МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

Теорія механізмів і машин:

курс лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Агроінженерія» спеціальності Н7 «Агроінженерія»
денної та заочної форм здобуття вищої освіти

Миколаїв
2026

УДК 621.01(075.8)
Т33

Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 20.10.26, протокол №2.

Укладач:

Н. А. Доценко – д-р. пед. наук, канд.техн. наук, професор, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет

Рецензенти:

В. М. Зубко – д-р техн.наук, професор, професор кафедри механічної та електричної інженерії, Полтавський державний аграрний університет

О. С. Садовий – канд. техн. наук, доцент, завідувач кафедри агроінженерії, Миколаївський національний аграрний університет

© Миколаївський національний аграрний університет, 2026
© Доценко Н. А., 2026

ЗМІСТ

ВСТУП.....5
Лекція 1. Вступ. Предмет, мета і задачі теорії механізмів і машин 6
Лекція 2. Машини та механізми. Основні поняття 12
Лекція 3. Кінематичні пари та їх класифікація.....21
Лекція 4. Структурні та кінематичні схеми механізмів.....30
Лекція 5. Ступінь рухомості (вільності) механізму 34
Лекція 6. Зайві ступені вільності та пасивні в'язі. Заміна вищих пар нижчими 39
Лекція 7. Структурні групи Ассура.....43
Лекція 8. Структурна класифікація механізмів. Послідовність структурного аналізу 51
Лекція 9. Задачі та методи кінематичного аналізу механізмів 54
Лекція 10. Плани швидкостей: основні положення та групи 1-го і 2-го видів 57
Лекція 11. Плани швидкостей: теорема подібності, групи 3-го виду, кулісні механізми 60
Лекція 12. Плани прискорень: групи 1-го і 2-го видів.....66
Лекція 13. Плани прискорень: групи 2-го і 3-го видів, прискорення Коріоліса.....70
Лекція 14. Кінематичні діаграми. Графічне диференціювання 73
Лекція 15. Графічне інтегрування та похибки графічних методів 81
Лекція 16. Аналітичні методи кінематики: метод замкнених векторних контурів 84
Лекція 17. Комплексний приклад: кінематика механізму V-подібного двигуна 90
Лекція 18. Сили, що діють у машинах: класифікація, механічні характеристики 93
Лекція 19. Сили інерції ланок плоского механізму.....96
Лекція 20. Кінетостатика: принцип Даламбера та статична визначність груп Ассура 98
Лекція 21. Кінетостатичний аналіз груп Ассура та початкової ланки 108
Лекція 22. Теорема Жуковського про «жорсткий важіль»..... 110

Лекція 23. Тертя в кінематичних парах. Механічний ККД 116
Лекція 24. Динамічна модель машинного агрегату. Зведення сил і мас 119
Лекція 25. Рівняння руху машинного агрегату. Режими руху 126
Лекція 26. Нерівномірність ходу машин. Діаграма енергомас 128
Лекція 27. Маховик. Розрахунок маховика та регулювання ходу 131
Лекція 28. Зрівноваження механізмів і роторів 139
Лекція 29. Зубчасті механізми. Основний закон зачеплення 142
Лекція 30. Евольвентне зачеплення 145
Лекція 31. Геометрія й синтез евольвентної передачі 149
Лекція 32. Багатоланкові зубчасті механізми. Планетарні та диференціальні передачі 151
Лекція 33. Кулачкові механізми 154
Лекція 34. Синтез кулачкових механізмів. Підсумок курсу 157
Список використаних джерел: 160

ВСТУП

Курс «Теорія механізмів і машин» (ТММ) є однією з базових загальноінженерних дисциплін підготовки бакалаврів спеціальності H7 «Агроінженерія». Він пов'язує фундаментальні науки (вищу математику, фізику, теоретичну механіку, інженерну графіку) з прикладними дисциплінами, зокрема деталями машин, тракторами й автомобілями, сільськогосподарськими машинами, обладнанням переробних і тваринницьких підприємств. Саме в цьому курсі майбутній інженер уперше вчиться бачити в будь-якій машині систему ланок і кінематичних пар, аналізувати її рух і сили та обґрунтовано проєктувати нові механізми.

Курс лекцій складається з 34 лекцій, об'єднаних у п'ять тематичних модулів. Перший модуль (лекції 1–8) присвячений будові механізмів: основним поняттям, кінематичним парам, схемам, ступеню рухомості, групам Ассура та структурному аналізу. У другому модулі (лекції 9–17) розглядаються методи кінематичного дослідження – графічні (плани положень, швидкостей і прискорень, кінематичні діаграми) й аналітичні, а також комплексний приклад розрахунку механізму V-подібного двигуна. Третій модуль (лекції 18–23) охоплює силовий розрахунок: сили в машинах і сили інерції, кінетостатику, метод Жуковського, тертя та коефіцієнт корисної дії. У четвертому модулі (лекції 24–28) вивчаються динаміка машинного агрегату, режими руху, нерівномірність ходу, маховики та зрівноваження. Заключний модуль (лекції 29–34) присвячений синтезу механізмів: зубчастим, планетарним і кулачковим.

Після вивчення дисципліни здобувач повинен знати основні види механізмів та їх класифікацію, методи структурного, кінематичного й силового аналізу, особливості руху машинного агрегату; вміти складати кінематичні схеми, визначати ступінь рухомості, будувати плани швидкостей і прискорень, визначати зрівноважувальну силу, розраховувати маховик, параметри евольвентної передачі та профіль кулачка; мати навички використання отриманих знань під час розв'язання інженерних задач в агровиробництві.

Лекція 1. Вступ. Предмет, мета і задачі теорії механізмів і машин

1.1. Предмет дисципліни та її місце в підготовці інженера

Сучасне сільськогосподарське виробництво неможливо уявити без машин: тракторів і комбайнів, сівалок і плугів, доїльних установок, транспортерів, насосів, кормозаготівельної та переробної техніки. Попри різноманітність призначення, всі вони побудовані за єдиними принципами: складаються з порівняно невеликої кількості типових механізмів – важільних, зубчастих, кулачкових, гвинтових, пасових та інших. Саме загальні методи дослідження й проєктування таких механізмів вивчає **теорія механізмів і машин** (ТММ).

Теорія механізмів і машин (ТММ) – це фундаментальна загальноінженерна дисципліна, предметом вивчення якої є загальні методи дослідження структури, кінематики та динаміки механізмів і машин, закономірності їхнього руху та взаємодії ланок, а також принципи проєктування механізмів із заданими функціональними й експлуатаційними характеристиками.

Дисципліна вивчає будову механізмів, способи їх структурного аналізу та синтезу, кінематичні характеристики руху ланок, сили й моменти, що діють у механізмах, умови забезпечення рівномірності руху, врівноваження та зменшення вібрацій. Особлива увага приділяється дослідженню типових механізмів, які використовуються в сучасних машинах, технологічному обладнанні та автоматизованих виробничих системах.

Теорія механізмів і машин посідає важливе місце в системі інженерної освіти, оскільки забезпечує теоретичну основу для розуміння принципів функціонування машин, механічних систем і технологічного обладнання. Вона поєднує знання з вищої математики, фізики, теоретичної механіки, опору матеріалів та інженерної графіки й створює підґрунтя для подальшого вивчення дисциплін професійного спрямування.

У процесі вивчення дисципліни майбутні інженери набувають здатності:

- аналізувати структуру та визначати ступінь рухомості механізмів;
- досліджувати кінематичні характеристики механізмів і машин;
- визначати сили та моменти, що діють у механічних системах;
- оцінювати динамічні характеристики машин і механізмів;
- обґрунтовувати вибір раціональних конструктивних і кінематичних параметрів механізмів;
- застосовувати методи структурного, кінематичного та динамічного аналізу під час розв'язання інженерних задач;
- використовувати сучасні програмні засоби для моделювання та дослідження механічних систем.

Практичне значення для майбутнього інженера

Знання з теорії механізмів і машин є необхідними для розроблення, конструювання, модернізації та експлуатації машин і обладнання. Вони дають змогу інженеру не лише розуміти принцип роботи окремих механізмів, а й оцінювати ефективність їх функціонування, надійність, енергоефективність і відповідність заданим технологічним вимогам.

Для інженерів механічного, машинобудівного та агроінженерного профілів дисципліна має особливе значення, оскільки її положення застосовуються під час проєктування приводів, передавальних механізмів, робочих органів сільськогосподарських машин, транспортно-технологічного та переробного обладнання.

Отже, теорія механізмів і машин формує фундаментальне інженерне мислення, розвиває здатність аналізувати й моделювати механічні системи та забезпечує теоретичну основу для прийняття обґрунтованих конструкторських і технологічних рішень у професійній діяльності майбутнього інженера.

1.2. Мета і задачі курсу

Метою вивчення дисципліни є формування у здобувачів знань про загальні методи дослідження та проєктування механізмів машин і приладів, розуміння принципів реалізації руху за допомогою механізмів і взаємодії механізмів у складі машини, що визначає кінематичні та динамічні властивості механічної системи.

Усі задачі курсу поділяють на дві великі групи.

1) **Задачі аналізу** – дослідження будови (структури), руху (кінематики) та сил (динаміки) вже відомих або проєктованих механізмів з метою оцінки та поліпшення їхніх експлуатаційних якостей.

2) **Задачі синтезу** – розроблення нових механізмів, які відповідають наперед заданим вимогам: за заданими законами руху, траєкторіями, габаритами, допустимими навантаженнями.

Розрізняють такі основні розділи ТММ:

- **структурний аналіз** – вивчення складу механізму, класифікація ланок і з'єднань, визначення ступеня рухомості;
- **кінематичний аналіз** – визначення положень, траєкторій, швидкостей і прискорень ланок без урахування сил;
- **динамічний аналіз** – визначення сил, що діють на ланки, реакцій у кінематичних парах, закону руху машини під дією прикладених сил;
- **синтез механізмів** – вибір схеми та розрахунок параметрів механізму за заданими умовами.

Метою викладання дисципліни «Теорія механізмів і машин» є формування у здобувачів вищої освіти системи фундаментальних знань

про структуру, кінематику та динаміку механізмів і машин, набуття практичних умінь аналізувати й досліджувати механічні системи, визначати їхні основні параметри та обґрунтовувати раціональні конструктивні рішення під час проєктування, модернізації й експлуатації машин та технологічного обладнання.

Основними завданнями вивчення дисципліни є:

1. Формування теоретичних знань про будову, класифікацію, структурні особливості та принципи функціонування механізмів і машин.

2. Опанування методів структурного аналізу та синтезу механізмів, визначення їхнього класу, ступеня рухомості та основних структурних характеристик.

3. Вивчення методів кінематичного аналізу механізмів, визначення положень, траєкторій, швидкостей і прискорень ланок та окремих точок механічної системи.

4. Засвоєння методів динамічного аналізу механізмів, визначення сил і моментів, що діють у механічних системах, дослідження умов їхньої рівноваги та руху.

5. Вивчення основ проєктування типових механізмів, зокрема важільних, зубчастих, кулачкових і фрикційних, а також механізмів передачі та перетворення руху.

6. Формування навичок інженерних розрахунків для оцінювання функціональних, кінематичних і динамічних характеристик машин та механізмів.

7. Опанування сучасних методів моделювання й дослідження механічних систем, використання комп'ютерних технологій для аналізу та візуалізації роботи механізмів.

8. Розвиток інженерного мислення та здатності застосовувати теоретичні знання для розв'язання практичних завдань конструювання, удосконалення й експлуатації машин і обладнання.

Очікувані результати вивчення курсу

У результаті вивчення дисципліни здобувачі вищої освіти повинні вміти аналізувати структуру механізмів, виконувати кінематичні й динамічні розрахунки, визначати основні параметри руху та силової взаємодії ланок, обґрунтовувати вибір типів механізмів і застосовувати отримані знання під час розв'язання професійних інженерних завдань.

Практична спрямованість курсу полягає у формуванні здатності майбутнього інженера переходити від теоретичного опису механічної системи до її розрахунку, моделювання та обґрунтованого конструкторського рішення.

1.3. Короткий історичний огляд

Теорія механізмів і машин формувалася протягом багатьох століть у тісному зв’язку з розвитком техніки, машинобудування та природничих наук. Її становлення відображає перехід від створення простих механічних пристроїв до науково обґрунтованого проєктування складних машин і автоматизованих систем.

Перші механічні пристрої з’явилися ще в давнину. Людство використовувало важелі, блоки, похилі площини, колеса, зубчасті передачі та інші прості механізми для виконання будівельних, транспортних і виробничих робіт. Значний внесок у розвиток механіки зробив Архімед (III ст. до н. е.), який досліджував принцип дії важеля, блоків та інших механічних пристроїв.

У період Середньовіччя та Відродження відбувалося вдосконалення водяних і вітряних млинів, підйомних пристроїв, годинникових механізмів та військової техніки. Особливе місце посідають інженерні розробки Леонардо да Вінчі, який досліджував зубчасті передачі, кулачкові механізми, передачі руху та проєктував різноманітні машини.

У XVII–XVIII століттях розвиток математики й класичної механіки створив наукову основу для дослідження руху механічних систем. Важливу роль відіграли праці Галілео Галілея та Ісаака Ньютона, які заклали основи класичної механіки. Подальший розвиток диференціального й інтегрального числення дав змогу перейти до математичного опису руху механізмів.

Промислова революція XVIII–XIX століть стала важливим етапом розвитку теорії механізмів і машин. Поява парових машин, текстильного обладнання, металорізальних верстатів і транспортних засобів зумовила потребу в систематичному дослідженні механізмів. У цей період сформувалися основи наукової дисципліни. Значний внесок зробив німецький інженер і науковець Франц Рьолло (Franz Reuleaux), який розробив систематичний підхід до структурного аналізу механізмів і запропонував їх класифікацію.

У XIX – першій половині XX століття активно розвивалися методи кінематичного та динамічного аналізу, теорія зубчастих передач, важільних і кулачкових механізмів.

На сучасному етапі теорія механізмів і машин розвивається на основі поєднання класичних методів механіки з цифровими технологіями. Для дослідження та проєктування механічних систем застосовують комп’ютерне моделювання, системи автоматизованого проєктування (CAD), інженерного аналізу (CAE), чисельні методи та засоби оптимізації. Особливого значення набувають питання енергоефективності, надійності, автоматизації та роботизації машин.

Отже, теорія механізмів і машин пройшла шлях від практичного використання простих механічних пристроїв до сучасної науково-технічної дисципліни, яка забезпечує теоретичні та методичні основи створення, дослідження й удосконалення машин, механізмів і робототехнічних систем.

1.4. Зв'язок ТММ з іншими дисциплінами та структура курсу

ТММ спирається на знання з фізики, вищої математики (векторна алгебра, диференціювання й інтегрування, чисельні методи), інженерної графіки та інформатики. Особливо тісно вона пов'язана з теоретичною механікою: кінематика й динаміка механізмів – це застосування її законів до конкретних багатоланкових систем.

Методологічно курс ґрунтується на кількох принципах. По-перше, будь-який реальний механізм замінюється **розрахунковою схемою** – ланки вважаються абсолютно твердими, зазори й пружні деформації не враховуються, тертя враховується лише там, де воно суттєве. По-друге, складні задачі розбиваються на прості: механізм розкладається на групи, кожна з яких досліджується окремо. По-третє, результати розрахунків завжди перевіряються двома незалежними способами (наприклад, графічним і аналітичним), що підвищує їх достовірність.

Теорія механізмів і машин є однією з базових загальноінженерних дисциплін, яка забезпечує взаємозв'язок фундаментальної природничо-математичної та професійно-практичної підготовки майбутнього інженера. Її вивчення ґрунтується на знаннях, отриманих під час опанування математичних, фізичних і технічних дисциплін, та створює основу для подальшого засвоєння спеціальних інженерних курсів.

Основні міждисциплінарні зв'язки:

Таблиця 1.1. Основні міждисциплінарні зв'язки

Дисципліна	Зв'язок із теорією механізмів і машин
Вища математика	Використання диференціального та інтегрального числення, векторної алгебри, тригонометрії для розрахунку параметрів руху механізмів.
Фізика	Застосування законів механіки, кінематики, динаміки, роботи та енергії.
Теоретична механіка	Використання методів дослідження руху, рівноваги та взаємодії матеріальних тіл.
Інженерна графіка	Побудова кінематичних схем, зображення механізмів, виконання графічних побудов і креслень.

Механіка матеріалів і конструкцій	Врахування навантажень, сил і моментів під час оцінювання міцності та жорсткості деталей механізмів.
Деталі машин	Використання результатів кінематичного й силового аналізу для розрахунку та проєктування механічних передач, валів, підшипників і з'єднань.
Матеріалознавство	Обґрунтування вибору матеріалів деталей механізмів з урахуванням умов навантаження та експлуатації.
Комп'ютерне моделювання та CAD/CAE-системи	Створення цифрових моделей механізмів, проведення симуляцій і дослідження їхніх кінематичних та динамічних характеристик.

Отже, ТММ виконує інтеграційну функцію в інженерній освіті: поєднує теоретичні знання з практичними методами аналізу, розрахунку та проєктування машин.

Навчальний курс логічно поділяється на взаємопов'язані тематичні модулі, які забезпечують послідовне формування знань і практичних умінь – від розуміння будови механізмів до аналізу їхнього руху та силової взаємодії.

Модуль 1. Структурний аналіз механізмів

- Основні поняття та класифікація механізмів.
- Кінематичні пари та кінематичні ланцюги.
- Ступінь рухомості механізмів.
- Структурний аналіз і класифікація механізмів.

Модуль 2. Кінематичний аналіз механізмів

- Основні завдання кінематичного дослідження.
- Положення, траєкторії, швидкості та прискорення ланок.
- Кінематичні діаграми.
- Кінематичний аналіз важільних механізмів.

Модуль 3. Динамічний аналіз механізмів

- Сили та моменти в механізмах.
- Силовий аналіз механізмів.
- Коефіцієнт корисної дії.
- Визначення зрівноважувальних сил і моментів.
- Дослідження нерівномірності руху машин.

Модуль 4. Основні види механізмів та їх синтез

- Важільні механізми.
- Зубчасті механізми та передачі.
- Кулачкові механізми.
- Фрикційні механізми.

- Синтез механізмів із заданими кінематичними характеристиками.

Практичні заняття спрямовані на закріплення теоретичних положень і набуття навичок інженерних розрахунків. Вони можуть передбачати:

- побудову структурних і кінематичних схем механізмів;
- визначення ступеня рухомості механізмів;
- побудову планів швидкостей і прискорень;
- проведення силового аналізу механізмів;
- дослідження роботи зубчастих і кулачкових передач;
- комп'ютерне моделювання руху механічних систем;
- розв'язання практичних завдань із проєктування та вдосконалення машин.

Послідовне опанування тематичних модулів забезпечує формування цілісного розуміння принципів функціонування машин і механізмів. Здобувачі освіти переходять від аналізу структури механічної системи до дослідження її кінематичних і динамічних характеристик, а надалі – до обґрунтування конструктивних параметрів і вибору раціональних інженерних рішень.

Для майбутніх інженерів машинобудівного та агроінженерного профілів особливого значення набуває здатність застосовувати отримані знання під час аналізу приводів, робочих органів сільськогосподарських машин, транспортних механізмів і переробного обладнання.

Лекція 2. Машини та механізми. Основні поняття

2.1. Класифікація машин

Машина – це технічний пристрій, який виконує механічні рухи для перетворення енергії, матеріалів або інформації з метою полегшення фізичної та розумової праці людини, підвищення її продуктивності та якості. За основним призначенням розрізняють чотири групи машин.

Енергетичні машини перетворюють енергію одного виду в енергію іншого. Вони бувають двох різновидів: двигуни, що перетворюють будь-який вид енергії в механічну (електродвигуни, двигуни внутрішнього згоряння, гідро- й пневмодвигуни), та генератори (компресори, насоси, електрогенератори), що перетворюють механічну енергію в енергію іншого виду.

Робочі машини використовують механічну енергію для виконання роботи з переміщення та перетворення матеріалів. Вони поділяються на транспортні (змінюють положення об'єкта: автомобілі, транспортери, навантажувачі) і технологічні (змінюють форму, властивості й стан матеріалу: плуги, сівалки, косарки, молотарки, подрібнювачі кормів, верстати).

Інформаційні машини призначені для обробки та перетворення інформації; серед них математичні та контрольно-керуючі машини.

Кібернетичні машини керують робочими чи енергетичними машинами та здатні змінювати програму своїх дій залежно від стану навколишнього середовища, тобто володіють елементами штучного інтелекту. Прикладом є системи точного землеробства, що автоматично регулюють норму висіву чи внесення добрив.

Типова машинна установка (**машинний агрегат**) складається з двигуна, передавального механізму та робочої машини.

Незалежно від призначення, більшість машин містить такі основні елементи:

1. Двигун – джерело механічної енергії.
2. Передавальний механізм – передає та перетворює рух і механічну енергію.
3. Виконавчий механізм (робочий орган) – безпосередньо виконує корисну роботу.
4. Система керування – забезпечує керування робочими процесами та режимами роботи машини.
5. Несуча конструкція – забезпечує розміщення та взаємне з'єднання складових частин.

2.2. Поняття механізму

У навчальній літературі існує кілька визначень механізму.

1) Механізм – система твердих тіл, призначена для реалізації необхідних рухів і передачі сил.

2) Механізм – кінематичний ланцюг, до складу якого входить нерухома ланка (стояк) і число ступенів вільності якого дорівнює числу узагальнених координат, що визначають положення ланцюга відносно стояка.

3) Механізм – пристрій для передачі та перетворення руху й енергії будь-якого роду.

4) Механізм – система ланок і кінематичних пар, що утворюють замкнуті або розімкнуті ланцюги та призначена для перетворення руху вхідних ланок і прикладених до них сил у необхідні рухи й сили на вихідних ланках.

У всіх визначеннях присутні базові поняття, які необхідно розглянути докладніше. Принципова відмінність механізму від машини: механізм переважно виконує перетворення руху, тоді як машина крім цього перетворює енергію або матеріали.

2.3. Механізм і його елементи

Ланка – тверде тіло або система жорстко зв'язаних твердих тіл, що входить до складу механізму. Ланки – головні елементи механізму.

Кінематична пара (КП) – рухоме з'єднання двох ланок, яке допускає їхній певний відносний рух. Елементами пари називають поверхні, лінії чи точки, якими ланки дотикаються одна до одної. Приклади: з'єднання поршня з циліндром, вала з підшипником, зубців двох коліс у зачепленні.

Кінематичний ланцюг – система ланок, що утворюють між собою кінематичні пари. Ланцюги бувають прості (кожна ланка входить не більше ніж у дві пари) і складні (є ланки, що входять у три й більше пар), замкнені (кожна ланка входить щонайменше у дві пари) і незамкнені (є ланки, що входять лише в одну пару), плоскі та просторові.

Стояк (стійка) – ланка, яку під час дослідження вважають нерухомою. У двигуні стояком є блок циліндрів зі станиною, у комбайні – рама, у верстаті – станина. Усі рухи інших ланок розглядають відносно стояка. Слід розуміти, що поняття нерухомості умовне: рама трактора рухається відносно ґрунту, але під час аналізу механізмів, що змонтовані на ній, її приймають за нерухому.

Ланка – тверде тіло чи система жорстко зв'язаних тіл, що входять до складу механізму. Ланки є головними елементами механізму, без яких механізм неможливий.

Кінематичний ланцюг – система ланок, що утворюють між собою кінематичні пари.

Кінематична пара – рухливе з'єднання двох ланок, що допускає їх визначений відносний рух (скорочено КП).

Стояк – ланка, що при дослідженні механізму приймається за нерухому.

Вхідні ланки – ланки, яким надається заданий рух і відповідні силові фактори (сили чи моменти). Вхідні ланки називаються ще *ведучими*.

Вихідні ланки – ті, на яких одержують необхідний рух і сили. Вихідні ланки називаються ще *веденими.*

Початкова ланка – ланка, координата якої прийнята за узагальнену.

Початкова кінематична пара – пара, відносне положення ланок у якій прийнято за узагальнену координату.

По різниці у розміщенні траєкторій ланок розрізняють два види механізмів.

а) плоскі – точки ланок яких описують траєкторії, що лежать у паралельних площинах (приклад: кривошипно–шатунний механізм).

б) просторові – траєкторії точок ланок яких є просторовими кривими чи плоскими, але розташованими в не паралельних площинах (приклад: конічні зубчасті колеса, механізм «шарнір Гука», який використовується для передачі обертання заднім колесам автомобіля).

Для більш зручного зображення плоских кінематичних пар (КП) і ланок, що утворюють ці пари, прийняті умовні позначки:

Обертальна КП (рис. 2.1) зображується таким чином.

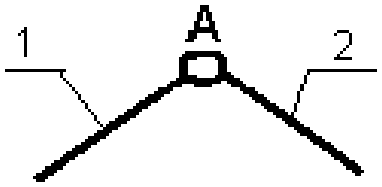


Рис. 2.1. Обертальна кінематична пара

Поступальна КП (рис. 2.2) зображується таким чином:

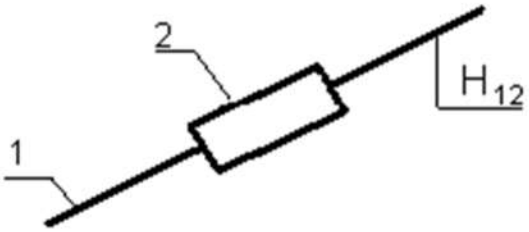


Рис. 2.2. Поступальна кінематична пара
(H_{12} направляюча поступальної пари)

Центри обертальних пар позначаються великими літерами латинського алфавіту: А, В, С і т. д.

Ланки позначаються арабськими цифрами: 1, 2, 3 і т.д.

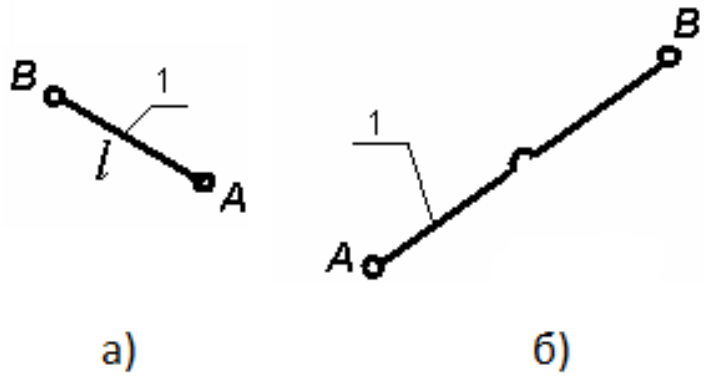


Рис. 2.3. Ланка, що входить до складу двох кінематичних пар

Ланку, що входить одночасно до складу двох обертальних пар, (рис. 2.3. а) зображують умовно в вигляді прямої лінії з двома кружечками на кінцях, незалежно від того, як вона виконана фактично.

Основним розміром такої ланки вважається відстань *l* між точками А та В (приклад: ланка, (рис. 2.3. б) що входить в три КП).

Ланка, що входить до складу трьох і більше обертальних пар зображується на схемі у вигляді трикутника чи багатокутника.

Базисна ланка, (рис. 2.4) вона входить у три КП.

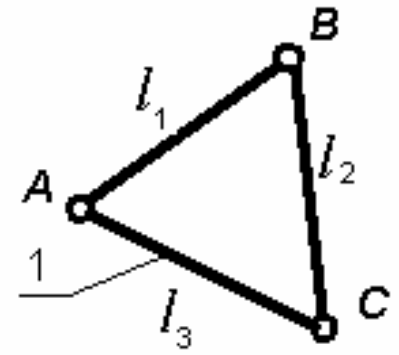


Рис. 2.4. Базисна ланка

Ланки розрізняють за конструктивними ознаками (корпус двигуна, колінчастий вал, шатун, поршень, зубчасте колесо і т.п.), але в ТММ найчастіше – залежно від характеру їхнього відносного руху. Наприклад: *кривошип* – ланка механізму, яка здійснює повний оберт навколо нерухомої осі (рис. 2.5, ланка *1*); *коромисло* – ланка, яка здійснює коливальний рух; *повзун* – ланка, що здійснює поступальний прямолінійний рух (*3*); *шатун* – ланка важільного механізму, що здійснює плоскопаралельний рух (*2*); *куліса* – рухома ланка, яка є напрямною повзуна.

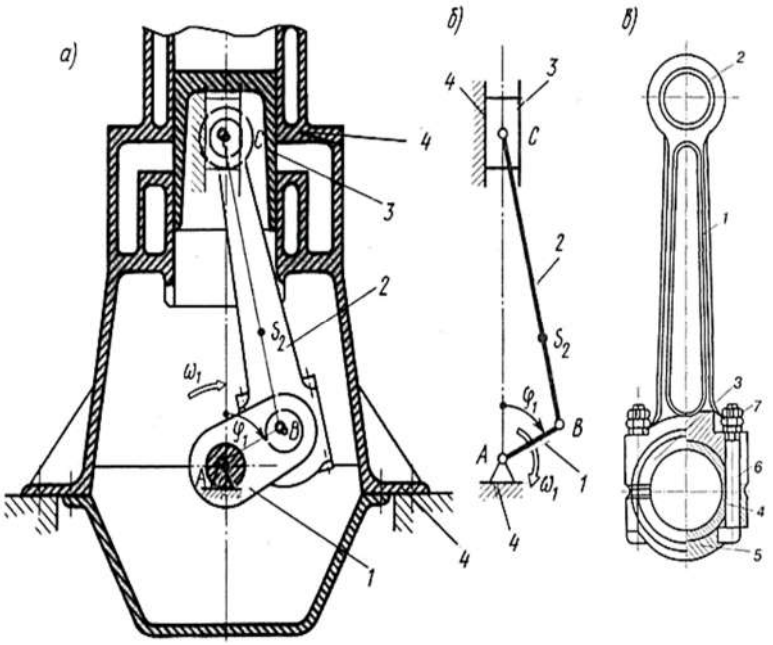


Рис. 2.5. Приклад механізму

Поверхні, лінії і точки, по яких стикаються ланки, називаються ***елементами кінематичної пари***. Кінематичні пари, елементами яких є поверхні, називаються ***нижчими кінематичними парами.*** Якщо ланки стикаються по лініях і точках, то КП називаються ***вищими***. Чотирирухома і п’ятирухома КП є вищими.

Відмітимо, що в плоских механізмах можуть бути лише кінематичні пари IV та V класів.

Відзначимо, що перевагою нижчих кінематичних пар, у порівнянні з вищими, є можливість передачі великих зусиль. Дія сил у нижчих парах розподіляється на більшу площу, у зв'язку з чим питомий тиск і стирання суттєво менші. Такі кінематичні пари є більш технологічними. Перевагою вищих пар є можливість відтворення самих найрізноманітніших законів руху вихідної ланки та зменшення тертя при застосуванні кінематичних з'єднань.

Кінематична пара існує, якщо її елементи дійсно стикаються, тобто якщо вона замкнута. Існує два види замикання КП – силове замикання і геометричне замикання.

Силове замикання (рис. 2.6. а) (за рахунок сили пружності пружини). Геометричне (рис. 2.6. б) (за рахунок конструкції робочих поверхонь пари).

