. 10.9). Зусилля на зріз визначається за формулою:

$$S_{зр} = F_{зр} \cdot [\tau]_{зр}; \qquad (10.16)$$

де площа зрізу: $F_{зр} = \kappa \cdot \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$;

k – кількість площин зрізу;

$[\tau]_{зр}$ – допустиме дотичне напруження від зрізу тіла заклепки.

2) від зминання листів або тіла заклепки. Зусилля на зминання визначається за формулою:

$$S_{зм} = F_{зм}^{\min} \cdot [\sigma]_{зм}; \qquad (10.17)$$

де:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{зм\,1} = d \cdot \delta_1 \\ F_{зм\,2} = d \cdot 2 \cdot \delta_2 \end{array} \right\}$$ площі зминання (5.18), (5.19)

$[\sigma]_{зм}$ – допустиме значення напруження на зминання заклепки.

Загальна кількість заклепок визначається (рис. 10.10):

$$n = \frac{N}{S_{\min}}; \qquad (10.18)$$

де: $S_{\min}$ – мінімальне значення, яке приймається з виразів (10.16) або (10.17).

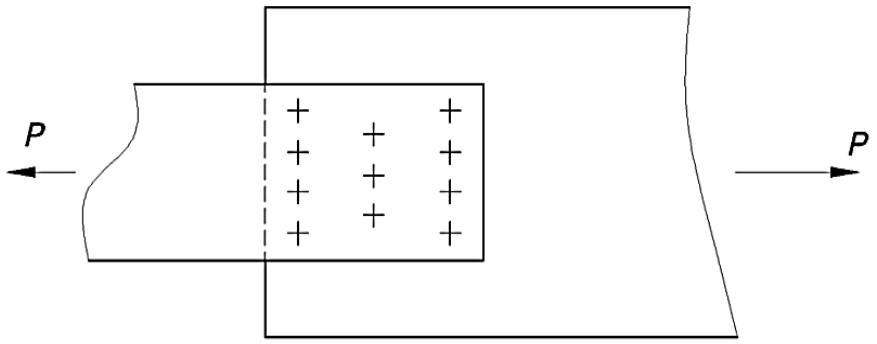


Рис. 10.10. Визначення кількості заклепок.

б) Розрахунок зварного шва.

Зварні з'єднання не викликають послаблення тіла деталі та є менш трудомістким, тому знайшли широке застосування в інженерній практиці. Руйнування зварного з'єднання відбувається по найменшій площині – бісекторній площині (рис. 10.11).

При цьому розрахунковий поперечний переріз шва приймається у вигляді трикутника.

Площу зрізу шва розраховують за формулою:

$$F_{зр} = 2 \cdot l_{шв} \cdot 0{,}7 \cdot h = 1{,}4 \cdot h \cdot l_{шв}. \qquad (10.19)$$

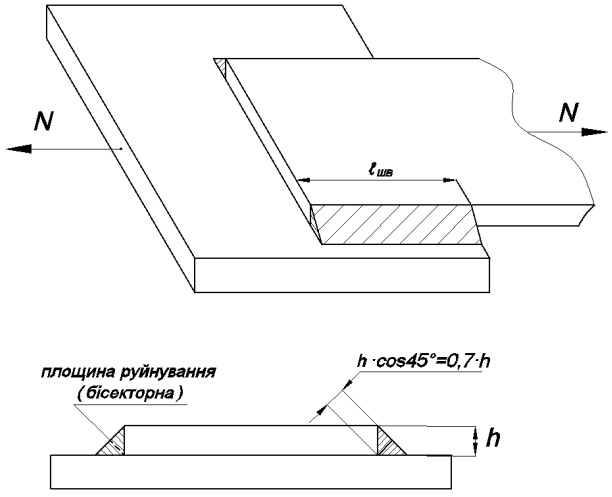


Рис. 10.11. Зварне з'єднання.

Відповідно до цього, умова міцності зварного шва має вигляд:

$$\frac{N}{F_{зр}} = \frac{N}{1{,}4 \cdot h \cdot l_{шв}} \le [\tau]_к^{зв} \qquad (10.20)$$

де – $[\tau]_к^{зв}$ – допустиме дотичне напруження матеріалу шва на зріз; $l_{шв}$ – розрахункова довжина шва, яка приймається на 10 мм меншою фактичної довжини через «непровари» при запалюванні та гасінні дуги. Матеріал шва не має яскраво вираженої площини плинності (крихкий матеріал), тому в момент руйнування τ не вирівнюються. Тому довжину шва обмежують $l_{шв} \le 60\,h$. З іншого боку, необхідно щоб $l_{шв} \ge 40мм$ або $l_{шв} \ge 4\,h$.

Із наведеної умови міцності (10.20) можна знайти довжину зварного шва:

$$l_{шв} = \frac{N}{1{,}4h[\tau]_к^{зв}} \qquad (10.21)$$

Контрольні запитання до лекції 10

1. Що таке чистий зсув і кут зсуву?
2. Сформулюйте закон Гука при чистому зсуві.
3. Як пов’язані між собою модулі E, G і коефіцієнт Пуассона?
4. Чому для з’єднань виконують перевірку на зріз і на зминання?
5. Як визначити кількість заклепок у з’єднанні?

Лекція 11. Кручення

Мета лекції. Після вивчення лекції слід навчитися будувати епюри крутних моментів, визначати напруження й деформації при крученні круглого вала, оцінювати потенціальну енергію кручення та розуміти особливості кручення стрижня прямокутного перерізу.

План лекції

11.1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр
11.2. Напруження та деформації при крученні круглого валу
11.3. Потенціальна енергія при крученні круглого валу
11.4. Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу

Ключові поняття. крутний момент, епюра крутних моментів, полярний момент інерції, полярний момент опору, кут закручування, жорсткість при крученні, потенціальна енергія кручення, депланація.

11.1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр

Кручення виникає, коли в перерізі діє лише крутний момент. Його визначають методом перерізів із рівноваги відсіченої частини вала, а зміну по довжині показують епюрою крутних моментів. Правило знаків встановлюють за напрямом обертання відносно зовнішньої нормалі до перерізу.

Якщо в поперечному перерізі стрижень виникає тільки один внутрішній фактор – крутний момент, а решта внутрішніх зусиль дорівнює нулю, то він знаходиться в умовах кручення. Стрижні, які «працюють» на кручення, «роблять», як правило, круглого поперечного перерізу і називаються валами. Для визначення крутного моменту в поперечному перерізі вала застосовують метод перерізів, згідно з яким він дорівнює сумі зовнішніх моментів, прикладених до будь–якої із відсічених частин вала (рис. 11.1).

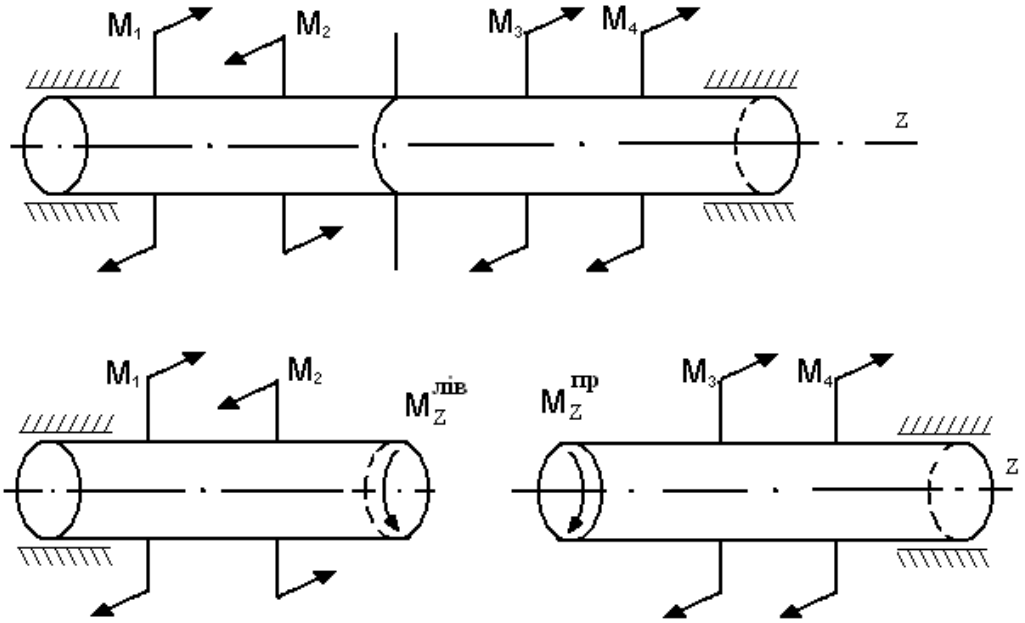


Рис. 11.1. Схема завантаження вала.

Правило знаків: крутний момент $M_{кр}$ вважається додатним, якщо при погляді на поперечний переріз вала з боку зовнішньої нормалі він напрямлений за ходом годинникової стрілки.

$$\sum M_z = 0;\ -M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = 0; \qquad (11.1)$$

$$\sum M_z^{лів} \ -M_1 + M_2;\ \ \sum M_z^{пр}\ M_3 + M_4 .$$

Якщо знайти значення крутних моментів в цілій низці поперечних перерізів, то можна побудувати епюру крутних моментів, яка показує зміну крутного моменту по довжині валу. Епюра $M_{кр}$ будується від базисної лінії.

Покажемо на конкретному прикладі побудову епюри крутних моментів.

Визначаємо значення M_z в характерних перерізах вала (рис. 11.2), якими є початок і кінець вала, а також точки прикладання зовнішніх зосереджених крутних моментів.

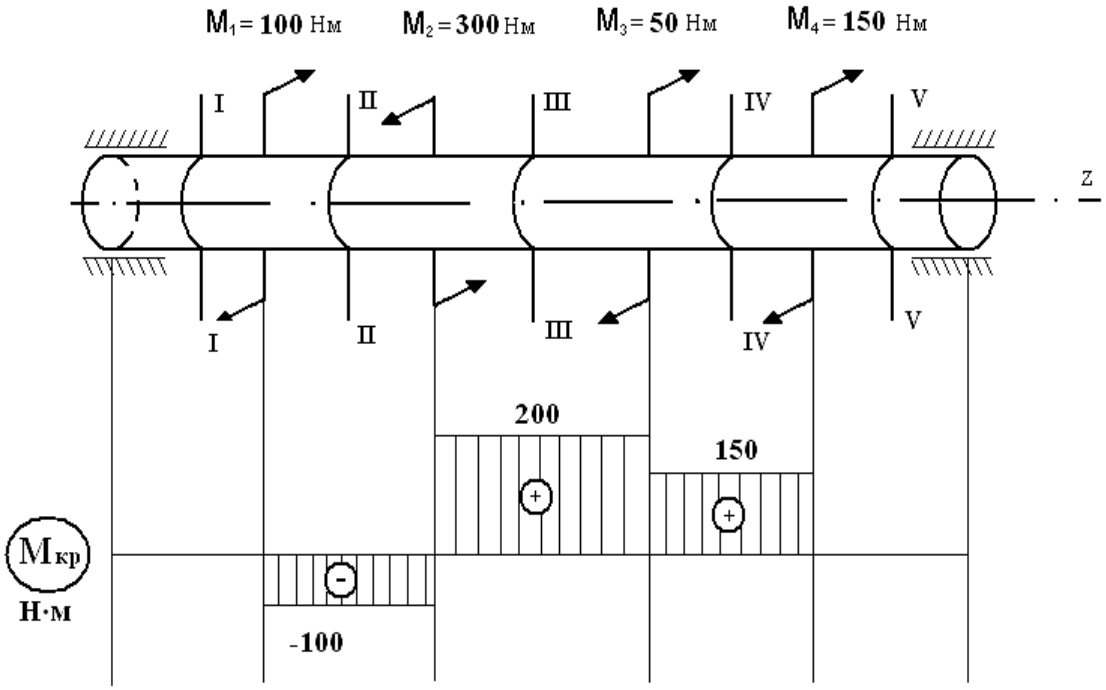


Рис. 11.2. Схема завантаження вала та епюра $M_{кр}$.

$$\sum M_z^I = 0;$$

$$\sum M_z^{II} = -M_1 = -100 \ \ H \cdot м;$$

$$\sum M_z^{III} = -M_1 + M_2 = -100 + 300 = 200 \ \ H \cdot м;$$

$$\sum M_z^{IV} = M_4 = 150 \ \ H \cdot м;$$

$$\sum M_z^V = 0.$$

11.2. Напруження та деформації при крученні круглого валу

> Для круглого вала справедлива гіпотеза плоских перерізів: поперечні перерізи залишаються плоскими й повертаються як жорсткі диски. Тому кут зсуву змінюється лінійно вздовж радіуса, а дотичні напруження пропорційні відстані від осі вала – нульові в центрі та найбільші на поверхні. Жорсткість вала при крученні визначається добутком модуля зсуву на полярний момент інерції.

За допомогою рівнянь статики неможливо знайти характер розподілу напружень по поперечному перерізу вала. Тому нанесемо на бокову поверхню круглого вала сітку з поперечних та поздовжніх рисок (рис. 11.3). У результаті прикладання крутного моменту нанесені прямокутники трансформуються, при цьому поперечні риски

залишаються прямими і відстань між ними не змінюється. Це свідчить про те, що подовження волокон відсутнє. На підставі цього сформовано робочі гіпотези, які покладені в основу подальших висновків.

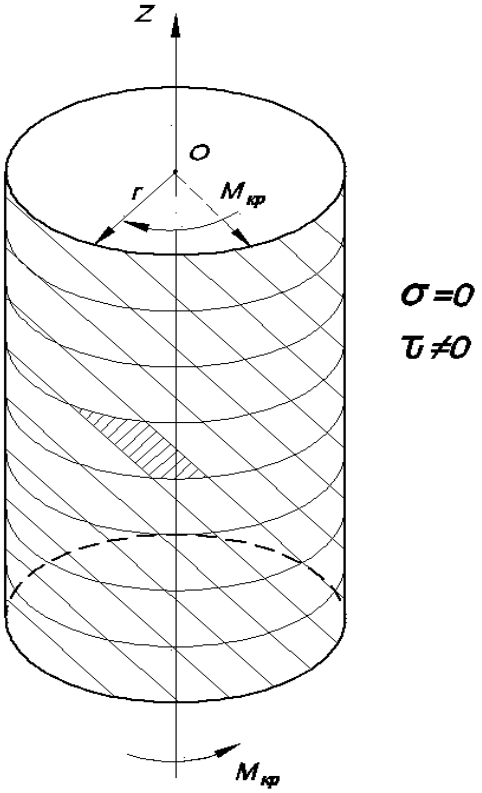


Рис. 11.3. Вал з нанесеними рисками.

При крученні круглого стрижня справедливою є гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Радіус, уявно проведений, після деформації залишається прямим. Це дає можливість представити кручення як результат зсуву поперечних перерізів одних відносно інших.

Розглянемо деформацію вала (рис. 11.4).

Деформація характеризується:

γ – кут зсуву;

φ – кут закручування.

Розглянемо ділянку валу довжиною dz (рис. 11.4).

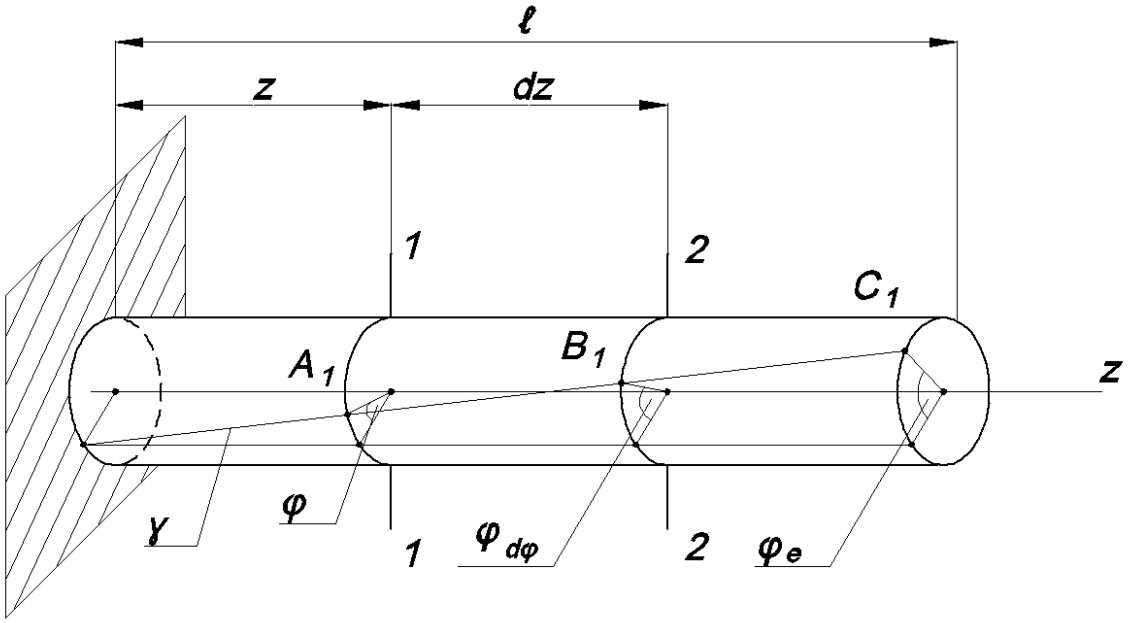


Рис. 11.4. Деформація вала.