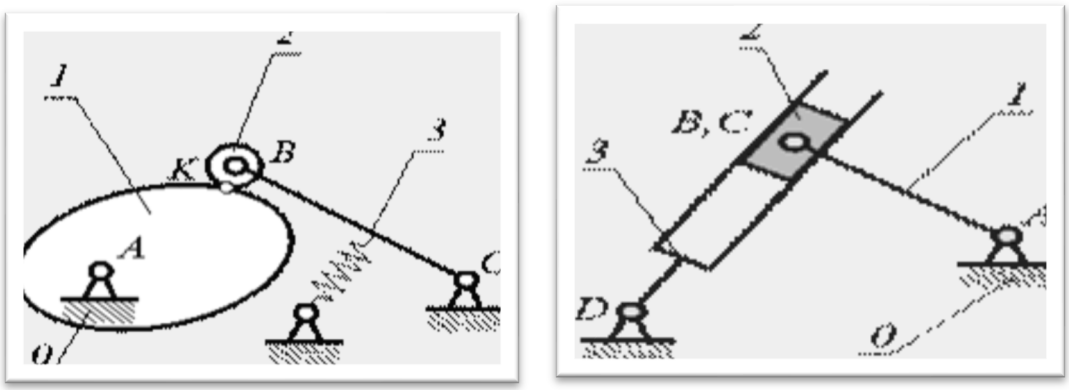


Рис. 2.6. Види замикання: силове та геометричне

2.4. Вхідні, вихідні та початкові ланки

Вхідними (ведучими) ланками називають ланки, яким надається заданий рух і відповідні силові чинники – сили або моменти. У двигуні вхідною ланкою вважають поршень, на який діє тиск газів; у компресорі чи насосі – кривошип, що приводиться в рух від електродвигуна.

Вихідними (веденими) ланками називають ланки, на яких одержують потрібний рух і сили для виконання технологічної операції: ніж косарки, штовхач розподільного механізму, повзун преса.

Початкова ланка – ланка, координату якої прийнято за узагальнену координату механізму. Положення початкової ланки визначає положення всіх інших ланок. Відповідно **початкова кінематична пара** – пара, відносне положення ланок у якій прийняте за узагальнену координату. Зазвичай початкову ланку вибирають серед тих, що з'єднані зі стояком, наприклад, кривошип, який обертається навколо нерухомої осі.

Число початкових ланок дорівнює числу ступенів рухомості механізму: якщо воно більше одиниці, то для однозначного визначення руху всіх ланок треба задати рух кількох початкових ланок. Наприклад, у механізмі маніпулятора їх кілька.

Таблиця 2.1. Порівняльна характеристика ланок

Ознака	Початкова ланка	Вхідна ланка	Вихідна ланка
Основне призначення	Задає закон руху для аналізу механізму	Отримує рух від привода	Передає або реалізує заданий рух
Функція	Визначає рух інших ланок	Забезпечує приведення механізму в дію	Виконує корисну роботу
Основні параметри	Положення, швидкість, прискорення	Кутова або лінійна швидкість, момент або сила	Переміщення, швидкість, сила або момент

Необхідно розрізняти поняття «початкова» та «вхідна» ланка:

- Початкова ланка – поняття, яке застосовується насамперед під час структурного й кінематичного аналізу механізму.

- Вхідна ланка – поняття, яке характеризує функціональну роль ланки в передаванні руху від привода.

- Вихідна ланка – ланка, рух якої є результатом роботи механізму та використовується для виконання корисної роботи.

У простих механізмах одна й та сама ланка може одночасно бути початковою та вхідною. Проте в складних механізмах із кількома входами, проміжними передачами або розгалуженими кінематичними ланцюгами ці поняття не завжди збігаються.

2.5. Плоскі та просторові механізми

За розташуванням траєкторій руху точок ланок механізми поділяють на два види.

1) **Плоскі** механізми – точки їхніх ланок описують траєкторії, що лежать в одній або паралельних площинах. Приклади: кривошипно-шатунний механізм, шарнірний чотириланковик, кулачковий механізм із поступально рухомим штовхачем.

Основні особливості плоских механізмів:

- рух ланок відбувається в одній площині або паралельних площинах;
- основними кінематичними парами є обертальні та поступальні;
- кінематичний аналіз можна виконувати методами плоскої геометрії;

- конструкція зазвичай має відносно просту структуру;

- широко застосовуються для перетворення обертального руху на поступальний або коливальний і навпаки.

Приклади плоских механізмів:

1. Кривошипно-повзунний механізм – перетворює обертальний рух на зворотно-поступальний.

2. Чотириланковий шарнірний механізм – забезпечує перетворення обертального руху на коливальний.

3. Кулачковий механізм – забезпечує рух вихідної ланки за заданим законом.

4. Важільні механізми пресів і технологічного обладнання.

2) **Просторові** механізми – траєкторії точок є просторовими кривими або плоскими кривими, що лежать у непаралельних площинах. Приклади: конічні зубчасті передачі, карданний шарнір (шарнір Гука), що використовується в трансмісіях тракторів і автомобілів, гвинтові механізми, маніпулятори й навісні системи тракторів.

Основні особливості просторових механізмів:

- рух ланок відбувається у тривимірному просторі;

- застосовуються обертальні, поступальні, циліндричні, сферичні та інші кінематичні пари;

- кінематичний аналіз потребує використання просторової геометрії та методів векторної алгебри;

- конструкція може забезпечувати складні траєкторії руху;

- використовуються в робототехніці, авіаційній техніці, транспортних і технологічних машинах.

Приклади просторових механізмів:

1. Просторові шарнірно-важільні механізми.

2. Карданна передача – передає обертання між валами, осі яких розташовані під кутом.

3. Механізми промислових роботів – забезпечують переміщення робочого органа в тривимірному просторі.

4. Сферичні механізми – забезпечують обертальний рух ланок навколо спільного центра.

5. Просторові маніпулятори та механізми паралельної структури.

Таблиця 2.2. Порівняльна характеристика плоских і просторових механізмів

Критерій	Плоскі механізми	Просторові механізми
Характер руху	У площині або паралельних площинах	У тривимірному просторі
Траєкторії точок	Плоскі	Просторові

Кінематичні пари	Переважно обертальні та поступальні	Обертальні, поступальні, циліндричні, сферичні тощо
Складність аналізу	Відносно невисока	Вища, потребує просторових методів
Приклади застосування	Преси, насоси, двигуни, кривошипні механізми	Роботи, маніпулятори, карданні передачі, авіаційна техніка

Існують загальні закономірності в будові (структурі) найрізноманітніших механізмів, які проявляються у взаємозв'язку числа ступенів вільності механізму з числом ланок та числом і видом його кінематичних пар. Ці закономірності відображають структурні формули механізмів.

Нехай механізм складається з *к* ланок. Якби всі ланки були вільними тілами, загальна кількість їх ступенів вільності була б рівна $H = 6к$. В механізмі ланки з'єднані за допомогою кінематичних пар. Кожна з пар накладає на ланку відповідну кількість в'язей. Так, кінематична пара V класу накладає п'ять в'язей ("відбере" п'ять ступенів вільності), IV – чотири в'язі, III – три в'язі і т.д. Позначимо число кінематичних пар V класу, що входять до складу механізму, через p_5, IV класу – p_4 , III класу – p_3 і т. п. Тоді загальне число ступенів вільності всіх ланок, тобто число ступенів вільності, що їх має кінематичний ланцюг механізму, становитиме

$$H=6к–5p_5–4p_4–3p_3–2p_2–p_1$$

Оскільки в механізмі одна із ланок вважається нерухомою, то загальне число ступенів вільності зменшиться на шість, $W = H–6$. Позначимо число рухомих ланок механізму через $n = к–1$, тоді число ступенів вільності кінематичного ланцюга відносно нерухомої ланки

$$W = 6n–5p_5–4p_4–3p_3–2p_2–p_1. \qquad (2.1)$$

Це формула для визначення числа ступенів вільності (рухомості) просторових кінематичних ланцюгів, механізмів – *структурна формула кінематичного ланцюга загального виду.* В літературі її називають ще формулою Сомова–Малишева.

Ступінь вільності (рухомості) механізму W – це число ступенів вільності його рухомого кінематичного ланцюга відносно нерухомої ланки (стояка).

Плоскі механізми. На рух кожної з ланок плоского механізму накладено три загальні обмеження. Якщо б усі рухомі ланки на площині були вільними тілами, то загальне число ступенів вільності ланок дорівнювало $(6 – 3)n = 3n$. У плоских механізмах кінематичні пари можуть бути лише V класу, однорухомі – нижчі та IV класу, дворухомі – вищі;

відповідно пари п’ятого класу будуть накладати $(5 – 3)p_5 = 2p_5$ в’язей (три загальні в’язі вже накладено площиною); пари четвертого класу – $(4 – 3)p_4 = p_4$ в’язей. В плоскі механізми пари I, II, III класів входити не можуть, оскільки вони володіють просторовим характером можливих відносних рухів. Структурна формула для плоского кінематичного ланцюга буде :

$$W=3n–2p_5–p_4. \qquad (2.2)$$

Це *структурна формула Чебишева для визначення числа ступенів вільності плоских кінематичних ланцюгів*, *механізмів.*

За формулами (2.1), (2.2) проводять структурний аналіз існуючих механізмів і синтез структурних схем нових механізмів.

Лекція 3. Кінематичні пари та їх класифікація

3.1. Ступені вільності ланки та умови зв'язку, класифікація кінематичних пар за класами

Вільне тверде тіло у просторі має шість ступенів вільності (рухливостей): три поступальні переміщення вздовж координатних осей і три обертання навколо них. Коли дві ланки з'єднують у кінематичну пару, на їхній відносний рух накладаються обмеження – **умови зв'язку**. Якщо число умов зв'язку позначити S, а число ступенів вільності відносного руху ланок у парі – H, то

$$H = 6 − S \qquad (3.1)$$

Число умов зв'язку може набувати значень від 1 до 5: при $S = 0$ ланки не утворюють пари (вільні тіла), а при $S = 6$ вони стають єдиною жорсткою ланкою. Отже, кінематичні пари розділяють на п'ять класів.

Кінематичні пари класифікують за числом (S) умов зв’язку (обмежень), які накладає пара на рух однієї ланки відносно іншої, рідше – за числом (H) ступенів вільності у відносному русі ланок. Число ступенів вільності у відносному русі ланок визначає вид пари за рухомістю. Розрізняють кінематичні пари одно-, дво-, три-, чотири-, і п’ятирухомі.

Числом ступенів вільності механічної системи називають число незалежних її можливих переміщень.

В загальному випадку для абсолютно твердого тіла, що вільно рухається в просторі, число ступенів вільності дорівнює шести. Рух такого тіла можна уявити як обертання навколо та ковзання вздовж трьох довільно взятих взаємно перпендикулярних координатних осей (незалежно і одночасно). При плоскому русі тіло матиме три ступені вільності.

Отже, вільне в просторі тіло має шість ступенів вільності, тобто H=6. Це означає, що на рух вільного тіла не накладено ніяких обмежень.

Як вже було сказано, в механізмі вільних (не зв’язаних між собою) ланок немає. Кінематичні пари накладають обмеження на рух ланок,

«змушують» їх рухатись певним чином, виконувати потрібні, задані рухи. Або, інакше, для того, щоб ланка механізму рухалась певним чином, її рух необхідно обмежити кінематичною парою.

Входження ланки в кінематичну пару з іншою ланкою накладає на їх відносний рух певні обмеження – умови зв'язку (в'язі) S.

Очевидно, що число цих умов зв'язку не може бути більшим п'яти, інакше кінематична пара стане жорстким з'єднанням двох ланок, тобто вони утворять одну ланку. Так само не може бути кінематичної пари, яка не накладає жодного зв'язку, бо при цьому матимемо дві вільні ланки.

Отже, число S умов зв'язку, що накладають кінематичні пари на відносний рух ланок, може змінюватися в межах від 1 до 5, тобто $1 \le S \le 5$. Число ступенів вільності ланки, що входить до кінематичної пари, дорівнює H = 6–S.

Клас кінематичної пари визначається числом умов зв'язку; його можна знайти з рівності S = 6 – H.

Номер класу пари збігається з числом S умов зв'язку. Оскільки число умов зв'язку може змінюватися в межах від 1 до 5, то число класів кінематичних пар дорівнює п'яти.

На рис. 3.1 наведено основні види кінематичних пар, їх схеми та умовне позначення згідно рекомендацій міжнародних стандартів, стосовно структурних та кінематичних схем. Відзначимо, що тут наведено принципове зображення кінематичних пар, а конструктивні виконання можуть бути різними.

Найбільше застосування в механізмах машин, приладах та інших пристроях отримали обертальні кінематичні пари V класу.

Обертальна пара (рис. 3.1, а) – однорухома, допускає лише один відносний обертовий рух однієї ланки навколо іншої, тобто число ступенів вільності H=1; на відносний рух ланки накладено S=6–H=5 умов зв'язку (в'язей). Отже, це кінематична пара п'ятого класу. Елементи обертальної пари – це циліндричні поверхні (ланки 1 та 2 дотикаються по циліндричній поверхні); нижча пара замкнена геометрично.

Поступальна пара (рис. 3.1, *б*) – однорухома, допускає лише прямолінійний поступальний відносний рух ланок, тобто *H=1 S=5;* отже, це кінематична пара V класу, нижча, з геометричним замиканням. Відомим прикладом конструктивного виконання такої кінематичної пари є пара поршень – циліндр двигуна внутрішнього згоряння, поршневої помпи, компресора і т.д.

Відзначимо, що кінематичні пари V класу зустрічаються в трьох варіантах. Крім названих, обертальної та поступальної, до V класу відносять також кінематичну пару гвинт – гайка (рис. 3.1, *в*), оскільки одна

ланка відносно іншої має тільки один незалежний рух (обертання навколо і поступальний рух вздовж осі гвинта взаємопов'язані між собою).

IV клас. *Циліндрична пара* (рис. 3.1, *г*) – дворухома кінематична пара, допускає незалежні обертовий та поступальний відносні рухи ланок, тобто *H=2*, а *S=4,* отже, це IV клас пари. Пара нижча (ланки дотикаються по циліндричній поверхні) з геометричним замиканням.

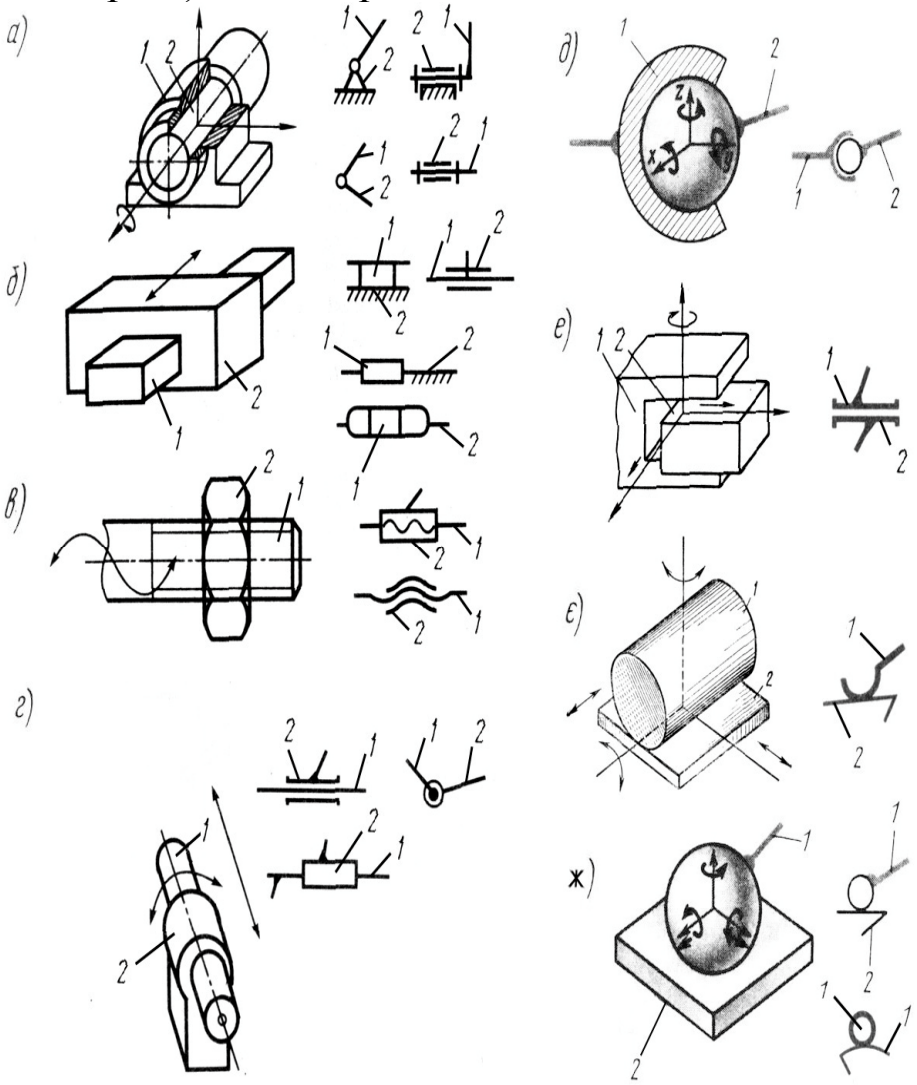


Рис. 3.1. Класифікація кінематичних пар

III клас. *Сферична пара* (кульковий шарнір, рис. 3.1, *д*), *площинна пара* (рис. 3.1, *е*) – трирухомі кінематичні пари. Рух однієї ланки відносно іншої зводиться до трьох незалежних відносних рухів (показано стрілками); *H=3, S=3,* тобто пари III класу; пари нижчі, з геометричним замиканням.

II клас. *Лінійна пара*. Наведена варіантом "циліндр-площина" (рис. 3.1, *є*). Чотирирухома кінематична пара; можливі незалежні відносні рухи ланок (обертові та поступальні) показані стрілками; тобто *H = 4, S = 2*, II клас. Це вища пара, тому що контакт елементів ланок лінійний.

І клас. *Точкова пара* (рис. 3.1, *ж*). П’ятирухома кінематична пара, що являє собою кулю *1*, яка перекочується з ковзанням по площині *2*. Куля може здійснювати п’ять простих незалежних рухів; *H=5*, а *S=1*. Рух кулі відносно площини може бути розкладений на три обертові рухи навколо осей *x, y, z* та ковзання вздовж двох осей *x, y.* Рух кулі вздовж вертикальної осі неможливий, тому що до низу він обмежений площиною, а при русі в протилежному напрямку порушується дотик ланок і кінематична пара перестане існувати.

В даній кінематичній парі має бути передбачене силове замикання. Пара – вища, оскільки ланки дотикаються у точці.

Зазначимо, в загальному випадку пари І класу одержують при лінійному дотику двох поверхонь, а ІІ класу – при точковому. Як бачимо, щоб визначити клас кінематичної пари, треба одну з ланок умовно прийняти за нерухому, зв’язати з нею просторову систему координат та порахувати можливі незалежні рухи іншої ланки, *H* (або порахувати накладені умови зв’язку, тобто обмеження на можливі прості рухи ланки, *S*). Клас кінематичної пари знаходимо з рівності *S = 6–H.*

Кінематичні з’єднання. Необхідно відмітити, що відносна рухомість ланок, що з’єднуються, може бути забезпечена також кінематичними з’єднаннями. Кінематичні з’єднання є аналогами кінематичних пар. Кінематичний ланцюг, що конструктивно замінює у механізмі кінематичну пару, називається *кінематичним з’єднанням*. Кінематичне з’єднання може складатися з декількох ланок та кінематичних пар, але тільки дві ланки з’єднання можуть бути з’єднані з іншими ланками механізму.

Прикладами кінематичних з’єднань можуть бути кулькова вальниця, кульково-ґвинтові передачі, роликові напрямні та інші (замінюють, відповідно, обертові, ґвинтові та поступальні кінематичні пари). Застосування кінематичних з’єднань замість кінематичних пар дозволяє зменшити втрати на тертя, підвищити тримкість, спростити технологію виготовлення.

Клас пари дорівнює числу накладених нею умов зв'язку *S*. Розгляньмо класи докладніше, починаючи з найпоширеніших у техніці.

Пара V класу (*S* = 5, *H* = 1) допускає лише один відносний рух. До таких пар належать обертальна пара (шарнір), що дозволяє відносне обертання навколо однієї осі; поступальна пара (повзун у напрямній), що дозволяє ковзання вздовж однієї прямої; гвинтова пара (гвинт і гайка), де обертання та переміщення залежні.

Пара IV класу (*S* = 4, *H* = 2) допускає два незалежні відносні рухи, наприклад, обертання й ковзання: контакт циліндра з площиною, зубці в зачепленні, кулачок і штовхач, колесо на рейці (за наявності ковзання).

Пара III класу ($S = 3$, $H = 3$) допускає три незалежні рухи. Типовий приклад – сферичний шарнір (кулька в гнізді), що дозволяє три обертання, але не допускає поступальних зсувів.

Пара II класу ($S = 2$, $H = 4$) – наприклад, куля, що торкається площини (чотири можливі рухи), або циліндр, вставлений у циліндричний отвір із можливістю обертання та ковзання навколо осі.

Пара I класу ($S = 1$, $H = 5$) – куля, яка просто лежить на площині й може рухатися всіма способами, крім проникнення вглиб площини.

У плоских механізмах використовують лише дві пари V класу (обертальна й поступальна) та пари IV класу (вищі пари: зубчасті та кулачкові). Тому у плоскому механізмі кожна ланка має на площині три ступені вільності (два поступальні та одне обертання), а пари V і IV класу відбирають відповідно два й один ступені.

Таблиця 3.1. Класифікація кінематичних пар

Клас пари	Умов зв'язку S	Ступенів вільності H	Приклад
V	5	1	шарнір, повзун, гвинтова пара
IV	4	2	зубці в зачепленні, кулачок–штовхач
III	3	3	сферичний шарнір
II	2	4	куля на площині з обмеженням
I	1	5	куля на площині

3.2. Структурні та кінематичні схеми механізмів.

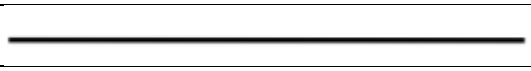
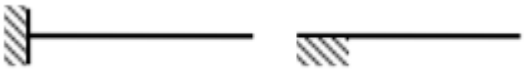
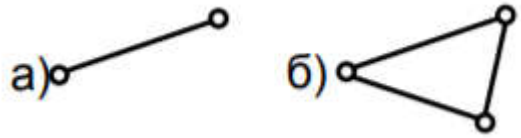
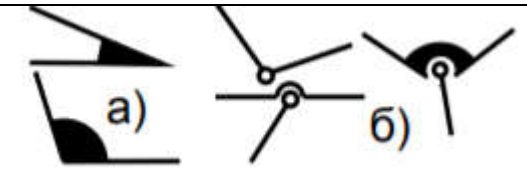
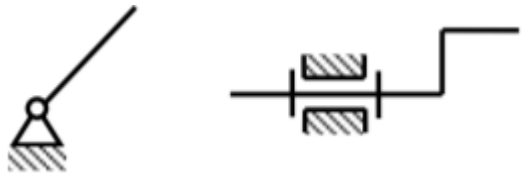
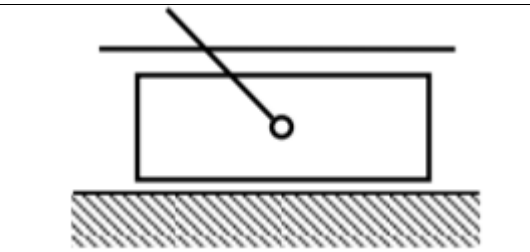
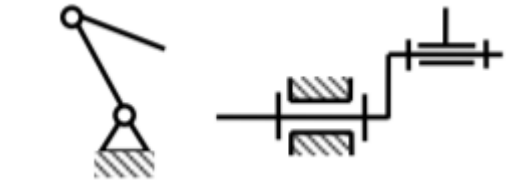
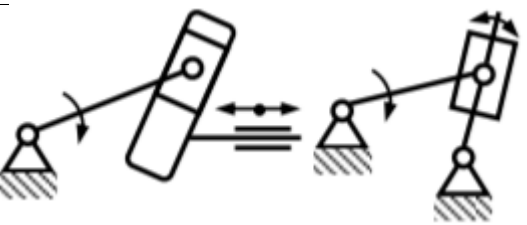
При зображенні механізму на кресленні, розрізняють його *структурну* схему із застосуванням умовних позначень ланок і кінематичних пар (без дотримання масштабу) і *кінематичну* схему, яка є його кінематичною моделлю.

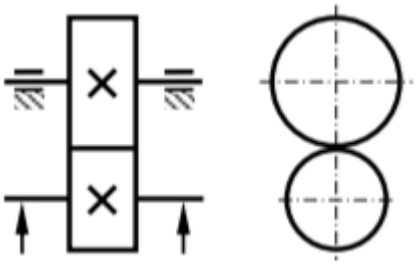
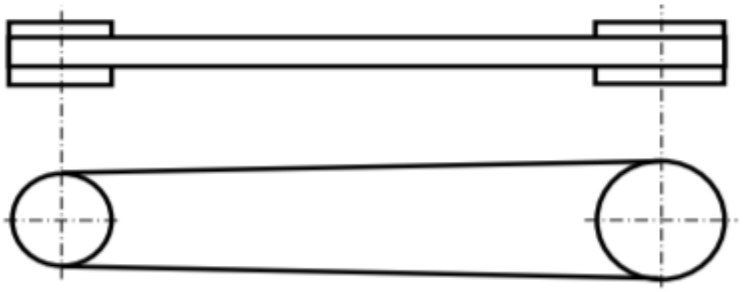
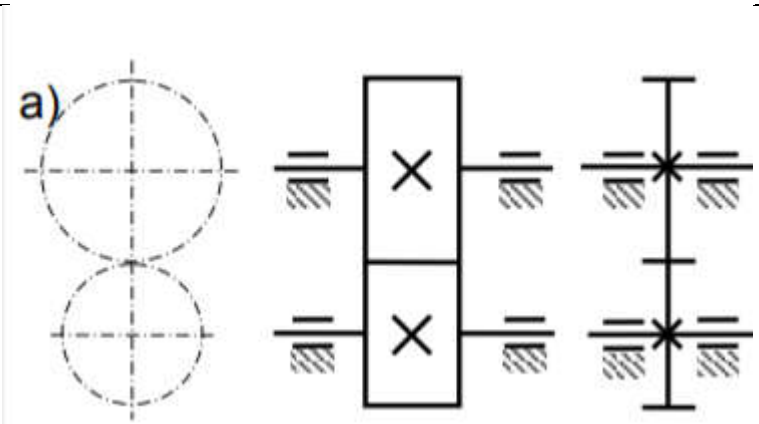
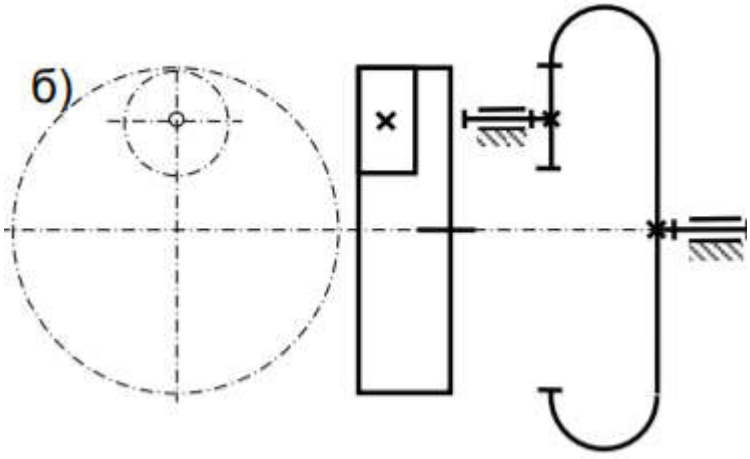
Структурна схема містить загальну інформацію про механізм: про кількість ланок та кінематичних пар, послідовність, способи з’єднання ланок та види можливих рухів.

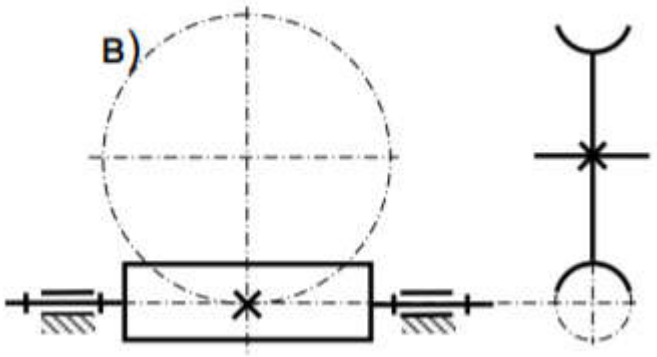
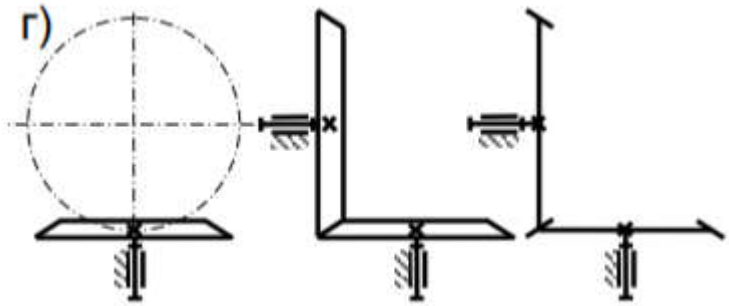
Кінематична схема механізму будується у вибраному масштабі з точним дотриманням всіх розмірів і форм, від яких залежить рух тієї чи іншої ланки. На кінематичній схемі повинно бути вказане все, що є необхідним для вивчення руху. Все зайве, що не впливає на рух, має бути вилучене, щоб не ускладнювати креслення.

Таблиця 3.2. Умовні позначення ланок і кінематичних пар

Позначення	Назва

	Вал, вісь стрижень
	Нерухоме закріплення осі, стержня і т.д.
	Ланка: а) проста; б) складна
	З’єднання ланок: а) жорстке; б) шарнірне
	З’єднання ланки з нерухомою опорою шарнірне
	Ланки, що перетинаються
	Повзун в нерухомих напрямних
	Ланка, що рухається зворотно-поступально
	З’єднання кривошипа з шатуном
	10. Кривошипно-кулісні механізми: а) з поступально-рухомою кулісою; б) з кулісою, яка обертається

	Передачі фрикційні з циліндричними роликами
	Передача з плоским пасом
	Передачі зубчасті: а) зовнішнє зачеплення з паралельними валами;
	б) внутрішнє зачеплення з паралельними валами;

	в) черв’ячні з циліндрричним черв’яком;
	г) з валами, що пересікаються (конічні)

3.3. Нижчі та вищі пари

За характером контакту елементів пари поділяють на нижчі та вищі.

У **нижчих парах** ланки стикаються по поверхні (площині, циліндричній або сферичній). До них належать обертальні, поступальні, гвинтові та сферичні пари. Нижчі пари мають велику площу контакту, тому передають значні навантаження при малому питомому тиску й менше зношуються.

Основні особливості:

- контакт ланок здійснюється по поверхні;
- забезпечується передавання сил і руху через контактні поверхні;
- зазвичай характеризуються відносно невеликим контактним тиском за однакових навантажень і матеріалів порівняно з вищими парами;
- широко використовуються в шарнірних, важільних і напрямних механізмах.

У **вищих парах** ланки торкаються лінією або точкою (зубці в зачепленні, кулачок і ролик, кулька й обойма підшипника). Вищі пари дозволяють відтворювати складні закони руху, проте через малу площу контакту мають високі контактні напруження й швидше зношуються. У плоских механізмах вищі пари належать до IV класу.

Основні особливості:

- контакт здійснюється по лінії або в точці;
- забезпечують передавання руху за допомогою профільованих поверхонь;
- дають змогу реалізовувати складні закони руху;

- потребують урахування контактних напружень, зношування та умов змащування.

Іноді для спрощення розрахунків вищу пару замінюють умовним ланцюгом із нижчих пар.

Таблиця 3.3. Порівняльна характеристика нижчих і вищих кінематичних пар

Ознака	Нижчі пари	Вищі пари
Характер контакту	По поверхні	По лінії або в точці
Контактні напруження	Зазвичай менші	Зазвичай більші
Передавання руху	Через поверхні з'єднаних ланок	Через профільовані контактні елементи
Приклади	Шарніри, повзуни, напрямні	Зубчасті, кулачкові, фрикційні пари
Застосування	Важільні та напрямні механізми	Зубчасті передачі, кулачкові механізми

3.4. Замикання кінематичних пар

Щоб ланки пари постійно перебували в контакті, пару необхідно **замикати**. Розрізняють два способи.

1) **Силове замикання** – контакт забезпечується силою ваги або пружини. Так, штовхач розподільного механізму притискається до кулачка пружиною клапана; у вібраційних решетах деталі лежать під дією власної ваги.

2) **Геометричне замикання** – контакт забезпечується формою елементів: паз у кулачку, шарнір із підшипником, виступи й канавки. Геометрично замкнені пари не потребують додаткових сил.

Таблиця 3.4. Порівняння способів замикання кінематичних пар

Ознака	Геометричне замикання	Силове замикання
Принцип забезпечення контакту	Форма конструктивних елементів	Дія зовнішньої сили
Основний засіб	Конструкція поверхонь і напрямних	Пружина, сила тяжіння, тиск
Надійність контакту	Забезпечується геометрією з'єднання	Залежить від величини та напряму сили

Приклади	Шарніри, напрямні, зубчасті передачі	Кулачкові механізми з пружиною, притискні пристрої

3.5. Кінематичні ланцюги

Кінематичний ланцюг утворюється з ланок, з'єднаних між собою парами. Залежно від структури розрізняють:

- **прості ланцюги** – кожна ланка входить не більше ніж у дві пари (наприклад, шарнірний чотириланковик);
- **складні ланцюги** – є ланки, що входять у три й більше пар (наприклад, ланка з трьома шарнірами в механізмах із кількома контурами);
- **замкнені ланцюги** – кожна ланка входить щонайменше у дві пари, утворюючи один або кілька контурів;
- **незамкнені (розімкнені) ланцюги** – є ланки, що входять лише в одну пару (маніпулятори, стріли екскаваторів);
- **плоскі та просторові ланцюги** – за розташуванням руху ланок.

Особливу роль відіграють **кінематичні з'єднання** ланок: одну й ту саму пару можуть утворювати різні елементи ланок; важливо, щоб відносний рух ланок відповідав обраній розрахунковій схемі. Наприклад, поршень у циліндрі – поступальна пара V класу, а той самий вузол із зазором і можливістю хитання поршня є більш складним з'єднанням, у розрахунках спрощуваним до поступальної пари.

Якщо пару утворюють три ланки, що сходяться в одному шарнірі, то її розглядають як **складний шарнір**, еквівалентний двом простим обертальним парам (загалом: k ланок у складному шарнірі дають $k - 1$ пару). Це правило необхідно запам'ятати: воно використовується при підрахунку числа пар у наступних лекціях.

Лекція 4. Структурні та кінематичні схеми механізмів

4.1. Схеми механізмів і їх призначення

Реальна конструкція механізму містить багато деталей складної форми – корпуси, кришки, кріпильні елементи, підшипники, ущільнення.

Розрізняють два види схем.

Структурна схема показує склад механізму: ланки, їхню кількість, вид кінематичних пар і порядок з'єднання. Вона не обов'язково виконується в масштабі, а розміри ланок на ній не мають значення. Структурну схему використовують для структурного аналізу – підрахунку ступеня рухомості, виділення груп Ассура.

Кінематична схема – це структурна схема, виконана в певному масштабі з урахуванням розмірів, що впливають на рух: відстаней між центрами шарнірів, довжин кривошипів і шатунів, положення напрямних

тощо. Саме за кінематичною схемою виконують побудову планів положень, швидкостей і прискорень.

Для комплектації машинної документації застосовують також **принципові** схеми, що відображають функціональну взаємодію складових частин (наприклад, схема трансмісії трактора).

Під час побудови схем використовують умовні графічні позначення основних елементів механізму:

1. Ланки механізму – тверді тіла або системи твердих тіл, які з'єднані між собою кінематичними парами.

2. Кінематичні пари – рухомі з'єднання між двома ланками, які визначають характер їхнього відносного руху.

3. Стійка (нерухома ланка) – ланка, відносно якої розглядають рух інших ланок механізму.

4. Вхідна ланка – ланка, якій від привода передається рух.

5. Вихідна ланка – ланка, рух якої використовується для виконання корисної роботи.

6. Кінематичні зв'язки – елементи, що забезпечують узгодженість руху ланок механізму.

На схемах ланки зазвичай позначають цифрами, а кінематичні пари – відповідними умовними символами.

Під час виконання схем необхідно дотримуватися таких вимог:

- використовувати загальноприйняті умовні графічні позначення;
- чітко показувати всі ланки та кінематичні пари;
- позначати ланки порядковими номерами;
- виділяти нерухому ланку (стійку);
- зазначати вхідну та вихідну ланки;
- дотримуватися пропорційності геометричних параметрів, якщо схема призначена для кінематичного аналізу;
- за потреби вказувати напрямки руху, кути, довжини ланок і точки, для яких проводять дослідження.

Важливо розуміти, що схема механізму не є його складальним кресленником. Вона відображає насамперед кінематичні та структурні властивості механічної системи.

4.2. Умовні позначення ланок і кінематичних пар

Правила побудови схем стандартизовано: використовують єдині умовні зображення елементів.

Ланки зображують відрізками прямих або ламаними лініями, що з'єднують центри кінематичних пар. Ланку з двома парами – відрізком; ланку з трьома шарнірами – трикутником (зафарбованим або заштрихованим), що показує жорсткість з'єднання.

Обертальну пару (шарнір) позначають маленьким колом на кінцях ланок, а нерухомий шарнір (на стояку) супроводжують штриховим символом опори. Поступальну пару зображують прямокутником (повзуном), що ковзає в нерухомій напрямній. Вищі пари показують у вигляді профілів двох ланок, що дотикаються: кулачок і штовхач – профілем кулачка та штовхачем із роликом або загостреним чи плоским наконечником; зубчасті колеса – початковими колами, що торкаються. Основні позначення наведено на рис. 4.1.

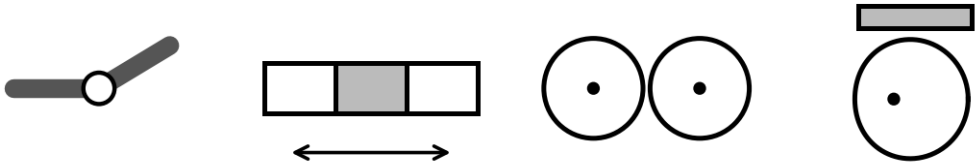


Рис. 4.1. Умовні позначення кінематичних пар: а) обертальна; б) поступальна; в) вища зубчаста; г) вища кулачок–штовхач

Кожну ланку нумерують арабськими цифрами, починаючи з вхідної (ведучої), стояк позначають цифрою 0 (або найбільшою цифрою). Кінематичні пари позначають великими латинськими літерами: A, B, C, D, ... У схемах двигунів вхідну ланку (кривошип) нерідко позначають 1, шатун 2, поршень 3.

4.3. Масштабний коефіцієнт довжин

Побудова кінематичної схеми в масштабі є основою графічних методів розрахунку. Для переходу від натуральних розмірів механізму до розмірів на кресленні використовують **масштабний коефіцієнт довжин** μ_l, який показує, скільки метрів дійсної довжини припадає на один міліметр відрізка на кресленні:

$$\mu_l = l / (AB) \qquad (4.1)$$

де l – дійсна довжина ланки, м; AB – довжина відрізка, що зображує цю ланку на кресленні, мм. Розмірність масштабного коефіцієнта – м/мм.

Масштабний коефіцієнт обирають за правилом: він має бути стандартним (наприклад, 0,001; 0,002; 0,005; 0,01 м/мм; допустимі також 1:2, 1:5, 1:10) і забезпечувати зручні розміри схеми на аркуші – зазвичай довжина найдовшої ланки 100–250 мм. Зворотну величину $1/\mu_l$ називають масштабом схеми.

Приклад. Довжина кривошипа двигуна l_{OA} = 0,04 м; на кресленні його зображено відрізком 80 мм. Визначити масштабний коефіцієнт і довжину відрізка, що відповідає шатуну завдовжки 0,14 м.

Розв'язання. μ_l = 0,04 / 80 = 0,0005 м/мм. Довжина відрізка шатуна на кресленні AB = 0,14 / 0,0005 = 280 мм. Оскільки на аркуші такий відрізок

не вміщується зручно, масштаб слід зменшити, наприклад, прийняти μ_l = 0,001 м/мм; тоді кривошип зобразиться відрізком 40 мм, а шатун – 140 мм.

Під час практичних робіт та інженерної практики іноді потрібно «зняти» схему з існуючого механізму або з креслення. Рекомендована послідовність така.

1) Ознайомитися з машиною, визначити призначення механізму, вхідну й вихідну ланки та стояк.

2) Подумки або реально повернути вхідну ланку й простежити рух інших ланок; визначити, які з них рухаються поступально, які обертаються, які здійснюють складний рух.

3) Визначити всі кінематичні пари, встановити їхній вид (обертальні, поступальні, вищі) та клас; перевірити, чи не з'єднано між собою ланки, що фактично є однією жорсткою ланкою.

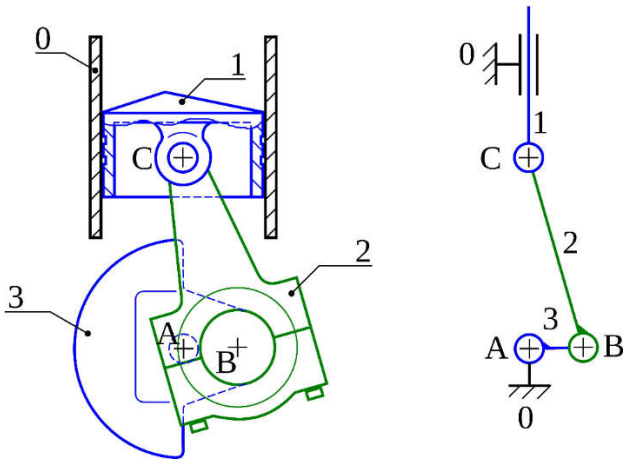
4) Пронумерувати ланки й позначити пари літерами.

6) Позначити на схемі напрямок руху вхідної ланки стрілкою, вказати значення масштабу.

Розмірами, що впливають на кінематику, є відстані між центрами пар на кожній ланці, положення нерухомих шарнірів, нахил і зміщення напрямних, початкові кутові положення.

4.4. Приклад кінематичної схеми двигуна

Для розгляду кінематичних схем доцільно використати кривошипно-шатунний механізм одноциліндрового поршневого двигуна внутрішнього згоряння. Він перетворює зворотно-поступальний рух поршня на обертальний рух колінчастого вала.



На схемі зображено основні ланки механізму:

1. Циліндр і корпус двигуна (стійка) – нерухома частина механізму, відносно якої рухаються інші ланки.

2. Поршень – здійснює зворотно-поступальний рух уздовж осі циліндра.

3. Шатун – з'єднує поршень із кривошипом і передає зусилля.

4. Кривошип (коліно колінчастого вала) – здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі.

5. Колінчастий вал – передає обертальний рух до трансмісії або іншого механізму.

Під час роботи двигуна відбувається послідовне перетворення руху:

- Під час робочого ходу гази, що утворюються внаслідок згоряння паливно-повітряної суміші, тиснуть на поршень.
- Поршень переміщується вздовж циліндра та передає зусилля шатуну.
- Шатун діє на кривошип, створюючи обертальний момент.
- Кривошип обертає колінчастий вал.
- Колінчастий вал передає механічну енергію до споживача.

Під час інших тактів двигуна колінчастий вал продовжує обертатися, забезпечуючи переміщення поршня у зворотному напрямку.

Таблиця 4.1. Структура механізму

Елемент	Тип руху	Призначення
Стійка (циліндр, корпус)	Нерухомий	Забезпечує напрямний рух поршня та опору вала
Поршень	Поступальний	Сприймає тиск газів
Шатун	Плоскопаралельний рух	Передає зусилля від поршня до кривошипа
Кривошип	Обертальний	Перетворює поступальний рух на обертальний
Колінчастий вал	Обертальний	Передає крутний момент

Механізм містить три рухомі ланки (поршень, шатун, кривошип) і стійку. У спрощеній плоскій моделі він має три нижчі кінематичні пари: одну поступальну та дві обертальні.

Ступінь рухомості визначається за формулою Чебишова:

$W=3n-2p5-p4$

де:

- $n=3$ – кількість рухомих ланок;
- $p5=4$ – кількість нижчих кінематичних пар;
- $p4=0$– кількість вищих кінематичних пар.

$W=3\cdot-2\cdot4=1$

Отже, механізм має один ступінь рухомості: для визначення положення всіх його рухомих ланок достатньо задати положення однієї початкової ланки – кривошипа.

Лекція 5. Ступінь рухомості (вільності) механізму

5.1. Поняття ступеня рухомості

Ступінь рухомості (вільності) механізму W – це число незалежних узагальнених координат, які необхідно задати, щоб положення всіх ланок механізму відносно стояка було однозначно визначене. Інакше кажучи, це число початкових ланок механізму. Якщо $W = 1$, то для повного визначення руху достатньо задати закон руху однієї ланки (наприклад, кривошипа); такі механізми найпоширеніші – двигуни, насоси, преси. Якщо $W = 2$, необхідно задати рух двох ланок (диференціали, деякі маніпулятори, вібраційні решета з двома приводами). Якщо $W = 0$, то система є нерухомою фермою (статично визначеною конструкцією), а при $W < 0$ – статично невизначеною конструкцією з надлишковими зв'язками.

Ступінь рухомості (вільності) механізму – це кількість незалежних параметрів (узагальнених координат), які необхідно задати для повного визначення положення всіх рухомих ланок механізму в будь-який момент часу.

Іншими словами, ступінь рухомості показує, скільки незалежних рухів може здійснювати механізм.

Наприклад, якщо механізм має один ступінь рухомості, для визначення положення всіх його ланок достатньо задати рух лише однієї початкової ланки. Рух інших ланок буде однозначно визначатися конструкцією механізму та кінематичними зв'язками між ними.

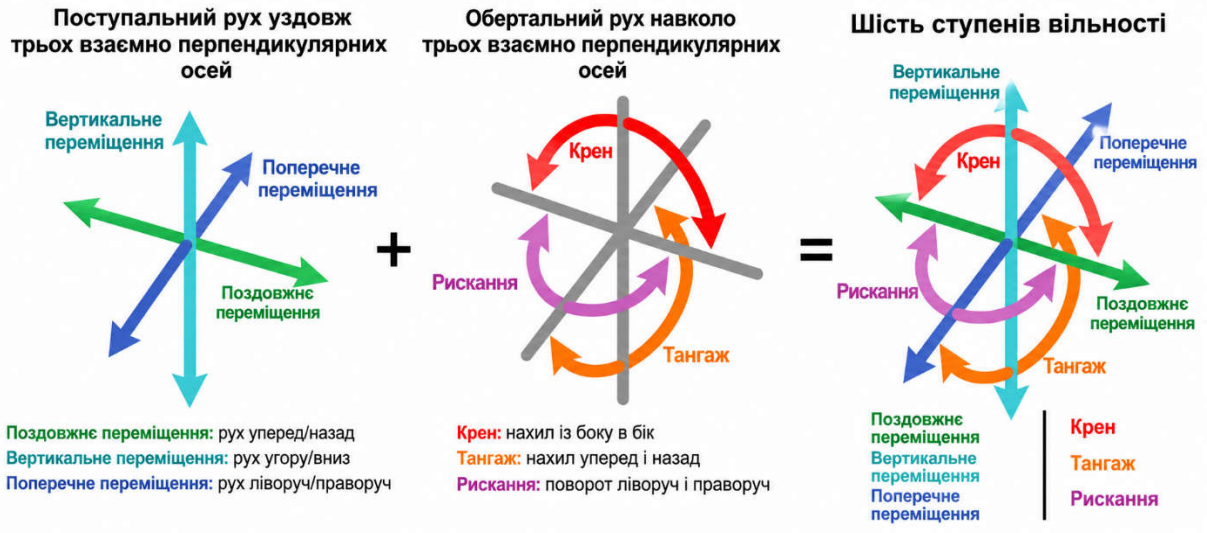
Якщо механізм має два ступені рухомості, для визначення його положення необхідно задати два незалежні параметри.

Для розуміння ступеня рухомості розглянемо вільне тверде тіло в просторі.

Вільна тверда ланка може здійснювати шість незалежних рухів:

- три поступальні переміщення вздовж осей X, Y, Z;
- три обертання навколо цих осей.

Отже, вільне тверде тіло у просторі має шість ступенів вільності.



Якщо рух ланки обмежити кінематичними парами, кількість її можливих незалежних рухів зменшується.

Наприклад:

- обертальна кінематична пара дозволяє лише обертання навколо однієї осі;
- поступальна кінематична пара дозволяє лише переміщення вздовж однієї напрямної;
- сферична кінематична пара дозволяє обертання навколо трьох осей.

Таким чином, кінематичні пари накладають обмеження на рух ланок і визначають ступінь рухомості механізму.

Таблиця 5.1. Види механізмів залежно від ступеня рухомості

Ступінь рухомості	Характеристика	Приклад
W=0	Рухомість відсутня; система є нерухомою або геометрично незмінною за заданих зв'язків	Жорстко закріплена конструкція
W=1	Для визначення положення механізму достатньо одного незалежного параметра	Кривошипно-шатунний механізм
W=2	Необхідно задати два незалежні параметри	Деякі диференціальні та маніпуляційні механізми
W>2	Механізм має кілька незалежних рухів	Багатоланкові роботизовані маніпулятори

5.2. Формула Сомова–Малишева для просторових механізмів

Розглянемо просторовий механізм, що складається з n рухомих ланок (стояк не враховуємо) та має пари різних класів: p_1 – число пар I класу, p_2 – II класу, ..., p_5 – V класу. Кожна вільна ланка в просторі має шість ступенів вільності, отже, n рухомих ланок мають $6n$ ступенів вільності. Кожна пара i-го класу накладає i умов зв'язку, зменшуючи число ступенів вільності на i. Звідси

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 \qquad (5.1)$$

Це **формула Сомова–Малишева**, яку називають також структурною формулою просторових механізмів.

Наприклад, механізм шарніра Гука складається з трьох рухомих ланок (дві вилки та хрестовина), всі пари – обертальні V класу, їх чотири: $n = 3$, $p_5 = 4$ – маємо $W = 6\cdot3 - 5\cdot4 = -2$. Негативний результат зумовлений тим, що фактично існують пасивні (надлишкові) в'язі, які розглядають у наступній лекції; реальна рухомість шарніра Гука дорівнює 1.

5.3. Формула Чебишева для плоских механізмів

У плоскому механізмі кожна вільна ланка має три ступені вільності (рух у площині). У ньому використовують лише пари V (обертальні та

поступальні) та IV (вищі) класів, причому пара V класу відбирає у ланок два ступені вільності, а пара IV класу – один. Тоді ступінь рухомості плоского механізму дорівнює

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 \qquad (5.2)$$

де n – число рухомих ланок; p_5 – число пар V класу (нижчих); p_4 – число пар IV класу (вищих). Ця залежність відома як **формула Чебишева** (інколи – формула Грюблера).

Порядок використання формули такий.

1) Підрахувати число рухомих ланок n (стояк не враховується).

2) Підрахувати число пар V класу p_5: обертальні й поступальні – окремо, складні шарніри – з урахуванням числа ланок (на один менше, ніж ланок у шарнірі).

3) Підрахувати число вищих пар p_4.

4) Підставити в формулу й отримати W.

5.4. Приклади визначення ступеня рухомості

Приклад 1. Шарнірний чотириланковий механізм (рис. 5.1) має ланки: кривошип 1, шатун 2, коромисло 3. Усі чотири пари (A, B, C, D) – обертальні.

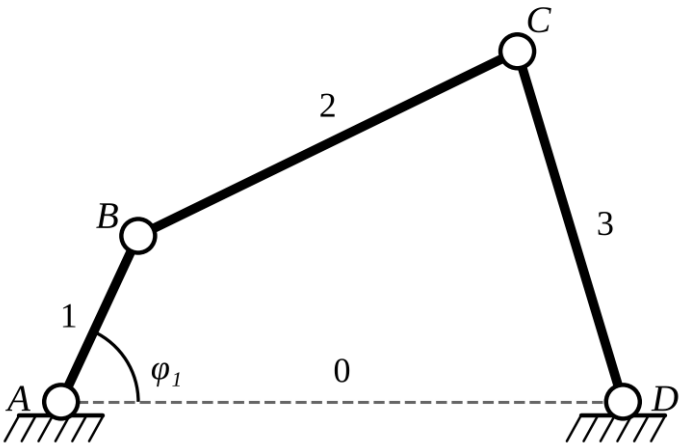


Рис. 5.1. Шарнірний чотириланковий механізм

Розв'язання. $n = 3$; $p_5 = 4$; $p_4 = 0$. Підставимо в формулу (5.2): $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1$. Отже, механізм має один ступінь рухомості: достатньо задати кут повороту кривошипа, щоб положення всіх ланок стало визначеним.

Приклад 2. Кривошипно-повзунний механізм (рис. 5.2) складається з кривошипа 1, шатуна 2, повзуна 3. Пари: O, A, B – обертальні, повзун–напрямна – поступальна.

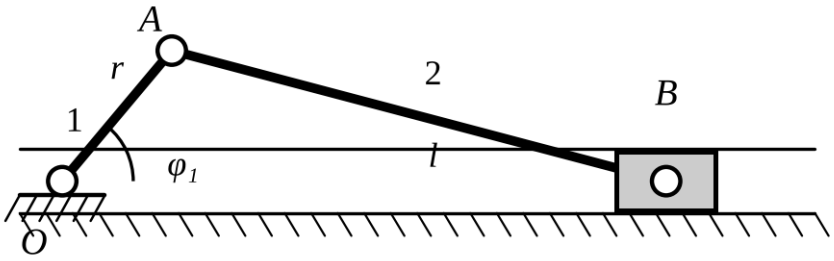


Рис. 5.2. Кривошипно-повзунний механізм

Розв'язання. $n = 3$; $p_5 = 4$ (три обертальні й одна поступальна); $p_4 = 0$. Тоді $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Приклад 3. Кулачковий механізм із роликовим штовхачем, що рухається поступально, складається з кулачка 1, ролика 2 та штовхача 3. Пари: кулачок–стояк (обертальна), ролик–штовхач (обертальна), штовхач–стояк (поступальна) – три пари V класу, а також вища пара кулачок–ролик IV класу. Тоді $n = 3$, $p_5 = 3$, $p_4 = 1$ і $W = 9 - 6 - 1 = 2$. Проте ролик може обертатися навколо власної осі незалежно від руху штовхача, тому зайвий ступінь вільності – **місцева рухомість**, що не впливає на закон руху вихідної ланки. Дійсна рухомість механізму $W = 1$. Місцеві рухомості та пасивні в'язі буде розглянуто в лекції 6.

Таблиця 5.2. Значення ступеня рухомості типових плоских механізмів

Механізм	n	p5	p4	W
Шарнірний чотириланковик	3	4	0	1
Кривошипно-повзунний	3	4	0	1
Кулісний	3	4	0	1
П'ятиланковий шарнірний	4	5	0	2
Кулачковий з роликом	3	3	1	2 (дійсно 1)

5.5. Значення ступеня рухомості в практиці проєктування

Знання ступеня рухомості дозволяє:

- визначити кількість приводів, необхідних для керованого руху механізму;
- перевірити правильність структурної схеми – механізм при $W \leq 0$ ніякого руху виконувати не може;
- виявити надлишкові та місцеві зв'язки та підвищити надійність конструкції;

– обґрунтовано обирати складніші механізми для заданих функцій.

Лекція 6. Зайві ступені вільності та пасивні в'язі. Заміна вищих пар нижчими

6.1. Місцеві (зайві) ступені вільності

Формула Чебишева враховує всі ступені вільності механізму, але деякі з них не впливають на закон руху вихідної ланки. Такі рухомості називають **місцевими (зайвими) ступенями вільності**. Типовий приклад – ролик у кулачковому механізмі. Кулачок штовхає ролик, ролик котиться по профілю й одночасно штовхає штовхач.

За формулою Чебишева такий механізм має $W = 2$ (див. лекцію 5), проте реальна рухомість – одна. Тому під час структурного аналізу необхідно виключити зайві ступені: ланку, що вносить місцеву рухомість, подумки «приварюють» до сусідньої, видаляючи при цьому одну обертальну пару й одну рухому ланку. Тоді для кулачкового механізму з роликом: $n = 2$ (кулачок і штовхач), $p_5 = 2$ (обертальна пара кулачка зі стояком та поступальна штовхача зі стояком), $p_4 = 1$, звідки

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1 \qquad (6.1)$$

Отже, дійсний ступінь рухомості дорівнює одиниці. Якщо в розрахунку ролик залишити, то слід записати $W = W_{\text{ч}} - W_{\text{м}}$, де $W_{\text{ч}}$ – результат за формулою Чебишева, $W_{\text{м}}$ – число місцевих рухомостей.

Місцеві ступені вільності можуть зустрічатися в різних механічних системах:

Таблиця 6.1. Приклади місцевих ступенів вільності

Приклад	Місцевий рух	Призначення
Ролик кулачкового механізму	Обертання ролика	Зменшення тертя ковзання
Ролики транспортера	Обертання роликів	Забезпечення переміщення вантажу
Роликові опори	Обертання роликів	Зменшення опору руху
Допоміжні напрямні ролики	Обертання навколо власної осі	Забезпечення контакту та спрямування руху

Таблиця 6.2. Відмінність основних і місцевих ступенів вільності

Ознака	Основні ступені рухомості	Місцеві ступені вільності
Вплив на роботу механізму	Визначають основний рух	Не змінюють основного руху
Функція	Передавання або перетворення руху	Допоміжні рухи окремих елементів

Врахування під час структурного аналізу	Визначають шукану рухомість	Віднімають під час уточнення її значення
Приклад	Обертання кривошипа	Обертання ролика штовхача

Урахування місцевих ступенів вільності важливе для:

- правильного визначення ступеня рухомості механізму;
- коректного структурного аналізу кінематичних схем;
- виявлення допоміжних рухів окремих деталей;
- обґрунтування конструкції кінематичних пар;
- зменшення тертя та зношування деталей;
- підвищення довговічності й надійності машин.

6.2. Пасивні (надлишкові) в'язі

Пасивні в'язі – це зв'язки, які накладають умови, вже забезпечені іншими зв'язками, і тому не впливають на рух механізму. Вони дублюють наявні обмеження. Пасивні в'язі не змінюють рухомість, але змінюють розрахункову величину W; їх число q додається у структурну формулу:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 + q \qquad (6.2)$$

де q – число пасивних в'язей. Інколи їх називають надлишковими в'язями.

Класичні приклади:

1) **Паралелограмний механізм** зі спарником (як у приводі коліс локомотива): два кривошипи однакової довжини з'єднані шатуном, що дорівнює відстані між осями; додаткова ланка, паралельна шатуну й рівна йому, не змінює руху механізму.

2) **Подвійні ланки**, наприклад, дві шарнірно-важільні опори, що працюють паралельно, або подвоєні шатуни у V-подібному двигуні із симетричним розташуванням.

3) **Зубчасті передачі з кількома сателітами** – один сателіт достатній за кінематикою, три ж забезпечують розподіл навантаження.

Розглянемо типовий приклад паралелограма з вхідним кривошипом 1, шатуном 2 та ще одним кривошипом 3 (рівним першому й паралельним йому). Обчислення за формулою Чебишева дає $n = 3$, $p_5 = 4$, $W = 1$. Якщо додати ще одну ланку 4, рівну й паралельну ланці 2, то $n = 4$, $p_5 = 6$, $W = 12 - 12 = 0$, хоча реально механізм рухомий, тому що додана ланка накладає пасивну в'язь ($q = 1$), і $W = 0 + 1 = 1$.

Пасивні в'язі вносять нашкоду: при неточному виготовленні ланки не збігаються за довжиною, виникають додаткові напруження, збільшується тертя, механізм може заклинити.

Таблиця 6.3. Відмінність між місцевими ступенями вільності та надлишковими в'язями

Ознака	Місцеві ступені вільності	Пасивні (надлишкові) в'язі
Сутність	Додаткові рухи окремих ланок	Дублювання вже наявних обмежень
Вплив на основний рух	Не впливають	Не впливають
Особливість	Збільшують кількість можливих рухів окремих елементів	Збільшують кількість накладених, але не незалежних обмежень
Урахування у формулі	Віднімаються	Додаються
Приклад	Вільне обертання ролика кулачкового механізму	Додаткова співвісна опора вала

6.3. Заміна вищих пар нижчими

Вищі пари ускладнюють аналіз механізмів, оскільки до них неможливо безпосередньо застосувати методи розрахунку, призначені для шарнірно-важільних систем. Тому в теорії механізмів використовують **заміну вищої пари нижчими**, тобто побудову такого шарнірно-важільного механізму, який в заданий момент часу має ті самі кінематичні властивості (швидкості та прискорення) і ту ж рухомість.

Умова заміни: ступінь рухомості механізму не повинен змінюватися, а миттєві швидкості та прискорення вихідних ланок мають збігатися. Вища пара IV класу відбирає один ступінь вільності. Додаткова ланка з двома обертальними парами V класу вносить три ступені вільності й відбирає чотири, тобто сумарно також відбирає один ступінь ($3 - 4 = -1$). Отже, рухомість при заміні зберігається. Така **замінююча ланка** з'єднує центри кривизни профілів у точці контакту.

Правила заміни:

1) вища пара двох кривих профілів замінюється ланкою, довжина якої дорівнює сумі (або різниці) радіусів кривизни профілів у точці контакту, з шарнірами у центрах кривизни;

2) якщо один із профілів є прямою лінією (радіус кривизни безмежний), то заміна має вигляд поступальної пари – повзуна, що рухається вздовж перпендикуляра до прямої;

3) якщо один із профілів – точка (загострений штовхач), замінна ланка має довжину, що дорівнює радіусу кривизни другого профілю.

Заміна зберігає кінематичні властивості лише в **миттєвому** положенні, оскільки при зміні положення змінюються радіуси кривизни профілів, і довжина замінної ланки теж. Проте для швидкостей і прискорень цього достатньо.

Щоб заміна була коректною, необхідно дотримуватися таких умов:

1. Ступінь рухомості механізму після заміни має залишатися незмінним.

2. Кількість незалежних обмежень руху повинна відповідати початковій кінематичній парі.