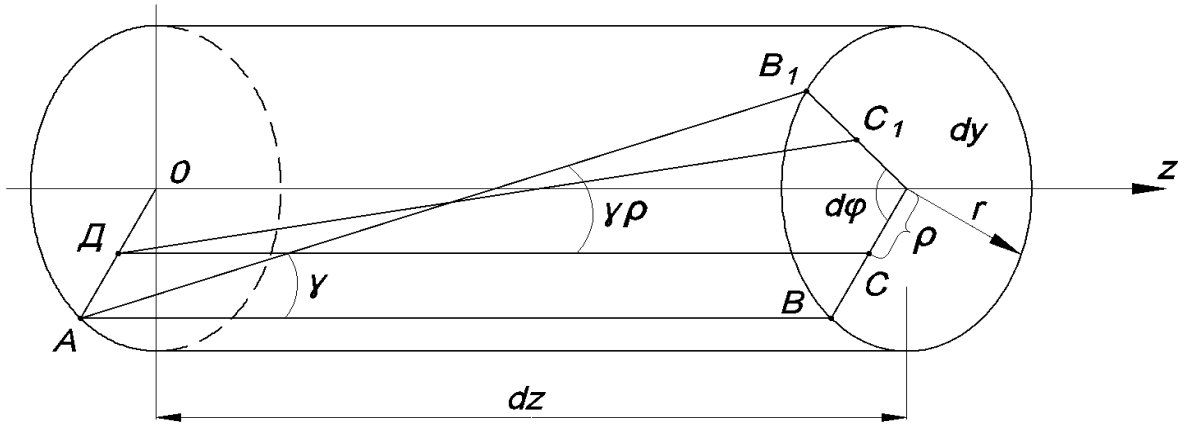


Рис. 11.5. Деформація відрізку вала довжиною dz .

Кут зсуву на поверхні вала дорівнює:

$$\gamma = \frac{BB_1}{AB} = \frac{r \cdot d\varphi}{dz};$$

Для довільного волокна на відстані ρ від центру ваги:

$$\gamma_\rho = \frac{CC_1}{ДС} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dz}.$$

Використовуючи закон Гука при чистому зсуві, маємо:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot r; \qquad (11.2)$$

$$\tau_\rho = G_{\gamma_\rho} = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho. \qquad (11.3)$$

Вирази (11.2) та (11.2) свідчать про те, що дотичні напруження по поперечному перерізу вала розподілені за лінійним законом і епюра τ має вигляд, наведений на рис. 11.6.

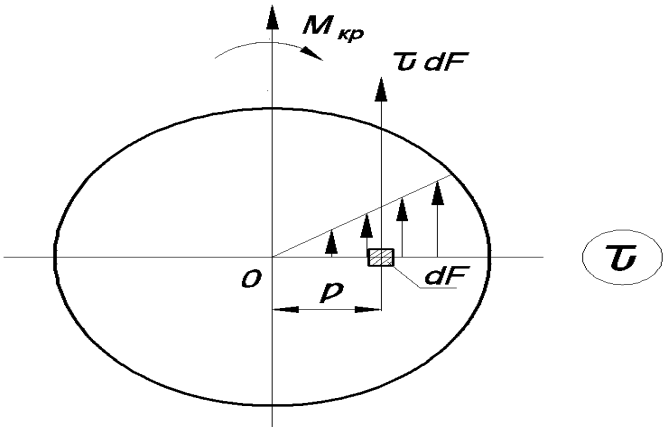


Рис. 11.6. Розподілення дотичних напружень по поперечному перерізі вала.

Для виключення з виразів (11.2) та (11.3) частини $\frac{d\varphi}{dz}$, знайдемо внутрішній крутний момент.

$$dM_{кр} = \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho;$$

$$M_{кр} = \int_F \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho = \int_F G\frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot dF \cdot \rho = G\frac{d\varphi}{dz}\int_F \rho^2 \cdot dF \,. \quad (11.4)$$

Враховуючи, що $\int_F \rho^2 \cdot dF = I_\rho$ – полярний момент інерції, отримаємо:

$$M_{кр} = G\frac{d\varphi}{dz} \cdot I_\rho; \quad (11.5)$$

Звідси матимемо:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{кр}}{G \cdot I_p} \cdot \quad (11.6)$$

Підставивши (11.5) в (11.6), отримаємо, що:

$$\tau_\rho = \frac{M_{кр}}{I_p \cdot G} G \cdot \rho = \frac{M_Z}{I_p} \cdot \rho \,. \quad (11.7)$$

Очевидно, що $\tau_{\max} = \frac{M_Z}{I_p} \cdot r = \frac{M_Z}{I_p / r}$,

де $\frac{I_p}{r} = W_\rho$ – полярний момент опору.

Тоді $\tau_{\max} = \frac{M_Z}{W_\rho}$. (11.8)

Умова міцності валу при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{Z\ \max}}{W_\rho} \le [\tau]. \quad (11.9)$$

де: *[τ]* – допустиме дотичне напруження, що приводиться у нормах.

Із виразу (11.9) можливе розв'язання задачі за знаходження діаметра вала при заданому навантаженні та матеріалі:

$$W_\rho = \frac{M_{Z\ \max}}{[\tau]}; \quad (11.10)$$

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0{,}2 \cdot d^3. \quad (11.11)$$

Порівнявши вирази (11.10) та (11.11), знайдемо діаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{Z\ \max}}{0{,}2 \cdot [\tau]}}. \quad (11.12)$$

Із виразу (11.6) маємо, що на ділянці вала – кут закручування $d\varphi$ дорівнює:

$$d\varphi = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_\rho}, \quad (11.13)$$

Для всього вала:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_p}. \quad (11.14)$$

Для вала із сталим поперечним перерізом і однаковим значенням M_z:

$$\varphi = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{l}{I_\rho}. \quad (11.15)$$

Для визначення характеристики жорсткості вала, вводиться поняття відносного кута закручування (θ):

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (11.16)$$

Одиниця виміру *(рад/м)*.

11.3. Потенціальна енергія при крученні круглого валу

Потенціальна енергія при крученні дорівнює роботі крутного моменту на кутовому переміщенні перерізу. Вона потрібна для енергетичних методів визначення переміщень.

При крученні крутний момент виконує роботу на викликаних деформаціях (куті закручування). У зоні пружної деформації робота дорівнює потенціальній енергії U і визначається:

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot Mz \cdot \varphi. \tag{11.17}$$

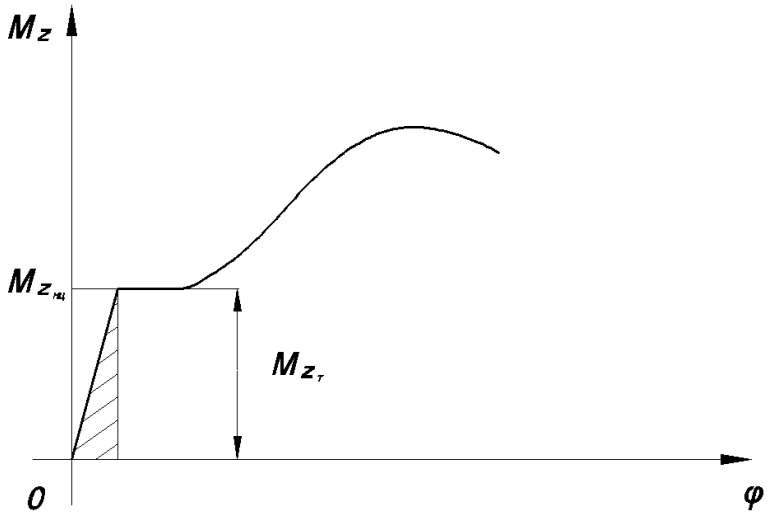


Рис. 11.7. Робота крутного моменту.

Виразивши крутний момент через кут φ, або навпаки, матимемо:

$$u = \frac{M_z^2 \cdot l}{2G \cdot I_\rho} = \frac{\varphi^2 \cdot G \cdot I_p}{2l}. \tag{11.18}$$

11.4. Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу

Для прямокутних (некруглих) перерізів гіпотеза плоских перерізів не виконується: перерізи депланують (викривляються), і задача розв'язується методами теорії пружності. Найбільші дотичні напруження виникають посередині довших сторін перерізу.

Очевидно, що деформація вала прямокутного поперечного перерізу принципово відрізняється від деформації круглого вала, оскільки має місце переміщення точок вздовж вісі вала і порушення

гіпотези плоских перерізів. Тобто поперечні перерізи викривляються (депланують) (рис. 11.8).

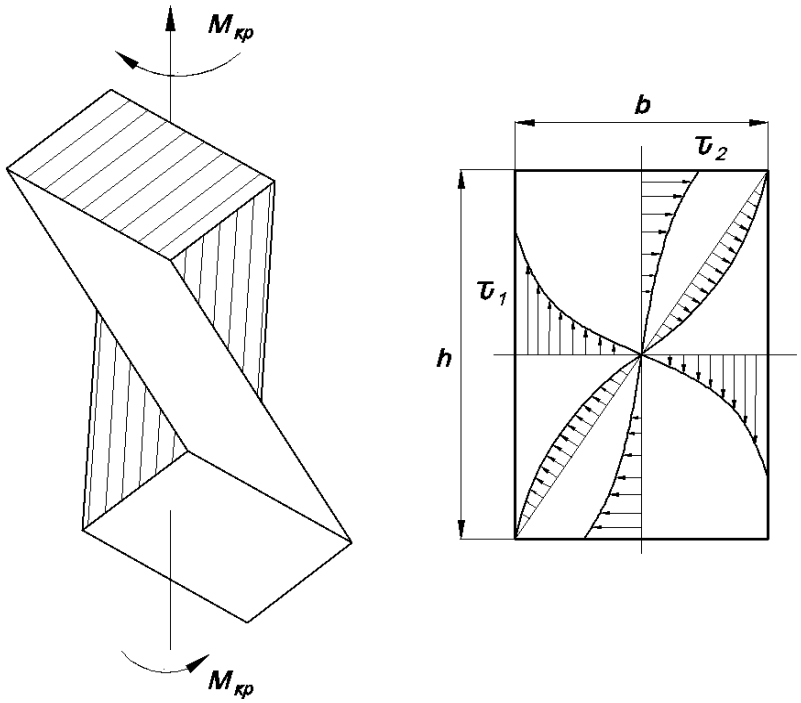


Рис. 11.8. Деформація вала прямокутного поперечного перерізу.

Наведемо кінцеві результати, які базуються лише на емпіричних даних і за яких епюри τ мають вигляд (рис. 11.8).

Очевидно, що $\tau_{\max}$ виникають посередині довшої сторони прямокутника і визначаються:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{прям}}, \tag{11.19}$$

Напруження в точці *2*:

$$\tau_2 = \varphi \cdot \tau_1, \tag{11.20}$$

Кут закручування:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_\alpha}; \tag{11.21}$$

де: $W_{прям} = \alpha \cdot h \cdot в^2$ – момент опору перерізу;

$I_\alpha = \beta \cdot h \cdot в^3$ – полярний момент інерції; перерізу вала.

Коефіцієнти α , β , γ , залежать від геометричного співвідношення сторін валу *h* і *b* і приводяться в нормах.

Умова міцності та жорсткості для вала прямокутного поперечного перерізу має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot в^2} \le [\tau]. \tag{11.22}$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{G \cdot \beta \cdot h \cdot в^3} \le [\theta]. \tag{11.23}$$

Контрольні запитання до лекції 11

1. Як визначити крутний момент у перерізі та побудувати його епюру?
2. Як розподіляються дотичні напруження по перерізу круглого вала?
3. Що таке жорсткість вала при крученні?
4. Чому гіпотеза плоских перерізів не діє для прямокутного перерізу?
5. Як визначається потенціальна енергія при крученні?

Лекція 12. Плоский згин: опори, балки, внутрішні зусилля та епюри

Мета лекції. Після вивчення лекції слід ознайомитися з видами опор і балок, навчитися визначати опорні реакції, поперечні сили та згинальні моменти й будувати їх епюри.

План лекції

12.1. Основні типи опорних в'язей. Визначення опорних реакцій

12.2. Внутрішні сили при згині. Диференціальні залежності між q, Q та M. Правила спрощеної побудови епюр Q та M

12.3. Приклади побудови епюр Q та M

Ключові поняття. балка, опори, опорні реакції, поперечна сила, згинальний момент, епюра, диференціальні залежності при згині.

12.1. Основні типи опорних в'язей. Визначення опорних реакцій

Стрижні, що працюють на згин, називають балками. Плоский згин виникає, коли навантаження діє у площині, що проходить через головну вісь перерізу. Залежно від внутрішніх зусиль розрізняють чистий і поперечний згин. Для визначення реакцій використовують типи опор (шарнірно-рухома, шарнірно-нерухома, защемлення) та основні види балок.

Стрижні, які працюють в умовах згину називають балками.

Якщо на бокову поверхню балки нанести прямокутник, то в результаті дії зовнішнього згинального моменту поперечні риски залишаються прямими, але при цьому повернуться на деякий кут, а поздовжні викривляться, змінивши свою довжину. Тобто верхні волокна скорочуються, а нижні подовжуються (рис. 12.1).

На практиці відомі такі основні випадки згину:

а) чистий згин – коли в поперечному перерізі виникає тільки згинальний момент M_X (рис. 12.1 а).

б) поперечний згин – коли в поперечному перерізі виникаєзгинальний моментM_X і поперечна сила Q_y(рис. 12.1 б).

в) плоский згин – це коли поперечний переріз балки має вертикальну вісь симетрії і силова площина збігається з цією віссю. Деформована вісь балки також лежить у цій площині (рис. 12.1 в).

г) косий згин – коли силова площина не збігається з головною віссю (рис. 12.1 г).

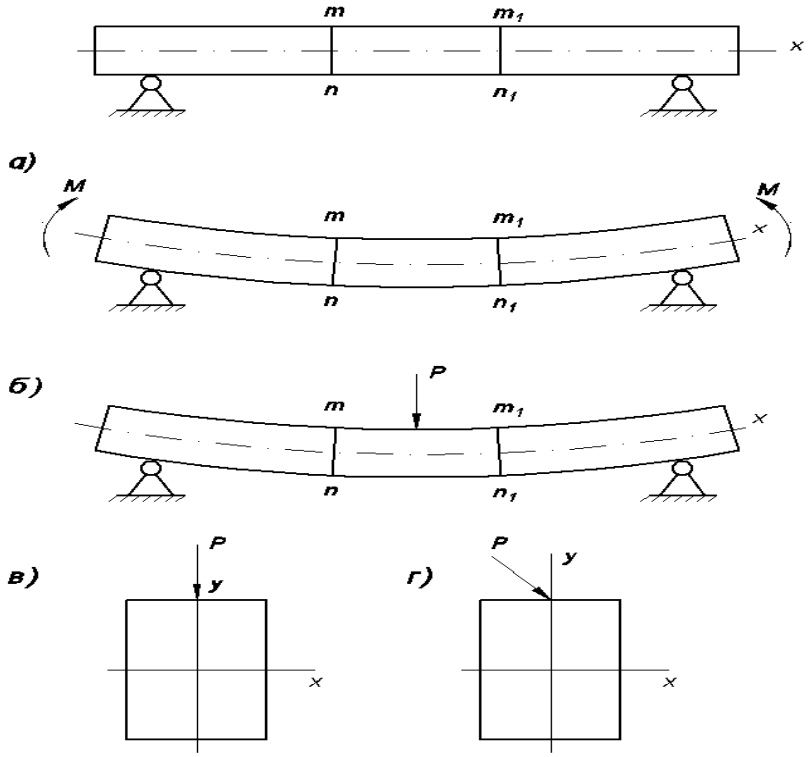


Рис. 12.1. Випадки згину.

Для того, щоб балка могла сприймати зовнішнє навантаження і передавати його на основу, вона повинна бути закріплення за допомогою опорних в’язей (опор). Існують три види опор (рис. 12.2):

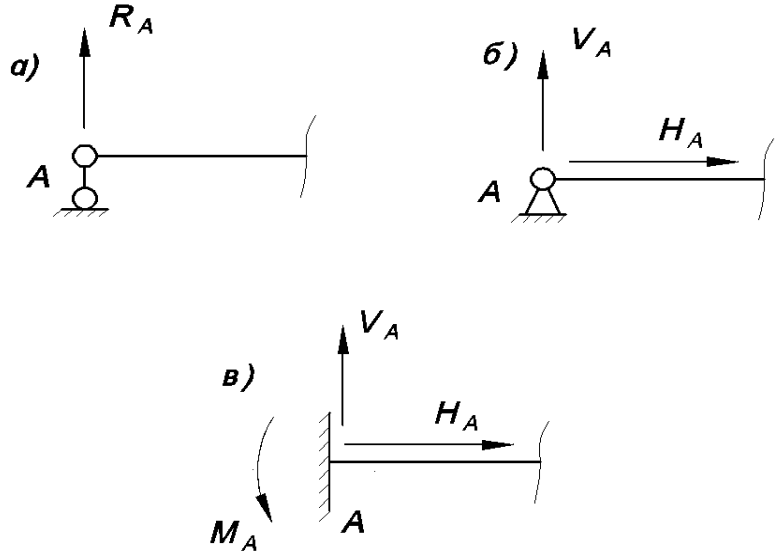


Рис. 12.2. Види опор:
а) шарнірно рухома опора; б) шарнірно нерухома опора;
г) жорстке затиснення (защемлення).

Відповідно до умов закріплення, виділяють такі основні види балок (рис. 12.3):

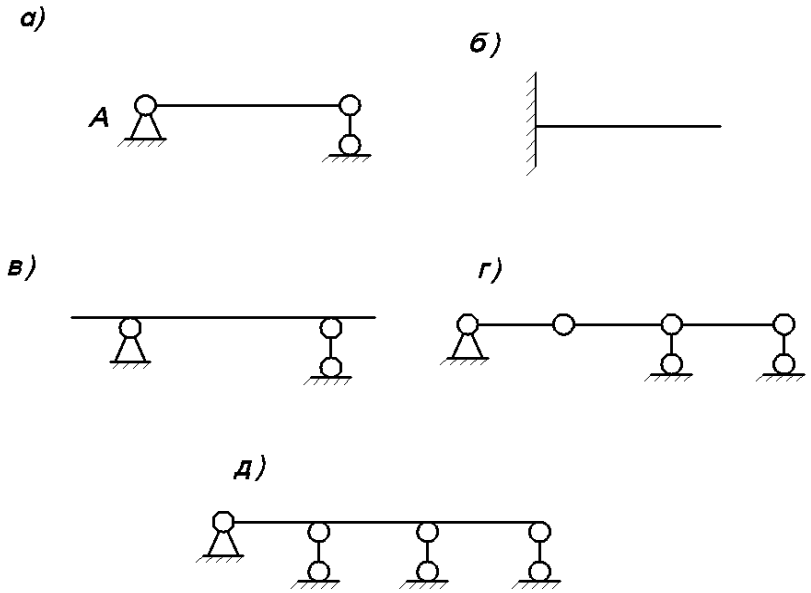


Рис. 12.3. Види балок:
а) проста однопрогинна балка; б) консольна балка;
в) двохопорна балка з консолями; г) розрізна багатопрогинна балка; д) нерозрізна багатопрогинна балка.