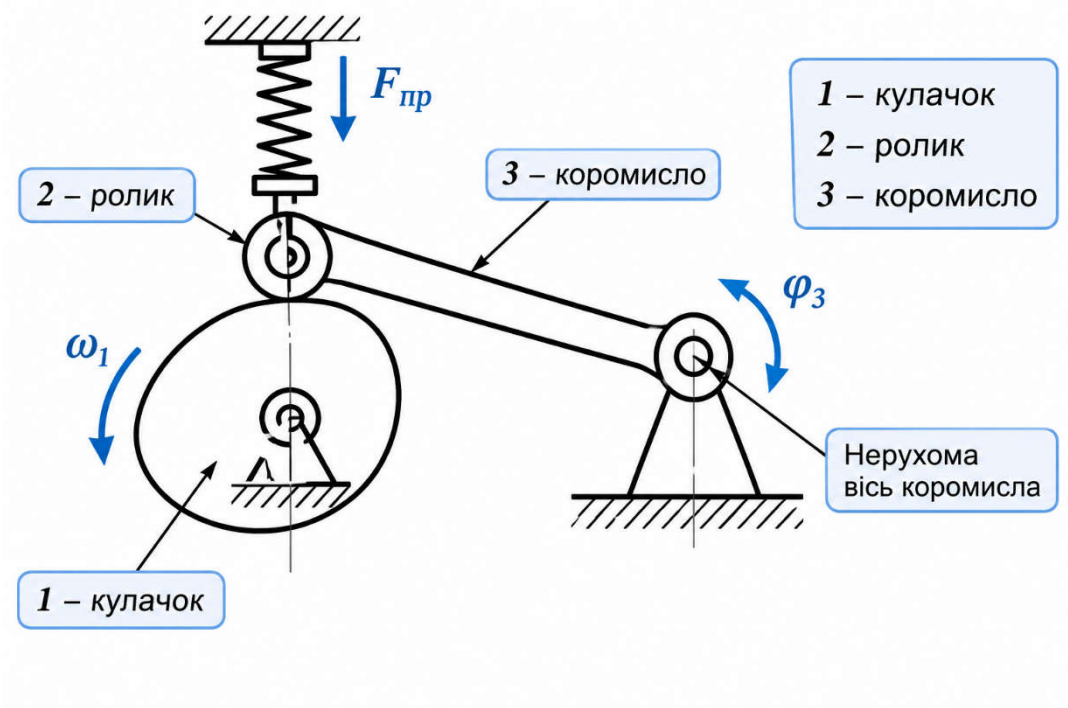
3. Взаємне положення основних ланок і характер їхнього руху мають зберігатися в досліджуваному положенні.

4. Геометричні параметри умовної ланки визначаються з урахуванням характеру контакту та положення нормалі до контактних профілів.

Важливо: така заміна є еквівалентною насамперед для структурного аналізу та локального кінематичного дослідження. Вона не означає, що реальний контакт двох деталей фізично перетворюється на шарнірні з'єднання.

6.4. Приклад розрахунку

Приклад. Визначити ступінь рухомості кулачкового механізму з роликом і коромислом (так влаштований привід клапана в багатьох двигунах): кулачок 1 обертається на нерухомій осі, ролик 2 вільно обертається на осі, закріпленій на коромислі 3, коромисло хитається на нерухомій осі й притискається до кулачка пружиною.



Розв'язання. Рухомі ланки: кулачок 1, ролик 2, коромисло 3 – $n = 3$. Пари V класу: кулачок–стояк, ролик–коромисло, коромисло–стояк – $p_5 = 3$. Вища пара кулачок–ролик: $p_4 = 1$. За формулою Чебишева $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2$. Ролик 2 може обертатися навколо власної осі незалежно від руху коромисла, тобто він вносить одну місцеву рухомість ($W_м = 1$). Дійсний ступінь рухомості дорівнює $W = 2 - 1 = 1$, як і потрібно для газорозподільного механізму: достатньо задати кут повороту кулачка.

Перевіримо результат, виключивши ролик (приварюємо його до коромисла): $n = 2$, $p_5 = 2$, $p_4 = 1$, $W = 6 - 4 - 1 = 1$. Результати збігаються.

Підсумовуючи, під час структурного аналізу слід діяти за алгоритмом:

- накреслити структурну схему й пронумерувати ланки;
- виявити місцеві рухомості (ролики, обертання навколо власної осі) і виключити їх із розгляду;
- виявити пасивні в'язі (паралельні, дубльовані ланки) та визначити їх число q;
- обчислити W за формулою Чебишева та порівняти з очікуваною рухомістю.

Лекція 7. Структурні групи Ассура

7.1. Принцип утворення механізмів

Будь-який механізм можна отримати послідовним приєднанням до **початкового механізму** (стояка з початковою ланкою) кінематичних ланцюгів, ступінь рухомості яких дорівнює нулю.

Початковий механізм – це стояк і початкова ланка, з'єднані парою V класу (обертальною або поступальною). Його ступінь рухомості дорівнює одиниці: $n = 1$, $p_5 = 1$, $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$. Саме він задає рух усьому механізму.

Структурна група Ассура – це кінематичний ланцюг, ступінь рухомості якого після приєднання до стояка дорівнює нулю й який не розпадається на простіші групи з нульовою рухомістю. Приєднання такої групи не змінює ступеня рухомості механізму, тому механізм, складений з початкового механізму та груп Ассура, має ту саму рухомість, що й початковий – одиницю. Для механізмів із кількома початковими ланками рухомість дорівнює їхньому числу.

Кінематичний ланцюг з нульовим ступенем вільності називається *групою Ассура.*

В сучасному машинобудуванні і автомобілебудуванні широко застосовують плоскі механізми, ланки яких входять в кінематичні пари IV і V класів. Розглянемо принципи їх структурної класифікації. На основі викладеного принцип утворення механізмів можна сформулювати ще так: всякий механізм може бути утворений шляхом послідовного приєднання до механізму I класу груп Ассура. На основі визначення група Ассура має нульову ступінь вільності $W=0$. Тоді для кожної групи Ассура і права сторона рівняння (7.1) рівна нулю

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0 \qquad (7.1)$$

Якщо в склад, плоского механізму входять тільки кінематичні пари V класу, то маємо:

$$p_5 = \frac{3}{2} n \qquad (7.2)$$

Визначимо співвідношення між числом рухомих ланок і кінематичних пар V класу в групах Ассура (рис. 7.1) згідно (7.1), результати запишемо в табл.7.1.

Таблиця 7.1

n	2	4	6	8	...
p_5	3	6	9	12	...

Як бачимо із табл.7.1 найпростіша група Ассура складається, із двох рухомих ланок і трьох кінематичних пар V класу.

Групи Ассура діляться на класи і порядки.

Клас групи визначається найвищим класом контура, що входить в дану групу.

Клас контура визначається числом кінематичних пар, що він в себе включає.

Порядок групи визначається числом вільних елементів, якими група приєднується до основного механізму.

7.2. Умова існування структурної групи

Нехай група складається з n ланок і p_5 пар V класу, вищих пар немає. Тоді її ступінь рухомості:

$$W = 3n - 2p_5 = 0 \qquad (7.3)$$

Звідси $p_5 = 3n / 2$. Оскільки число пар є цілим, число ланок n має бути парним. Мінімальні розв'язки:

– $n = 2$, $p_5 = 3$ – група з двох ланок і трьох пар;
– $n = 4$, $p_5 = 6$ – група з чотирьох ланок і шести пар;
– $n = 6$, $p_5 = 9$ і так далі.

Група з однієї ланки неможлива, а група з двох ланок і трьох пар – найпростіша й найпоширеніша; її називають групою II класу II порядку.

Групи Ассура II класу II порядку діляться ще на види, в залежності від наявності і співвідношення обертальних і поступальних кінематичних пар (рис. 7.2). Прийнято, якщо в групі Ассура II кл. II пор. всі три пари обертальні, то вона відноситься до I виду; якщо одну із крайніх обертальних пар замінити поступальною, то 2 виду; якщо середню обертальну пару замінити поступальною, то 3 виду; якщо дві крайніх обертальних пари замінити поступальними, то 4 виду; якщо середню і одну із крайніх обертальних пар замінити поступальними, то 5 виду.

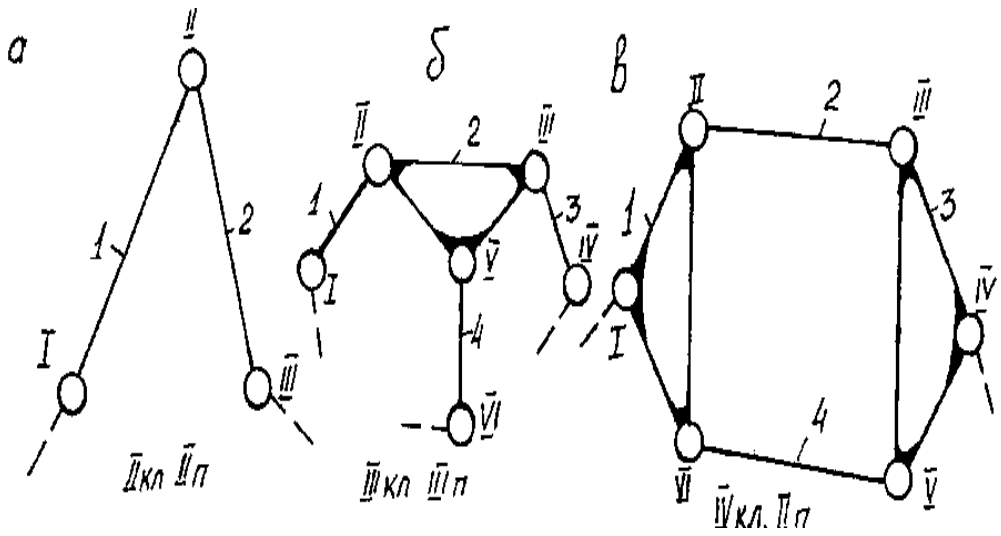


Рис. 7.1. Групи Ассура

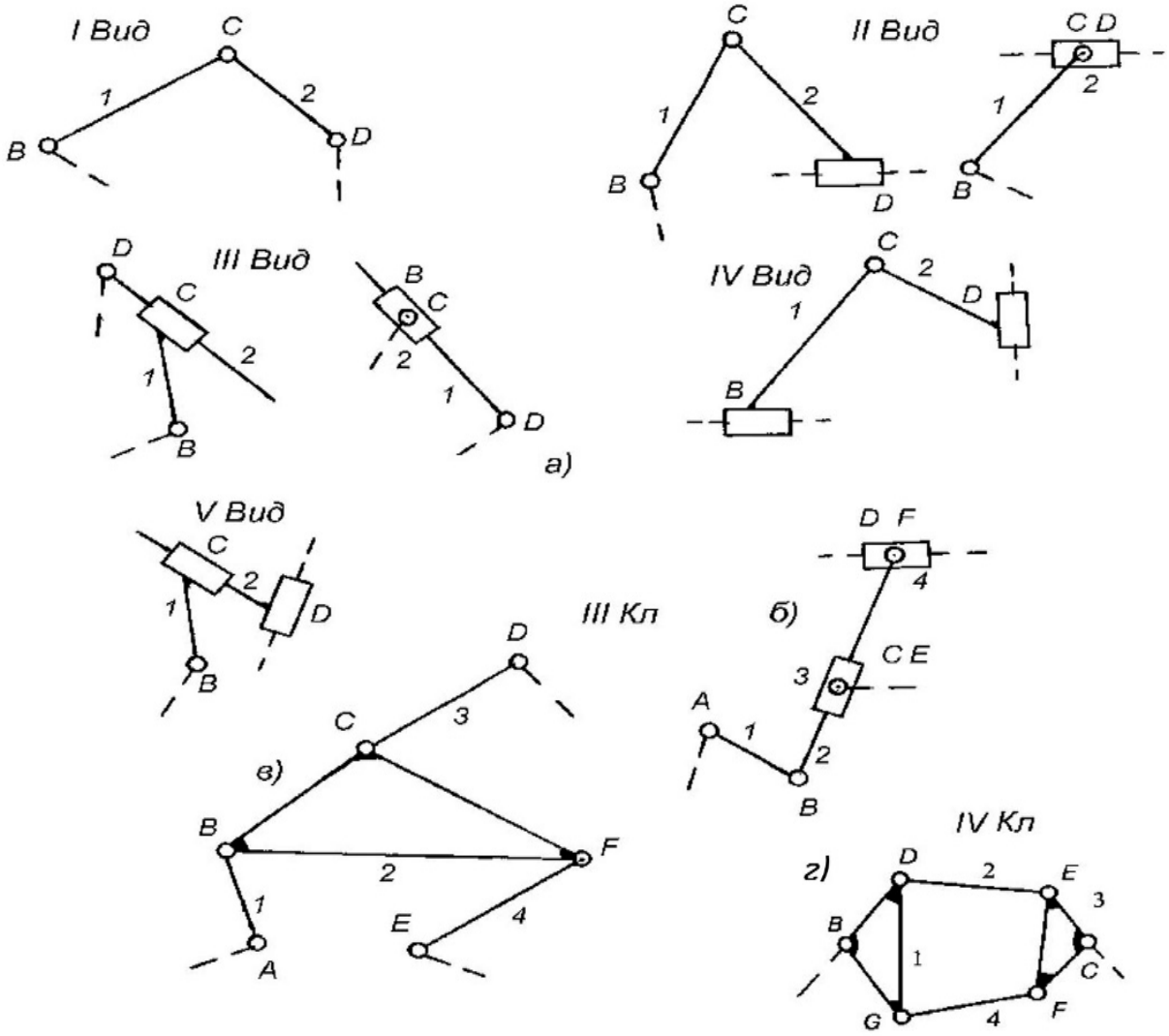


Рис. 7.2. Види груп Ассура II кл. II пор.

7.3. Класифікація механізмів. Послідовність структурного аналізу

Клас групи визначається числом внутрішніх пар, що утворюють найскладніший замкнений контур групи; для двоповодкових груп (n = 2)

клас за визначенням дорівнює 2. **Порядок групи** дорівнює числу вільних елементів пар, якими група приєднується до решти механізму.

Група II класу II порядку складається з двох ланок і трьох пар. Дві крайні пари – **зовнішні** (вони з'єднують групу з іншими ланками), середня пара – **внутрішня**. Залежно від того, які саме пари (обертальні В чи поступальні П) входять до групи, розрізняють п'ять видів (рис. 7.3):

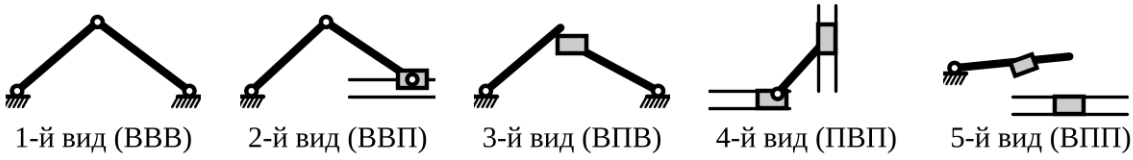


Рис. 7.3. Групи Ассура II класу: 1-й вид – ВВВ; 2-й вид – ВВП; 3-й вид – ВПВ; 4-й вид – ПВП; 5-й вид – ВПП

1) **Перший вид** – усі три пари обертальні (ВВВ); ланки – повідки (шатун і коромисло). Типовий приклад – шарнірний чотириланковик без кривошипа.

2) **Другий вид** – дві обертальні й одна поступальна пара, причому поступальна пара крайня (ВВП): шатун із повзуном (кривошипно-повзунний механізм).

3) **Третій вид** – поступальна пара внутрішня (ВПВ): кулісний механізм з обертальними крайніми парами; ланка з повзуном обертається в кулісі.

4) **Четвертий вид** – дві поступальні пари і одна обертальна, причому обертальна внутрішня (ПВП): наприклад, синусний або тангенсний механізм.

Результат класифікації зручно подати таблицею.

Таблиця 7.2. Види структурних груп II класу

Вид	**Пари (зовнішня – внутрішня – зовнішня)**	**Приклад механізму**
1	В – В – В	шарнірний чотириланковик
2	В – В – П	кривошипно-повзунний
3	В – П – В	кулісний механізм
4	П – В – П	синусний механізм
5	В – П – П	тангенсний механізм

Якщо до механізму I класу приєднати відповідну групу Ассура:

II кл. II пор. I виду, то отримаємо – кривошипно-коромисловий механізм (рис.7.4а);
II кл. II пор. 2 виду – кривошипно-повзунний механізм (рис.7.4, б);
II кл. II пор. 3 виду – кулісний механізм (рис.7.4, в);
II кд. II пор. 4 виду – тангенсний механізм (рис.7.4, г);
II кл. II пор. 5 виду – синусний механізм (рис.7.4, д).

Клас механізму в цілому визначається найвищим класом групи Ассура, що входить в даний механізм.

Схема механізму, зображена без масштабу, називається структурною.

Схема механізму, зображена в масштабі, називається кінематичною.

Механізми, в склад яких входять тільки нижчі кінематичні пари, називаються важільними.

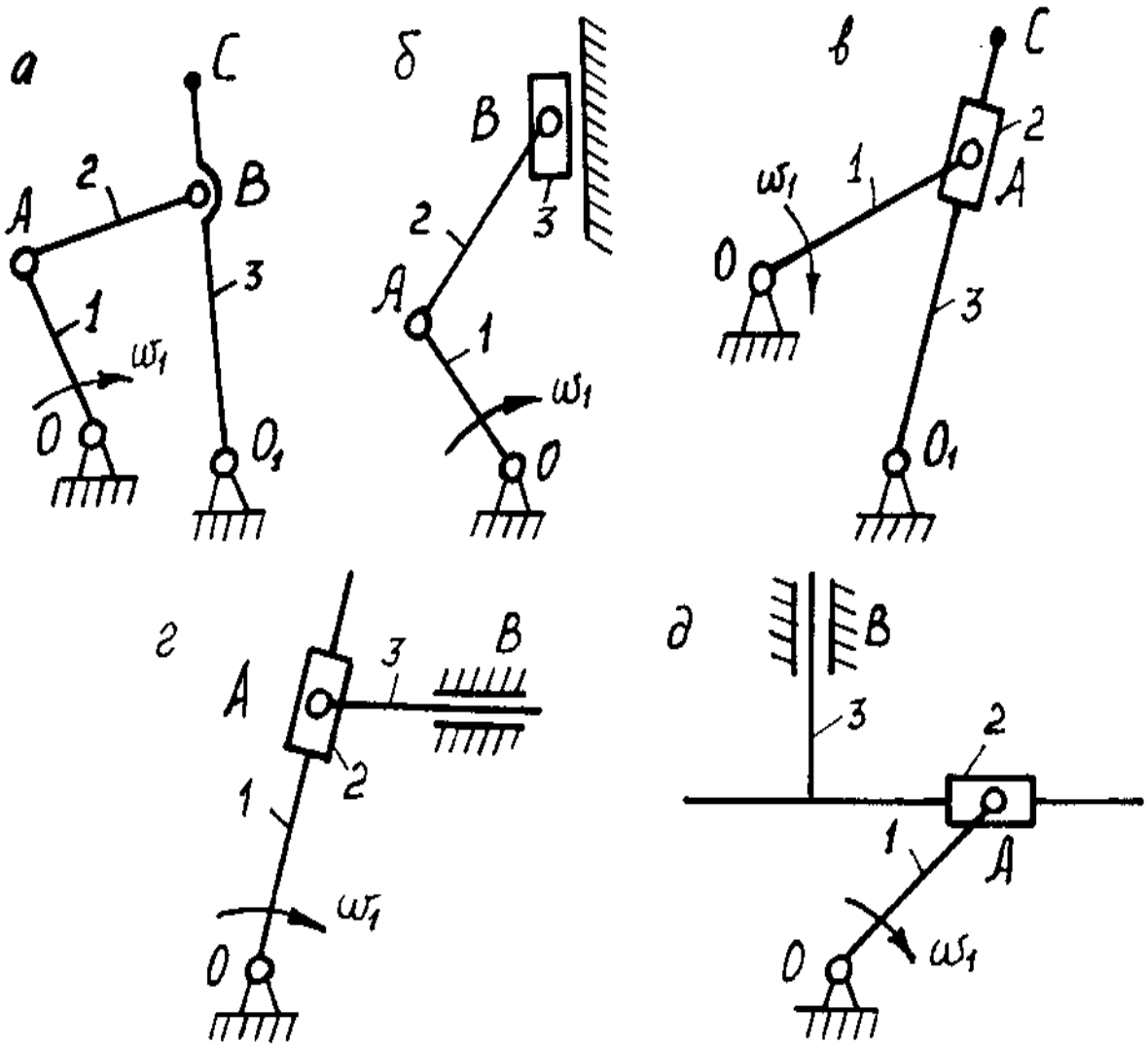


Рис. 7.4. Різновиди механізмів

7.3. Різновиди механізмів II кл. II пор

Розкладання механізму на групи Ассура проводиться в послідовності оберненій утворенню механізму, починаючи з найпростішої групи і так, щоб механізм, що залишається, був працездатним і не було розриву

кінематичного ланцюга; якщо не можливо виділити найпростішу групу Ассура, то виділяємо наступну за складністю групу і т.д.

Структурний аналіз механізмів проводиться в наступній послідовності:

1. визначають ступінь рухомості механізму за формулою Чебишева;
2. розкладають механізм на структурні одиниці: групи Ассура і механізм I класу в послідовності, оберненій утворений механізму;
3. визначають клас, порядок і вид кожної групи;
4. визначають клас механізму в цілому.

7.4. Групи вищих класів

Для складніших механізмів використовують групи, у яких є замкнений контур із трьох або більше внутрішніх пар.

Група III класу містить 4 ланки та 6 пар: одну базисну ланку (трикутник, на якій розташовано три внутрішні шарніри) та три повідки, кожен із яких приєднується до базисної ланки внутрішнім шарніром і до іншого механізму – зовнішнім. Порядок групи – 3 (три зовнішні пари).

Група IV класу містить чотири внутрішні шарніри, що утворюють чотирикутний контур, до сторін якого приєднуються повідки; найпростіший варіант – 4 ланки із двома зовнішніми елементами.

Загалом **клас групи** визначається числом пар найскладнішого замкненого контуру, утвореного внутрішніми парами (але не менше, ніж 2), а **порядок** – числом зовнішніх пар. Групи першого класу не існують як групи Ассура: до їхнього складу відносять початкову ланку.

Важливе правило: **вилучати групи слід так, щоб після вилучення залишався працездатний механізм**, а ступінь рухомості решти не змінювався.

7.5. Склад механізму та його структура

Таким чином, довільний плоский механізм можна подати у вигляді **структурної формули**, яка відображає послідовність приєднання груп. Наприклад, запис «$I(0,1) \rightarrow II_1(2,3) \rightarrow II_2(4,5)$» означає, що до початкового механізму (стояк 0 та ланка 1) спочатку приєднано групу з ланок 2, 3 (перший вид), а потім групу з ланок 4, 5 (другий вид). Така форма запису зручна під час планування кінематичного та силового розрахунків, оскільки порядок досліджень збігається з порядком приєднання груп.

Розрахунок кінематики починають із початкового механізму, а на кожному наступному кроці використовують результати розрахунку попередньої групи як початкові дані. У силовому розрахунку порядок зворотний: починають із групи, що найдалі від початкової ланки (її вихідна ланка), а завершують початковим механізмом.

Під час дослідження структури механізмів можуть виявитися ступені вільності та умови зв'язку, що не впливають на характер руху всього механізму. Такі ступені вільності називають зайвими, а зв'язки – пасивними.

Як приклад розглянемо роботу кулачкового механізму (рис.7.5).

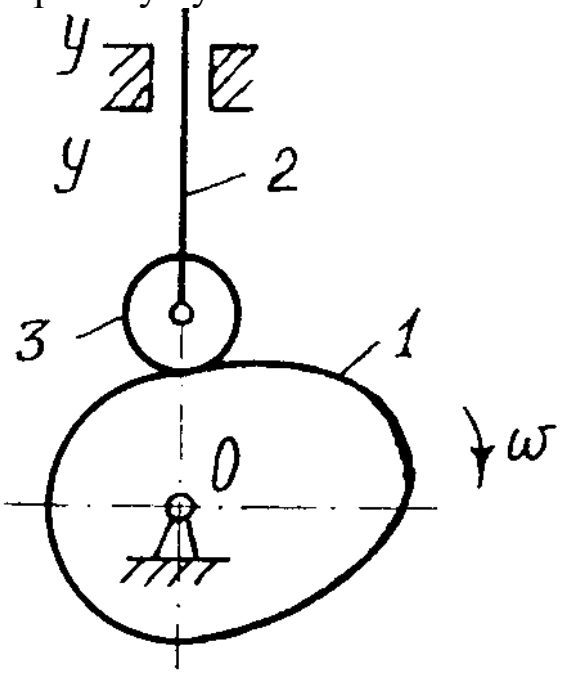


Рис. 7.5. Кулачковий механізм із зайвим ступенем вільності

Кулачок 1 обертається навколо осі О. Штовхач 2 переміщається поступально відносно напрямних *y–y.* Ролик 3 може вільно обертатися навколо своєї осі, не впливаючи на характер руху всього механізму. Тобто, можливість обертання ролика є зайвим ступенем вільності. Ролик являє собою конструктивний елемент, який зменшує сили тертя і спрацювання ланок. Кінематика не зміниться, якщо ролик видалити і штовхач безпосередньо з'єднати з кулачком у кінематичну пару IV класу.

На (рис.7.6) показано механізм чотириланкового шарніра.

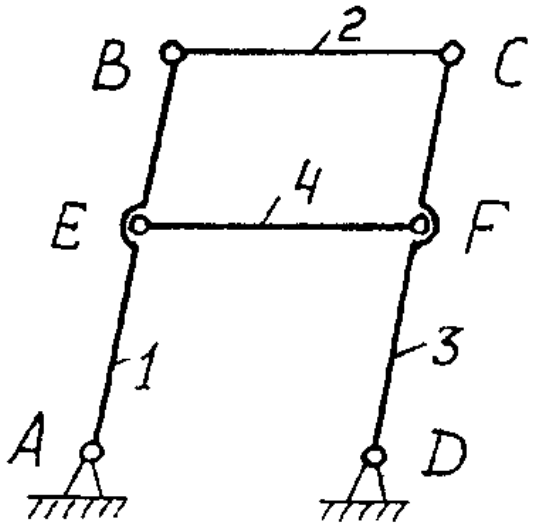


Рис. 7.6. Важільний механізм з пасивними зв'язками

Якщо ланки 1 і 3 з'єднати ланкою *EF* з двома обертальними парами, то ступінь вільності згідно:

$$W=3n-2p_5=3\cdot4-2\cdot6=0$$

Однак, якщо ланка *EF* паралельна ланці *BC*, механізм матиме один ступінь вільності, тобто *W =1*. Отже, ланка *EF* вносить пасивні зв'язки і її можна не розглядати.

Інколи, пасивні зв’язки потрібні для забезпечення певності руху, підвищення жорсткості системи, поліпшити розподіл зусиль і ін.

Під час проведення структурного та кінематичного досліджень механізмів усі пасивні умови зв'язку та зайві ступені вільності треба з механізму попередньо вилучити, умовно видаливши відповідні ланки.

Під час аналізу плоских механізмів з вищими парами в багатьох випадках зручно умовно замінювати вищі пари нижчими.

При цьому має задовольнятися умова структурної еквівалентності, тобто, щоб замінюючий механізм мав такий самий ступінь вільності і щоб характер миттєвого відносного руху всіх його ланок не змінився. Порядок побудови замінюючого механізму розглянемо на прикладі механізмів, зображених на рис.7.7. які мають вищу кінематичну пару.

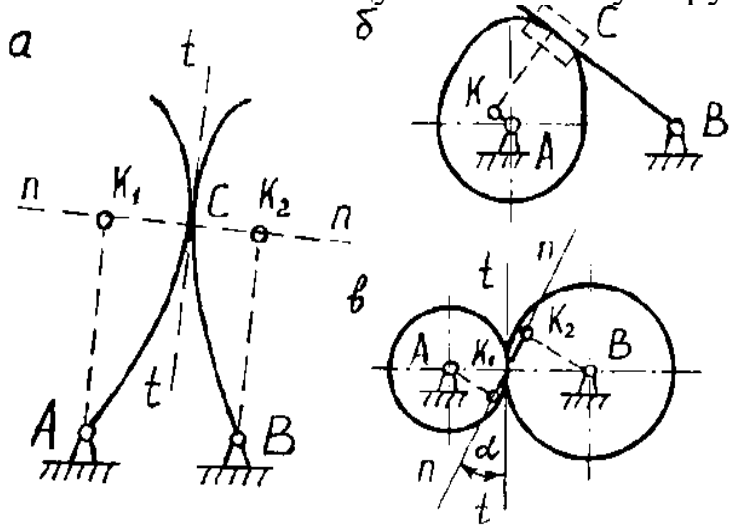


Рис. 7.7. Замінюючі механізми

В точці *C* контакту двох ланок, які утворюють вищу кінематичну пару (рис. 7.7, а) проведем загальну дотичну *t – t* до обох профілів ланок. Далі проведемо перпендикуляр до загальної дотичної в т. *C*, отримаємо нормаль *n – n*.

На лінії *n – n* знайдено центри кривизни профілів K_1 і K_2. В точках K_1 і K_2 ставимо обертальні кінематичні пари V класу і з’єднуємо їх допоміжними ланками з центрами *A* і *B*. Механізм AK_1K_2B і буде замінюючим. Якщо центр кривизни однієї із ланок знаходиться в

нескінченності (рис. 7.7, б), то в т. *C* ставиться поступальна кінематична пара V класу.

Побудова замінюючого механізму для зубчастої передачі показана на (рис.7.7, в).

Із центрів *A* і *B* обертання зубчастих коліс опустимо перпендикуляри на лінію зачеплення *n–n,* отримаємо точки K_1 і K_2. В точках K_1 і K_2 ставимо обертальні кінематичні пари і з'єднаємо їх між собою та з центрами *A* і B допоміжними ланками. Механізм AK_1K_2B і буде замінюючим.

Замінюючим механізмом називається такий механізм, у якого вищі кінематичні пари замінені нижчими і який еквівалентний за структурою та кінематикою в даний момент часу, основному механізму.

Лекція 8. Структурна класифікація механізмів. Послідовність структурного аналізу

8.1. Послідовність структурного аналізу

Структурна класифікація ґрунтується на принципі утворення механізмів: клас і порядок механізму визначають за найвищим класом і порядком груп, що входять до його складу. Механізм, до якого належать лише початковий механізм і групи II класу, називають механізмом II класу. Якщо в складі механізму є група III класу – механізм III класу, і так далі.

Для механізмів із кількома групами однакового класу додатково вказують порядок. Наприклад, механізм, що складається з початкового механізму та двох груп II класу II порядку, – це механізм II класу II порядку.

Структурний аналіз проводять у такому порядку.

1) **Виконати структурну схему**: пронумерувати ланки (стояк – 0), позначити кінематичні пари літерами та визначити їх вид і клас.

2) **Виявити особливості схеми**: місцеві рухомості, пасивні в'язі, вищі пари; за потреби замінити вищі пари нижчими й виключити місцеві рухомості.

3) **Обчислити ступінь рухомості** за формулою Чебишева (5.2): $W = 3n - 2p_5 - p_4$. Визначити кількість початкових ланок.

4) **Вибрати початкову ланку** (ланку, до якої прикладено рушійну силу чи момент або заданий закон руху).

6) **Визначити клас, порядок і вид** кожної групи, записати формулу будови механізму.

7) **Визначити клас механізму** за групою найвищого класу.

Під час розкладання на групи слід пам'ятати про правило: *нова група не повинна «ламати» механізм*. Якщо після відокремлення групи решта

механізму залишається працездатною і має ту саму рухомість, групу виділено правильно.

8.2. Формула будови механізму

Формула будови (структурна формула) показує порядок приєднання груп до початкового механізму. Її записують у вигляді стрілочної схеми: ланки, що утворюють початковий механізм, і далі за стрілкою групи в порядку приєднання, із зазначенням класу та виду:

$$I(0,1) \rightarrow II_1(2,3) \rightarrow II_2(4,5)$$

Це означає: початковий механізм утворений стояком 0 й початковою ланкою 1; до нього приєднано групу II класу 1-го виду, що складається з ланок 2 і 3; до цієї ланки приєднано групу II класу 2-го виду – ланки 4 і 5. Формула будови потрібна для визначення послідовності розрахунків: кінематичний аналіз виконують у напрямку стрілки (зліва направо), силовий – у зворотному.

8.3. Приклад структурного аналізу

Приклад. Виконати структурний аналіз шестиланкового механізму з кривошипом 1, шатуном 2, коромислом 3, шатуном 4 та повзуном 5 (рис. 8.1 ілюструє кривошипно-повзунну частину такого механізму).

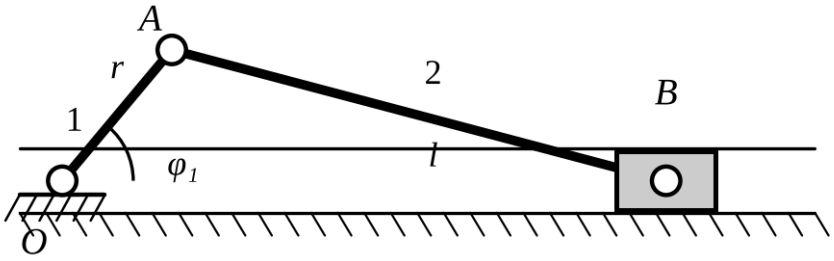


Рис. 8.1. До прикладу структурного аналізу: кривошипно-повзунна частина механізму, що утворює групу ВВП

Кривошип 1 приєднано до стояка шарніром O, з шатуном 2 – шарніром A; шатун 2 з'єднано з коромислом 3 шарніром B, коромисло обертається навколо нерухомої осі C; до коромисла в точці E приєднано шатун 4, який у шарнірі F з'єднано з повзуном 5, що рухається в нерухомій напрямній.

Розв'язання. 1) Кількість рухомих ланок $n = 5$. Пари V класу: O, A, B, C, E, F – шість обертальних і одна поступальна (повзун–стояк), тобто $p_5 = 7$. Вищих пар немає, $p_4 = 0$.

2) За формулою Чебишева $W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1$. Механізм має один ступінь рухомості, початковою ланкою обираємо кривошип 1.

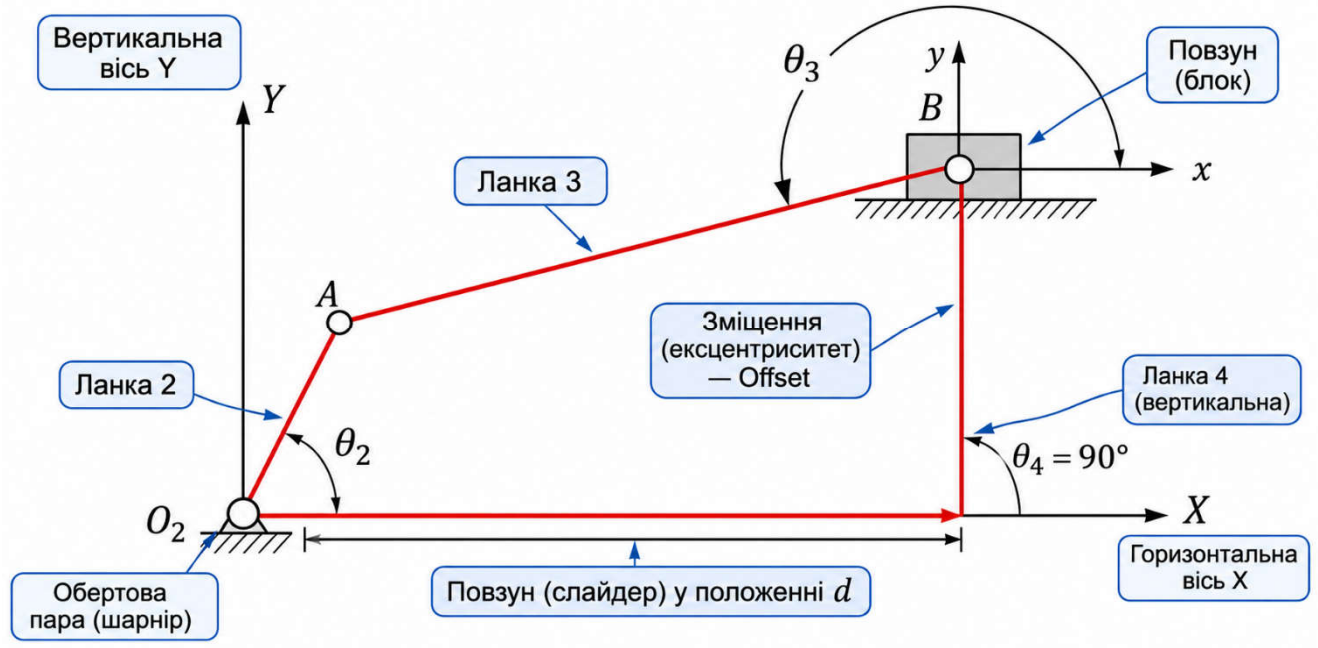
3) Розкладання на групи починаємо з найвіддаленішої від початкової ланки частини: ланки 4 і 5. Вони з'єднані між собою внутрішньою парою F (обертальна), а з рештою механізму – зовнішніми парами E (обертальна) та повзун–стояк (поступальна). Група має $n = 2$, $p_5 = 3$, тобто $W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$, – це група II класу 2-го виду (ВВП).

4) Решта механізму складається зі стояка, ланок 1, 2 і 3. Серед них ланки 2 і 3 з'єднані внутрішньою парою B, а зовнішніми парами A і C приєднані до ланки 1 та стояка. Це знову група II класу, перший вид (ВВВ): $n = 2$, $p_5 = 3$. Залишається початковий механізм: стояк і кривошип 1.

Відповідь: $W = 1$; механізм II класу, утворений початковим механізмом і двома групами II класу (1-го та 2-го видів).

Приклад визначення формули будови кривошипно-шатунного механізму

Розглянемо кривошипно-шатунний механізм поршневого двигуна.



Механізм складається з:

ланки 0 – стійки;

ланки 1 – кривошипа;

ланки 2 – шатуна;

ланки 3 – повзуна.

Крок 1. Визначаємо початковий механізм.

Стійка 0 та кривошип 1 утворюють початковий механізм I класу.

Крок 2. Визначаємо структурну групу.

Шатун 2 і повзун 3 утворюють групу Ассура II класу, 2-го порядку.

Вона приєднується до початкового механізму трьома нижчими кінематичними парами:

обертальною парою між кривошипом і шатуном;

обертальною парою між шатуном і повзуном;

поступальною парою між повзуном і стійкою.

Крок 3. Записуємо формулу будови.

I(0,1)+II(2,3)

Отже, кривошипно-шатунний механізм складається з початкового механізму I класу та однієї групи Ассура II класу, 2-го порядку.

Формула будови механізму дає змогу перевірити правильність його структурного формування. Якщо до початкового механізму послідовно приєднують групи Ассура з нульовим ступенем рухомості, загальний ступінь рухомості механізму не змінюється.

Тому для механізму, який має один незалежний вхідний рух: W=1

Це означає, що рух усіх інших ланок визначається рухом початкової ланки.

Формула будови використовується для: визначення структурного складу механізму; встановлення послідовності приєднання груп Ассура; визначення класу механізму; перевірки правильності структурної схеми; систематизації механізмів за їхньою будовою; підготовки до кінематичного та силового аналізу.

Результати структурного аналізу використовують на всіх подальших етапах дослідження. Формула будови визначає послідовність побудови планів швидкостей і прискорень – кожну групу розв'язують за відомими параметрами руху ланок, до яких її приєднано. Вид групи визначає **метод розв'язання**: для кожного з п'яти видів груп II класу існують свої графоаналітичні процедури.

У реальній практиці проєктувальник нерідко використовує протилежний шлях – **структурний синтез**: з початкового механізму й груп підбирають таку структуру, яка забезпечує потрібну рухомість та необхідні рухи вихідної ланки; наприклад, для приводу багатоножового різального апарата вибирають схему з двох послідовно з'єднаних груп.

Лекція 9. Задачі та методи кінематичного аналізу механізмів

9.1. Задачі кінематичного аналізу

Після того як у попередніх лекціях з'ясовано будову механізму – з яких ланок і кінематичних пар він складається та яким є його ступінь рухомості, – природно перейти до питання про те, **як саме рухаються його ланки**. Розділ теорії механізмів і машин, що вивчає рух ланок без урахування сил, які його викликають, називається **кінематикою**.

Для механізму з одним ступенем рухомості ($W = 1$) закон руху задається початковою ланкою, наприклад кривошипом, що обертається з кутовою швидкістю ω_1. Усі інші ланки здійснюють рух, однозначно визначений положенням початкової ланки. Тому під час кінематичного

аналізу вважають заданими довжини ланок, схему механізму та закон руху початкової ланки, а визначають:

- положення ланок і траєкторії окремих точок (наприклад, шатунну криву, яку описує точка на шатуні чотириланковика);
- лінійні швидкості точок і кутові швидкості ланок;
- лінійні прискорення точок і кутові прискорення ланок;
- переміщення, швидкість і прискорення вихідної ланки як функції положення початкової ланки або часу.

9.2. Методи кінематичного аналізу

Для вирішення кінематичних задач застосовують чотири групи методів.

Графічний метод полягає в побудові в масштабі схем механізму в послідовних положеннях і відшукуванні швидкостей і прискорень за допомогою векторних побудов – планів швидкостей і прискорень. Метод наочний, не потребує складних обчислень і дає змогу швидко оцінити результат, проте його точність обмежена точністю креслення, а для кожного положення механізму побудови доводиться виконувати заново.

Метод кінематичних діаграм передбачає побудову графіків переміщення, швидкості й прискорення вихідної ланки та їх взаємне перетворення за допомогою графічного диференціювання та інтегрування. Він добре підходить, коли залежність переміщення від часу задана графіком, наприклад, отримана експериментально.

Аналітичний метод ґрунтується на складанні рівнянь замкнених векторних контурів і диференціюванні їх за узагальненою координатою. Його результатом є формули, що охоплюють усі положення механізму одразу; метод зручно реалізується на комп'ютері й забезпечує високу точність, але потребує більшої математичної підготовки.

Експериментальний метод використовують під час випробувань готових машин: швидкості та прискорення вимірюють тахогенераторами, акселерометрами, оптичними датчиками з подальшою обробкою сигналів.

9.3. Масштабні коефіцієнти

Для того щоб користуватися кресленням, треба знати, скільки одиниць реальної величини припадає на один міліметр відрізка. Це відношення називають **масштабним коефіцієнтом** і позначають μ із відповідним індексом. Для довжин

$$\mu_l = l / \ell \qquad (9.1)$$

де l – дійсна довжина ланки, м; ℓ – довжина відрізка на кресленні, мм. Розмірність μ_l – м/мм. Наприклад, якщо шатун довжиною 0,2 м зображено відрізком 100 мм, то $\mu_l = 0{,}002$ м/мм.

Узагальнено, для будь-якої фізичної величини X, зображеної на кресленні відрізком $\bar{x}$,

$$\mu_X = X / \bar{x} \qquad (9.2)$$

де X виражено в одиницях СІ. Так вводять масштаб швидкостей μ_v (м/с на мм), прискорень μ_a (м/с² на мм), кутів μ_φ (рад на мм) та часу μ_t (с на мм). Дійсне значення шуканої величини знаходять множенням виміряного відрізка на масштабний коефіцієнт.

9.4. Плани положень механізму

Планом положень називають зображення кінематичної схеми механізму в масштабі μ_l для ряду послідовних положень початкової ланки. Зазвичай коло, яке описує кінець кривошипа, ділять на 8 або 12 рівних частин, нумеруючи положення, починаючи від крайнього положення, коли вихідна ланка найвіддаленіша або найближча до осі кривошипа. Для кривошипно-повзунного механізму (рис. 9.1) таке положення називають **мертвою точкою**: кривошип і шатун розташовані на одній прямій, а швидкість повзуна дорівнює нулю.

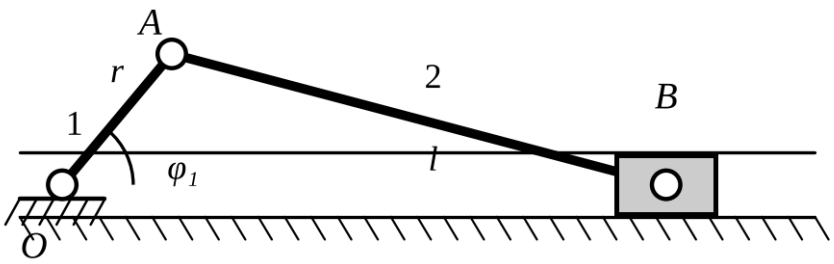


Рис. 9.1. Кривошипно-повзунний механізм: схема для побудови планів положень

Послідовність побудови плану положень для кривошипно-повзунного механізму така:

1) вибирають масштаб μ_l і позначають на кресленні нерухомий шарнір O і напрямну повзуна;

2) з центра O проводять коло радіуса r/μ_l, що відповідає довжині кривошипа;

3) від крайнього положення ділять коло на рівні частини та відмічають точки A_0, A_1, A_2, …;

4) з кожної точки A_i радіусом l/μ_l робить засічку на напрямній; точка перетину є положенням B_i повзуна;

Для механізмів, які не мають повзуна, наприклад шарнірного чотириланковика, положення точки C знаходять як перетин двох дуг: з

точки B_i радіусом BC/μ_l та з точки D радіусом CD/μ_l. З двох точок перетину вибирають ту, що відповідає збірці механізму та неперервності руху ланок.

9.5. Переміщення вихідної ланки та траєкторії точок

Якщо положення повзуна B_i відмітити на напрямній, відрізок між крайніми положеннями дає **хід** повзуна H. Для центрального механізму (напрямна проходить через центр O) він дорівнює $2r$. Відстані між початковим положенням B_0 та кожною точкою B_i у масштабі μ_l є переміщеннями повзуна s_i.

Для побудови **траєкторії** будь-якої точки ланки, наприклад центра мас шатуна S_2, її положення відмічають у кожному з положень механізму та з'єднують лекалом.

Під час аналізу також перевіряють **кути передачі** – гострий кут між шатуном і напрямком швидкості вихідної ланки. Якщо кут передачі зменшується до малих значень, механізм «заклинюється», тому для відповідальних механізмів його значення не повинно бути меншим за 30–40°.

Кінематичний аналіз визначає положення, швидкості та прискорення ланок за відомою схемою механізму та законом руху початкової ланки. Для його виконання використовують графічні, діаграмні й аналітичні методи, які взаємно доповнюють один одного. Переходи від креслення до дійсних величин здійснюють за допомогою масштабних коефіцієнтів, а плани положень слугують основою для всіх наступних побудов.

Лекція 10. Плани швидкостей: основні положення та групи 1-го і 2-го видів

10.1. Рух ланки як плоскопаралельний рух

Кожна ланка плоского механізму здійснює один із трьох видів руху: обертання навколо нерухомої осі, поступальний рух або плоскопаралельний рух. Останній можна подати як суму поступального руху разом з довільною точкою A, яку називають **полюсом**, та обертання навколо цієї точки. Тому швидкість будь-якої точки B ланки дорівнює геометричній сумі швидкості полюса та швидкості точки B у відносному обертальному русі навколо A:

$$v_B = v_A + v_{BA} \tag{10.1}$$

Швидкість відносного обертання v_{BA} перпендикулярна відрізку AB і за модулем дорівнює

$$v_{BA} = \omega \cdot l_{AB} \tag{10.2}$$

де ω – кутова швидкість ланки, рад/с; l_{AB} – відстань між точками, м. Рівняння (10.1) – основа графоаналітичного методу побудови планів швидкостей. Воно містить два вектори, відомі лише за модулем або

напрямком, тому дає змогу знайти не більше двох невідомих; на практиці, знаючи швидкість однієї точки та напрямок швидкості другої, швидкість другої відшукують побудовою трикутника швидкостей.

10.2. Поняття плану швидкостей

Планом швидкостей називають фігуру, що складається з векторів швидкостей точок механізму, відкладених від спільної точки – **полюса** *p*. Вектор, який з'єднує полюс із точкою плана, зображує абсолютну швидкість відповідної точки механізму, а відрізок між двома точками плана – відносну швидкість цих точок.

Основні властивості плана швидкостей:

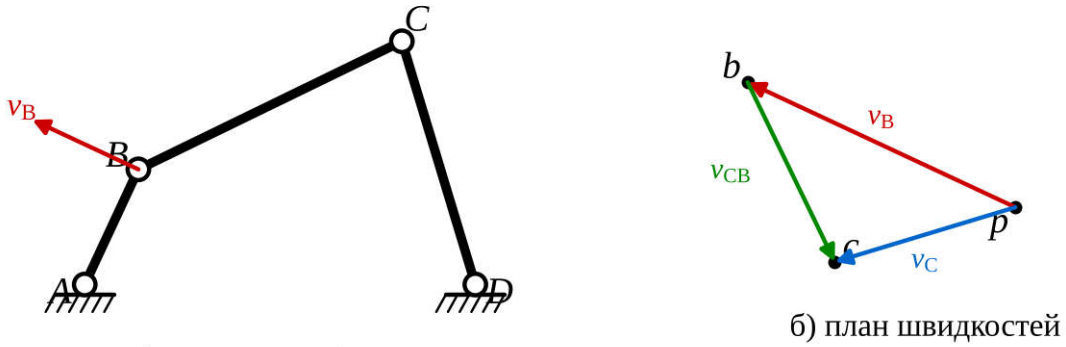
- абсолютні швидкості зображуються променями, що виходять із полюса; швидкість нерухомих точок дорівнює нулю й збігається з полюсом;
- вектор відносної швидкості *bc* спрямований від точки *c* до *b*, якщо це швидкість точки *B* відносно *C* – тобто порядок літер указує напрямок;
- вектор будь-якої відносної швидкості перпендикулярний відрізку механізму, що з'єднує відповідні точки;
- масштаб плана швидкостей μ_v постійний для всього плана.

Масштаб визначають із відомої швидкості початкової точки. Для кривошипа *AB*, що обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_1, швидкість кінця дорівнює $v_B = \omega_1 l_{AB}$; якщо на плані її зображено відрізком *pb*, то

$$\mu_v = v_B / pb \qquad (10.3)$$

10.3. План швидкостей шарнірного чотириланковика

Розглянемо шарнірний чотириланковий механізм *ABCD* (рис. 10.1), у якому ланка 1 (кривошип *AB*) обертається з відомою кутовою швидкістю ω_1. Група ланок 2–3 (шатун *BC* та коромисло *CD*) утворює **групу Ассура 1-го виду** з трьома обертальними парами (*B*, *C*, *D*). Швидкість точки *B* відома за модулем і напрямком: $v_B = \omega_1 l_{AB}$, вона перпендикулярна кривошипу й напрямлена в бік його обертання.



а) схема механізму

б) план швидкостей

Рис. 10.1. Шарнірний чотириланковик та його план швидкостей

Невідому швидкість точки C знаходимо з двох векторних рівнянь, оскільки точка C належить водночас шатуну 2 і коромислу 3:

$$v_C = v_B + v_{CB} \tag{10.4}$$

$$v_C = v_D + v_{CD},\ v_D = 0 \tag{10.5}$$

У рівнянні (10.4) вектор v_{CB} перпендикулярний BC, а у рівнянні (10.5) вектор v_{CD} перпендикулярний CD, при цьому $v_D = 0$. Побудова виконується так:

1) вибирають довільну точку p – полюс плана швидкостей;

2) від p відкладають відрізок pb перпендикулярно AB у напрямку обертання кривошипа, обираючи його довжину так, щоб масштаб μ_v був зручним;

3) через точку b проводять пряму, перпендикулярну BC (напрямок v_{CB});

4) через полюс p (адже $v_D = 0$) проводять пряму, перпендикулярну CD (напрямок v_C);

Модулі швидкостей визначають множенням довжин відрізків на масштаб: $v_C = \mu_v \cdot pc$; $v_{CB} = \mu_v \cdot bc$.

10.4. Визначення кутових швидкостей

Кутові швидкості ланок знаходять із формули зв'язку лінійної та кутової швидкостей

$$\omega_2 = v_{CB} / l_{BC},\ \omega_3 = v_C / l_{CD} \tag{10.6}$$

Приклад. Кривошип AB шарнірного чотириланковика довжиною 0,1 м обертається з кутовою швидкістю $\omega_1 = 20$ рад/с. Довжини шатуна BC = 0,30 м, коромисла CD = 0,20 м. Побудовою плана швидкостей у масштабі μ_v = 0,04 (м/с)/мм виміряно відрізки pc = 32 мм, bc = 41 мм. Визначити швидкість точки C і кутові швидкості шатуна й коромисла.

Розв'язання. Швидкість точки B становить $v_B = 20 \cdot 0{,}1 = 2$ м/с, на плані вона зображується відрізком $pb = 2/0{,}04 = 50$ мм. Тоді $v_C = 0{,}04 \cdot 32 = 1{,}28$ м/с, $v_{CB} = 0{,}04 \cdot 41 = 1{,}64$ м/с. Кутові швидкості: $\omega_2 = 1{,}64/0{,}30 = 5{,}47$ рад/с, $\omega_3 = 1{,}28/0{,}20 = 6{,}4$ рад/с.

10.5. План швидкостей кривошипно-повзунного механізму

У кривошипно-повзунному механізмі (кривошип OA, шатун AB, повзун B) група, що складається з шатуна 2 та повзуна 3, має дві обертальні та одну поступальну пару. Це **група Ассура 2-го виду** (*ВВП*). Швидкість точки A відома: $v_A = \omega_1 l_{OA}$, вектор перпендикулярний OA. Швидкість точки B повзуна напрямлена вздовж напрямної x–x. Складаємо рівняння:

$$v_B = v_A + v_{BA},\ v_B \parallel x\text{–}x,\ v_{BA} \perp AB \tag{10.7}$$

Побудова: від полюса p відкладають відрізок pa ($\perp OA$), через точку a проводять пряму, перпендикулярну AB, а через полюс – пряму, паралельну

напрямній. Точка їх перетину – точка b. Вимірявши pb і ab, знаходять $v_B = \mu_v \cdot pb$, $v_{BA} = \mu_v \cdot ab$, а також кутову швидкість шатуна $\omega_2 = v_{BA}/l_{AB}$.

Приклад. У кривошипно-повзунному механізмі $r = 0{,}05$ м, $l = 0{,}2$ м, $\omega_1 = 100$ рад/с, $\varphi = 60°$. Тут $v_A = 5$ м/с. З геометрії $\sin\psi = \lambda \sin\varphi = 0{,}25 \cdot 0{,}866 = 0{,}2165$, звідки $\psi = 12{,}5°$, $\cos\psi = 0{,}976$. Швидкість повзуна $v_B = v_A \cdot \sin(\varphi + \psi)/\cos\psi = 5 \cdot 0{,}954/0{,}976 = 4{,}89$ м/с, швидкість $v_{BA} = \omega_1 r\lambda$... тобто $v_{BA} = v_A \cdot \cos\varphi/\cos\psi = 2{,}56$ м/с, кутова швидкість шатуна $\omega_2 = 2{,}56/0{,}2 = 12{,}8$ рад/с. Побудований план швидкостей має давати такі самі результати з точністю графічних побудов.

План швидкостей – це графічне розв'язання векторних рівнянь, складених для точок твердих тіл. Для групи 1-го виду точку c знаходять як перетин двох перпендикулярів до шатуна та коромисла, для групи 2-го виду – як перетин перпендикуляра до шатуна з паралеллю до напрямної. Кутові швидкості ланок обчислюють за відносними швидкостями й довжинами ланок.

Лекція 11. Плани швидкостей: теорема подібності, групи 3-го виду, кулісні механізми

11.1. Теорема подібності

У лекції 10 було знайдено швидкості шарнірів. Для силового розрахунку потрібні також швидкості інших точок ланки, наприклад, центра мас S_2 шатуна, а іноді – точки, що описує потрібну траєкторію. Їх визначають за допомогою **теореми подібності**: *фігура, утворена на плані швидкостей відносними швидкостями точок жорсткої ланки, подібна до фігури, утвореної цими самими точками на ланці, і повернута відносно неї на кут 90° у напрямку обертання ланки*.

Іншими словами, відрізок bc на плані швидкостей відповідає відрізку BC на ланці, перпендикулярний йому, а точки e плана, що відповідають точці E ланки, лежать на тому ж відрізку bc та ділять його в такому самому відношенні. Для точки E, що лежить на ланці BC:

$$be \,/\, bc = BE \,/\, BC \qquad (11.1)$$

Звідси для довільної точки E на прямій BC відрізок be на плані відшукують пропорційним поділом, після чого вектор pe визначає швидкість $v_E = \mu_v \cdot pe$.

Приклад. Центр мас S_2 шатуна розташований на відстані $0{,}4l_{AB}$ від точки A. Тоді на плані швидкостей точка s_2 лежить на відрізку ab на відстані $0{,}4 \cdot ab$ від точки a. Швидкість центра мас визначається вектором ps_2.

11.2. Швидкості центрів мас та визначення швидкостей інших точок

Швидкості центрів мас потрібні для обчислення кінетичної енергії ланки та сил інерції. Для ланки 1, яка обертається навколо нерухомої точки, центр мас лежить на плані на відрізку від полюса до точки *b* у такому ж відношенні, як і на ланці. Для повзуна швидкість центра мас дорівнює швидкості точки *B*, оскільки повзун рухається поступально. Для шатуна використовують теорему подібності.

Коли маса ланки зосереджена в декількох точках, як-от колінчастий вал із противагами, кінетичну енергію ланки знаходять через швидкість центра мас v_S та кутову швидкість ω:

$$T = m \cdot v_S^2 / 2 + J_S \cdot \omega^2 / 2 \qquad (11.2)$$

де m – маса ланки, кг; J_S – момент інерції відносно осі, що проходить через центр мас, кг·м². Формулу (11.2) використовуємо під час зведення мас, розглянутого в лекції 24.

11.3. Групи Ассура 3-го виду та кулісні механізми

До **групи 3-го виду** (*ВПВ*) входять два зовнішні обертальні та одна внутрішня поступальна пара. Типовий представник – кулісний механізм: камінь (повзун) 2 ковзає по кулісі 3, а куліса обертається навколо нерухомого шарніра *B*. Якщо кривошип 1 довжиною *OA* обертається з кутовою швидкістю ω_1, то точка *A* належить одночасно каменю й кривошипу. Камінь здійснює складний рух: **переносний** – разом із кулісою, та **відносний** – вздовж куліси. Для швидкостей виконується векторне рівняння

$$v_{A2} = v_{A3} + v_{A2A3} \qquad (11.3)$$

де v_{A2} – швидкість точки *A* каменя (відома: $v_{A2} = \omega_1 l_{OA}$, $\perp OA$); v_{A3} – швидкість точки *A* куліси, що збігається з нею в цей момент ($\perp AB$); v_{A2A3} – відносна швидкість, паралельна кулісі *AB*.

План швидкостей будують так: від полюса *p* відкладають вектор pa_2, що зображує v_{A2}; через полюс *p* проводять пряму, перпендикулярну *AB* (напрямок v_{A3}, адже точка *B* нерухома), а через a_2 – пряму, паралельну *AB*. Їх перетин – точка a_3. Тоді pa_3 зображує v_{A3}, а a_3a_2 – відносну швидкість v_{A2A3}.

Кутова швидкість куліси знаходиться за формулою

$$\omega_3 = v_{A3} / l_{AB} \qquad (11.4)$$

Приклад. У кулісному механізмі OA = 0,08 м, OB = 0,2 м, ω_1 = 10 рад/с, у розглядуваному положенні кут OAB = 60°. Знайти ω_3.

Розв'язання. $v_{A2} = 10 \cdot 0{,}08 = 0{,}8$ м/с. З трикутника *OAB* за теоремою синусів $\sin\angle B = 0{,}08 \cdot \sin 60°/0{,}2 = 0{,}346$, $\angle B = 20{,}3°$, $\angle O = 99{,}7°$, а $AB = 0{,}2 \cdot \sin 99{,}7°/\sin 60° = 0{,}2275$ м. Кут між напрямком v_{A2} і куліссю дорівнює 30°, тому $v_{A3} = v_{A2} \cdot \sin 30° = 0{,}4$ м/с, $v_{A2A3} = v_{A2} \cdot \cos 30° = 0{,}693$ м/с. Кутова швидкість куліси $\omega_3 = 0{,}4/0{,}2275 = 1{,}76$ рад/с.

11.4. Групи 4-го та 5-го видів

До **групи 4-го виду** (*ПВП*) входять два повзуни на двох напрямних та шатун між ними (наприклад, еліпсограф). Її план швидкостей будують із двох рівнянь, у яких напрямки швидкостей точок повзунів задані напрямними. До **групи 5-го виду** (*ВПП*) належать механізми з двома поступальними парами, один з яких розташований між ланками, а інший – на стояку.

У таблиці 11.1 наведено зведення способів побудови для основних видів груп Ассура.

Таблиця 11.1. Особливості побудови планів швидкостей для груп Ассура 2-го класу

Вид групи	Пари	Невідомі швидкості	Напрямки на плані
1-й	В–В–В	v_C	$v_{CB} \perp BC$, $v_{CD} \perp CD$
2-й	В–В–П	v_B	$v_{BA} \perp AB$, $v_B \parallel$ напрямній
3-й	В–П–В	v_{A3}, v_{A2A3}	$v_{A3} \perp AB$, $v_{A2A3} \parallel$ кулісі
4-й	П–В–П	v_B, v_C	вздовж двох напрямних

11.5. Загальна послідовність побудови плана швидкостей

Для будь-якого механізму з групами Ассура планом швидкостей користуються за єдиною схемою:

1) за структурним аналізом виділяють початковий механізм і групи Ассура та визначають порядок їх приєднання;

2) за початковою ланкою знаходять швидкість точки, яка є зовнішньою для першої групи, та вибирають масштаб μ_v;

3) для кожної наступної групи складають по два векторних рівняння (або одне складне рівняння), використовуючи відомі напрямки;

4) побудову виконують у порядку приєднання груп – від початкового механізму до вихідної ланки;

6) кутові швидкості ланок знаходять із відносних швидкостей.

Теорема подібності дозволяє знаходити швидкості будь-яких точок ланки за побудованим планом. У групах 3-го виду складний рух камінь–куліса розкладається на переносний і відносний, а рівняння швидкостей розв'язується побудовою двох прямих. Дотримання послідовності структурних груп робить побудову планів швидкостей загальним методом для механізмів будь-якої складності.

11.6. Побудова планів швидкостей механізму.

Задача по визначенню швидкостей, яку будемо вирішувати графічною побудовою плану швидкостей, виконується при розрахованих

масштабних коефіцієнтах. Розрізняють масштаб і масштабний коефіцієнт. Масштабом фізичної величини називають довжину відрізка в міліметрах, що зображує одиницю цієї величини.

Масштабним коефіцієнтом фізичної величини називають відношення числового значення фізичної величини у властивих їй одиницях до довжини відрізка (у мм), який зображує цю величину графічно. Масштаб і масштабний коефіцієнт є взаємно зворотними величинами. Надалі будемо вказувати тільки масштабні коефіцієнти, що позначаються буквою $\boldsymbol{\mu}$ з індексом, що вказує до якої величини вони відносяться. Наприклад, масштабний коефіцієнт довжини – $\mu_l = \frac{l_{OA}}{\overline{OA}} \frac{\text{м}}{\text{мм}}$

На рис. 11.1.а зображений план шарнірного чотириланкового механізму, побудований у визначеному креслярському масштабі для заданого значення узагальненої координати φ, при відомих довжинах ланок, а також кутовій швидкості початкової ланки ω_1 .Якщо задана частота обертання кривошипа n_1 то для визначення ω_1 використовується співвідношення: $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} (\text{с}^{-1})$

Швидкість обертання кривошипа приймаємо: $\omega_1 = const.$ Тоді швидкість точки А, яка належить кривошипу 1, визначається за формулою $V_A = \omega_1 \cdot \ell_{OA}$, яка спрямована перпендикулярно до ланки *OA*.