12.2. Внутрішні сили при згині. Диференційні залежності між M_X, Q_y та q. Правила спрощеної побудови епюр M_X та Q_y

> Внутрішні зусилля при згині – поперечну силу та згинальний момент – визначають методом перерізів. Між розподіленим навантаженням, поперечною силою та згинальним моментом існують диференціальні залежності. Вони дозволяють перевіряти епюри та встановлювати, де згинальний момент досягає екстремуму.

Для визначення внутрішніх зусиль при згині використовують ***метод перерізів,*** згідно з яким балку розтинають на дві частини і «працюють» з однією із них, а дію відкинутої частини замінюють внутрішніми зусиллями, які при згині зводять до поперечної сили Q_y і згинального моменту M_X (рис. 12.4).

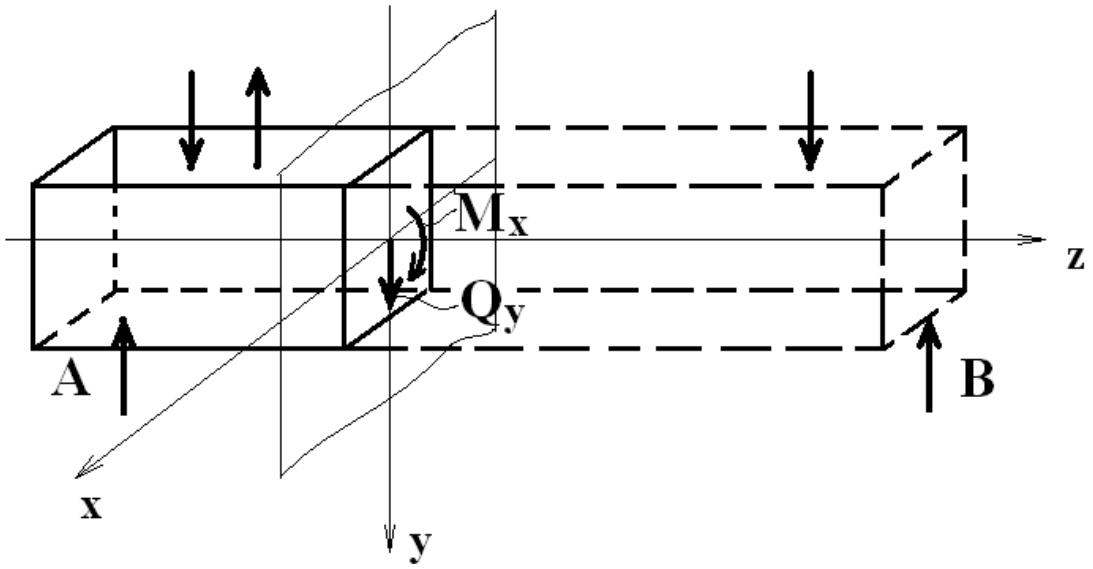


Рис. 12.4. Метод перерізів у графічному відображенні при визначенні Q_y і M_x.

Величини поперечна сила Q_y і згинальний момент M_X обчислюються за такими робочими правилами:

– поперечна сила Q_y дорівнює сумі проекцій всіх зовнішніх сил на площину перерізу і обирається із знаком «+», якщо вона повертає відсічену частину відносно перерізу за годинниковою стрілкою, і навпаки;

– згинальний момент M_X дорівнює сумі моментів зовнішніх зусиль відносно центру ваги перерізу і обирається із знаком «+», якщо розтягуються нижні волокна, і навпаки.

Розглянемо ділянку балки довжиною dz і завантажимо її зовнішнім розподіленим навантаженням інтенсивності q (Н/м). Дію розподіленого навантаження на ділянці довжиною l можна замінити зосередженою силою Q=q·l. Знайдемо внутрішні зусилля (рис. 12.5).

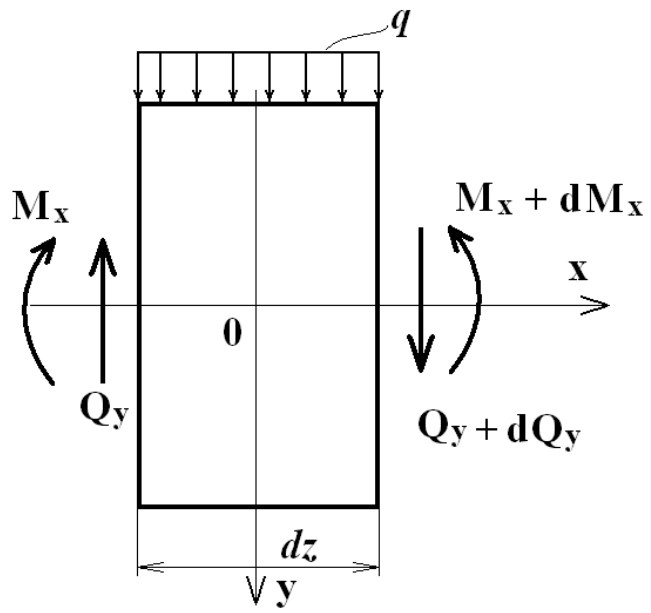


Рис. 12.5. Завантаження ділянки балки із зображенням внутрішніх зусиль.

Із умов рівноваги маємо:

1. $\sum y = 0$.

$$q \cdot dz - Q_y + (Q_y + dQ_y) = 0;$$

Звідси $$\frac{dQ_y}{dz} = -q. \qquad (12.1)$$

2. $\sum M_0 = 0$.

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y \cdot \frac{1}{2} dz + (Q + dQ_y) \cdot \frac{1}{2} \cdot dz = 0;$$

Величина $dQ_y \cdot \frac{1}{2} \cdot dz$ прямує до нуля, тому нею можна нехтувати.

Кінцево отримуємо:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y. \qquad (12.2)$$

Проаналізувавши вирази (12.1) та (12.2), можна отримати третю залежність:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q. \qquad (12.3)$$

Для того щоб розв’язувати задачі міцності та жорсткості при згині необхідно знати $M_x^{\max}$ та $Q_y^{\max}$, тобто виникає необхідність побудувати епюри M_X та Q_y, що будуються за допомогою правил

спрощення побудови, які випливають із диференційної залежності між M_X, Q_y і q (12.2; 12.3).

Правила спрощення побудови епюр M_X та Q_y.

1. На ділянці балки, вільної від розподіленого навантаження ($q = 0$), поперечна сила постійна ($Q_y = const$) згинальний момент M_X змінюється за лінійним законом.

2. На ділянці балки, що завантажена рівномірно – розподіленим навантаженням ($q = const$):

а) Q_y змінюється за лінійним законом;

б) M_X змінюється за законом квадратної параболи.

3. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ($q > 0$), поперечна сила Q_y зменшується із зростанням Z на величину рівнодіючої цієї ділянки.

4. На ділянці балки, де поперечна сила більша за нуль ($Q_y > 0$) із збільшенням Z, епюра M_X зростає на величину площі епюри Q_y цієї ділянки.

5. На ділянці балки, де поперечна сила Q_y змінюється за лінійним законом та в деякій точці дорівнює нулю, на епюрі згинального моменту M_X у тій же точці будемо мати екстремальне значення згинального моменту, причому максимальне значення згинального моменту M_X буде тоді, коли Q_y змінюється з «+» на «–».

6. На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ($q > 0$), епюра M_X має випуклість у бік додатних координат.

7. У точках прикладання зовнішніх зосереджених сил на епюрі поперечних сил Q_y буде стрибок на величину цієї сили.

8. У точках прикладання зовнішніх зосереджених моментів згинання на епюрі згинальних моментів M_X буде стрибок на величину цього зовнішнього моменту.

Розв’язання задач з побудови епюр Q_y та M_X поділяють на 4 етапи:

1. Визначення опорних реакцій. Вважаючи балку абсолютно жорстким тілом, замінюючи опори відповідними реакціями і складаючи рівняння рівноваги, визначаємо їх. Обов'язково здійснювати контроль правильності знаходження опорних реакцій.

2. Розбивають балку на ділянки. Границями ділянок є: початок і кінець балки; точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження q та його закінчення.

3. Визначаємо величину поперечної сили Q_y в характерних перерізах і будуємо її епюру.

4. Визначаємо величини згинальних моментів M_X в характерних перерізах і будуємо його епюру.

12.3. Приклади побудови епюр M_X і Q_y.

Для побудови епюр балку розбивають на ділянки, у межах яких закон зміни навантаження не змінюється. На кожній ділянці записують вирази поперечної сили та згинального моменту, обчислюють значення в характерних перерізах і будують епюри. Приклади закріплюють послідовність: опорні реакції, поділ на ділянки, побудова епюр, перевірка.

Приклади для правил спрощення побудови епюр (рис. 12.6 – 12.10):

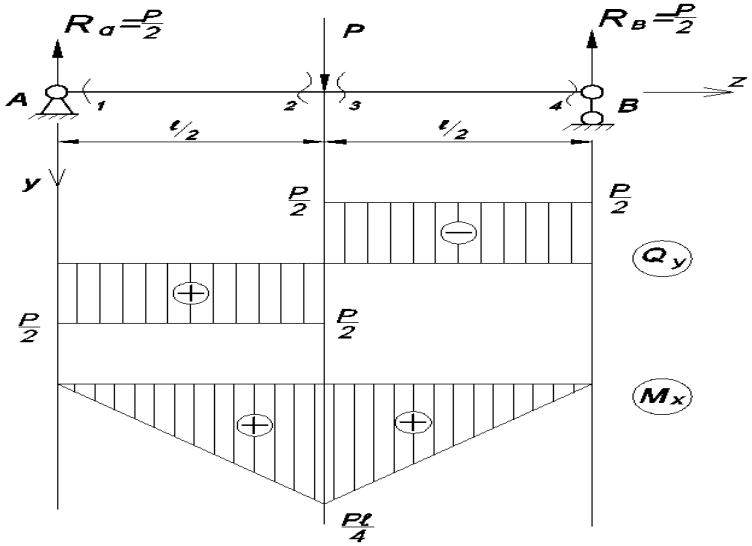


Рис. 12.6. Побудова епюр Q_y, M_X.

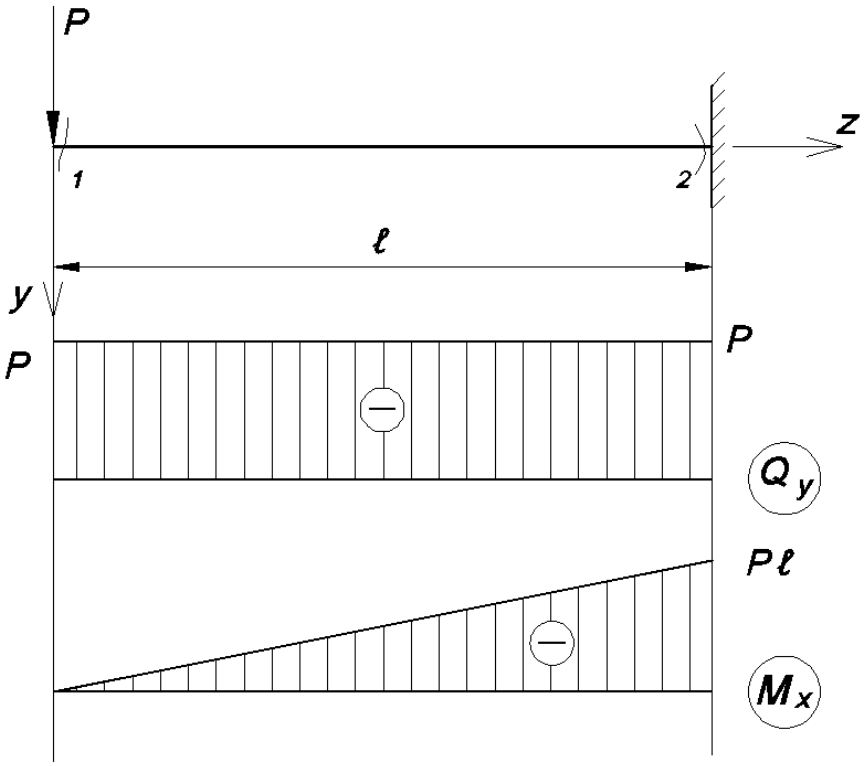


Рис. 12.7. Побудова епюр Q_y і M_X.

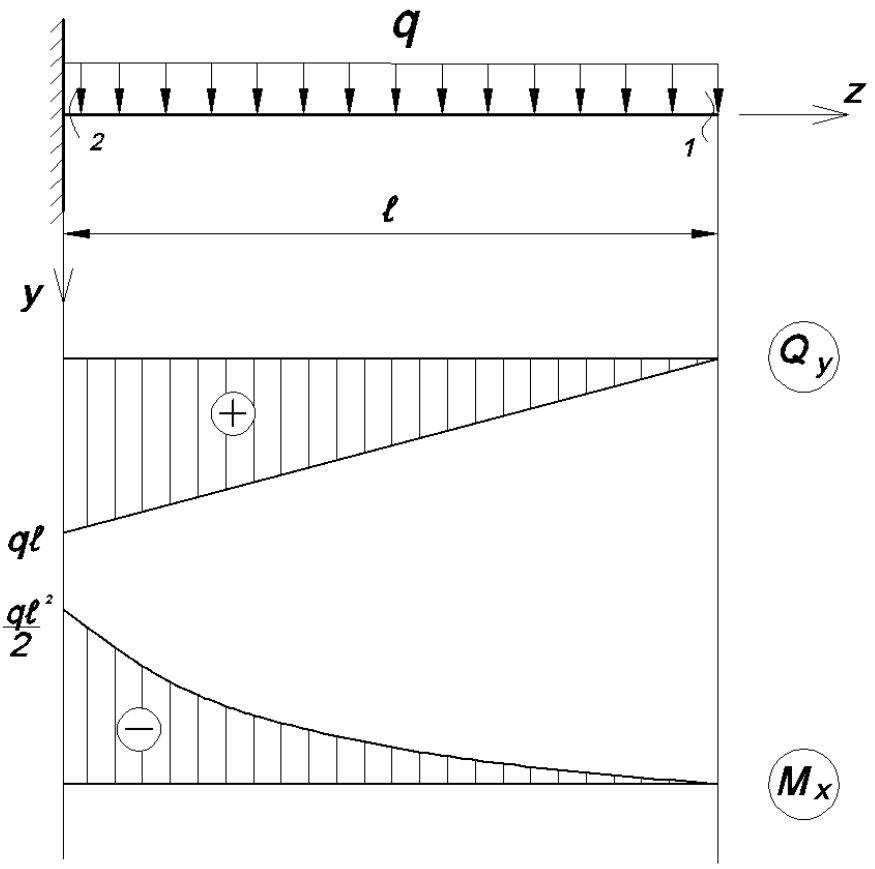


Рис. 12.8. Побудова епюр Q_y, M_X.

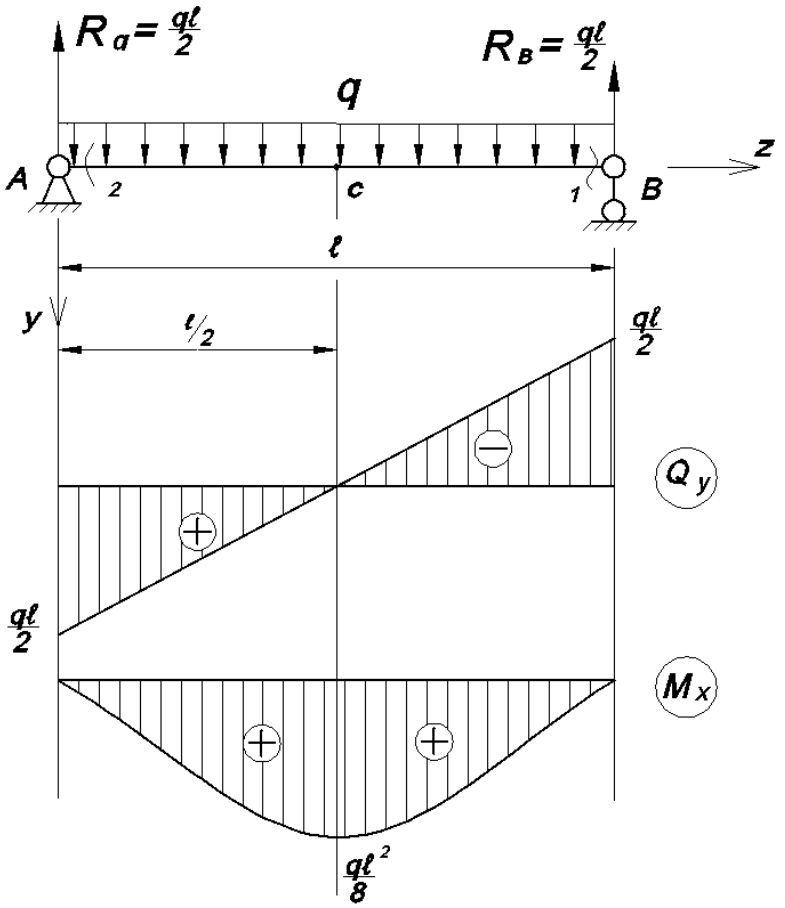


Рис. 12.9. Побудова епюр Q_y, M_X.

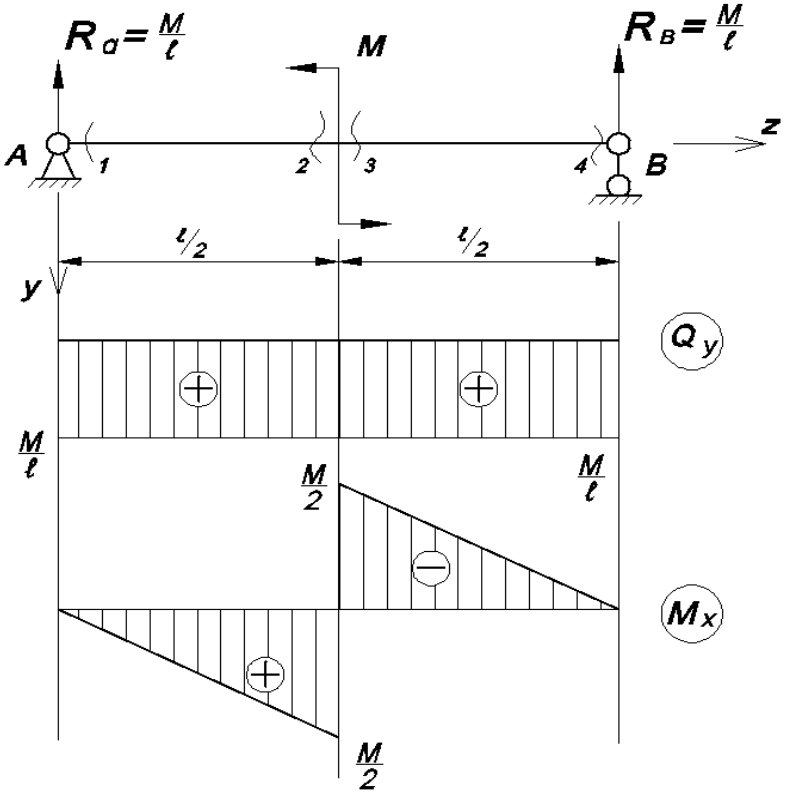


Рис. 12.10. Побудова епюр Q_y, M_X.

Розглянемо більш складний приклад розв'язання задачі розрахунку балки на згин.

Побудувати епюри M_X та Q_y для заданої балки (рис. 12.11). Розв'язання задачі поділяємо на чотири етапи:

1) Визначаємо опорні реакції. Вважаємо, що балка – абсолютно тверде тіло, складаємо для неї рівняння рівноваги, розв'язуючи які, знаходимо опорні реакції (рис. 12.11).

$$\sum M_B = 0;$$

$$10 \cdot P_1 + q \cdot 4 \cdot 8 - R_A \cdot 8 + P_2 \cdot 3 - M = 0;$$

$$R_A = 177{,}5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$2 \cdot P_1 - 5 \cdot P_2 + 8 \cdot R_B - M = 0;$$

$$R_B = 102{,}5 \text{ кН.}$$

Перевірка (спроектуємо всі сили на вісь Y):

$$\sum Y = 0;$$

$$P_1 + q \cdot 4 - R_A + P_2 - R_B = 0;$$

$$40 + 80 - 177{,}5 + 160 - 102{,}5 = 0.$$

2) Розбиваємо балку на ділянки. Границями ділянок є початок і кінець балки, точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження *q* та його закінчення.

Умовно балку поділено хвилястими перерізами, які відмічені на схемі (рис.12.11) цифрами вздовж балки.

3) Визначаємо величину поперечної сили Q_y в характерних перерізах і будуємо її епюру (рис 12.11).

$$Q_{y(1)} = -P_1 = -40 \text{ кН.}$$

$$Q_{y(2)} = -P_1 - 2 \cdot q = -80 \text{ кН.}$$

$$Q_{y(3)} = -P_1 - 2 \cdot q + R_A = 97{,}5 \text{ кН.}$$

$$Q_{y(4)} = Q_{y(5)} = -P_1 - 4 \cdot q + R_A = 57{,}5 \text{ кН.}$$

$$Q^{пр}_{y(6)} = -R_B + P_2 = 57{,}5 \text{ кН.}$$

$$Q^{np}_{y(7)} = Q^{np}_{y(8)} = -R_B = -102{,}5 \text{ кН.}$$

$$Q^{np}_{y(9)} = Q^{np}_{y(10)} = 0.$$

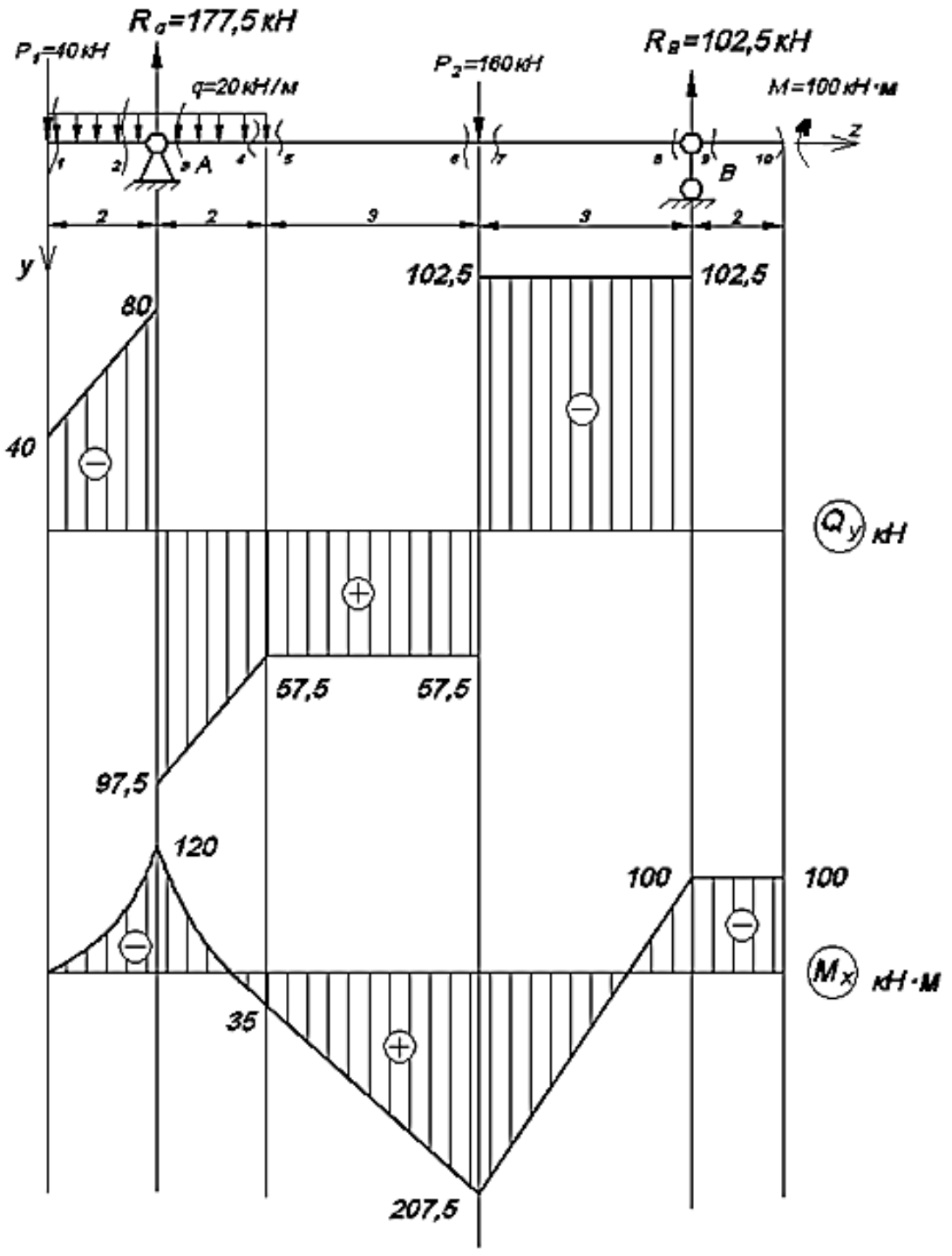


Рис. 12.11. Схема балки до задачі з поетапним розв’язанням її.

4) Визначаємо величини згинальних моментів M_X в характерних перерізах і будуємо епюру (рис.12.11).

$$M_{x(1)} = 0 \text{ кН·м.} \quad M_{x(2)} = M_{x(3)} = -2 \cdot P_1 - 2 \cdot q = -120 \text{ кН·м.}$$

$$M_{x(4)} = M_{x(5)} = -4 \cdot P_1 - 4 \cdot 2 \cdot q + 2 \cdot R_A = 35 \text{ кН·м.}$$

$$M_{x(6)} = M_{x(7)} = -M + 3 \cdot R_B = 207{,}5 \text{ кН·м.}$$

$$M_{x(8)} = M_{x(9)} = M_{x(10)} = -M = -100 \text{ кН·м.}$$

Контрольні запитання до лекції 12

1. Які види опор і балок розглядають у курсі?
2. Як визначити опорні реакції балки?
3. Які внутрішні зусилля виникають при плоскому згині?
4. Які існують диференціальні залежності між навантаженням, поперечною силою та згинальним моментом?
5. У якій послідовності будують епюри поперечних сил і згинальних моментів?

Лекція 13. Чистий згин

Мета лекції. Після вивчення лекції слід засвоїти поняття чистого згину, навчитися визначати нормальні напруження при згині та виконувати розрахунок балки на міцність.

План лекції

13.1. Загальні поняття про чистий згин

13.2. Визначення нормальних напружень при чистому згині

13.3. Приклад чистого згину

Ключові поняття. чистий згин, нейтральний шар, нейтральна вісь, нормальні напруження при згині, момент опору, умова міцності при згині.

13.1. Загальні поняття про чистий згин

Чистий згин – вид деформації, при якому в перерізі діє лише згинальний момент. Приклад – ділянка балки між двома симетрично розташованими силами, де поперечна сила дорівнює нулю.

У цілому при плоскому згині в поперечному перерізі балки виникають поперечна сила Q_y та згинальний момент M_X. Якщо в поперечному перерізі балки відсутня поперечна сила Q_y, а діє тільки згинальний момент M_X, то балка знаходиться в умовах чистого згину (рис. 13.1).

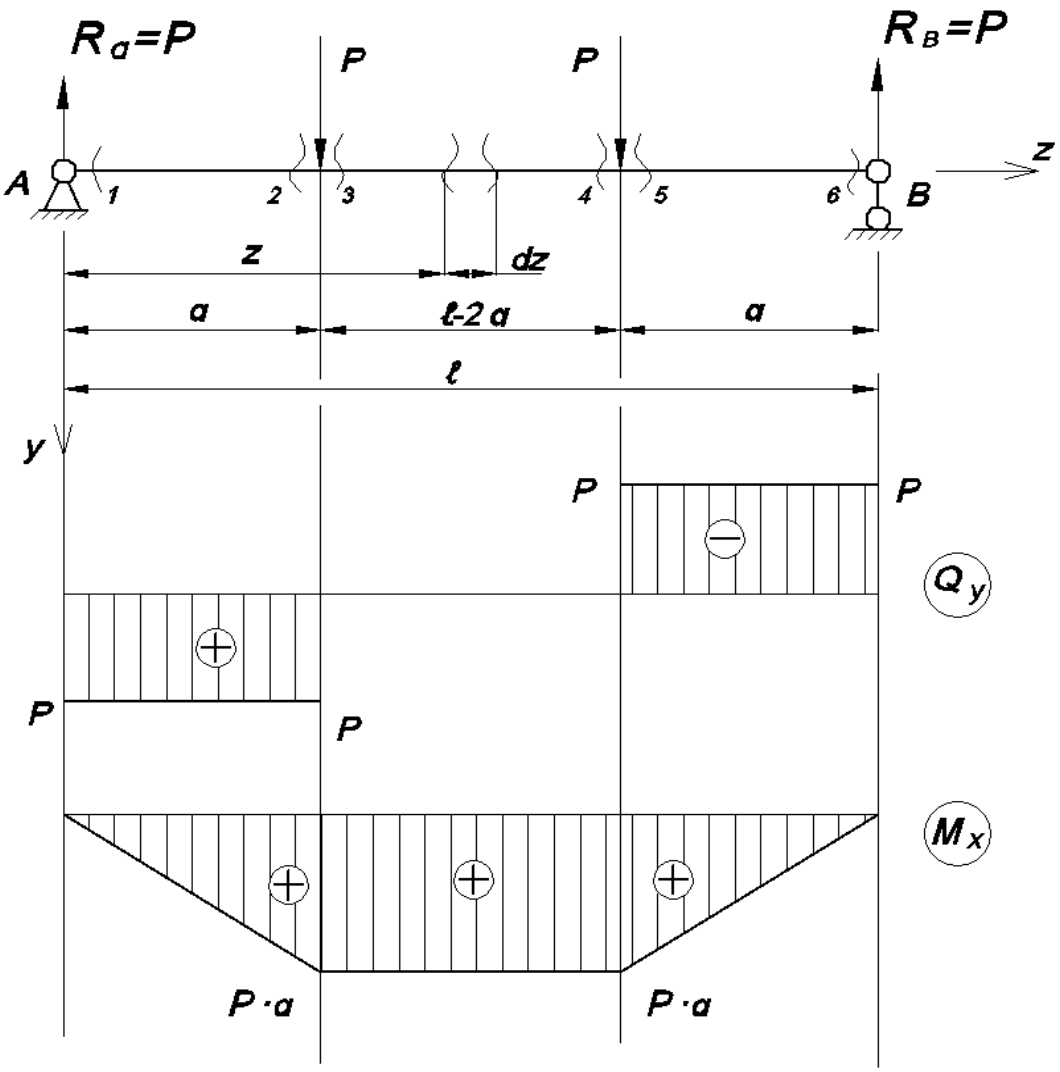


Рис. 13.1. Схема балки.

Середня ділянка балки знаходиться в умовах чистого згину.

13.2. Визначення нормальних напружень при чистому згині

Спостереження за сіткою на бічній поверхні показують, що поперечні лінії залишаються прямими, а поздовжні викривляються. З'являється нейтральний шар, волокна якого не деформуються. Нормальні напруження змінюються по висоті перерізу лінійно: нульові на нейтральній осі й найбільші в найвіддаленіших волокнах. Вони пропорційні згинальному моменту та відстані від нейтральної осі й обернено пропорційні моменту інерції; умову міцності записують через момент опору перерізу.

Для спрощення розглянемо балку, яка має вертикальну вісь симетрії. При визначенні характеру (закону) розподілу напружень за поперечним перерізом балки недостатньо рівнянь статики. Розглядають деформований стан балки із нанесеною на її бокову поверхню сіткою із поздовжніх і поперечних ліній (рис. 13.2).

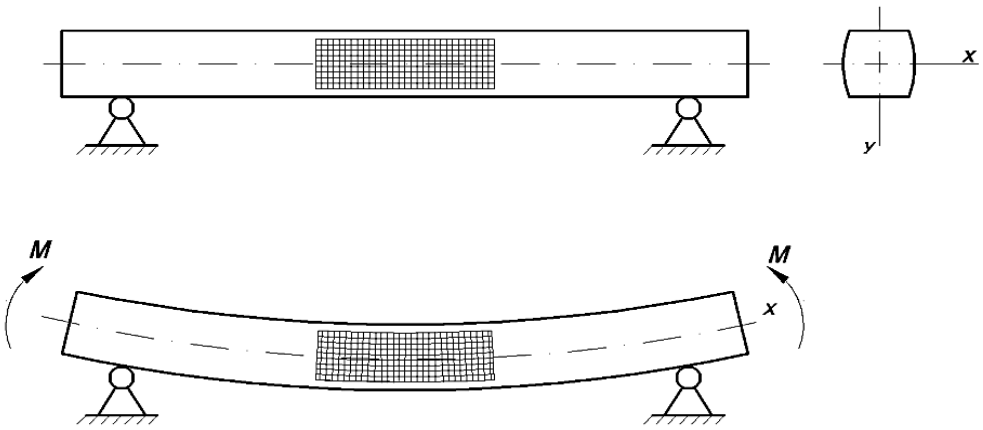


Рис. 13.2. Деформація волокон балки при чистому згині.

При деформації поздовжні риски викривляються і змінюють свою довжину, а поперечні повертаються на деякий кут, залишаючись при цьому прямими. Тобто при чистому згині справедливою є гіпотеза плоских перерізів, яка разом із рівняннями статики дає можливість визначити закон зміни напруження за поперечним перерізом балки. Розглянемо ділянку балки довжиною dz (рис. 13.2), та відтворимо його в збільшеному вигляді (рис. 13.3).

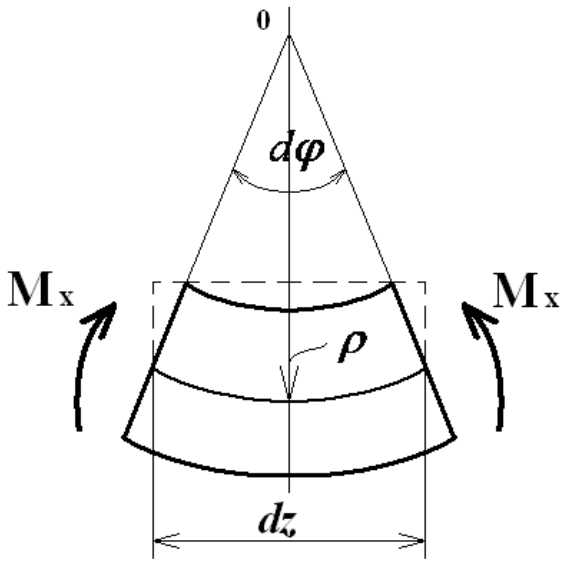


Рис. 13.3. Деформація ділянки балки довжиною dz.

За такої дії на ділянку балки dz зовнішнього навантаження видно, що два суміжних перерізи повертаються на кут $d\varphi$. При цьому верхні волокна скорочуються, а нижні – подовжуються. Деяке волокно залишається недеформованим – нейтральна лінія. А це, в свою чергу,

говорить про те, що в поперечному перерізі виникають тільки нормальні напруження σ.

Для простоти розглянемо ділянку балки з прямими поздовжніми волокнами (рис. 13.4). Розглядатимемо деформацію волокна на відстані y від нульової лінії, яка складається з двох відрізків АВ, кожен з яких дорівнює:

$$AB = y \cdot \frac{d\varphi}{2}. \tag{13.1}$$

$$dz = \rho \cdot d\varphi\,. \tag{13.2}$$

$$\Delta dz = y \cdot d\varphi\,. \tag{13.3}$$

де: ρ – радіус кривизни.