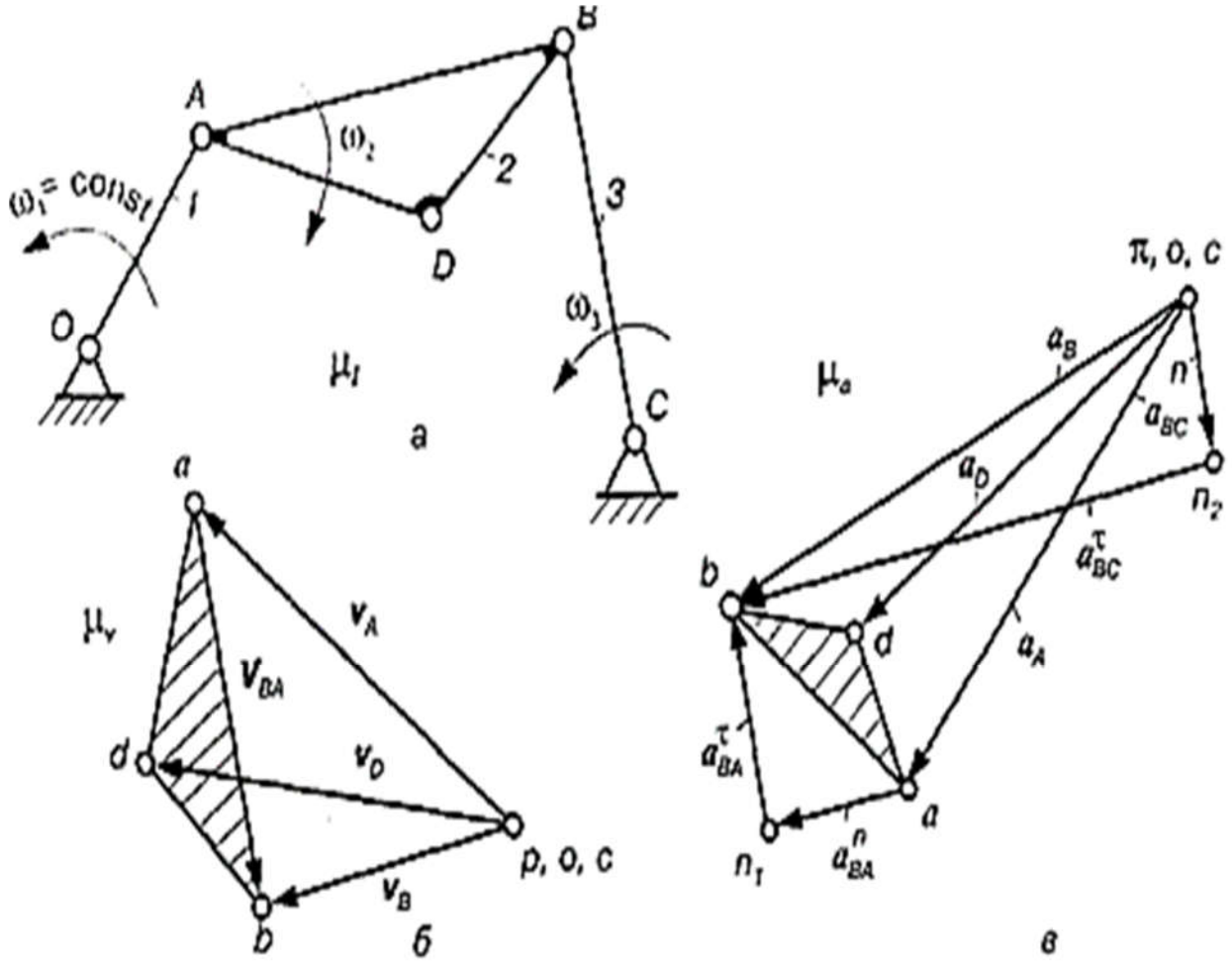


Рис. 11.1. План шарнірного чотириланкового механізму

Відкладаємо вектор цієї швидкості у масштабі $\mu_V = \frac{V_A}{\overline{pa}}(\frac{\text{м}}{\text{с}\cdot\text{мм}})$, попередньо вибравши відрізок pa (рис. 11.1, б).

Довжина відрізка pa може бути обрана довільно. Іноді приймають $pa=OA$, тоді побудови проведені при цьому значенні μ_V називають побудовами планів швидкостей в масштабі кривошипа.

Далі знаходимо швидкість точки *B,* що є загальною для ланок 2 і 3. Скориставшись теоремою про додавання швидкостей у переносному і відносному рухах, запишемо рівняння, які з'єднують швидкості точок *B* і *A,* а також *B* і *C*.

Переносним рухом вважаємо поступальний рух ланки 2 зі швидкістю V_A точки *A*, а відносним – обертовий рух ланки 2 зі швидкістю V_{BA} навколо точки *A*.

Для визначення швидкості т. В складаємо векторні рівняння:

$$\vec{V}_B = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\vec{V}}_{BA};\ \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{BA}} \perp \mathrm{BA};\ \mathrm{V}_{\mathrm{BA}} = \omega_2 \cdot \ell_{\mathrm{AB}};\ \vec{V}_B = \underline{\underline{\vec{V}_C}} + \underline{\vec{V}}_{BC};\ \vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{C}} = 0;$$

$$\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{BC}} \perp \mathrm{BC}; \qquad (11.5)$$

(Двома лініями підкреслено вектор, відомий по модулю і напрямку, однією лінією, тільки по напрямку).

Векторне рівняння, яке має два невідомих, може бути вирішено графічно. Отже, з рівнянь (10.1) можна знайти вектори швидкостей V_B і V_{BA} графічною побудовою трикутника векторів. Для цього проведемо через точку α (рис. 11.1, б) лінію, яка показує напрямок вектора відносної швидкості V_{BA} , а з полюса p напрямок вектора відносної швидкості $V_{BC.}$ Точка перетину цих ліній визначить точку $b,$ а отже і величину цих векторів у масштабі μ_v: $V_{BA} = \alpha b \cdot \mu_v$, $V_B = pb \cdot \mu_v$

Вектор швидкості V_{BA}, зображається відрізком $\alpha b,$ причому стрілка вектора спрямована до точки $b,$ що відповідає першій букві індексу.

Після того, як визначені швидкості двох точок на ланці 2, можна визначити модуль кутової швидкості цієї ланки (рад/с).

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{\ell_{AB}} \qquad (11.6).$$

Для визначення напрямку кутової швидкості ланки 2 переносимо подумки вектор швидкості V_{BA} в точку В і розглядаємо її умовний рух відносно точки А, в даному випадку рух точки В і відповідно напрямок ω_2 напрямлений за ходом годинникової стрілки.

З рис. 11.1, б видно, що абсолютні швидкості зображені векторами, що виходять з полюса плану швидкостей, а кінці цих векторів лежать на відрізку $\alpha b,$ який зображає на плані швидкостей відносну швидкість V_{BA} ланки 2.

Для визначення швидкості точки $D,$ яка належить ланці 2, але не лежить на AB , скористаємось двома векторними рівняннями:
$\vec{V}_D = \underline{\underline{\vec{V}_A}} + \underline{\overline{V}_{DA}}$; $\vec{V}_D = \underline{\underline{\vec{V}_B}} + \underline{\overline{V}_{DB}}$, побудова яких графічно виконана.

Неважко побачити, що трикутник abd в плані швидкостей подібний трикутнику ABD на схемі механізму, так як їх сторони взаємноперпендикулярні. Крім того, вершини цих трикутників розташовані подібно, тобто букви обох контурів читаються в одній і тій же послідовності при однаковому напрямку обходу контуру: наприклад, при обході контурів по ходу годинникової стрілки одержуємо abd і ABD.

Зазначена властивість подібності справедлива для будь–якого числа точок на ланці механізму. Звідси випливає теорема подібності: *відрізки прямих ліній, що з'єднують точки тієї самої ланки на плані механізму і відрізки прямих, що з'єднують кінці векторів швидкостей цих точок на плані швидкостей, утворюють подібні і однаково розташовані фігури.* Теорема подібності дає можливість визначити швидкість будь-якої точки ланки, якщо відомі швидкості двох точок цієї ланки.

Лекція 12. Плани прискорень: групи 1-го і 2-го видів

12.1. Прискорення точок плоскопаралельного руху

Для визначення сил інерції необхідні прискорення точок і кутові прискорення ланок. Як і у випадку швидкостей, прискорення точки B ланки, що здійснює плоскопаралельний рух, дорівнює сумі прискорення полюса A та прискорення B у відносному русі навколо A:

$$a_B = a_A + a_{BA} \tag{12.1}$$

Відносне прискорення в обертальному русі навколо A має дві складові – нормальну та тангенціальну:

$$a_{BA} = a_{BA}^{\mathrm{n}} + a_{BA}^{\tau} \tag{12.2}$$

Нормальна складова $a^{\mathrm{n}}_{BA} = \omega^2 l_{AB}$ спрямована вздовж ланки AB від точки B до полюса A. Тангенціальна складова $a^{\tau}_{BA} = \varepsilon l_{AB}$ перпендикулярна AB і напрямлена відповідно до напрямку кутового прискорення ε ланки. Таким чином, повне рівняння набуває вигляду

$$a_B = a_A + a^{\mathrm{n}}_{BA} + a^{\tau}_{BA} \tag{12.3}$$

У ньому нормальна складова відома за модулем і напрямком, якщо за планом швидкостей уже знайдено ω ланки, а тангенціальна – лише за напрямком.

12.2. План прискорень: поняття та властивості

Планом прискорень називають побудову, у якій від полюса π відкладені вектори прискорень точок механізму в масштабі μ_a. Його властивості подібні до властивостей плана швидкостей:

- абсолютні прискорення зображуються променями з полюса π, нерухомі точки збігаються з полюсом;
- відрізки між точками плана зображують відносні прискорення; їх можна розкласти на нормальну й тангенціальну складові;
- фігура, утворена на плані прискорень точками жорсткої ланки, подібна до цієї ланки та повернута відносно неї на кут $(90° - \theta)$, де $\operatorname{tg}\theta = \varepsilon/\omega^2$ (теорема подібності для прискорень);
- масштаб плана $\mu_a = a_A/\pi a'$ вибирають з відомого прискорення початкової точки.

Прискорення точки A кривошипа, що обертається зі сталою кутовою швидкістю, має лише нормальну складову: $a_A = \omega_1^2 l_{OA}$, напрямлену вздовж кривошипа до центра O.

12.3. План прискорень шарнірного чотириланковика

Нехай план швидкостей чотириланковика $ABCD$ побудовано, а ω_2 і ω_3 відомі. Прискорення точки B кривошипа AB ($\omega_1 = \text{const}$) дорівнює $a_B = \omega_1^2 l_{AB}$ і напрямлено від B до A. Для точки C складаємо два рівняння:

$$a_C = a_B + a^{\mathrm{n}}_{CB} + a^{\tau}_{CB} \tag{12.4}$$

$$a_C = a_D + a^{\mathrm{n}}_{CD} + a^{\tau}_{CD},\ a_D = 0 \tag{12.5}$$

Побудова:

1) від полюса π відкладаємо відрізок $\pi b'$ у напрямку від B до A у масштабі μ_a;

2) із точки b' відкладаємо відрізок $b'n_1$, що зображує $a^n_{CB} = \omega_2^2 l_{BC}$, паралельно BC у напрямку від C до B;

3) через точку n_1 проводимо пряму, перпендикулярну BC, – лінію дії a^τ_{CB};

4) від полюса π відкладаємо відрізок πn_2, що зображує $a^n_{CD} = \omega_3^2 l_{CD}$, паралельно CD від C до D;

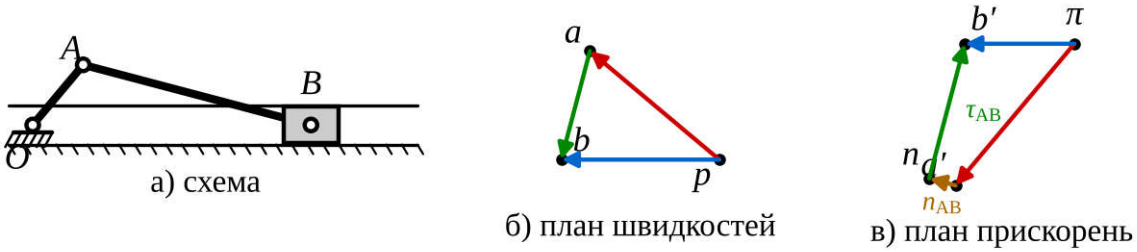
6) перетин двох перпендикулярів дає точку c'; відрізок $\pi c'$ зображує a_C.

Кутові прискорення ланок обчислюють за тангенціальними складовими:

$$\varepsilon_2 = a^\tau_{CB} / l_{BC},\ \varepsilon_3 = a^\tau_{CD} / l_{CD} \qquad (12.6)$$

12.4. План прискорень кривошипно-повзунного механізму

Розглянемо механізм (рис. 12.1) з $r = 0{,}05$ м, $l = 0{,}2$ м, $\omega_1 = 100$ рад/с = const, $\varphi = 60°$.



а) схема б) план швидкостей в) план прискорень

Рис. 12.1. Кривошипно-повзунний механізм, план швидкостей і план прискорень

Прискорення точки A: $a_A = \omega_1^2 r = 100^2 \cdot 0{,}05 = 500$ м/с², напрямлене від A до O. Із плана швидкостей (або аналітично) $\omega_2 = 12{,}8$ рад/с. Для точки B повзуна:

$$a_B = a_A + a^n_{BA} + a^\tau_{BA},\ a_B \parallel x\text{–}x \qquad (12.7)$$

Нормальна складова: $a^n_{BA} = \omega_2^2 l = 12{,}8^2 \cdot 0{,}2 = 32{,}8$ м/с² (напрям від B до A). Тангенціальна складова перпендикулярна AB, а прискорення a_B – паралельне напрямній.

Побудова плана прискорень, у масштабі $\mu_a = 5$ (м/с²)/мм:

1) від полюса π відкладаємо $\pi a' = 500/5 = 100$ мм у напрямку від A до O;

2) з точки a' відкладаємо $a'n = 32{,}8/5 = 6{,}6$ мм паралельно AB у напрямку від B до A;

3) через точку n проводимо пряму, перпендикулярну AB (лінія a^τ_{BA});

4) через полюс π проводимо пряму, паралельну напрямній (лінія a_B);

З плана вимірюємо $\pi b' = 37{,}5$ мм, $nb' = 87{,}2$ мм. Отже, $a_B = 5 \cdot 37{,}5 = 188$ м/с² (напрямлене до осі кривошипа), $a^\tau_{BA} = 5 \cdot 87{,}2 = 436$ м/с², а кутове

прискорення шатуна $\varepsilon_2 = 436/0{,}2 = 2180$ рад/с². Точку s_2, що відповідає центру мас шатуна, знаходимо на відрізку $a'b'$ за теоремою подібності, а прискорення центра мас дорівнює $\pi s_2 \cdot \mu_a$. Прискорення центра мас повзуна збігається з a_B.

12.5. Характерні положення

Під час аналізу доцільно побудувати плани для мертвих положень. У мертвих положеннях $v_B = 0$, $\omega_2 = 0$ і $a^n_{BA} = 0$. Прискорення повзуна досягає максимуму: для зовнішнього мертвого положення $a_B = \omega_1^2 r(1 + \lambda)$, для внутрішнього – $a_B = \omega_1^2 r(1 - \lambda)$, де $\lambda = r/l$. Так, при $\lambda = 0{,}25$ для наведених даних $a_B = 625$ м/с² та 375 м/с².

Плани прискорень будуються на основі векторних рівнянь, які містять нормальні та тангенціальні складові відносних прискорень. Нормальні складові визначаються за планами швидкостей, а тангенціальні відшукують побудовою відрізків відповідного напрямку. Результат – прискорення точок і кутові прискорення ланок, необхідні для визначення сил інерції.

12.6. План прискорень шарнірного чотириланкового механізму

Рівняння, що використовуються при побудові плану прискорень, відрізняються від рівнянь для побудови плану швидкостей тільки розкладанням повних прискорень на складові. Так повне прискорення точки A є геометрична сума нормального і дотичного прискорень:

$$\alpha_A = \alpha^n{}_A + \alpha^\tau{}_A$$

Побудову плану прискорень цього механізму також розпочнемо з першої ланки. Прискорення точки A при ω_1=const визначимо за формулою нормального прискорення $a_A = \alpha_A{}^n = \varpi_1^2 \cdot \iota_{OA}$

Вибравши полюс плану прискорень π (рис. 12.1, в) відкладемо від нього відрізок πa, який відповідає прискоренню точки A у масштабі μ_a:

$$\mu_a = \frac{\alpha_A}{\overline{\pi\alpha}}, \ {}^{м}\!/_{с^2 \cdot мм}.$$

Прискорення точки A спрямовано по лінії AO від точки A до точки O.

Для знаходження прискорення точки B складемо два векторні рівняння:

$$\vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_A + \vec{\alpha}^n{}_{BA} + \vec{\alpha}^\tau{}_{BA;} \ \vec{\alpha}_B = \vec{\alpha}_C + \vec{\alpha}^n{}_{BC} + \vec{\alpha}^\tau{}_{BC} \qquad (12.8)$$

Згідно з першим рівнянням системи (12.8) кінець першого вектора $\vec{\alpha}_A$ повинен збігатися з початком вектора α^n_{BA} нормального прискорення точки B відносно A, величина якого визначається за формулою:

$$\alpha^n_{BA} = \frac{V^2_{BA}}{\ell_{AB}}, \text{ або } \alpha^n_{BA} = \omega_2^{\,2} \cdot \ell_{AB} \qquad (12.9)$$

У вибраному масштабі цей вектор буде зображено відрізком.

$$\alpha\overline{n}_1 = \frac{\alpha^n_{BA}}{\mu_a}, \text{ мм} \qquad (12.10)$$

Прискорення α^n_{BA} направлене вздовж осі ланки *AB* від точки *B* до точки *A*. Через точку n_1 згідно з цим самим рівнянням необхідно провести лінію – напрямок дотичного прискорення α^τ_{BA}, величина останнього невідома, відомий лише його напрямок – перпендикулярний до лінії *AB*.

Розглянемо друге рівняння (12.8). Прискорення точки *C* дорівнює нулю, тому точка *c* збігається з полюсом плану. Прискорення $\alpha^n_{BC} = \omega_3^{\,2} \cdot \ell_{BC}$ і направлене від точки *B* до точки *C*. Відрізок $\pi n_2 = \frac{\alpha^n_{BC}}{\mu_a}$, який відповідає прискоренню α^n_{BC}, на планів відкладаємо від точки π. Через точку n_2 проведемо лінію-напрямок дотичного прискорення $\alpha^\tau_{BC} \perp BC$ до перетину з лінією-напрямком прискорення α^τ_{BA}. Точка перетину *b* цих ліній визначить величину і напрямок прискорення точки *B* та величини дотичних прискорень (у масштабі μ_a). *Прискорення точки* D *отримаємо методом подібності, побудувавши подібний до ланки* ABD *трикутник* abd. *Відрізки* ad *і* bd *визначимо із пропорцій:*

$$ad = ab\frac{AD}{AB}; \quad bd = ad\frac{BD}{AD} \qquad (12.11)$$

Щоб знайти прискорення точки *D,* можна також записати векторні рівняння, виразивши прискорення точки *D* через прискорення точок *A* і *B,* тобто

$$\vec{\alpha}_D = \vec{\alpha}_A + \vec{\alpha}^n_{DA} + \vec{\alpha}^\tau_{DA}; \qquad \vec{\alpha}_D = \vec{\alpha}_B + \vec{\alpha}^n_{DB} + \vec{\alpha}^\tau_{DB} \qquad (12.12)$$

Плани прискорень на основі цих рівнянь будуються так само, як і для точки *B*.

Модуль кутових прискорень ланок 2 і 3 знайдемо за формулами:

$$\varepsilon_2 = \alpha^\tau_{BA} \Big/ \ell_{AB}; \quad \varepsilon_3 = \alpha^\tau_{BC} \Big/ \ell_{BC} \qquad (12.13)$$

Для визначення напрямку ε_2 і ε_3 перенесемо вектори α^τ_{BA} і α^τ_{BC} у точку *B* і розглянемо, в який бік ці вектори повертають ланки відповідно *AB* і *BC*.

Основні властивості планів швидкостей і прискорень для плоских важільних механізмів з ведучою ланкою – кривошипом:

1. Вектори абсолютних швидкостей (прискорень) точок механізму завжди спрямовані від полюса.

2. Вектори відносних швидкостей (повних відносних прискорень) точок однієї ланки з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей (прискорень) цих точок.

3. Вектори відносних швидкостей (повних відносних прискорень) точок однієї ланки утворюють фігури, подібні і однаково розташовані однойменним фігурам на плані механізму. Назва відносної швидкості містить ті ж букви, між якими розташовується вектор відносної швидкості.

4. Напрямок повних відносних і дотичних прискорень залишається таким же як і для швидкостей. Ці прискорення направлені до тієї букви плану прискорень яка стоїть першою в позначенні: прискорення $\vec{\alpha}_{BA}$ направлено до точки *b;* прискорення $\vec{\alpha}^{\tau}_{CB}$ направлено до точки *c* і т.п.

Крім того, напрямок відрізка який зображає нормального прискорення буде співпадати з напрямком взятим у відповідній точці ланки до центра її обертання. Наприклад, відрізок $b\,\overline{n}_1$,який відображає нормального прискорення $\vec{\alpha}^{n}_{CB}$ на плані прискорень направлений вздовж лінії (паралельно) *CB* від $C \to B$.

Лекція 13. Плани прискорень: групи 2-го і 3-го видів, прискорення Коріоліса

13.1. Складний рух точки та прискорення Коріоліса

Якщо точка рухається по ланці, яка сама обертається або рухається, її рух є складним. Для прискорень, за **теоремою Коріоліса**, повне абсолютне прискорення дорівнює сумі переносного, відносного та додаткового, коріолісового прискорення:

$$a_{abs} = a_e + a_r + a^k \qquad (13.1)$$

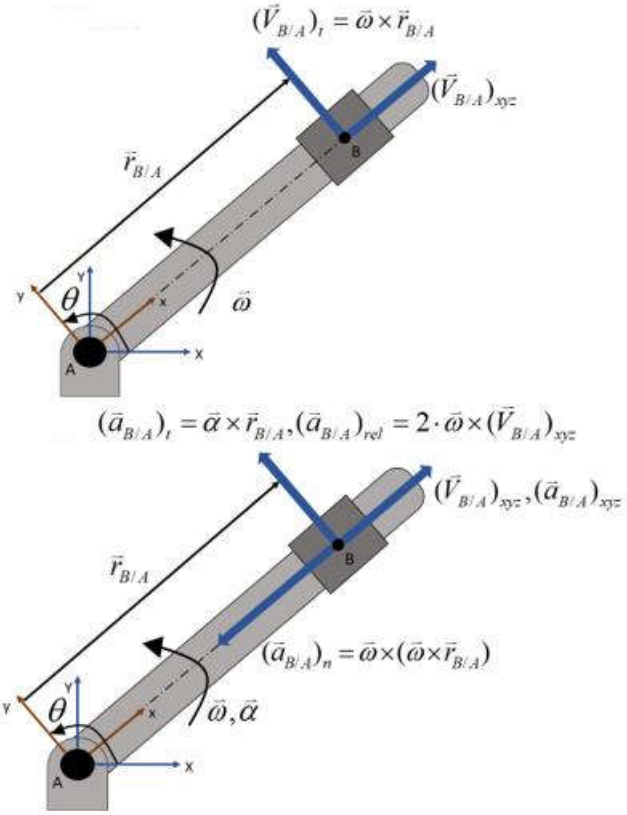
Прискорення Коріоліса виникає тому, що відносний рух змінює напрямок переносної швидкості, а переносне обертання змінює напрямок відносної швидкості. Його модуль визначається за формулою

$$a^k = 2 \cdot \omega_e \cdot v_r \cdot \sin\theta \qquad (13.2)$$

де ω_e – кутова швидкість переносного руху, рад/с; v_r – відносна швидкість точки, м/с; θ – кут між векторами ω_e та v_r. У плоскому русі вектор кутової швидкості перпендикулярний площині руху, тому $\sin\theta = 1$ і $a^k = 2\omega_e v_r$. Прискорення Коріоліса дорівнює нулю, якщо $\omega_e = 0$ (переносний рух поступальний) або $v_r = 0$.

Напрямок a^k визначається правилом Жуковського: вектор відносної швидкості v_r треба повернути на 90° у напрямку переносного обертання ω_e.

Розглянемо механізм, у якому повзун переміщується вздовж обертової ланки.



Під час роботи механізму:

- ланка обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω;
- повзун переміщується вздовж напрямної зі швидкістю $v_{відн}$;
- одночасно з цим повзун бере участь в обертальному русі ланки.

У результаті виникає прискорення Коріоліса, напрямлене перпендикулярно до відносної швидкості повзуна.

Таке явище характерне для:

- кулісних механізмів;
- механізмів із рухомими напрямними;
- механізмів із повзунами в обертових ланках;
- деяких механізмів сільськогосподарських машин;
- окремих механізмів технологічного обладнання.

Повзун переміщується вздовж обертової напрямної зі швидкістю vвідн=0,5 м/с. Кутова швидкість обертання напрямної становить ω=4рад/с. Визначити прискорення Коріоліса.

$$a_{кор}=2\omega \cdot v_{відн}=2 \cdot 4 \cdot 0,5=4 м/с^2$$

Урахування прискорення Коріоліса необхідне для правильного кінематичного аналізу механізмів, у яких одночасно відбувається обертальний і відносний рух.

Його враховують під час:

- визначення абсолютного прискорення повзунів;
- дослідження руху кулісних механізмів;

- аналізу механізмів із рухомими напрямними;
- розрахунку сил інерції;
- дослідження динаміки машин і механізмів.

13.2. Рівняння прискорень для групи 3-го виду

Повернемося до кулісного механізму, який розглядали в лекції 11 (рис. 13.1).

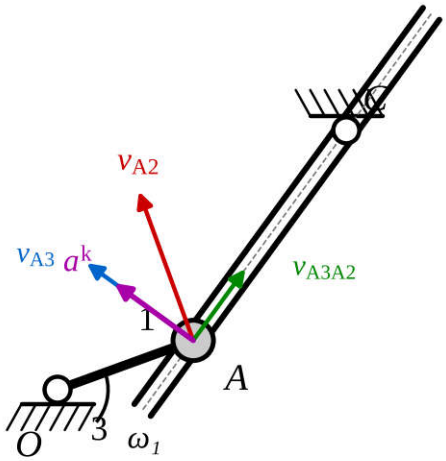


Рис. 13.1. Кулісний механізм: швидкості та напрямок прискорення Коріоліса

Камінь 2 належить кривошипу 1 і ковзає по кулісі 3. Прискорення точки A каменя дорівнює

$$a_{A2} = a_{A3} + a^k_{A2A3} + a^r_{A2A3} \qquad (13.3)$$

Тут $a_{A2} = \omega_1^2 l_{OA}$ відоме (напрямлене від A до O); a_{A3} – прискорення точки куліси 3, що збігається з A (воно має нормальну та тангенціальну складові); $a^k_{A2A3} = 2\omega_3 v_{A2A3}$ – коріолісове прискорення (відомо за модулем, напрям за правилом Жуковського); a^r_{A2A3} – відносне (релятивне) прискорення, спрямоване вздовж куліси. Прискорення куліси як ланки, що обертається навколо нерухомої точки B, розкладається:

$$a_{A3} = a^{\text{n}}_{A3B} + a^{\tau}_{A3B},\ a^{\text{n}}_{A3B} = \omega_3^2 \cdot l_{AB} \qquad (13.4)$$

Невідомими є модулі a^{τ}_{A3B} (напрям $\perp AB$) і a^r_{A2A3} (напрям $\parallel AB$), тому задача розв'язується побудовою.

13.3. Побудова плана прискорень кулісного механізму

Порядок дій:

1) відкладають $\pi a'_2 = a_{A2}/\mu_a$ у напрямку від A до O;

2) від полюса π відкладають вектор πn, що зображує a^{n}_{A3B} (паралельно AB, від A до B);

3) через n проводять пряму $\perp AB$ – лінію дії a^{τ}_{A3B};

4) від точки a'_2 відкладають відрізок a'_2k, що зображує a^k, у напрямку, знайденому за правилом Жуковського, і проводять через k пряму, паралельну AB (лінія a^r);

Отримане кутове прискорення куліси $\varepsilon_3 = a^{\tau}_{A3B}/l_{AB}$.

Приклад. Для кулісного механізму з лекції 11 (OA = 0,08 м, AB = 0,2275 м, ω_1 = 10 рад/с, ω_3 = 1,76 рад/с, v_{A2A3} = 0,693 м/с) визначити прискорення Коріоліса та складові прискорення.

Розв'язання. $a_{A2} = 10^2 \cdot 0{,}08 = 8$ м/с²; $a^k = 2 \cdot 1{,}76 \cdot 0{,}693 = 2{,}44$ м/с²; $a^{\text{n}}_{A3B} = 1{,}76^2 \cdot 0{,}2275 = 0{,}70$ м/с². Складаючи рівняння (13.3) у проєкціях на напрямок куліси та перпендикулярний до неї, отримуємо $a^{\tau}_{A3B} = 4{,}5$ м/с², $a^r = 3{,}3$ м/с². Звідси $\varepsilon_3 = 4{,}5/0{,}2275 = 19{,}8$ рад/с².

13.4. Особливості для груп 4-го та 5-го видів

У групах 4-го виду (*ПВП*) прискорення кожного повзуна спрямоване вздовж своєї напрямної. Рівняння прискорень складають для точок шатуна, причому відомі лише напрямки a_B та a_C; нормальні складові відносного прискорення визначаються за планом швидкостей.

Планів швидкостей і прискорень ніколи не слід вважати остаточними без перевірки. Ефективними способами контролю є:

- перевірка теореми подібності для кожної ланки – трикутник на плані має бути подібним ланці й повернутим на відповідний кут;
- обчислення прискорення вихідної ланки аналітичним методом у даному положенні та порівняння з результатом побудови;
- перевірка енергетичного балансу за допомогою методу Жуковського;
- побудова плана для двох сусідніх положень та аналіз узгодженості результатів із графіком, отриманим диференціюванням.

Прискорення Коріоліса виникає під час переносного обертання та відносного руху точки; його величина $2\omega v_r$, а напрямок знаходять поворотом відносної швидкості на 90° у бік переносного обертання. Врахування цього прискорення є обов'язковим для механізмів із кулісами та іншими ланками, що обертаються. Плани прискорень груп 3-го виду будують за двома лініями дії невідомих складових.

Лекція 14. Кінематичні діаграми. Графічне диференціювання

14.1. Кінематичні діаграми та їх призначення

Під час руху механізму координати, швидкість і прискорення вихідної ланки змінюються в часі. **Кінематичною діаграмою** називають графік зміни цих величин як функцій часу t або кута повороту φ початкової ланки. Діаграма $s(t)$ або $s(\varphi)$ показує переміщення, діаграма $v(t)$ – швидкість, діаграма $a(t)$ – прискорення вихідної ланки.

Між переміщенням, швидкістю та прискоренням існують диференціальні залежності:

$$v = ds / dt,\ a = dv / dt = d^2s / dt^2 \qquad (14.1)$$

Тому перехід від діаграми переміщення до діаграми швидкості виконується диференціюванням, а у зворотному напрямку – інтегруванням. Геометричний зміст першої залежності: швидкість у кожний момент пропорційна тангенсу кута нахилу дотичної до графіка $s(t)$. Якщо $s(t)$ побудовано в масштабах μ_s (м/мм) і μ_t (с/мм), то

$$v = (\mu_s / \mu_t) \cdot \operatorname{tg} \alpha \qquad (14.2)$$

де α – кут нахилу дотичної до осі абсцис.