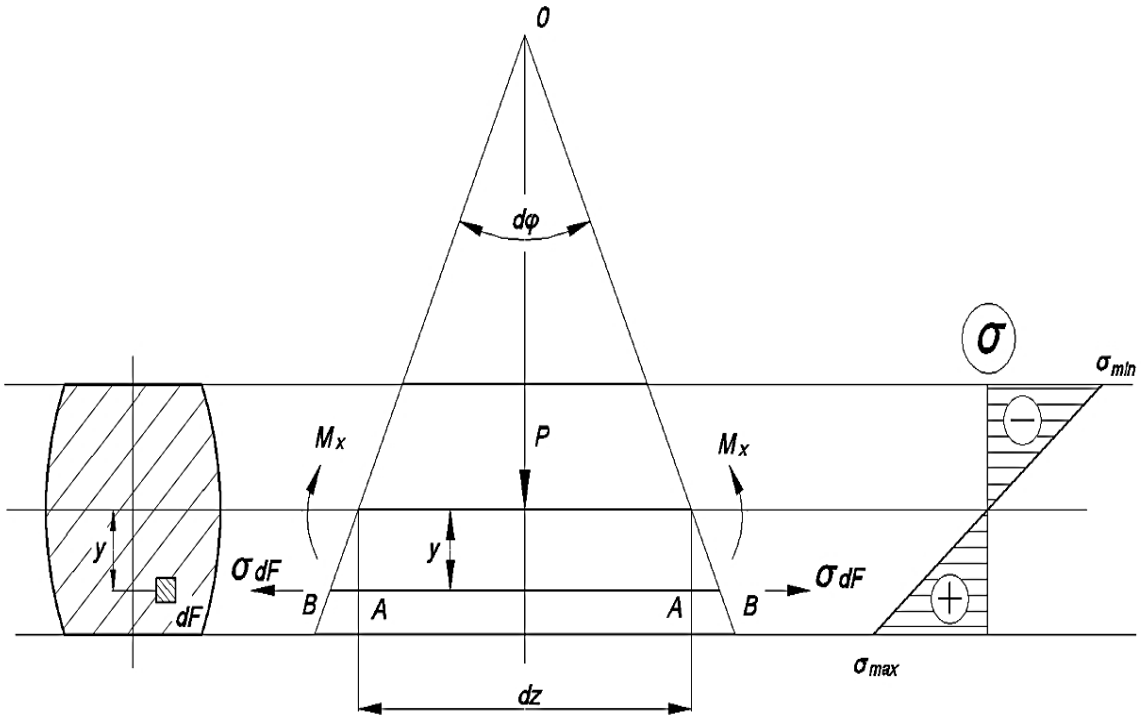


Рис. 13.4. Наближений розгляд деформації волокон.

Відносна деформація дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{1}{\rho} \cdot y\,. \tag{13.4}$$

Використовуючи закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \text{ : маємо } \sigma = \frac{E}{\rho} \cdot y \tag{13.5}$$

Очевидно, що поздовжня сила при чистому згинанні дорівнює нулю:

$$N_Z = \int_F \sigma \cdot dF = 0 . \tag{13.6}$$

Підставивши вираз (13.5) в (13.6) будемо мати:

$$N_Z = \int_F \frac{E}{\rho} y \cdot dF = \frac{E}{\rho} \int_F y \cdot dF = 0 . \tag{13.7}$$

При цьому $\frac{E}{\rho} \neq 0$.

Відповідно:

$$\int_F y \cdot dF = S_x = 0. \tag{13.8}$$

Це означає, що при чистому згині нейтральна лінія проходить через центр ваги перерізу.

Сумарний згинальний момент у поперечному перерізі балки M_x відносно нейтральної вісі визначається:

$$M_x = \int_F (\sigma dF) \cdot y \tag{13.9}$$

Замість σ підставимо його значення із (13.5), й отримаємо:

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF \tag{13.10}$$

Враховуючи, що $\int_F y^2 dF = I_X$, маємо:

$$M_x = \frac{EI_x}{\rho}, \tag{13.11}$$

Порівнявши (13.11) з (13.5), отримаємо:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y . \tag{13.12}$$

Із виразу (13.12) видно, що змінною є тільки ордината y, а значить нормальні напруження по висоті перерізу змінюються за лінійним законом. Графічне відображення закону зміни нормальних

напружень σ по висоті перерізу називають епюрою нормальних напружень (рис.13.4).

Очевидно, що максимальні напруження виникають у найбільш віддалених волокнах і визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{\underbrace{I_x / y_{\max}}_{W_x}} = \frac{M_x}{W_x} . \qquad (13.13)$$

Формула (13.13) виведена для перерізів, що мають вертикальну вісь симетрії. Доведемо, що вона є справедливою і для будь-яких поперечних перерізів, але при цьому силова площина повинна збігати з однією із головних осей симетрії.

Очевидно, що загальний вид епюри σ не залежить від форми поперечного перерізу балки.

Для доведення прирівняємо до нуля згинальний момент M_y:

$$M_y = \int_F \sigma \cdot dF \cdot x = \int_F \frac{E}{\rho} \cdot y \cdot dF \cdot x = \frac{E}{\rho} \cdot \int_F x \cdot y \cdot dF = 0 . \quad (13.14),$$

При цьому $\frac{E}{\rho} \neq 0$.

Значить: $\int_F x \cdot y \cdot dF = I_{xy} = 0$ – відцентровий момент інерції.

Відцентровий момент інерції дорівнює нулю лише тоді коли ці осі будуть головними.

13.3. Приклад чистого згину

> Приклад закріплює послідовність розрахунку: за епюрою знаходять небезпечний переріз і максимальний згинальний момент, обчислюють геометричні характеристики перерізу й перевіряють міцність за найбільшими нормальними напруженнями.

Для найбільш напруженого поперечного перерізу (рис. 12.11) балки необхідно побудувати епюру σ, прийнявши $в = 15$ см, $h = 24$ см. Максимальний момент $M_{x(7-7)} = 207{,}5$ кН·м. (рис.12.11).

Для точки 1.

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207{,}5 \cdot (-0{,}12)}{0{,}15 \cdot (0{,}24)^3 \diagup 12} = -144 \text{ МПа.}$$

Для точки 2.

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{\frac{b \cdot h^3}{12}} \cdot y = \frac{207{,}5 \cdot (-0{,}06)}{0{,}15 \cdot (0{,}24)^3 \diagup 12} = -72 \text{ МПа.}$$

Для точки 3. $\sigma_{(3)} = 0$.

За аналогією для точок 4 і 5 маємо:

$\sigma_{(4)} = 72$ МПа.

$\sigma_{(5)} = 144$ МПа.

Переріз 7–7

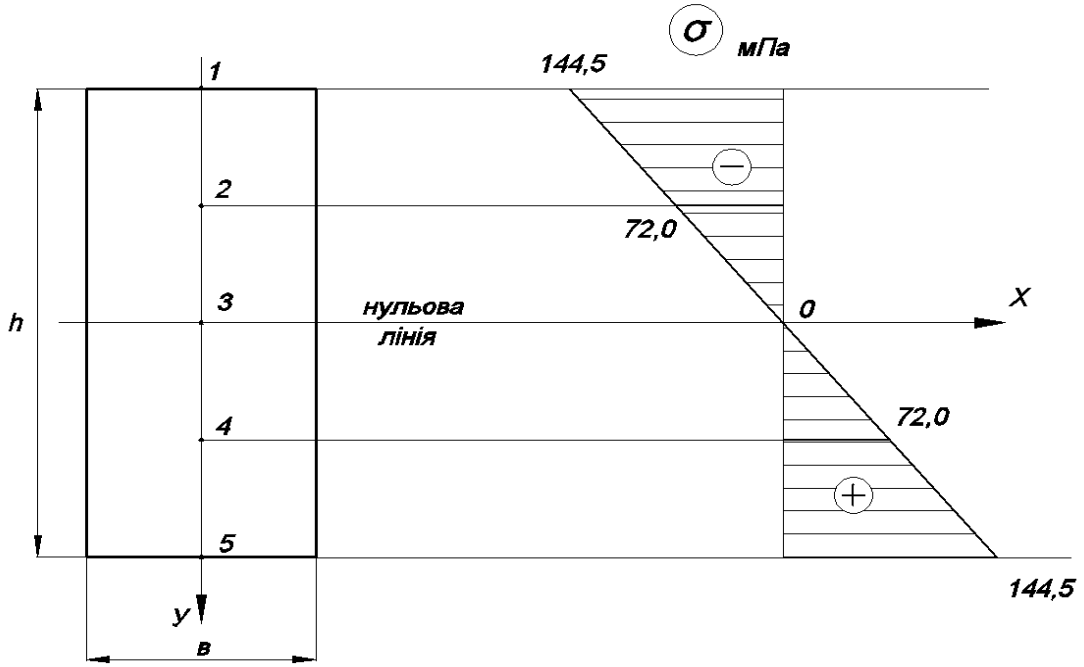


Рис. 13.5. Побудова епюри нормальних напружень при чистому згині.

Контрольні запитання до лекції 13

1. Що таке чистий згин і за яких умов він виникає?
2. Що таке нейтральний шар і нейтральна вісь?
3. Як розподіляються нормальні напруження по висоті перерізу при згині?
4. Як записується умова міцності при згині?

Лекція 14. Поперечний згин. Центр згину

Відповідає в початковому документі: Розділ 6 (продовження) · 6.3. Поперечний згин

Мета лекції. Після вивчення лекції слід навчитися визначати дотичні напруження при поперечному згині за формулою Журавського, будувати їх епюри для різних перерізів та розуміти поняття центра згину.

План лекції

14.1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині
14.2. Поняття про центр згину

Ключові поняття. поперечний згин, дотичні напруження, формула Журавського, статичний момент відсіченої частини, двотавровий переріз, швелер, центр згину.

14.1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині

При поперечному згині в перерізі діють і згинальний момент, і поперечна сила, тому виникають і нормальні, і дотичні напруження. Дотичні напруження за висотою перерізу визначають за формулою Журавського: вона містить поперечну силу, статичний момент відсіченої частини перерізу, момент інерції та ширину перерізу на рівні шуканих напружень. Вигляд епюри дотичних напружень залежить від форми перерізу – прямокутного, двотаврового та інших.

На відміну від чистого згину, при поперечному згині в перерізі балки поряд з моментом згинання M_x виникає поперечна сила Q_y (рис. 14.1).

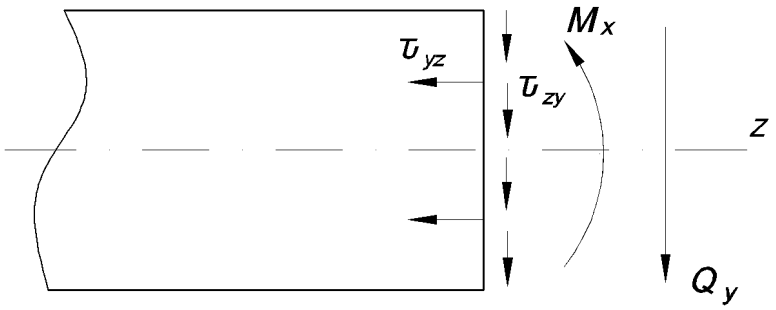


Рис. 14.1. Дотичні напруження при поперечному згині.

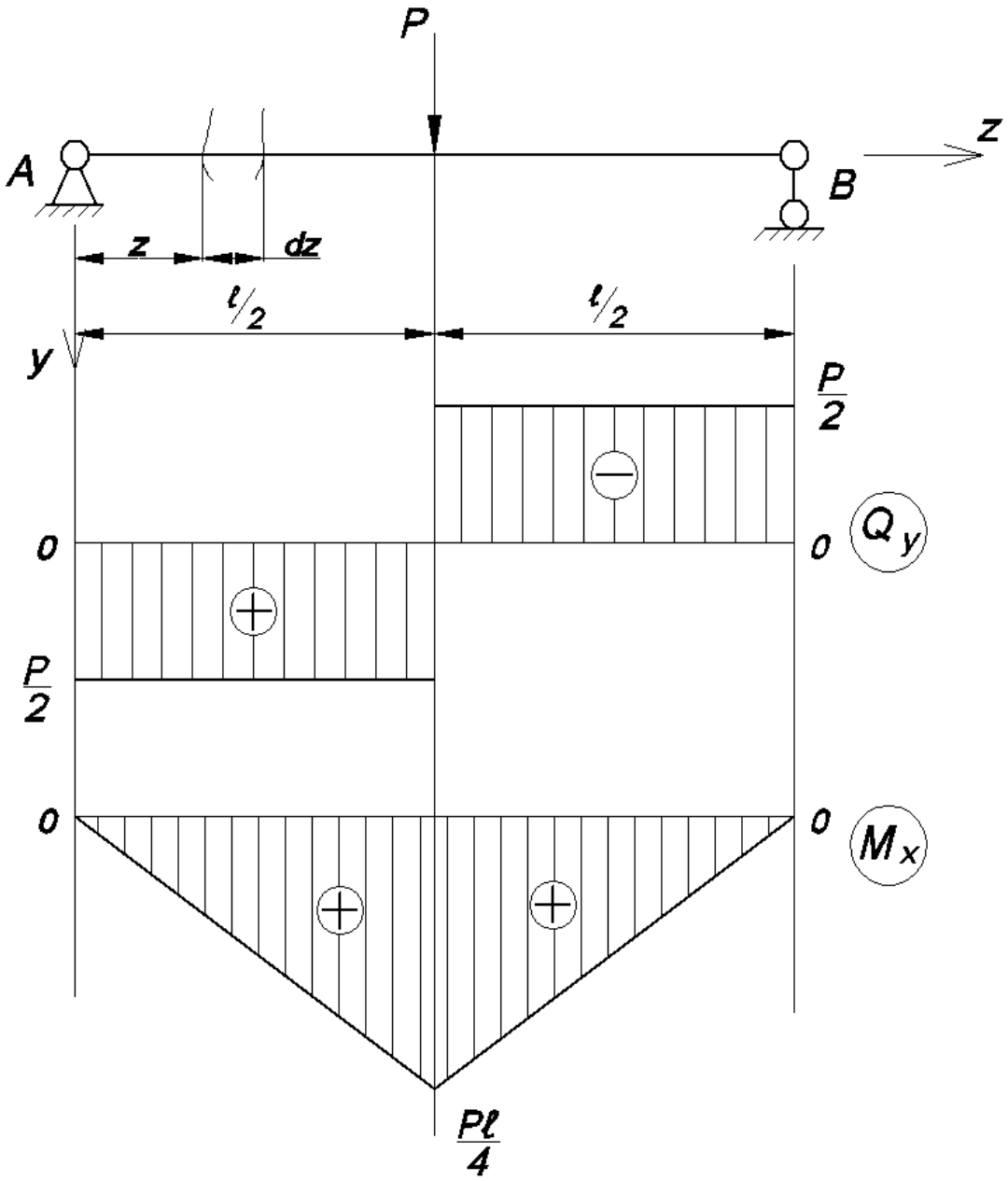


Рис. 14.2. Схема балки.

Поперечна сила Q_y викликає дію дотичних напружень τ у поперечному перерізі, які згідно із законом парності дотичних напружень виникають і в поздовжніх перерізах, викликаючи зсув поздовжніх волокон і порушуючи гіпотезу плоских перерізів, що покладена в основу виведення формули $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$. Експериментальні й теоретичні дослідження цього питання довели, що зсув незначно впливає на порушення гіпотези плоских перерізів, тому для

поперечного згину користуються формулою: $\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$, як і для чистого згину.

Розглянемо ділянку балки довжиною dz, яку розітнемо поздовжнім перерізом і розглянемо рівновагу залишеної частини.

Поперечний переріз балки

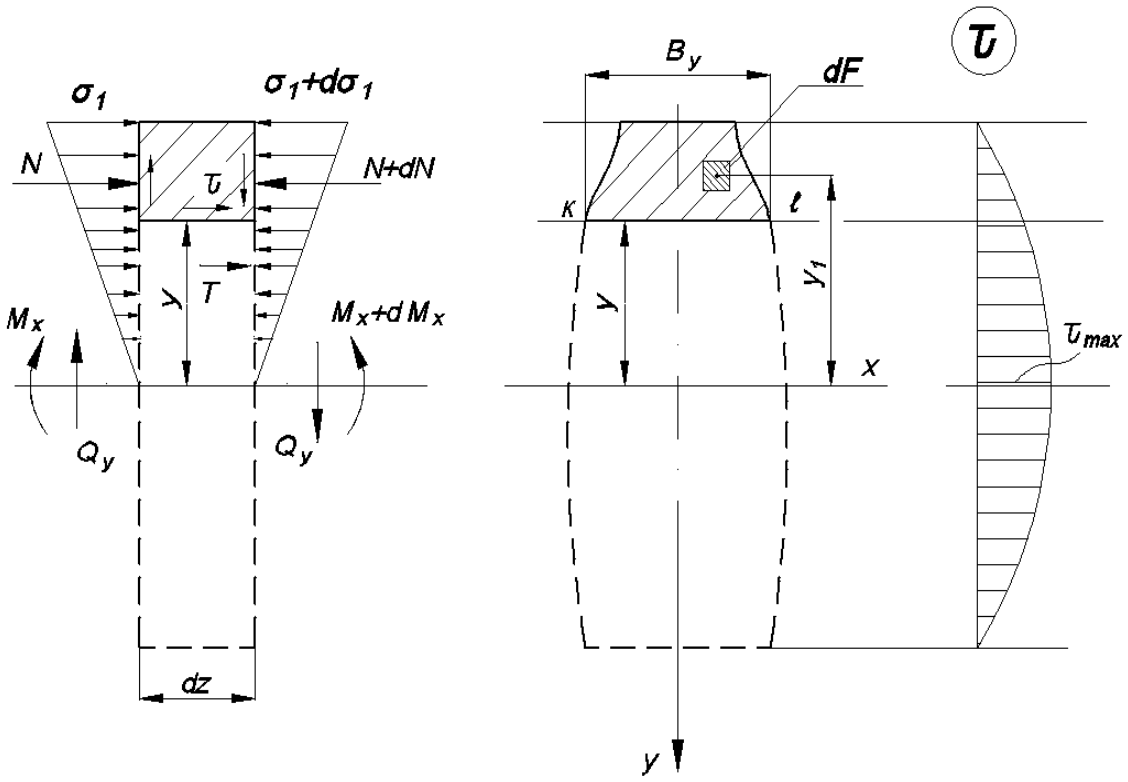


Рис. 14.3. Ділянка балки довжиною dz.

Оскільки на правому перерізі ділянки балки діє більший згинальний момент, ніж на лівому, то відповідно будуть більшими і напруження:

$$d\sigma_1 = \frac{dM_x}{I_x} \cdot y_1 . \qquad (14.1)$$

Відповідно, і стискаюча сила на правому перерізі буде більшою, ніж на лівому на величину:

$$dN_Z = \int_{F_{відсіч}} d\sigma_1 \cdot dF = \int_{F_{відсіч}} \frac{dM_x}{I_x} y_1 \cdot dF =$$

$$= \frac{dM_x}{I_x} \int_{F_{відсіч}} y_1 \cdot dF.$$

(14.2)

$$S_x^{відсіч} = \int_{F_{відсіч}} y_1 \cdot dF \tag{14.3}$$

де $S_x^{відсіч}$ - статичний момент відносно нейтральної осі відсіченої частини перерізу.

З врахуванням виразу (14.3) формула (14.2) набуде вигляду:

$$dN_Z = \frac{dM_x}{I_x} \cdot S_x^{відсіч}. \tag{14.4}$$

Сила зсуву в поздовжньому перерізі визначається:

$$T = \tau \cdot dz \cdot в_y \ . \tag{14.5}$$

Із умов рівноваги очевидно, що сума проекцій усіх сил на вісь *z*рівна нулю, отже, матимемо:

$$T = dN \ . \tag{14.6}$$

Підставивши (14.4) та (14.5) в (14.6), матимемо рівність:

$$\tau_x = \frac{dM_x}{dz} \cdot \frac{S_x^{відсіч}}{I_x \cdot в_y}. \tag{14.7}$$

А так як $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ та $\tau_x = \tau_y$, матимемо:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot в_y}, \tag{14.8}$$

де I_x – момент інерції відносно нейтральної осі всього поперечного перерізу.

Формулу (14.8) отримав Д.І. Журавський.

Із аналізу формули (14.8) зрозуміло, що $\tau = 0$ у крайніх точках, а $\tau_{\max}$ буде в точках, розташованих на нульовій лінії. τ_y змінюється, як відношення $S_x^{відсіч} / в_y$.

Для прямокутного перерізу, де $в_y = const$ то τ_y по висоті перерізу змінюється по кривій 3–го ступеню.

Побудуємо епюри τ для деяких перерізів.

Прямокутний переріз (рис. 14.4)

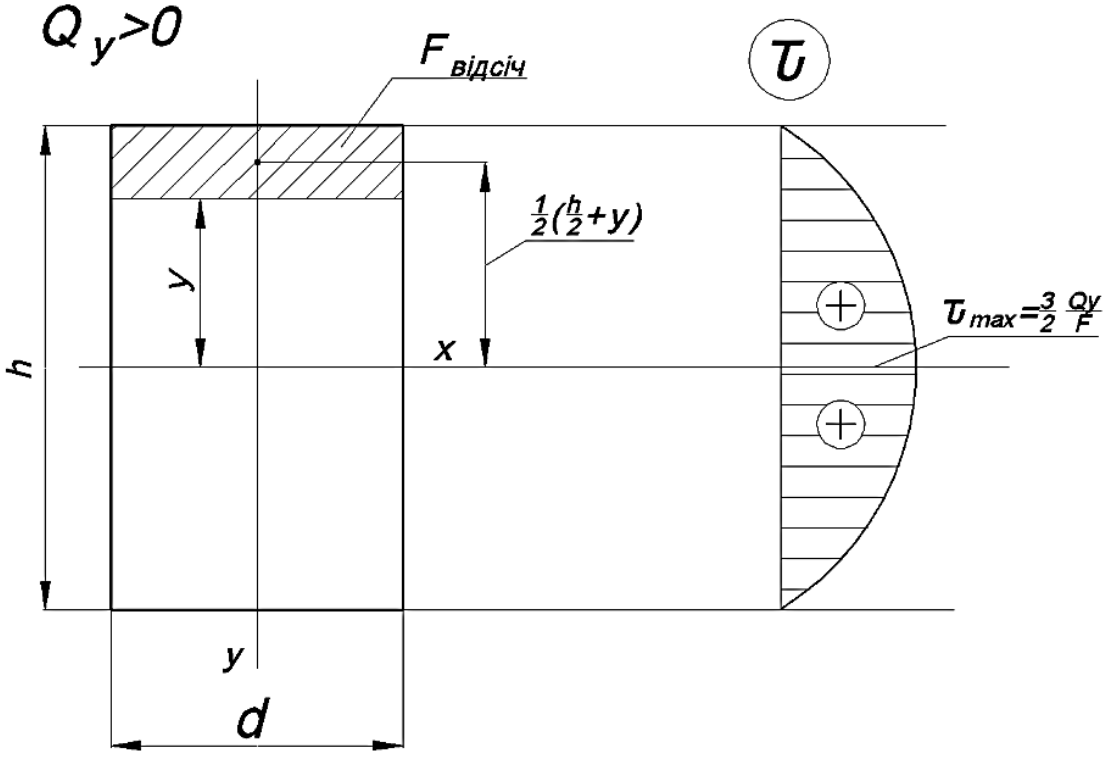


Рис. 14.4. Дотичні напруження в прямокутному поперечному перерізі.

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot в_y},$$

$$S_x^{відсіч} = F^{відсіч} \cdot \frac{1}{2}(\frac{h}{2} + y) = в \cdot (\frac{h}{2} - y) \cdot \frac{1}{2}(\frac{h}{2} + y). \qquad (14.9)$$

Застосувавши формули скороченого множення, отримаємо:

$$S_x^{відсіч} = \frac{в}{2}(\frac{h^2}{4} - y^2). \qquad (14.10)$$

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot \frac{в}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{в \cdot h^3}{12} \cdot в}. \qquad (14.11)$$

Коли $y = \frac{h}{2}$ або $y = -\frac{h}{2}$, то $\tau_y = 0$.

При $y = 0$ будемо мати формулу:

$$\tau_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F}. \qquad (14.12)$$

Круглий поперечний переріз (рис.14.5).

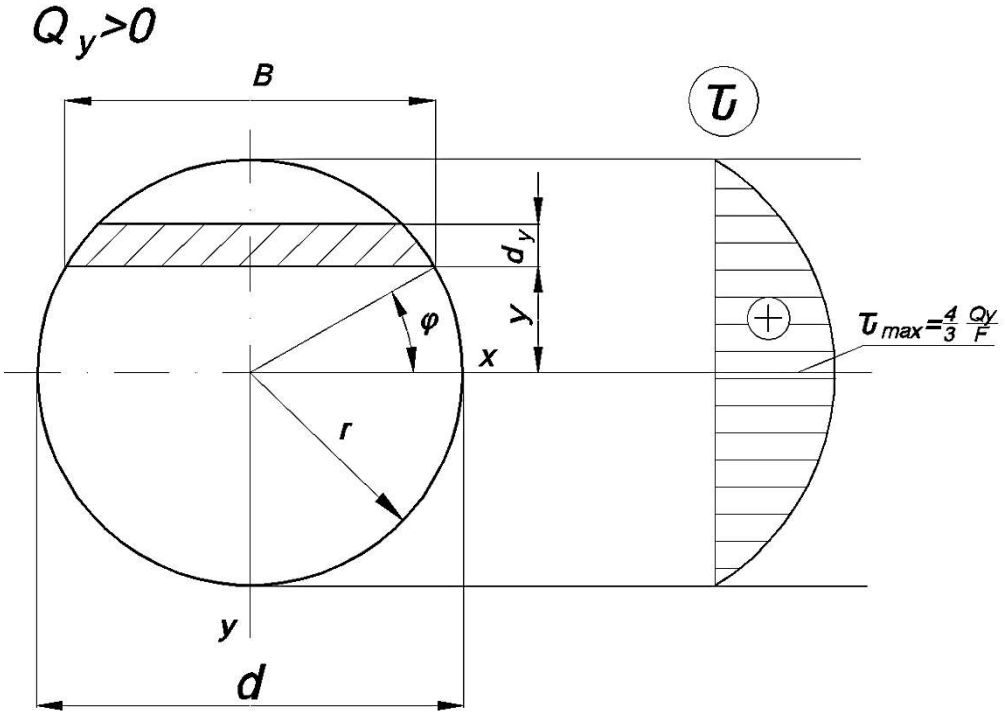


Рис. 14.5. Дотичні напруження в круглому поперечному перерізі.

$$в = 2 \cdot r \cdot \cos\varphi; \qquad y = r \cdot \sin\varphi; \qquad dy = r \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{відсіч} = \int_F y \cdot dF;$$

$$dF = в \cdot dy = 2 \cdot r^2 \cdot \cos^2\varphi \cdot d\varphi;$$

$$S_x^{відсіч} = \int_F y \cdot dF = \int_F 2 \cdot r^3 \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = \frac{2 \cdot r^3}{3} \qquad (14.13)$$

Коли $y = r$ або $y = -r$, то $\tau_y = 0$.

При $y = 0$, використавши формулу (14.8) і використовуючи формулу для момента інерції круга $I_x = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$ будемо мати формулу для обчислення дотичних напружень:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot 2 \cdot r^3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot r^4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{\pi \cdot r^2} \cdot$$

$$\tau_y = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} \qquad (14.14)$$

де $F = \pi \cdot r^2$

Двотавровий переріз (рис. 14.6) характерний – різкою зміною ширини в місцях з'єднання полиці та стійки.

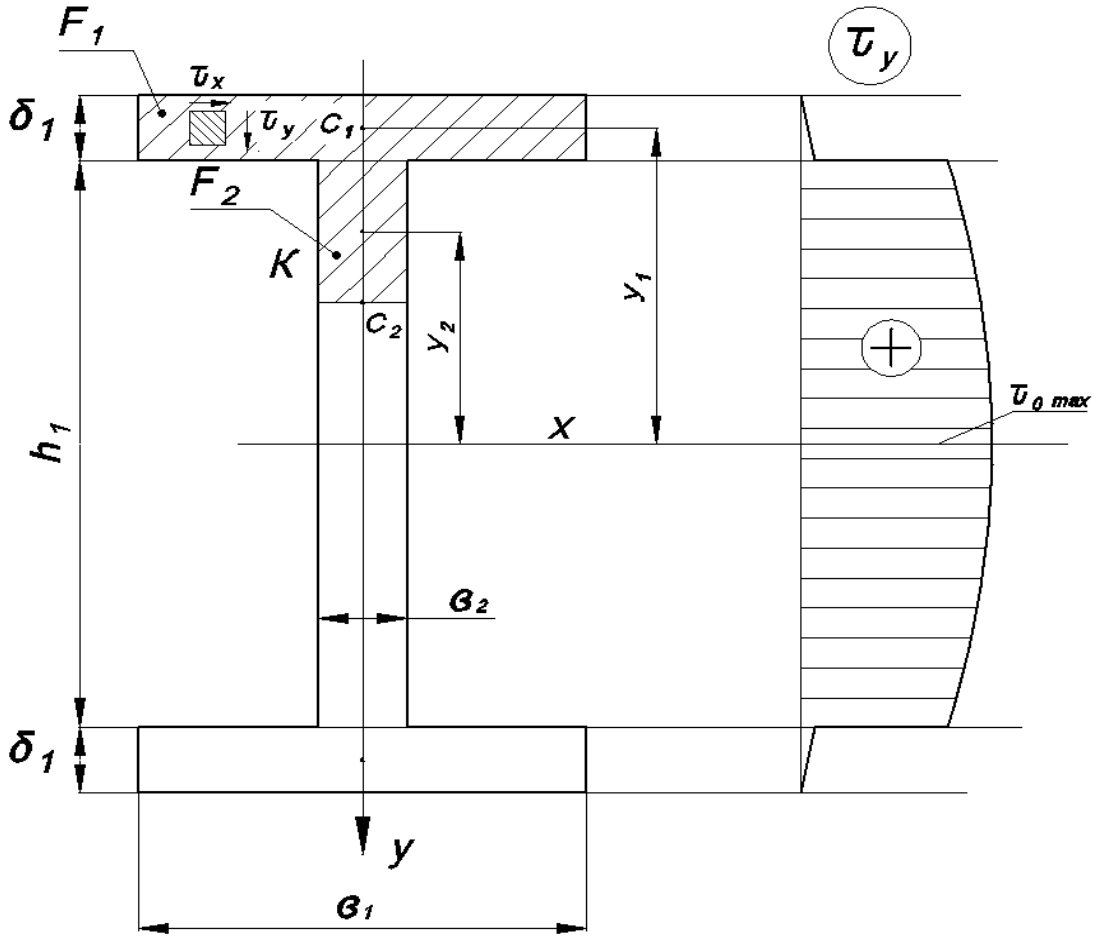


Рис. 14.6. Дотичні напруження двотаврового перерізу.

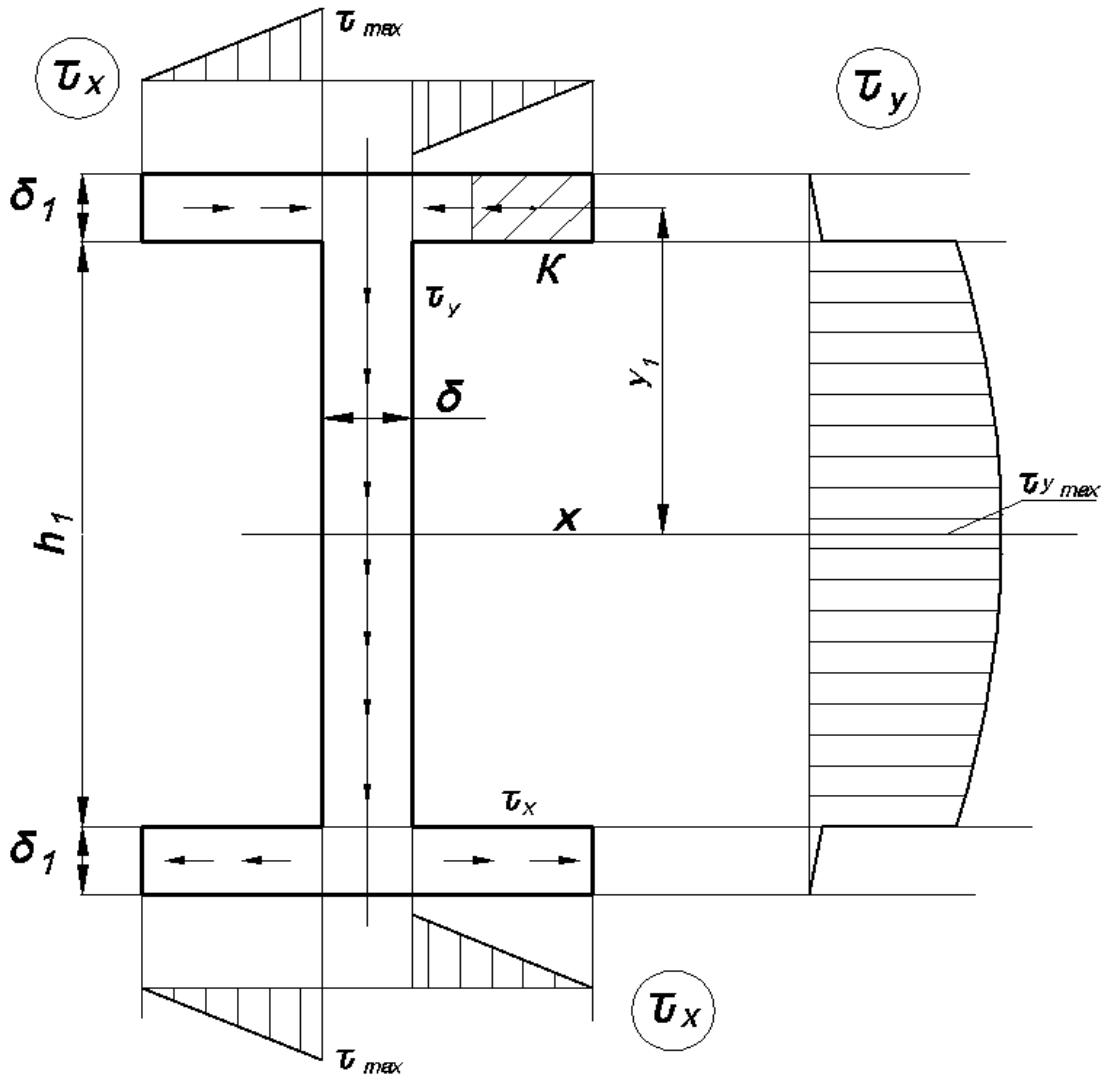


Рис. 14.7. Дотичні напруження τ_x та τ_y.

Для точки К $S_x^{відсіч} = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$;

Через значну ширину полиці τ_y розподіляється нерівномірно, тому для полиці користуватися формулою 14.14 не коректно, її застосовують лише, коли $y \le \pm \frac{h}{2}$.

Тому в цьому разі роблять двояко:

1. Не враховують τ_y в полицях (через незначність);

2. Обчислюють за формулою: $\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot в_1}$, при цьому на епюрі в точках переходу полиці у стійку є суттєві стрибки.

У двотавровому перерізі в полиці також виникають напруження τ_x, які визначаються за формулою:

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \delta_1} \cdot \qquad (14.15)$$

$$S_x^{відсіч} = F^{відсіч} \cdot y_1 .$$

14.2. Поняття про центр згину

> Центр згину – точка, через яку має проходити лінія дії зовнішньої сили, щоб балка згиналася без закручування. Для симетричних перерізів він лежить на осі симетрії; для несиметричних, наприклад швелера, – поза перерізом, тому силу слід прикладати саме в центрі згину, щоб не виникали додаткові зусилля.

Використовуючи методику побудови епюр τ_x та τ_y для двотавра, побудуємо їх для швелера, завантаженого в центрі ваги зосередженою силою на кінці консолі (рис.14.8).