Якщо замість часу на осі абсцис відкладено кут φ, то отримують не швидкість, а її **аналог** $ds/d\varphi$, що має розмірність довжини (м). Реальна швидкість $v = (ds/d\varphi)\cdot\omega_1$. Така форма зручна, бо аналоги залежать лише від геометрії механізму, але не від частоти обертання.

Задачі дослідження закономірності зміни переміщень, швидкостей і прискорень за повний цикл (період) руху досліджуваного механізму простіше розв'язуються за допомогою *кінематичних діаграм (графіків руху)*.

В практичних задачах ТММ кожна *кінематична діаграма* – це графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів ланки: переміщення, швидкості або прискорення як функції від часу або переміщення початкової ланки механізму (як функції від узагальненої координати). Наприклад, у випадку кривошипно-повзунного механізму для т. *B* повзуна (рис. 14.2) це залежності $s_B(t)$, $v_B(t)$, $a_B(t)$ або $s_B(\varphi_1)$, $v_B(\varphi_1)$, $a_B(\varphi_1)$. Якщо дослідженню підлягає *i*–та ланка механізму, яка здійснює обертальний рух, то можна побудувати діаграми $\varphi_i(t)$, $\omega_i(t)$, $\varepsilon_i(t)$, або $\varphi_i(\varphi_1)$, $\omega_i(\varphi_1)$, $\varepsilon_i(\varphi_1)$.

Розглядуваний метод дозволяє при заданій будь–якій з цих діаграм без значних зусиль отримати інші. Методом кінематичних діаграм часто користуються для наочності та виявлення можливих помилок при обчисленні. Переваги цього методу – легкість і те, що результатом є наочне графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів руху від часу, чи узагальненої координати. Варто мати на увазі, що методи графічного диференціювання та інтегрування не завжди можуть забезпечувати достатню точність результатів.

Зазначимо, що до графічного диференціювання та інтегрування необхідно деколи звертатись навіть у тих випадках, коли кінематична функція задана аналітично, але не має достатньо простих формул для визначення похідної чи інтеграла.

14.2. Метод хорд

Метод хорд – найпоширеніший спосіб графічного диференціювання. Його сутність: дотичну до кривої на малій ділянці замінюють хордою, що з'єднує початок і кінець цієї ділянки, а кут нахилу хорди вважають таким самим, як у дотичної в середині ділянки. Застосовується така послідовність (рис. 14.1):

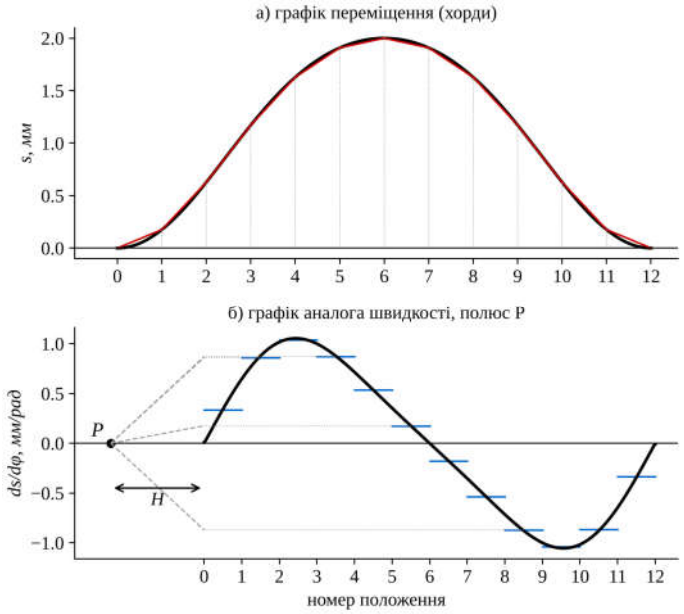


Рис. 14.1. Графічне диференціювання методом хорд

1) вісь абсцис діаграми $s(\varphi)$ ділять на n рівних інтервалів, для кожного будують хорду;

2) під діаграмою $s(\varphi)$ будують систему координат для нової діаграми $v(\varphi)$ зі спільною віссю абсцис;

3) на продовженні осі абсцис ліворуч від початку координат відкладають полюсну відстань H (мм) та позначають полюс P;

4) із полюса P проводять промені, паралельні хордам діаграми $s(\varphi)$; кожен промінь відтинає на осі ординат відрізок y_i;

6) отримані точки з'єднують плавною кривою, що проходить через початок і кінець діаграми з урахуванням характеру руху.

Ордината нової діаграми у вибраному масштабі дорівнює тангенсу кута нахилу хорди: $y_i = H \cdot \operatorname{tg} \alpha_i$. Тому масштаб діаграми швидкості

$$\mu_v = \mu_s / (\mu_t \cdot H) \qquad (14.3)$$

Приклад. Діаграму переміщення побудовано в масштабах $\mu_s = 0{,}002$ м/мм і $\mu_t = 0{,}001$ с/мм, полюсна відстань $H = 40$ мм. Масштаб швидкості $\mu_v = 0{,}002/(0{,}001 \cdot 40) = 0{,}05$ (м/с)/мм. Якщо максимальна ордината діаграми швидкості 60 мм, то максимальна швидкість $v_{max} = 0{,}05 \cdot 60 = 3$ м/с.

Задано діаграму переміщення кривошипно-повзунного механізму (рис. 14.2, *а*). Побудуємо діаграму швидкості:

– на заданій кривій відмічають ряд точок $1'$, $2'$, $3'$,…, які з'єднують хордами, тобто, замінюють задану криву ламаною лінією;

– під діаграмою переміщень будуємо нову систему координат так, щоб осі абсцис були паралельними, а ординат – лежали на одній прямій (рис. 14.2, *б*). Ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку;

– відкладаємо по осі абсцис ліворуч від початку системи координат довільний відрізок OP_1 – полюсну відстань;

– з точки P_1 проводимо промені P_11'', P_12'', P_13'',..., паралельні до відповідних хорд кривої переміщень. Ці промені відтинають на осі ординат відрізки $01''$, $02''$, $03''$,..., що пропорційні середній швидкості повзуна посередині відповідних інтервалів часу;

– перенесемо точки $01''$, $02''$, $03''$,..., на середини ординат відповідних ділянок. З'єднаємо точки 0, $1'$, $2'$,... плавною кривою. Отримана крива і буде діаграмою швидкості.

Маючи діаграму швидкості, аналогічно методом хорд будують, при потребі, діаграму прискорень (рис. 14.2, *в*).

Зазначимо, якщо діаграму переміщень задано у вигляді функції $s_B(\varphi_1)$ то в результаті графічного диференціювання отримуємо відповідно графіки кінематичних передатних функцій швидкості $s'_B(\varphi_1)$ та прискорення $s''_B(\varphi_1)$ (аналогів швидкості та прискорення).

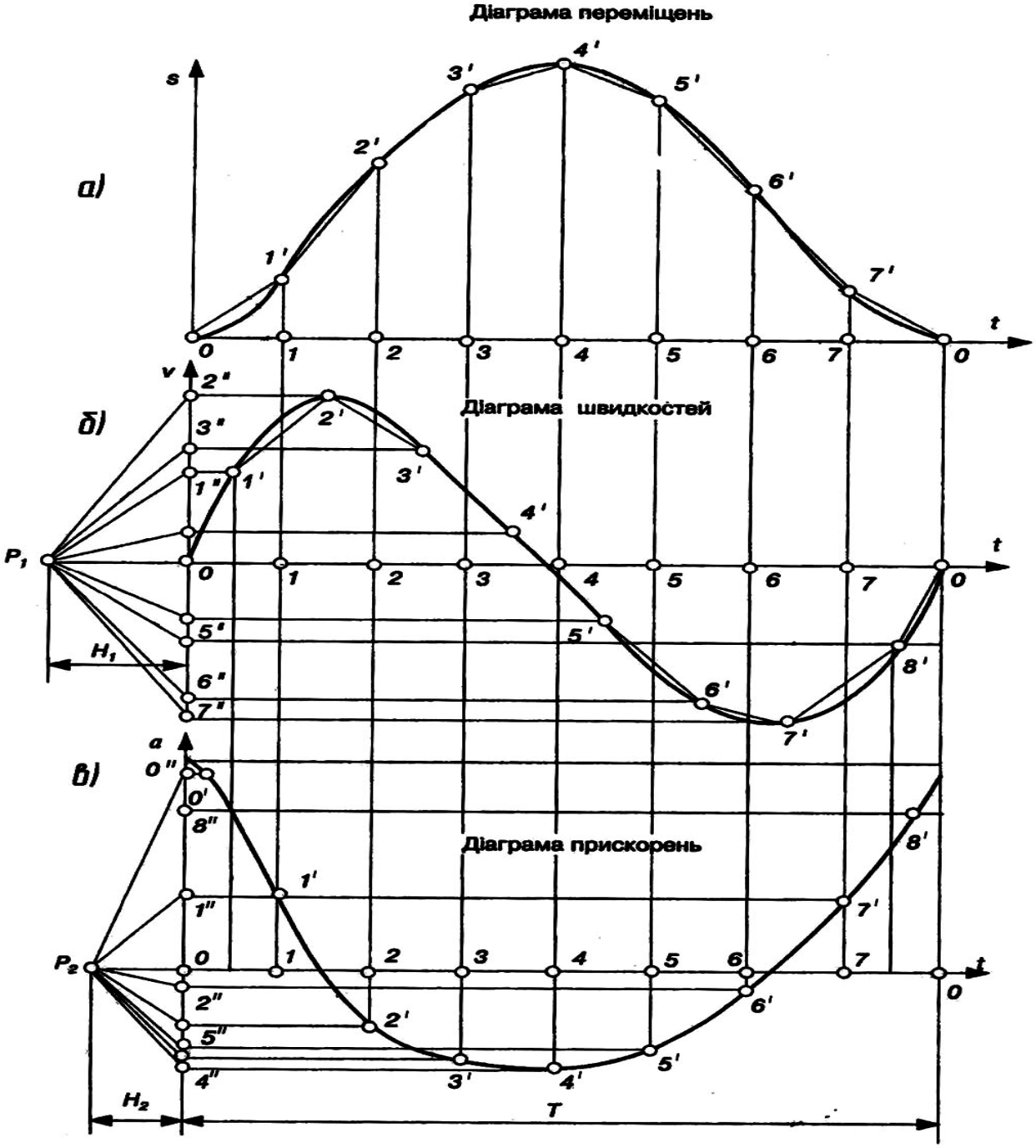


Рис. 14.2. Діаграма переміщення кривошипно-повзунного механізму

Масштаби по осях ординат визначаються за формулами:

– для діаграм швидкостей та прискорень

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_t}\ ,\ \mu_a = \frac{\mu_v}{H_2 \cdot \mu_t} \tag{14.4}$$

– для діаграм аналогів швидкостей та прискорень

$$\mu_{s'} = \frac{\mu_s}{H_1 \cdot \mu_\varphi}\ ,\ \mu_{s''} \frac{\mu_{s'}}{H_2 \cdot \mu_\varphi} \tag{14.5}$$

де H_1, H_2 – відрізки в мм, взято з креслення (рис. 14.2).

Масштаби по осях абсцис μ_φ усіх графіків залишаються звичайно такими ж, як і на графіку переміщень.

Порівнюючи графіки (рис. 14.2), можна встановити такий зв'язок між кінематичними діаграмами:

– зростанню ординат кривої функції, що диференціюється, відповідають додатні значення ординат диференціальної кривої, а зменшенню – від'ємні значення;

– екстремальним значенням функції (максимуми та мінімуми) відповідають нульові значення графіка похідної.

– точкам перегину графіка функції відповідають екстремальні значення диференціальної кривої.

14.3. Метод дотичних

У цьому методі дотичні проводять до кривої в окремих точках за допомогою лінійки або дзеркала. З полюса *P* проводять промені, паралельні дотичним, і знаходять ординати y_i швидкості в точках їх дотику.

Для побудови діаграми прискорення процедуру повторюють, диференціюючи діаграму швидкості з масштабом

$$\mu_a = \mu_v / (\mu_t \cdot H_1) \qquad (14.6)$$

де H_1 – полюсна відстань другого диференціювання.

Графічне диференціювання використовується, коли є графік функції, а потрібно отримати графік її похідної. Так, наприклад, побудовано графік переміщення повзуна кривошипно-повзунного механізму (рис. 14.2), а необхідно побудувати графіки швидкості, прискорення.

Розглянемо теоретичні основи графічного диференціювання. Використаємо відому залежність $v=\frac{ds(t)}{dt}$. Геометрично похідна функції визначається тангенсом кута нахилу дотичної до графіка функції, проведеної у точці, абсциса якої є точка диференціювання, $f'(x)=tg\alpha.$

Нехай крива *AB* (рис. 14.3) є графік деякої функції $y=f(x)$. Проведемо дотичну до графіка у т.M_1, що відповідає заданій абсцисі x_1. Відкладемо на осі абсцис вліво від початку прямокутної системи координат відрізок *OP* (полюсну відстань), що дорівнює одиниці масштабу. З точки *P* (полюса) проведемо пряму, паралельну дотичній до перетину з віссю ординат. Відрізок $01''$ буде виражати значення похідної $f'(x)$, при заданому значенні x_1.

$$01'' = OP \cdot tg\alpha = 1 \cdot tg\alpha = f'(x) \qquad (14.7)$$

Проведемо з точки $1''$ пряму, паралельну осі $0x$, до перетину з ординатою т.M_1. Ордината точки перетину $1'$ і дає значення похідної $f'(x)$ при заданому значенні x_1. Тобто, точка $1'$ буде точкою шуканої диференціальної кривої. У загальному випадку, ордината диференціальної кривої у будь-якій точці є відрізок, пропорційний до кута нахилу дотичної, що проведена у відповідній точці заданої кривої.

Таким чином, для того, щоб побудувати графік похідної за графіком функції, поділимо ділянку AB, заданої кривої, на деяке число частин. Далі, розглянутим методом, неважко знайти у точках поділу заданої кривої значення похідної – тобто точки диференціальної кривої. З'єднавши отримані точки плавною кривою, дістанемо графік функції $y = f'(x)$.

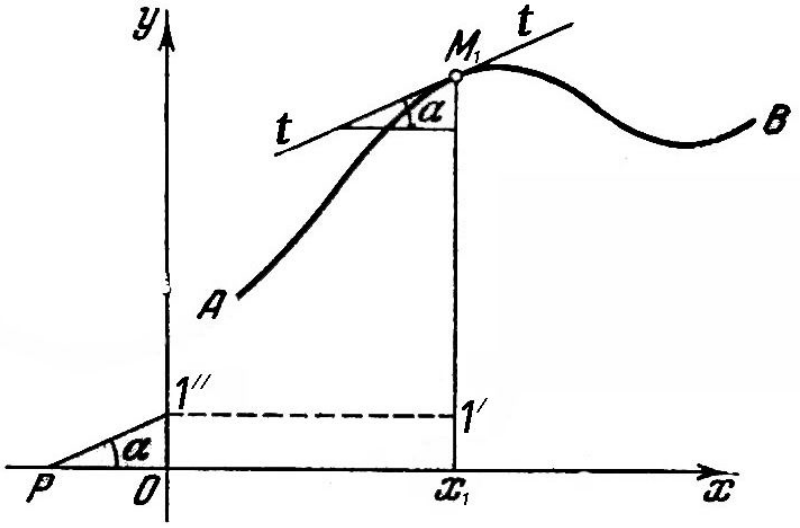


Рис. 14.3. Графічне диференціювання. Метод дотичних.

Диференціювання методом дотичних має відносно низьку точність, оскільки досить складно проводити дотичні до кривих. Більшого поширення набув метод хорд, який є точнішим. Відмінність методу хорд полягає лише у тому, що значення похідної функції знаходять не у точках поділу кривої, а у точках, що ділять навпіл кожний з інтервалів (рис. 14.4, точки $M_1, M_2, M_3 \ldots$). Перевагою є те, що при цьому замість дотичних беруться, як правило, з досить великою точністю, хорди, що з'єднують кінцеві точки кожного інтервалу. Метод ґрунтується на відомій теоремі про скінчений приріст функції: якщо функція, що задана графічно, та її перша похідна неперервні, то в будь-якому інтервалі хорда, що стягує дану дугу, паралельна дотичній до кривої, принаймні, в одній точці, яка лежить у середині цього інтервалу.

Зазначимо, що графік похідної буде точнішим при більшій кількості частин поділу кривої. Інтервали не обов'язково повинні бути рівними між собою; їх розмір вибирається з урахуванням того, щоб відповідні частини кривої менше відхилялись від прямої. Особливу увагу треба звернути на

ділянки, де крива, яку диференціюють, має екстремуми; ділянки, у яких лінія значно звивається, слід розбивати на більше число частинок.

Припустимо, що задана крива (рис. 14.4) зображає діаграму переміщень, $s_B(t)$. Знаючи масштаб μ_s переміщень та масштаб μ_t часу, для будь-якої точки *M(x,y)* кривої можна записати $s = y \cdot \mu_s$, $t = x \cdot \mu_t$. Тоді

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t}\frac{dy}{dx} = \frac{\mu_s}{\mu_t} tg\alpha \qquad (14.8)$$

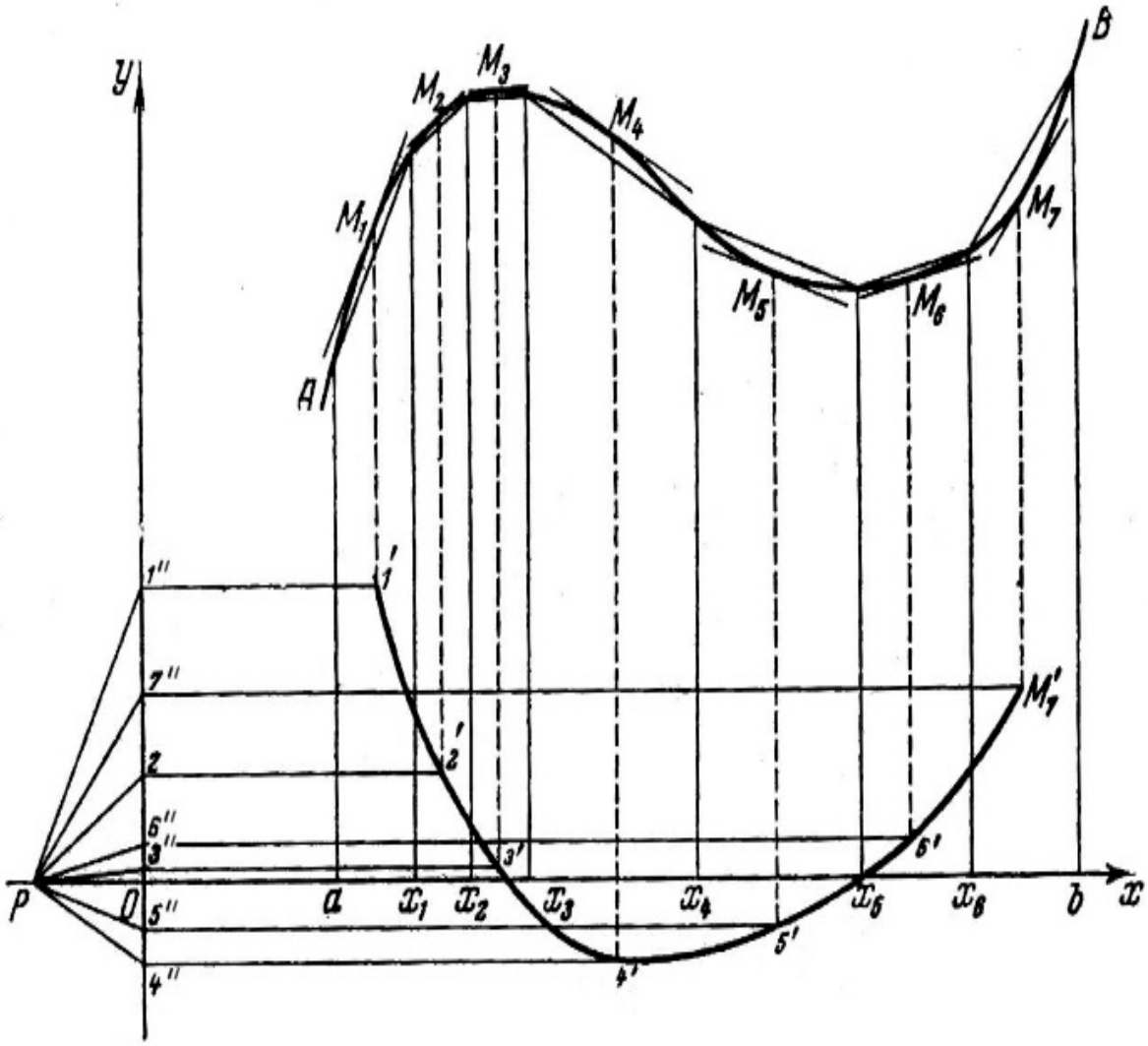


Рис. 14.4. Масштаби при графічному диференціюванні.

Підставимо $v = y_i' \cdot \mu_v$ та $tg\alpha = \frac{y_i'}{H}$, де y_i' – відрізки *01″, 02″, 03″,...,* які зображають в масштабі μ_v швидкості у відповідних положеннях механізму; *H* – полюсна відстань *OP*. Тоді масштаб графіка

швидкості μ_v можна визначити за формулою $\mu_v = \frac{\mu_s}{H \cdot \mu_t}$, або, в загальному випадку масштаб диференціальної кривої $\mu_{y'} = \frac{\mu_y}{H \cdot \mu_x}$.

14.4. Особливості та контроль діаграм

Контролем правильності діаграми швидкості є такі умови:

– швидкість дорівнює нулю там, де діаграма *s*(φ) має екстремум (крайні положення);
– ординати діаграми *v* мають максимум там, де діаграма *s* має точку перегину;
– площа під діаграмою *v* пропорційна переміщенню (лекція 15).

Похибки графічного диференціювання зростають при повторному диференціюванні, тому діаграму прискорення часто будують аналітично або за планами прискорень у кількох положеннях, щоб перевірити графічний результат.

Графічне інтегрування. Побудову графіків швидкості за заданим графіком прискорень та графіків переміщень – за графіком швидкостей виконують так званими прийомами графічного інтегрування.

Існує декілька способів побудови інтегральної кривої: спосіб *хорд*, *площ* та інші.

Розглянемо спосіб хорд. Інтегрування – це дія, обернена диференціюванню. Відповідно послідовність графічного інтегрування за способом хорд обернена послідовності диференціювання за цим способом. Нехай заданим є графік функції швидкості *v(t).* Знайдемо графік функції переміщення *s(t).*

Лекція 15. Графічне інтегрування та похибки графічних методів

15.1. Мета й геометричний зміст інтегрування

У деяких задачах, наприклад під час динамічного аналізу, закон руху задано не діаграмою переміщення, а діаграмою прискорення (або моменту), а потрібно знайти швидкості й переміщення. Це вимагає **інтегрування**, тобто переходу в протилежному до диференціювання напрямку. За визначенням,

$$v = \int a\, dt,\ s = \int v\, dt \qquad (15.1)$$

Геометрично визначений інтеграл дорівнює площі під кривою. Тому ордината діаграми швидкості в момент *t* пропорційна площі, обмеженій діаграмою прискорення від початку відліку до цього моменту. **Графічне інтегрування** замінює обчислення площі побудовою, що ґрунтується на заміні кривої східчастою лінією.

15.2. Послідовність графічного інтегрування

Нехай задано діаграму $a(t)$ на інтервалі від 0 до T. Для побудови діаграми швидкості $v(t)$ виконують такі дії:

1) інтервал ділять на n рівних частин; на кожній частині криву замінюють горизонтальним відрізком на висоті середньої ординати y_i (площа відрізка рівна площі під кривою на цій ділянці);

2) ординати y_i проектують на вісь ординат; отримані точки з'єднують із полюсом P, який лежить на осі абсцис ліворуч від початку координат на відстані H;

3) із початку діаграми швидкості проводять відрізок, паралельний першому променю $P1$, до перетину з серединою першого інтервалу; з його кінця – відрізок, паралельний $P2$, і так далі;

4) отриману ламану лінію згладжують кривою, що є діаграмою швидкості.

Послідовність графічного інтегрування

1. Ділимо задану криву (рис. 15.1, *а*) на інтервали – точки *1, 2, 3,…,* на осі абсцис.

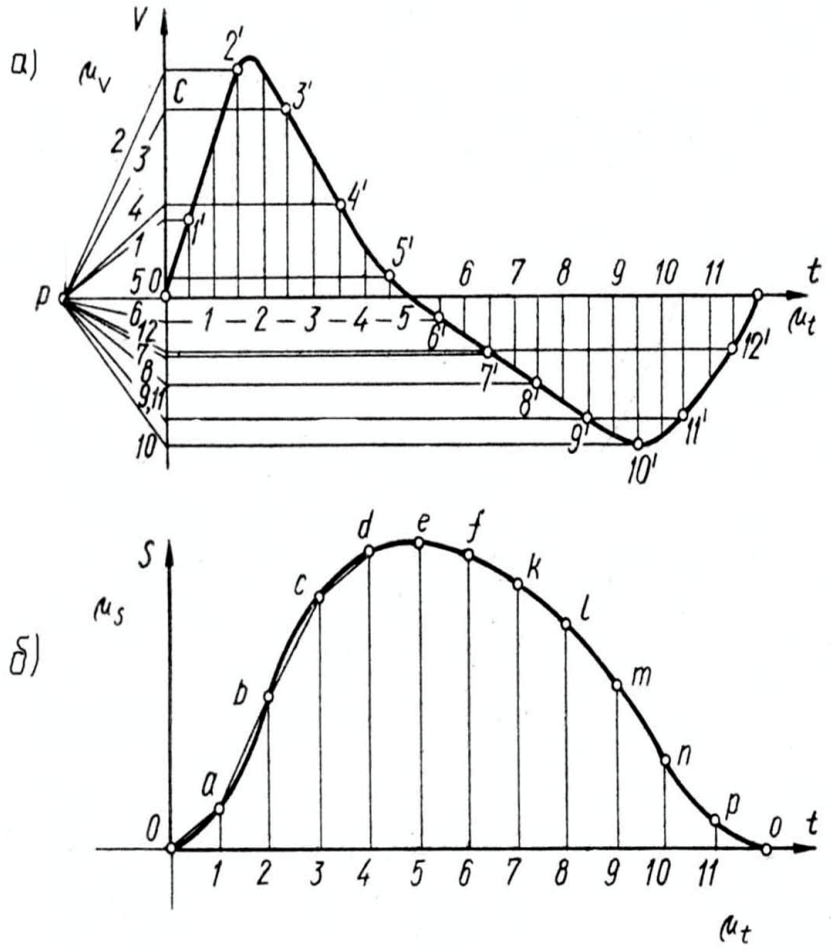


Рис. 15.1. Послідовність графічного інтегрування

2. Проводимо полюсну відстань *OP*. Ординат *1/, 2/, 3/,*…середини кожного інтервалу проектують на вісь ординат і отримані точки з’єднують з полюсом *P*.

3. Під діаграмою швидкості будуємо нову систему координат (рис. 15.1, *б*). Ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку.

4. З початку нової системи координат *0* проводять у першому інтервалі лінію *0a* паралельно до променя *P1*; з кінця відрізка *0a* проводять у другому інтервалі відрізок *ав* паралельний променю *P2,* і так далі, *bc//P3, cd//P4,...* Отриману ламану лінію замінюють плавною кривою, одержують графік переміщень. Масштаб одержаної інтегральної кривої знаходять за формулою $\mu_s = \mu_v \mu_t H$ або, в загальному випадку, $\mu_y = \mu_{y'} \mu_x H$.

15.3. Масштаби діаграм при інтегруванні

Масштаб діаграми, що отримується інтегруванням, пов'язаний із масштабом початкової діаграми. Для швидкості, отриманої з прискорення,

$$\mu_v = \mu_a \cdot \mu_t \cdot H \qquad (15.2)$$

Для переміщення, отриманого з діаграми швидкості,

$$\mu_s = \mu_v \cdot \mu_t \cdot H \qquad (15.3)$$

Приклад. Діаграму прискорення побудовано з μ_a = 2 (м/с²)/мм, μ_t = 0,002 с/мм, полюсна відстань H = 25 мм. Тоді масштаб діаграми швидкості μ_v = 2·0,002·25 = 0,1 (м/с)/мм. Якщо ордината діаграми швидкості в потрібний момент дорівнює 18 мм, то швидкість дорівнює 1,8 м/с. Якщо для цієї діаграми ще раз виконати інтегрування з такою ж H = 25 мм, то μ_s = 0,1·0,002·25 = 0,005 м/мм.

15.4. Початкові умови

Після інтегрування діаграма визначена з точністю до сталої. Початок діаграми швидкості розміщують там, де швидкість відома. Для кривошипно-повзунного механізму швидкість повзуна в мертвому положенні дорівнює нулю, тому діаграму *v* будують від цього положення з нульової ординати. Для діаграми переміщення початкову ординату обирають як відлік від мертвого положення.

Для замкненого циклу руху виконується умова періодичності: інтеграл прискорення за період дорівнює нулю, тобто діаграма *v* замикається.

15.5. Порівняння методів та похибки

У таблиці 15.1 зіставлено графічні операції диференціювання та інтегрування.

Таблиця 15.1. Порівняння графічного диференціювання та інтегрування

Ознака	Диференціювання	Інтегрування
Вихідна діаграма	$s(t)$ або $v(t)$	$a(t)$ або $v(t)$
Результат	$v(t)$ або $a(t)$	$v(t)$ або $s(t)$

Ознака	Диференціювання	Інтегрування
Основна побудова	хорди та промені з полюса	східці та промені з полюса
Масштаб	$\mu = \mu_0/(\mu_t \cdot H)$	$\mu = \mu_0 \cdot \mu_t \cdot H$
Накопичення похибки	зростає при повторенні	залежить від кількості інтервалів

Основні джерела похибок графічних методів: скінченна кількість інтервалів; неточне проведення паралельних ліній; відхилення вигляду плавної кривої від ламаної; помилки вибору масштабів. Рекомендується використовувати не менше 12 інтервалів на цикл, а в зонах швидкої зміни функції – зменшувати крок.

Лекція 16. Аналітичні методи кінематики: метод замкнених векторних контурів

16.1. Сутність методу

Аналітичний метод дає змогу описати кінематику **формулами**, придатними для будь-якого положення початкової ланки й для швидких розрахунків на комп'ютері. Найпоширенішим є **метод замкнених векторних контурів**, запропонований В. А. Зінов'євим. Його ідея така: ланки механізму подають векторами, що утворюють замкнений контур; проєктуючи векторне рівняння контуру на осі координат, одержують систему скалярних рівнянь, з яких знаходять положення ланок. Диференціюючи ці рівняння за кутом φ або часом, отримують залежності для швидкостей і прискорень.

Алгоритм застосування методу такий:

1) вибирають систему координат (зазвичай початок у нерухомому шарнірі кривошипа, вісь x вздовж напрямної);

2) кожну ланку подають вектором із визначеним напрямком і кутом нахилу, та складають векторне рівняння замкненого контуру;

3) проєктують на осі x та y;

4) розв'язують отриману систему відносно невідомих координат положення;

16.2. Положення кривошипно-повзунного механізму

Розглянемо центральний кривошипно-повзунний механізм (рис. 16.1) із довжиною кривошипа r та шатуна l; φ – кут повороту кривошипа від осі x, а ψ – кут нахилу шатуна до тієї ж осі (відкладений у протилежний бік). Контур OAB замикається векторним рівнянням

$$r + l = x$$

де x – вектор, що визначає положення повзуна B від точки O.