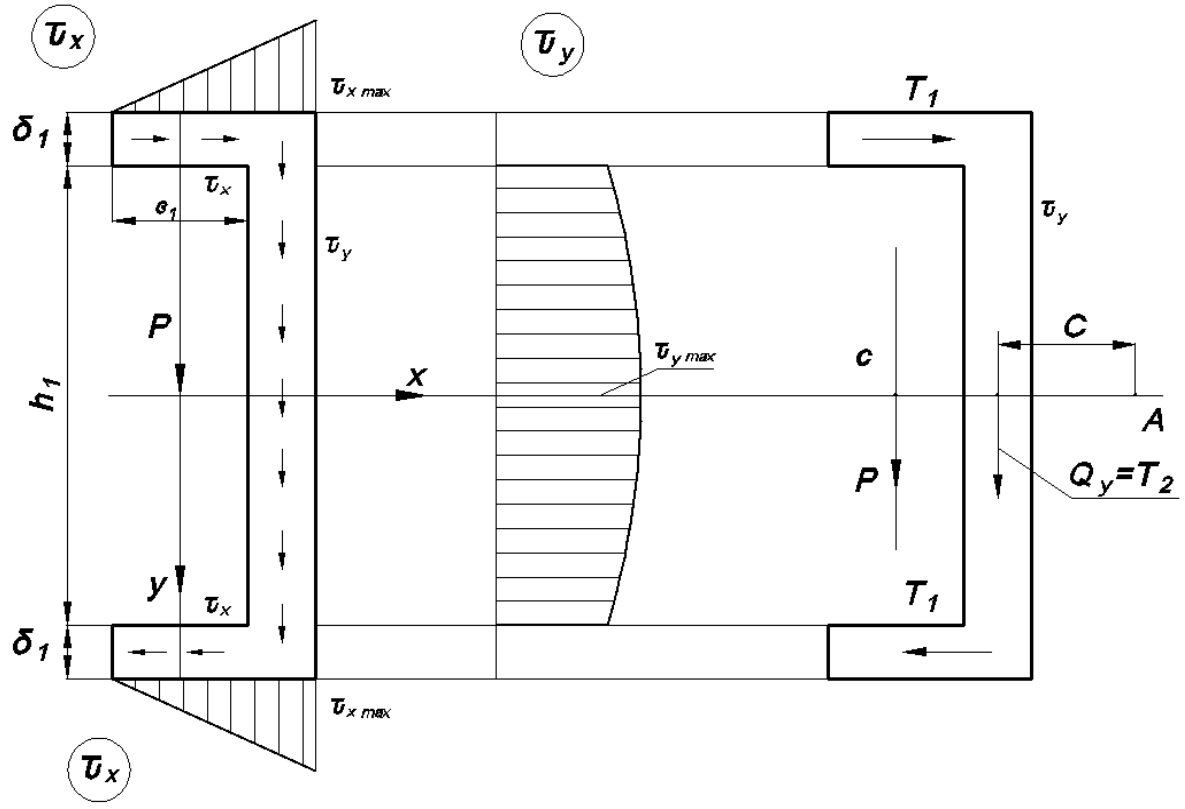


Рис. 14.8. Дотичні напруження в швелері.

Найбільш дотичні напруження в полиці швелера дорівнюють:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot S_x^{відсіч}}{I_x \cdot \delta_1};$$

(14.16)

де: $S_x^{відсіч} = \frac{\delta_1 \cdot h_1 \cdot в_1}{2}$. (14.17)

Підставивши вираз (14.17) в (14.16), отримаємо:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot в_1 \cdot \delta_1 \frac{h}{2}}{I_x \delta_1} = \frac{Q_y}{2I_x} b_1 h_1 .$$ (14.18)

Сумарна горизонтальна сила зсуву T_1 дорівнює:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \tau_x^{\max} \cdot \delta_1 \cdot в_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1 \cdot в_1^2 .$$ (14.19)

Дві сили T_1 призводять до виникнення моменту, який визначають:

$$M_1 = T_1 \cdot h_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1^2 \cdot в_1^2 .$$ (14.20)

Звідси очевидно, що поряд із згином відбувається і закручування поперечного перерізу, що знижує міцність. Очевидно, що на осі x є така точка А, відносно якої момент закручування дорівнює нулю. Цю точку називають ***центром згину***. Відповідно, необхідно намагатися прикладати зосереджену силу в цій точці, яка визначається:

$$\sum M_A = 0;\ M_1 - Q_y \cdot c = 0 .$$

$$c = \frac{M_1}{Q_y} = \frac{\delta_1 \cdot h_1^2 \cdot в_1^2}{4I_x}.$$ (14.21)

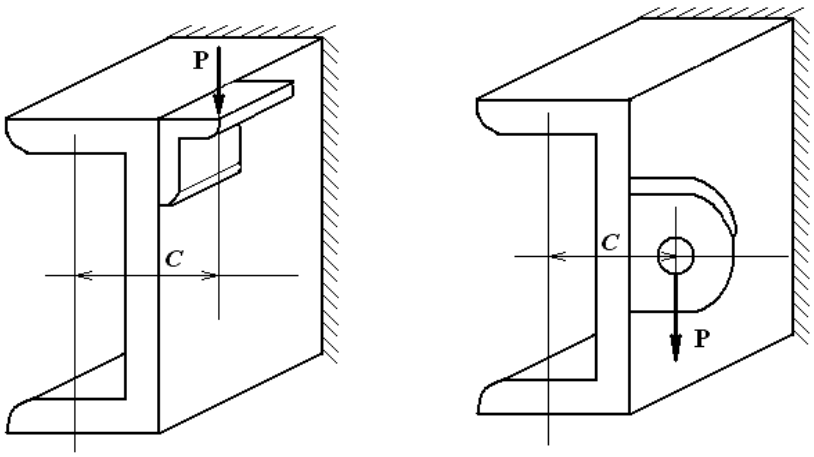


Рис. 14.9. Способи прикладання зовнішньої сили.

Для запобігання виникнення додаткових зусиль у поперечному перерізі зовнішню силу необхідно докладати в центрі згину. Конструктивно вирішене питання зображено на рис. 14.9.

Контрольні запитання до лекції 14

1. Які напруження виникають при поперечному згині?
2. Запишіть і поясніть формулу Журавського.
3. Як змінюються дотичні напруження по висоті прямокутного та двотаврового перерізів?
4. Що таке центр згину та чому важливо прикладати силу саме в ньому?

Лекція 15. Міцність балок при згині. Метод початкових параметрів

Мета лекції. Після вивчення лекції слід навчитися аналізувати напружений стан у точках балки при поперечному згині, виконувати перевірку міцності балок за нормальними, дотичними та головними напруженнями, оцінювати несучу здатність балки за межею пружності та ознайомитися з методом початкових параметрів для визначення кутів повороту й прогинів.

План лекції

15.1. Аналіз напруженого стану при згині

15.2. Перевірка міцності балок при згині

15.3. Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності

15.4. Приклади вирішення задач

Ключові поняття. плоский напружений стан при згині, головні напруження, максимальні дотичні напруження, момент опору, умова міцності, пластичний шарнір, пластичний момент опору, метод початкових параметрів, прогин, кут повороту.

15.1. Аналіз напруженого стану при згині

У довільній точці балки при поперечному згині діють нормальне напруження від згинального моменту та дотичне від поперечної сили, тобто виникає плоский напружений стан. Тому головні напруження та головні площадки знаходять за загальними формулами плоского стану, спрощеними з урахуванням того, що поздовжні волокна одне на одне не тиснуть. Дослідження трьох характерних точок — у верхньому стиснутому волокні, в нижньому розтягнутому та на нейтральній лінії — показує, що в крайніх волокнах дотичні напруження дорівнюють нулю (одновісний стан), а на нейтральній лінії нульові нормальні напруження (чистий зсув). Максимальні дотичні напруження діють на площадках під кутом 45° до головних. У двотавровому перерізі на епюрах з’являються стрибки через різку зміну ширини в місцях з’єднання полиці зі стінкою.

У загальному випадку плоского поперечного згину в поперечному перерізі балки виникають нормальні та дотичні напруження, які визначаються за формулами:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \qquad \tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{відс.}}{I_x \cdot в_y}.$$

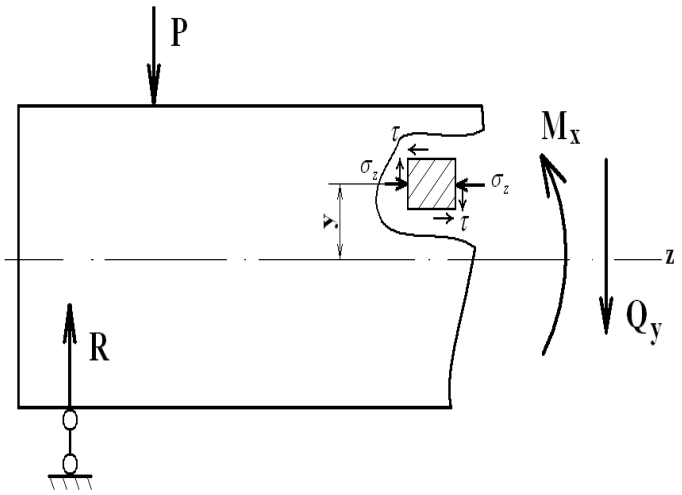


Рис. 15.1. Загальний випадок плоского напруженого стану при згині.

При цьому в будь–якій точці має місце плоский напружений стан, для якого головні напруження і головні площадки визначаємо за формулами (рис. 15.1):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z + \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}\ . \tag{15.1}$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}\ . \tag{15.2}$$

У нашому випадку, враховуючи, що поздовжні волокна не тиснуть одне на одне $\sigma_y = 0$ і $\sigma_z = \sigma$, $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$ то формули будуть такими:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,. \tag{15.3}$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma}. \tag{15.4}$$

При цьому дослідимо напружений стан у трьох точках по висоті перерізу балки; у верхньому стиснутому волокні; у нижньому розтягнутому волокні; на нейтральній лінії (рис. 15.2).

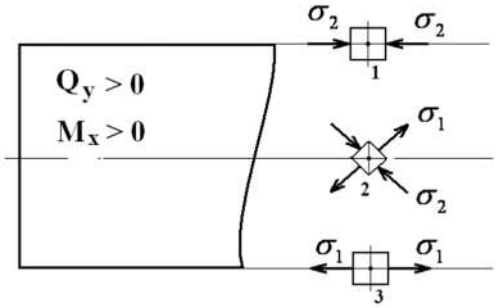


Рис. 15.2. Дослідження напруженого стану по висоті перерізу.

Точка 1: $\tau = 0$; $\sigma_z = -\sigma$.

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = 0 ;$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2} = -\sigma ;$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0 ; => \alpha_0' = 90° ; \qquad \alpha_0'' = 0° .$$

Точка 2: $\tau = \tau_{\max}$; $\sigma_z = 0$.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = \tau_{\max} ;$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = -\tau_{\max} ;$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{\max}}{0} = \infty ; => \quad \alpha_0' = 45° ; \qquad \alpha_0'' = 135° .$$

Точка 3: $\tau = 0$; $\sigma_z = \sigma$.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = \sigma ;$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2} = 0 ;$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0 ; => \alpha_0' = 0° ; \qquad \alpha_0'' = 90° .$$

При цьому максимальні та мінімальні дотичні напруження виникають у площинах нахилених до головних площин під кутом 45º і визначаються за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \ . \qquad (15.5)$$

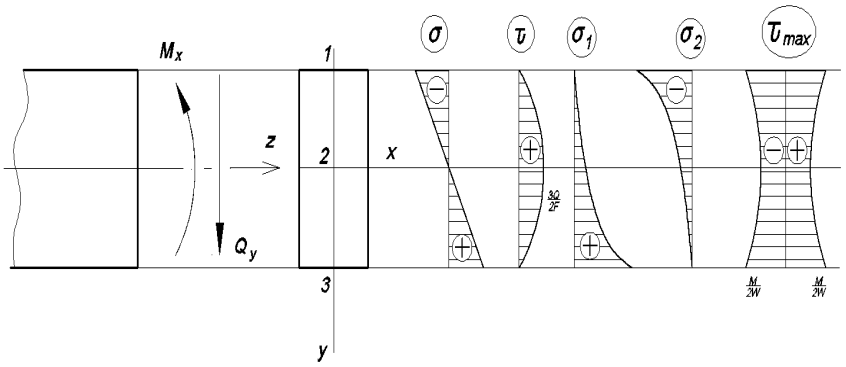


Рис. 15.3. Епюри напружень у прямокутному поперечному перерізі.

Таким чином, знаючи величину поперечної сили Q_y та згинального моменту M_x в поперечному перерізі, а також розміри поперечного перерізу, використавши формули (15.3; 15.4) та (15.5), побудуємо для прямокутного поперечному перерізу епюри нормальних σ, дотичних τ, головних нормальних σ_1, σ_2 та максимальних дотичних $\tau_{\max}$ напружень, які виникають площинах, нахилених до головних під кутом 45º (рис. 15.3).

Зробимо аналогічні побудови також для балки двотаврового поперечного перерізу (рис. 15.4).

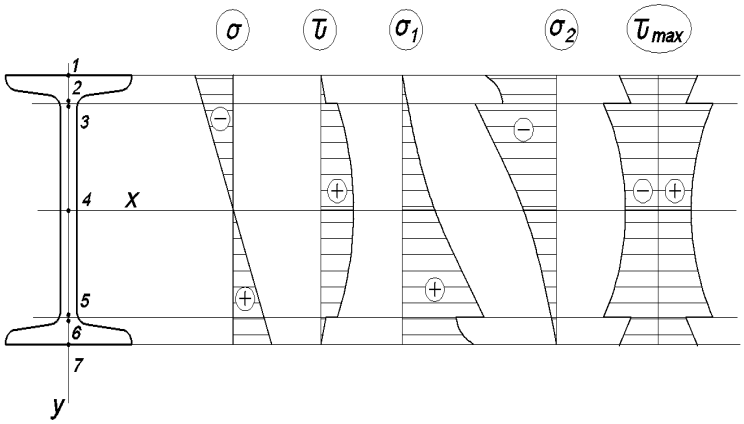


Рис. 15.4. Напруження в двотавровому поперечному перерізі.

Характерною особливістю при цьому є стрибки на епюрах σ_1, σ_2 та $\tau_{\max}$, викликані стрибками на епюрі τ, які в свою чергу, пов’язані із різкою зміною ширини перерізу в місцях з’єднання полиці зі стінкою.

15.2. Перевірка міцності балок при згині

Найбільші нормальні напруження виникають у крайніх волокнах небезпечного перерізу й дорівнюють відношенню максимального згинального моменту до моменту опору перерізу. Умова міцності вимагає, щоб вони не перевищували допустимого напруження; з неї розв'язують і зворотну задачу — підбір розмірів перерізу за заданим навантаженням. Якщо переріз не має горизонтальної осі симетрії, розтягнуті й стиснуті крайні волокна розташовані на різних відстанях від нейтральної лінії, тому для крихких матеріалів умову міцності записують окремо для розтягу та стиску. Для двотавра додатково перевіряють дотичні напруження (формула Журавського) і точки з'єднання полиці зі стінкою — за головними напруженнями або за четвертою енергетичною теорією міцності.

Очевидно, що максимальні нормальні напруження σ виникають у крайніх волокнах, і не враховуючи знаку визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \ . \tag{15.6}$$

де: W_x – момент опору, що характеризує опір поперечного перерізу.

При цьому знаючи максимальний згинальний момент M_x, а також розмір поперечного перерізу, можна перевірити умову міцності балки за нормальними напруженнями. Вона має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \le [\sigma] . \tag{15.7}$$

Із виразу (15.7) можна розв'язати і зворотну задачу, тобто при заданому навантаженні і знаючи матеріал, визначити розміри поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{M_x}{[\sigma]} . \tag{15.8}$$

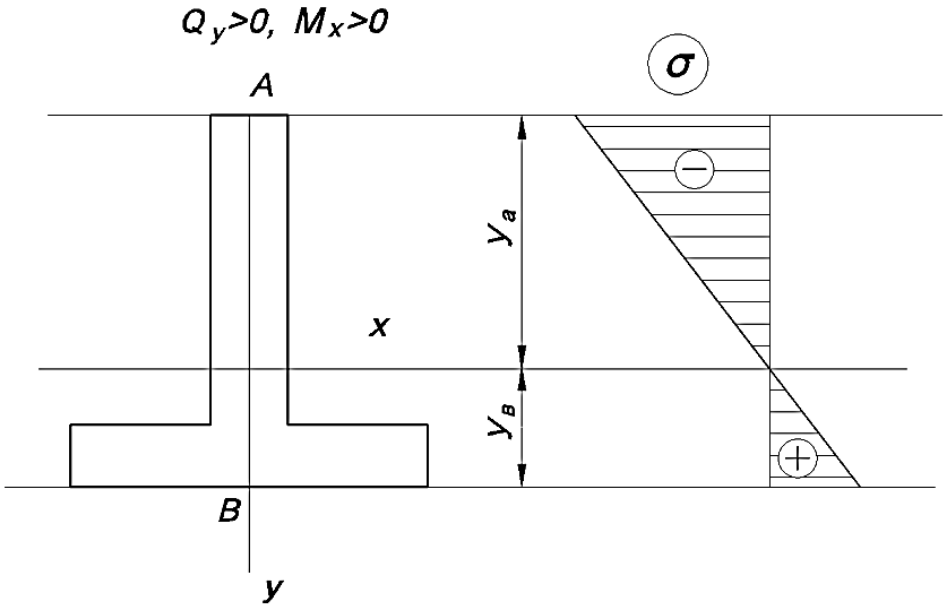


Рис. 15.5. Переріз, що не має горизонтальної вісі симетрії.

Для перерізу, який не має горизонтальної вісі симетрії, виразом (15.8) можна користуватися лише для найбільш віддалених волокон (рис.15.5). При цьому, якщо балку виготовлено із крихкого матеріалу, то перевіряють умови міцності як на стиск, так і розтяг:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A \le [\sigma]_{стиск} . \tag{15.9}$$

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B \le [\sigma]_{розтяг} . \tag{15.10}$$

Для балки двотаврового поперечного перерізу виконують перевірку умов міцності (рис. 15.5): для точки 1 перевіряють умову міцності нормальними напруженнях (формула 14.8); для точки 4 перевірку міцності здійснюють за дотичними напруженнями (формула Журавського 14.8); для точок з‘єднання полиці і стійки (але належить стійці (точка 3)) перевіряють міцність за головними нормальними напруженнями:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{15.11}$$

або для цих точок виконують перевірку міцності, за 4 енергетичною теорією міцності, тобто:

$$\sigma^{IV}_{еквівал} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{15.12}$$

15.3. Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності

> Формули для напружень справедливі, доки матеріал працює пружно. Коли в крайніх волокнах напруження досягають границі плинності, балка ще не руйнується: зона пружної роботи зменшується, а пластична поширюється вглиб перерізу. Несучу здатність балка вичерпує, коли границі плинності сягають напруження в усіх волокнах перерізу, — утворюється так званий пластичний шарнір. Руйнівний момент дорівнює добутку границі плинності на пластичний момент опору; для прямокутного перерізу він у півтора раза більший за момент, при якому плинність лише починається. Для перерізів без горизонтальної осі симетрії в момент утворення шарніра нейтральна лінія зміщується від центра ваги.

Формули для визначення нормальних (15.9) та дотичних напружень (14.8) (формула Журавського) справедливі тоді, коли матеріал деформується в пружній стадії (рис. 15.6). Досягнення в найбільш напружених волокнах напруження σ_T не означає руйнування балки, а лише те, що вона здатна сприймати зовнішнє навантаження додаткове.

При цьому зона пружної деформації поперечного перерізу балки зменшується (епюра трансформується) (рис.15.7).

І тільки в тому разі, коли у всіх волокон поперечного перерізу напруження будуть сягати величини границі плинності, то балка вичерпає свою міцність і зруйнується в перерізі так званого ***пластичного шарніра*** (рис.15.7).

Очевидно, що: $$M_{руйн} = \frac{P \cdot l}{4};$$

Звідси: $$P = \frac{4M_{\text{руйн}}}{l}.$$

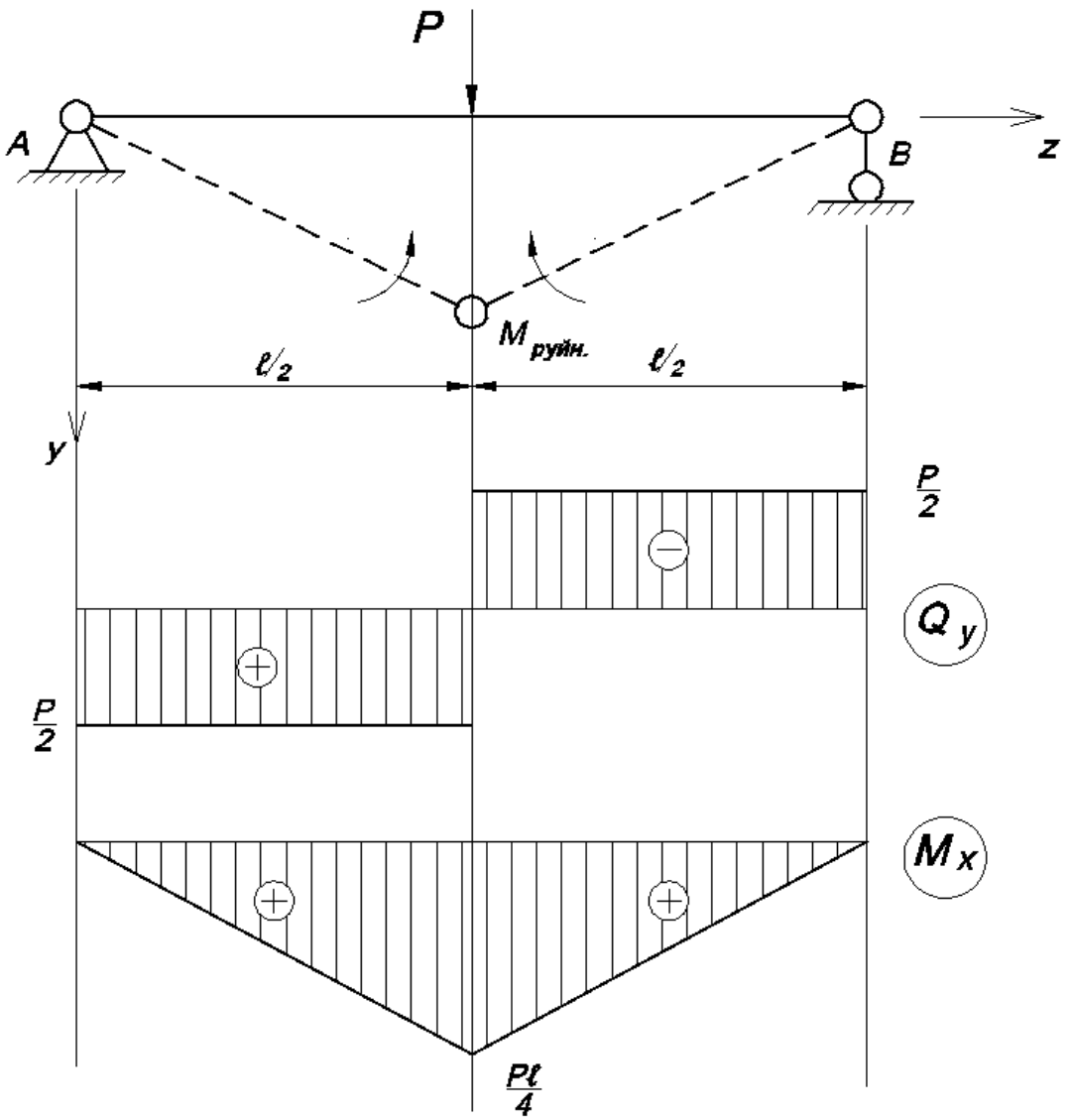


Рис. 15.6. Завантаження балки за межами границі пружності.

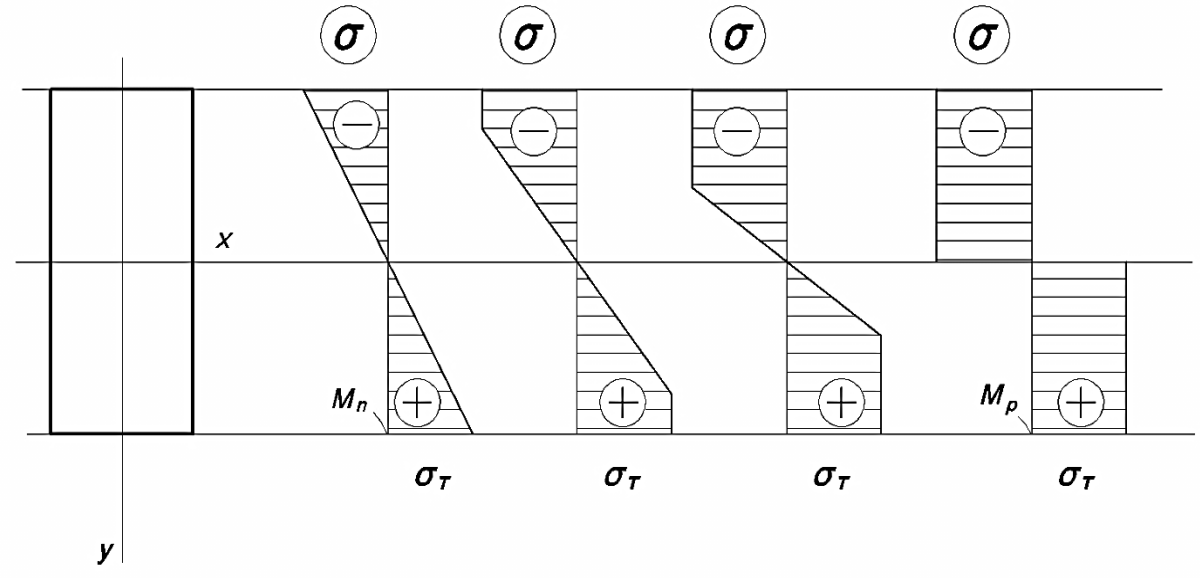


Рис. 15.7. Трансформування епюри σ.

Для прямокутного поперечного перерізу визначають:

$$M_{руйн} = \int_{F_{CT}} \sigma_T dF \cdot y + \int_{F_P} \sigma_T dF \cdot y =$$

$$= \sigma_T (\int_F y \cdot dF + \int_F y \cdot dF) = \sigma_T (S_x^{ст} + S_x^p) =$$

$$= \sigma_T \cdot W_p .$$

де: $W_n = S_x^{ст} + S_x^p$ – пластичний момент опору.

$$M_{руйн} = \sigma_m \cdot W_n; \qquad M_x = \sigma_T \cdot W_x .$$

Знайдемо геометричні характеристики:

$$W_x = \frac{в \cdot h^2}{6};$$

$$W_n = \frac{в \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} + \frac{в \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{в \cdot h^2}{4}.$$

Знайдемо: $\beta = \frac{M_{руйн.}}{M_1} = \frac{W_{\sigma_T}}{W_x \sigma_T} = \frac{W_2}{W_x}$

$$\beta = \frac{в \cdot h^2 / 4}{в \cdot h^2 / 6} = 1{,}5 .$$

Таким чином, для балки з прямокутним поперечним перерізом руйнуючий момент в півтора рази більше моменту, який викликає появу текучості найбільш віддалених від нейтральної лінії волокон у найбільш навантаженому поперечному перерізі балки.

Значення коефіцієнту β залежить від форми поперечного перерізу балки.

Необхідно також мати на увазі, що для поперечних перерізів балки, які не мають горизонтальної осі симетрії у момент утворення пластичного шарніра нейтральна лінія не проходить через центр ваги перерізу, вона зміщується.

15.4. Приклади вирішення задач

> Підрозділ починається методичними рекомендаціями щодо вивчення теми: спочатку засвоїти побудову епюр поперечної сили та згинального моменту й залежності для їх перевірки, далі — нормальні напруження та момент опору, дотичні й головні напруження, і лише потім переміщення. Друга частина присвячена визначенню кутів повороту та прогинів. Інтегруванням диференціального рівняння зігнутої осі балки отримують універсальні рівняння, у яких початок координат лежить на лівому кінці балки, а прогин, кут повороту, згинальний момент і поперечна сила на цьому кінці називають початковими параметрами. Звідси назва — метод початкових параметрів. Два з чотирьох параметрів відомі з умов закріплення лівого кінця, решту знаходять з умов на правому краї балки.

Тема згинання є однією з найбільш об’ємних і складних у дисципліні механіка матеріалів і конструкцій, її слід вивчати послідовно, звертаючи особливу увагу на розв’язання задач.

Спочатку потрібно чітко засвоїти важливі поняття про момент згинання M(x) і поперечну силу Q(y) і навчитися вільно будувати їх епюри.

Необхідно з’ясувати, що поперечна сила в даному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх сил на площину перерізу, розташованих по один бік від перерізу, що розглядається, а момент згинання в тому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, розташованих тільки з одного боку балки, відносно центру ваги цього перерізу.

Важливе значення мають залежності (12.2) і (12.3), за допомогою яких перевіряється правильність побудови епюр Mx і Qy.

При вивченні обчислення нормальних напружень при згинанні, необхідно звернути увагу на нерівномірність розподілу цих напружень по висоті поперечного перерізу і на те, що міцність балки залежить від величини моменту опору W. Необхідно чітко з’ясувати, яким шляхом можливо збільшити момент опору без збільшення витрат матеріалу.

Потім потрібно з’ясувати питання визначення дотичних напружень (формула Журавського) і головних напружень.

Рекомендується порівняти між собою епюри σ і τ, побудовані для балки прямокутного поперечного перерізу.

Найбільші і найменші нормальні напруження (головні напруження) знаходяться за формулою (15.3).

Тепер слід перейти до вивчення питання визначення деформацій при згинанні.

Аналітичним способом визначення кутів повороту і прогинів здійснюється за допомогою інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі балки. Права частина цього рівняння має вираз моменту згинання в довільному перерізі даної ділянки, а не в тому перерізі, для якого знаходиться переміщення (кути повороту прогини). M(x) - величина зміна, і тільки в випадку чистого згинання M(x) = const. Потрібно чітко з'ясувати геометричне тлумачення сталих інтегрування C і D; розділивши їх.

При наявності декількох ділянок,коли момент згинання від зосереджених моментів виражається різними рівняннями, необхідно виконувати інтегрування без розкриття дужок, по скільки тільки при виконанні цієї вимоги довільні сталі будуть відповідно рівні між собою (C_1=C_2=CD_1=D_2=D).

Здебільшого початок координат поміщають на лівому кінці балки і загальне рівняння кутів повороту і прогинів має вигляд:

$$I = EI\theta_0 + M_0 \cdot x + Q_0 \frac{x^2}{2} + \Sigma M(x - a_m) + \Sigma P \frac{(x - a_2)^2}{2} + \Sigma q \frac{(x - a_q)^3}{6}$$

$$IV = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^2}{6} + \Sigma M \frac{(x - a_m)^2}{2} + \Sigma P \frac{(x - a_p)^3}{6} + \Sigma q \frac{(x - a_q)^4}{24}$$

де a_m, a_p, a_q - відповідно абсциси точок прикладання зосередженої пари сил з моментом M, зосередженої сили P, початку дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q; знаки сум розповсюджуються на всі навантаження, розташовані ліворуч від того перерізу балки, для якого знаходять прогин і кут повороту.

Величини V_0, θ_0, M_0, Q_0 позначають відповідно як прогин, кут повороту, момент згинання і поперечна сила на початку координат і називаються початковими параметрами.

В зв`язку з цим метод визначення деформацій балка при допомозі записаних вище рівнянь носить назву методу початкових параметрів .

Два початкових параметра із чотирьох при будь-якому способі защемлення лівого кінця балки відомі.

Дійсно, для консольного затиснення $V_0=0$, і $\theta_0=0$; для вільно опертої балки$V_0=0$ і $M_0 =0$ (якщо зліва прикладений момент M_0 то $M_0 =M$); для вільного краю $Q_0 =0$ (якщо зліва прикладена сила P, то ($Q_0 = 0$) і $M_0 = 0$ (або $M_0 = 0$).

Для статично визначеної балки початкові параметри Q_0 і M_0 легко знайти за допомогою рівнянь статики: таким чином, в випадку консольного затиснення відомі всі чотири початкових параметри, у випадку вільно опертої балки відомо тільки величина Q_0, у випадку консольного затиснення справа відомі величини M_0 і Q_0.

Невідомі початкові параметри знаходяться із умов на правому краї балки: наприклад, для балки, що вільно лежить на двох опорах, при визначенні Q_0 потрібно використати ту умову, що прогин на правій опорі рівняється нулю.

Контрольні запитання до лекції 15

1. Який напружений стан виникає в точках балки при поперечному згині та як знайти головні напруження?
2. Як змінюються напруження в крайніх волокнах і на нейтральній лінії?
3. Запишіть і поясніть умову міцності балки за нормальними напруженнями. Яку зворотну задачу з неї можна розв’язати?
4. Які перевірки міцності виконують для двотаврового перерізу?
5. Що таке пластичний шарнір і пластичний момент опору? У скільки разів руйнівний момент прямокутного перерізу більший за момент початку плинності?
6. У чому суть методу початкових параметрів і які існують початкові параметри?

Список використаних джерел:

1. Довбуш Т. А., Хомик Н. І., Бабій А. В., Цьонь Г. Б., Довбуш А. Д. Опір матеріалів: навчальний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт і самостійної роботи. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2022. 220 с. URL: https://elartu.tntu.edu.ua/handle/lib/37778
2. Скребцов А. А., Штанько П. К., Омельченко О. С. Опір матеріалів: навчальний посібник для студентів інженерних спеціальностей. Запоріжжя: Національний університет «Запорізька політехніка», 2022. 452 с. URL: https://eir.zp.edu.ua/items/00a78fd9-4898-4afe-8143-5621dfe1efef
3. Долгов О. М., Колосов Д. Л. Механічні властивості та конструкційна міцність матеріалів: навчальний посібник. Дніпро: НТУ «Дніпровська політехніка», 2022. 70 с. URL: http://ir.nmu.org.ua/handle/123456789/160176.
4. Подолянчук С. В. Опір матеріалів. Основні поняття і визначення: навчальний посібник. Вінниця: ВДПУ, 2024. 30 с.
5. Omelchenko O. S., Skrebtsov A. A., Shtanko P. K. Lecture notes on the discipline “Strength of Materials” for students of engineering specialities of all forms of studying. Zaporizhzhia : National University “Zaporizhzhia Polytechnic”, 2024. 308 p. URL: https://eir.zp.edu.ua/handle/123456789/17845
6. Механіка матеріалів і конструкцій : методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форми здобуття вищої освіти / уклад. : Н. А. Доценко, Д. В. Бабенко. Миколаїв : МНАУ, 2024. 44 с. https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/19253
7. Mechanisms. Amsterdam : Academic Press, 2022. DOI: https://doi.org/10.1016/C2021-0-02621-3.
8. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А. Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 2: практикум для навчання на основі інтерактивного графічно-цифрового контенту : навч. посіб./ за ред. проф. Д. В. Бабенка. Миколаїв : МНАУ, 2023. 208 с. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/12427
9. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А. Дослідження конструктивних і кінематичних характеристик енергоефективного

олійного пресу. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science.* 2024. Вип. 28(3). С. 41-54. DOI: 10.56407/bs.agrarian/3.2024.41.

10. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А., Бацуровська І. В. Дослідження характеру руху подрібненої маси по поверхні решіт сепаратора насіння овочевих та баштанних культур. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science.* 2023. Вип. 27(4). С. 18-35. DOI: https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/4.2023.18.

11. Babenko, D., Dotsenko, N., Gorbenko, O. Justification of the design parameters of improved equipment for tomato processing. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science*. 2025. Vol. 29, No. 3. P. 9–22. DOI: https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/3.2025.09

12. Babenko, D., Dotsenko, N., Baczurovskaya, I. et al. Determination of the parameters of the use of water-lifting equipment in the conditions of livestock farms. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science.* 2022. Vol. 26, No. 3. P. 32–46. DOI: https://doi.org/10.56407/2313-092X/2022-26(3)-3.

13. Зубко В. М. Агроінжиніринг : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти спеціальностей 208 «Агроінженерія», 202 «Агрономія». Суми : СНАУ, 2022. 468 с.

Навчальне видання

Механіка матеріалів і конструкцій

курс лекцій

Укладач: **Доценко** Наталія Андріївна

Редактор: Н. А. Доценко
Комп'ютерний набір: Н. А.Доценко
Дизайн і верстка: Н. А. Доценко

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 9,4
Тираж 15 прим. Зам. №_

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету.
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9