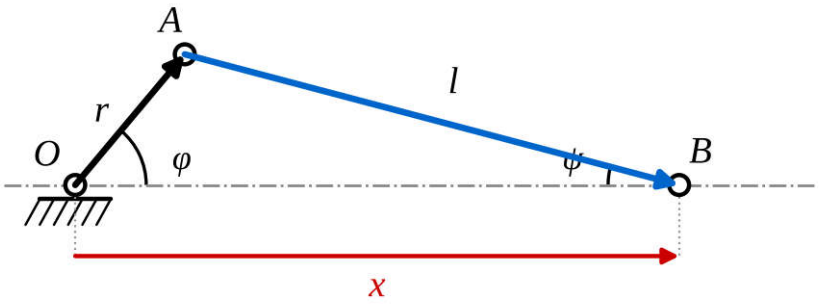


Рис. 16.1. Кривошипно-повзунний механізм як замкнений векторний контур

Проєкції на осі координат:

$$r\cos\varphi + l\cos\psi = x,\ r\sin\varphi - l\sin\psi = 0 \qquad (16.1)$$

Другу з рівнянь (16.1) використовуємо для визначення кута нахилу шатуна: $\sin\psi = (r/l)\sin\varphi = \lambda\sin\varphi$, де $\lambda = r/l$ – відносна довжина кривошипа (для двигунів $\lambda = 0{,}2–0{,}3$). Тоді

$$x = r\cos\varphi + l\sqrt{(1 - \lambda^2\sin^2\varphi)} \qquad (16.2)$$

Формула (16.2) дає положення повзуна за будь-якого φ. Переміщення поршня від мертвої точки $s = x_{max} - x$, де $x_{max} = r + l$. Тобто

$s = r(1 - \cos\varphi) + l(1 - \cos\psi)$.

16.3. Аналоги швидкостей і прискорень

Диференціюючи (16.2) за кутом φ, знаходимо **аналог швидкості** повзуна

$$dx / d\varphi = -r\,(\sin\varphi + \lambda\sin\varphi\cos\varphi / \sqrt{(1 - \lambda^2\sin^2\varphi)}) \qquad (16.3)$$

У практичних розрахунках, де λ невелике, застосовують спрощену формулу

$$dx / d\varphi = -r\,(\sin\varphi + (\lambda/2)\sin 2\varphi) \qquad (16.4)$$

Друге диференціювання дає **аналог прискорення**

$$d^2x / d\varphi^2 = -r\,(\cos\varphi + \lambda\cos 2\varphi) \qquad (16.5)$$

Реальні швидкість та прискорення знаходять множенням на ω_1 та ω_1^2 відповідно (при $\omega_1 = \text{const}$):

$$v_B = \omega_1 \cdot dx/d\varphi,\ a_B = \omega_1^2 \cdot d^2x/d\varphi^2 \qquad (16.6)$$

Знак мінус показує, що при збільшенні φ від нуля повзун рухається до осі обертання кривошипа.

Кутова швидкість шатуна обчислюється диференціюванням рівності $\sin\psi = \lambda\sin\varphi$: $\omega_2 = -\omega_1\lambda\cos\varphi / \cos\psi$, де знак враховує протилежний напрям обертання шатуна відносно кривошипа на першій половині оберту.

16.4. Числовий приклад

Приклад. $r = 0{,}05$ м, $l = 0{,}2$ м ($\lambda = 0{,}25$), $\omega_1 = 100$ рад/с. Визначити переміщення, швидкість і прискорення повзуна для положень φ від 0 до 180° через 30°.

Розв'язання. Розрахунок за формулами (16.2)–(16.5) наведено в таблиці 16.1 (значення швидкості й прискорення – за модулем, знак «+» біля прискорення означає напрямок від осі O).

Таблиця 16.1. Кінематика повзуна центрального кривошипно-повзунного механізму (r = 0,05 м, l = 0,2 м, ω_1 = 100 рад/с)

φ, °	***x*, м**		v_B	**, м/с**	a_B, **м/с²**	**ω_2, рад/с**
0	0,2500	0	−625	−25,0		
30	0,2417	3,05	−498	−21,8		
60	0,2203	4,89	−188	−12,8		
90	0,1936	5,00	+129	0		
120	0,1703	3,78	+312	+12,8		
150	0,1551	1,95	+369	+21,8		
180	0,1500	0	+375	+25,0		

З результатів видно, що максимальна швидкість повзуна не збігається з положенням φ = 90°: вона досягається раніше, при φ = 77°, і дещо перевищує $v_A = \omega_1 r$ = 5 м/с для $\lambda \neq 0$. Прискорення має максимальне за модулем значення в зовнішній мертвій точці (φ = 0): $a_B = \omega_1^2 r(1 + \lambda)$ = 625 м/с².

16.5. Загальні аналітичні методи та комп'ютерні засоби

Для механізмів з кількома контурами, як-от чотириланковик або кулісний механізм, векторні рівняння дають нелінійну систему. Наприклад, для шарнірного чотириланковика $ABCD$ контур $ABCD$ записують у вигляді $l_1 e^{i\varphi_1} + l_2 e^{i\varphi_2} = l_4 + l_3 e^{i\varphi_3}$, а невідомі кути φ_2 та φ_3 шукають розв'язанням квадратних тригонометричних рівнянь. Зручним способом є комплексна форма векторів і диференціювання за φ_1: дійсні та уявні частини дають аналоги швидкостей і прискорень.

16.6. Метод замкнених векторних контурів

Метод полягає у тому, що кінематичні параметри визначаються у вигляді аналітичних залежностей, що одержують, якщо представити схему механізму замкненими векторними контурами, утвореними ланками цього механізму. Вихідними даними є структурна схема механізму, розміри ланок та залежності узагальнених координат механізму від часу. Якщо останні не задано, то рівняння записують як функції узагальнених координат, тобто визначають кінематичні передатні функції.

Суть методу замкнених векторних контурів полягає в наступному.

- Ланки механізму зображають у вигляді векторів, які утворюють на схемі механізму один або декілька замкнених векторних контурів (відповідно до кількості груп Ассура).
- Складають векторні рівняння замкненості кожного контуру.
- Обирають прямокутну систему координат та проектують рівняння замкнутості контурів на осі вибраної системи координат.
- В результаті отримують аналітичні залежності положення ланок від узагальнених координат механізму та його розмірів, тобто функцію положень ланок механізму.
- Диференціюють двічі за часом рівняння замкненості контурів у проекціях на осі x, y та отримують, відповідно, систему рівнянь для визначення швидкостей та прискорень ланок механізму. Якщо диференціюють по узагальненій координаті – отримують, відповідно, рівняння для визначення аналогів швидкостей та прискорень.
- Визначають координати, проекції швидкостей та прискорень характерних точок механізму. Визначають модулі швидкостей та прискорень цих точок.

Деякі рекомендації щодо застосування методу замкнених векторних контурів:

- напрямок векторів слід вибирати так, щоб вони вказували послідовність побудови схеми механізму. Спочатку у вигляді вектора зображають початкову ланку механізму. Початок цього вектора – нерухома точка (центр шарніра). Вектори, що зображають ланки в групах Ассура, рекомендують напрямляти до внутрішньої кінематичної пари. Напрямок векторів на нерухомій ланці вибирають довільно;
- записуючи умови замкненості векторних контурів, треба враховувати знаки векторів. Для цього користуються правилом обходу: обходячи кожний векторний контур схеми у довільно вибраному напрямі, векторам, напрям яких збігається з напрямом обходу, присвоюють знак плюс і, навпаки, для векторів, що мають напрям проти напряму обходу, присвоюють знак мінус;
- прямокутну систему координат зв’язують зі стояком. За початок відліку можна прийняти центр шарніру, що з’єднує початкову ланку зі стояком. Якщо у механізмі є нерухома напрямна для повзуна, то одну з осей координат доцільно проводити паралельно до цієї напрямної.

Зазначимо, якщо механізм утворює декілька замкнених векторних контурів, то послідовність їх розгляду визначається послідовністю приєднання.

Методику одержання розрахункових залежностей розглянемо на прикладі кривошипно-повзунного механізму двоступінчастого

двоциліндрового повітряного компресора, структурна схема якого зображена на рис. 16.2, *а.* Задані розміри всіх ланок та частота обертання n_1 кривошипа *1*. Необхідно визначити усі кінематичні параметри ланок та їх характерних точок (центрів мас) *S2, S4* .

Представимо схему механізму у вигляді двох замкнутих векторних контурів: *OABO* та *OCDO* (рис. 16.2, *б*). У кожен контур входить структурна група Ассура другого класу: II(*2, 3*) та II(*4, 5*). Ланки механізму зобразимо у вигляді векторів $\vec{l}_1, \vec{l}_1{}^{/}$, $\vec{l}_2$, $\vec{l}_4$, положення повзунів *3, 5* визначатиметься векторами $\vec{l}_3$, $\vec{l}_5$.

Складемо векторні рівняння замкнутості кожного контура

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3 \text{ ,} \tag{16.7}$$

$$\vec{l}_1{}^{/} + \vec{l}_4 = \vec{l}_5 \tag{16.8}$$

Рівняння (16.7), (16.8) спроектуємо на осі вибраної прямокутної системи координат *xOy* (за початок відліку якої прийнято центр шарніра *O*, а вісь *Oy* направлено вздовж напрямної повзунів) та запишемо рівняння проекцій.

$$\left.\begin{aligned} l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 = 0; \\ l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 = l_3, \end{aligned}\right\} \tag{16.9}$$

$$\left.\begin{aligned} l_1 \sin(\varphi_1 + \pi) + l_4 \sin\varphi_4 = 0; \\ l_1 \cos(\varphi_1 + \pi) + l_4 \cos\varphi_4 = l_5 \end{aligned}\right\} \tag{16.10}$$

де l_1, l_2, l_4 – відповідно довжини ланок *1, 2, 4;* l_3, l_5 – відповідно відстані між центром шарніра *O* та центрами шарнірів *B, D* повзунів; φ_1 – узагальнена координата механізму (кут повороту кривошипа); φ_2 , φ_4 – відповідно кути повороту ланок *2, 4.*

Відлік кутів φ_i , які визначають положення ланок, проводимо від додатного напрямку осі *Oy* за рухом годинникової стрілки (в напрямку обертання кривошипа). Отже, для визначення величини та напряму кута повертаємо вісь *Oy* за годинниковою стрілкою доти, доки стрілка осі *Oy* не зіллється зі стрілкою вектора. Це й буде позитивним напрямом кута.

Розв'язуючи системи (16.9), (16.10) відносно невідомих φ_2 , l_3 та φ_4 , l_5, отримаємо аналітичні залежності положень ланок *2, 3, 4, 5* від узагальненої координати, тобто функції положень ланок. Так для першого контура, з першого рівняння системи (16.9) одержимо:

$$\varphi_2 = \arcsin(-\frac{l_1 \sin\varphi_1}{l_2}) \qquad (16.11)$$

а з другого рівняння (16.9) врахувавши (16.11), отримаємо

$$l_3 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\left[\arcsin(-\frac{l_1 \sin\varphi_1}{l_2})\right] \qquad (16.12).$$

Для другого контура всі викладки аналогічні.

Диференціюючи систему (16.9) за часом,

$$l_1\omega_1 \cos\varphi_1 + l_2\omega_2 \cos\varphi_2 = 0\,, \qquad (16.13)$$

$$-l_1\omega_1 \sin\varphi_1 - l_2\omega_2 \sin\varphi_2 = v_3\,, \qquad (16.14)$$

з (16.13) отримаємо вираз для кутової швидкості шатуна *2*, а з (16.14) – лінійної швидкості повзуна *3* $\omega_2 = -\frac{l_1\omega_1 \cos\varphi_1}{l_2 \cos\varphi_2}$

$$v_3 = -l_1\omega_1 \sin\varphi_1 + l_1\omega_1 \cos\varphi_1 \ \ \mathrm{tg}\,\varphi_2 \qquad (16.15)$$

У випадку, коли закон руху початкової ланки невідомий, визначають аналоги швидкостей та прискорень, продиференціювавши системи (16.9) і (16.10) за узагальненою координатою.

Для визначення прискорень двічі диференціюємо за часом систему (16.9), що приводить до рівнянь

$$-l_1\omega_1^2 \sin\varphi_1 - l_2\omega_2^2 \sin\varphi_2 + l_2\varepsilon_2 \cos\varphi_2 = 0\,;$$

$$l_1\omega_1^2 \cos\varphi_1 - l_2\omega_2^2 \cos\varphi_2 - l_2\varepsilon_2 \sin\varphi_2 = a_3\,.$$

З (16.15) визначаємо кутове прискорення шатуна *2*

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1\omega_1^2 \sin\varphi_1 + l_2\omega_2^2 \sin\varphi_2}{l_2 \cos\varphi_2} \qquad (16.16)$$

Підставивши значення ε_2 в рівняння (16.16), можна визначити лінійне прискорення повзуна *3*.

Координати будь-якої характерної точки механізму, її швидкість та прискорення визначають, використовуючи рівняння проекцій даної точки на осі координат. Наприклад, для т. S_2 будемо мати

$$x_{S2} = l_1 \sin\varphi_1 + l_{AS_2} \sin\varphi_2\,,$$

$$y_{S2} = l_1 \cos\varphi_1 + l_{AS_2} \cos\varphi_2 \qquad (16.17)$$

Модулі швидкостей та прискорень цієї точки знаходяться за відомими формулами:

$$v_{S2} = \sqrt{\dot{x}_{S2}^2 + \dot{y}_{S2}^2}, \quad a_{S2} = \sqrt{\ddot{x}_{S2}^2 + \ddot{y}_{S2}^2} \tag{16.18}$$

Наведені результати аналітичного дослідження зручні для програмування та реалізації на ЕОМ. Для кінематичного дослідження механізмів високих класів рекомендують метод замкнутих векторних контурів.

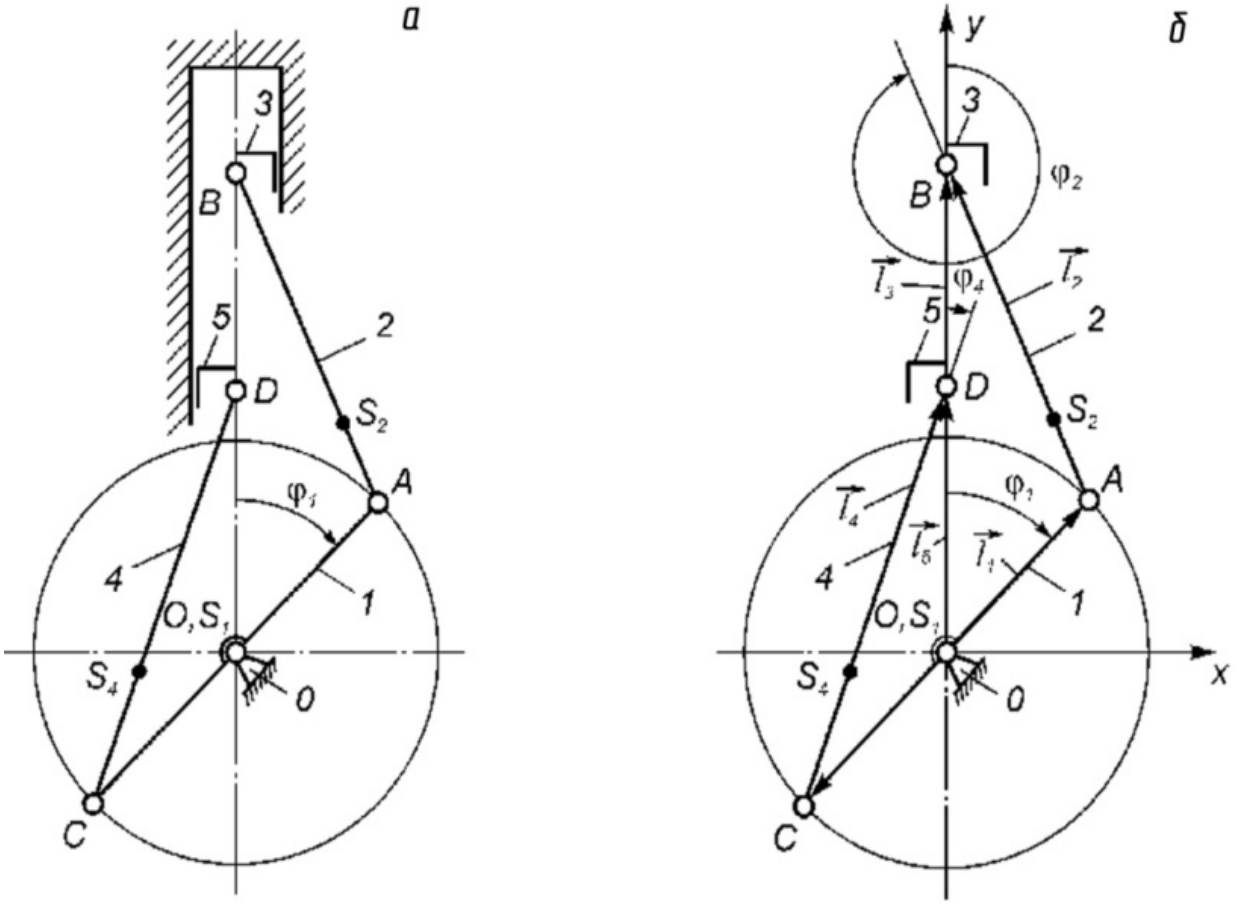


Рис. 16.2. Кривошипно-повзунний механізм двоступінчастого двоциліндрового повітряного компресора

Лекція 17. Комплексний приклад: кінематика механізму V-подібного двигуна

17.1. Постановка задачі

У цій лекції розглянемо кінематичне дослідження механізму V-подібного двигуна.

Схему механізму зображено на рис. 17.1: 1 – кривошип *OA*, 2 та 4 – шатуни *AB* і *AC*, 3 та 5 – поршні (повзуни), 0 – стояк (блок циліндрів). Довжини шатунів однакові. Центри мас шатунів S_2 та S_4 розташовані на відстані $AS = k \cdot l$ від шийки *A*.

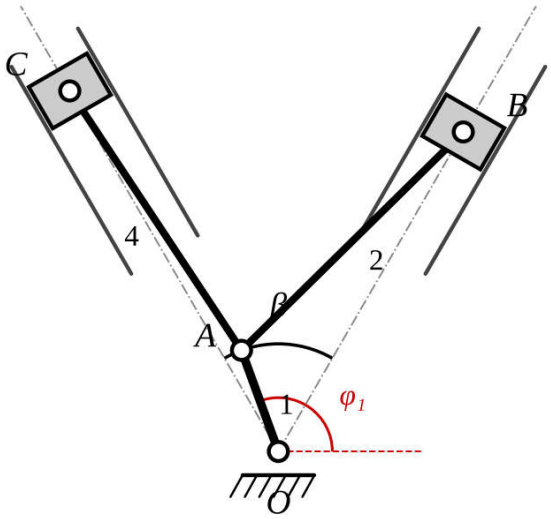


Рис. 17.1. Схема механізму V-подібного двигуна

Вихідні дані (варіант 1): повний хід поршня H = 54 мм, відносна довжина кривошипа $\lambda = r/l = 0{,}22$, діаметр поршня $D_п = 70$ мм, кут повороту кривошипа $\varphi_1 = 135°$, кут розвалу циліндрів $\beta = 60°$, частота обертання n = 3200 об/хв, коефіцієнт положення центра мас шатуна k = 0,25, тиск у циліндрі B p = 42 Н/см². Кут φ_1 відраховується від лінії OB_0, що відповідає мертвому положенню першого поршня; в обох циліндрах виконують заданий закон руху за однаковою схемою.

17.2. Структурний аналіз

Механізм складається з п'яти рухомих ланок (n = 5): кривошип 1, шатуни 2 та 4, поршні 3 та 5. Кінематичні пари: обертальні O (0–1), A (1–2), A (1–4), B (2–3), C (4–5) та поступальні (3–0) і (5–0), тобто $p_5 = 7$, $p_4 = 0$. За формулою Чебишева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1 \qquad (17.1)$$

Механізм має один ступінь рухомості: достатньо задати рух кривошипа. Структурна формула: початковий механізм I (0,1) + група Ассура 2-го виду (2,3) + група Ассура 2-го виду (4,5). Отже, механізм II класу, 2-го порядку.

17.3. Розміри ланок

Радіус кривошипа дорівнює половині ходу: $r = H/2$ = 27 мм. Довжина шатуна $l = r/\lambda$ = 27/0,22 = 122,7 мм. Відстань до центра мас $AS_2 = AS_4$ = 0,25·122,7 = 30,7 мм. Для побудови схеми обирають масштаб μ_l = 0,001 м/мм (довжина кривошипа на кресленні 27 мм). Кутова швидкість кривошипа $\omega_1 = \pi n/30 = \pi \cdot 3200/30$ = 335,1 рад/с. Лінійна швидкість точки A

$$v_A = \omega_1 \cdot r = 335{,}1 \cdot 0{,}027 = 9{,}05 \text{ м/с} \qquad (17.2)$$

Середня швидкість поршня $v_m = Hn/30000 = 54 \cdot 3200/30000$ = 5,76 м/с.

Положення механізму показують на схемі при $\varphi_1 = 135°$ (для циліндра *B*) та при мертвих положеннях ($\varphi_1 = 0°$ і 180°). Поршень *C* циліндра, осі якого повернуто на кут β, за тим же кривошипом має кут повороту $\varphi_C = \varphi_1 - \beta = 135° - 60° = 75°$. Для кожного циліндра кінематика розраховується окремо за формулами лекції 16.

17.4. Швидкості

Циліндр *B* ($\varphi = 135°$). З геометрії $\sin\psi_B = \lambda \sin 135° = 0{,}22 \cdot 0{,}707 = 0{,}1556$, $\psi_B = 8{,}95°$, $\cos\psi_B = 0{,}988$. Швидкість поршня $v_B = v_A \cdot \sin(\varphi + \psi)/\cos\psi = 9{,}05 \cdot \sin 143{,}95°/0{,}988 = 9{,}05 \cdot 0{,}5875/0{,}988 = 5{,}39$ м/с (поршень рухається до осі вала). Кутова швидкість шатуна $\omega_2 = \omega_1\lambda|\cos\varphi|/\cos\psi = 335{,}1 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}707/0{,}988 = 52{,}8$ рад/с. Відносна швидкість $v_{BA} = \omega_2 l = 52{,}8 \cdot 0{,}1227 = 6{,}48$ м/с.

Циліндр *C* ($\varphi_C = 75°$). $\sin\psi_C = 0{,}22 \cdot 0{,}966 = 0{,}2125$, $\psi_C = 12{,}27°$, $\cos\psi_C = 0{,}977$. $v_C = 9{,}05 \cdot \sin 87{,}27°/0{,}977 = 9{,}25$ м/с; $\omega_4 = 335{,}1 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}2588/0{,}977 = 19{,}5$ рад/с; $v_{CA} = 19{,}5 \cdot 0{,}1227 = 2{,}40$ м/с.

План швидкостей для положення $\varphi_1 = 135°$ будується в масштабі $\mu_v = 0{,}1$ (м/с)/мм: $pa = 9{,}05/0{,}1 = 90{,}5$ мм (перпендикулярно *OA*); через *a* проводять пряму, перпендикулярну *AB*, а через *p* – паралельну осі першого циліндра; точку *b* знаходимо на перетині. Вимірюємо: $pb = 53{,}9$ мм, $ab = 64{,}8$ мм. Для шатуна 4 план будується аналогічно з тим самим відрізком *pa*, але з прямою, паралельною осі другого циліндра (рис. 17.1). За теоремою подібності точка s_2 ділить відрізок *ab* у відношенні 1 : 3 від точки *a* ($as_2 = 0{,}25ab = 16{,}2$ мм), а швидкість центра мас шатуна $v_{S2} = \mu_v \cdot ps_2 = 7{,}80$ м/с. Для перевірки: $v_{S2} = 0{,}75v_A + 0{,}25v_B$ (векторно), що дає той самий результат.

17.5. Прискорення

Прискорення точки *A* кривошипа ($\omega_1 = \text{const}$): $a_A = \omega_1^2 r = 335{,}1^2 \cdot 0{,}027 = 3032$ м/с². У масштабі $\mu_a = 50$ (м/с²)/мм це відрізок $\pi a' = 60{,}6$ мм. Нормальна складова відносного прискорення для шатуна *AB* $a^n_{BA} = \omega_2^2 l = 52{,}8^2 \cdot 0{,}1227 = 342$ м/с² (відрізок 6,8 мм). Тангенціальну складову знаходимо побудовою, перетинаючи перпендикуляр до *AB* із прямою, паралельною осі циліндра. Результати:

- прискорення поршня *B*: $a_B = 2135$ м/с² (відрізок $\pi b' = 42{,}7$ мм), напрямлене від осі *O* до головки циліндра;
- тангенціальна складова $a^\tau_{BA} = 2116$ м/с²;
- кутове прискорення шатуна $\varepsilon_2 = a^\tau_{BA}/l = 17{,}2 \cdot 10^3$ рад/с²;
- прискорення центра мас S_2: $a_{S2} = 0{,}75a_A + 0{,}25a_B$ (векторно) = 2678 м/с².

Для циліндра *C* при $\varphi_C = 75°$ аналогічно: $a_C = 196$ м/с² (до осі вала), $\varepsilon_4 = 24{,}3 \cdot 10^3$ рад/с².

У мертвих положеннях $a = \omega_1^2 r(1 \pm \lambda)$: у ВМТ ($\varphi = 0°$) $a = 3032 \cdot 1{,}22 = 3700$ м/с² (до осі вала), у НМТ ($\varphi = 180°$) $a = 3032 \cdot 0{,}78 = 2365$ м/с² (від осі вала).

Таблиця 17.1. Зведені результати кінематичного аналізу механізму V-подібного двигуна ($\varphi_1 = 135°$, $\beta = 60°$)

Величина	**Циліндр *B***	**Циліндр *C***
Кут кривошипа відносно осі циліндра, °	135	75
Швидкість поршня, м/с	5,39	9,25
Кутова швидкість шатуна, рад/с	52,8	19,5
Прискорення поршня, м/с²	2135	196
Кутове прискорення шатуна, рад/с²	17 200	24 300

17.6. Аналіз результатів

Результати вказують на кілька важливих висновків. По-перше, швидкості обох поршнів значно відрізняються навіть за рівних частот обертання, оскільки вони перебувають у різних фазах циклу: поки поршень *B* у другій половині ходу сповільнюється, поршень *C* ще розганяється. По-друге, найбільші прискорення виникають біля мертвих точок і сягають 3–4 тис. м/с² – це в сотні разів більше за прискорення вільного падіння, тому сили інерції поршневої групи (маса 0,5–1 кг) вимірюються тисячами ньютонів і суттєво впливають на навантаження підшипників. По-третє, кутові прискорення шатуна становлять десятки тисяч рад/с², що спричиняє значні моменти сил інерції.

Кінематичне дослідження механізму V-подібного двигуна включає структурний аналіз, визначення розмірів ланок, побудову планів положень, швидкостей і прискорень для заданого кута кривошипа та аналітичну перевірку. Механізм складається з одного початкового механізму й двох груп Ассура 2-го виду, що дозволяє розглядати кожен циліндр як окремий кривошипно-повзунний механізм зі зсувом фази на кут розвалу β. Отримані швидкості та прискорення є вихідними даними для силового розрахунку.

Лекція 18. Сили, що діють у машинах: класифікація, механічні характеристики

18.1. Загальна класифікація сил

Сили, прикладені до ланок механізму, поділяють на **зовнішні** та **внутрішні**. До зовнішніх належать рушійні сили, сили опору, сили ваги й сили інерції; до внутрішніх – реакції в кінематичних парах, тобто сили взаємодії між ланками, що утворюють пару.

Рушійними силами називають сили (і моменти), які виконують додатну роботу, тобто напрям яких збігається або утворює гострий кут з напрямом швидкості точки прикладення. Вони прикладаються до вхідних ланок і передаються від двигуна: тиск газів на поршень двигуна внутрішнього згоряння, крутний момент вала електродвигуна, натяг ременя, що приводить машину в дію.

Силами опору називають сили, які виконують від'ємну роботу. Вони, у свою чергу, поділяються на **сили корисного (технологічного) опору**, заради подолання яких створено машину (різання ґрунту лемішем, опір зерна під час обмолоту, тиск рідини в плунжерному насосі), та на **сили шкідливого опору** – сили тертя в кінематичних парах, опір повітря й мастила, на подолання яких витрачається частина енергії двигуна без користі для технологічного процесу.

Сили ваги $G = m \cdot g$ прикладені в центрах мас ланок. Їхня робота за повний цикл руху замкненого механізму дорівнює нулю, оскільки центри мас повертаються у вихідні положення; проте в окремі моменти цикла вона може бути як додатною, так і від'ємною.

Силами інерції називають фіктивні сили, що вводяться для застосування принципу Даламбера. Вони виникають, коли швидкість ланки змінюється за величиною або за напрямом, і прикладаються до ланки в центрі її мас.

Реакції в кінематичних парах є силами взаємодії ланок. У нижчих парах без тертя реакція напрямлена за нормаллю до поверхонь контакту: в обертальній парі вона проходить через центр шарніра, але її напрям невідомий; у поступальній – перпендикулярна до напрямної, а точка прикладення невідома. Реакції визначають у ході кінетостатичного розрахунку.

18.2. Рушійні сили та сили опору в робочих машинах

Рушійна сила може бути заданою як сталою величиною, так і функцією положення, часу або швидкості. Залежність, що пов'язує силу чи момент зі швидкістю або положенням ланки, називають **механічною характеристикою**. Потужність, яку розвиває момент M на ланці з кутовою швидкістю ω, дорівнює

$$P = M \cdot \omega \qquad (18.1)$$

а потужність сили F, прикладеної в точці з швидкістю v, – $P = F \cdot v \cdot \cos\alpha$, де α – кут між напрямами сили та швидкості.

У поршневих двигунах і компресорах рушійна сила визначається тиском газу. Якщо відома індикаторна діаграма $p(s)$ – залежність тиску в циліндрі від переміщення поршня, що знімається індикатором під час випробувань або будується за результатами теплового розрахунку, – то сила, з якою газ діє на поршень діаметром D, становить

$$F = p \cdot \pi \cdot D^2 / 4 \qquad (18.2)$$

Приклад. Визначити силу тиску газів на поршень, якщо діаметр поршня D = 100 мм, а тиск у циліндрі в розглядуваному положенні p = 3 МПа.

Розв'язання. Площа поршня $S = \pi \cdot 0{,}1^2 / 4 = 7{,}854 \cdot 10^{-3}$ м^2. Тоді $F = 3 \cdot 10^6 \cdot 7{,}854 \cdot 10^{-3} = 23\,560$ Н = 23,6 кН. Для тиску в Н/см^2, як у методичних вказівках до курсового проєкту, перерахунок зручно виконувати так: p = 300 Н/см^2, S = 78,54 см^2, $F = 300 \cdot 78{,}54 = 23{,}6$ кН.

18.3. Механічні характеристики двигунів і робочих машин

Механічна характеристика двигуна показує, як змінюється його момент залежно від кутової швидкості: $M_д = f(\omega)$. Для асинхронного електродвигуна вона має вигляд кривої з номінальним, пусковим і критичним (максимальним) моментами; на робочій ділянці при зростанні навантаження швидкість трохи знижується, така характеристика називається **жорсткою**. Двигуни внутрішнього згоряння мають **м'яку** характеристику: момент помітно змінюється зі зміною швидкості, а при незмінному положенні органа подачі палива швидкість різко залежить від навантаження.

Механічні характеристики робочих машин (моментів опору) також різноманітні. Їхні основні типи наведено в таблиці 18.1.

Таблиця 18.1. Типові механічні характеристики робочих машин

Тип характеристики	Залежність	Приклади машин
Стала	M_c = const	стрічкові та скребкові транспортери, підйомники, лебідки
Лінійна	$M_c = k \cdot \omega$	валки з в'язким тертям, деякі генератори
Квадратична	$M_c = k \cdot \omega^2$	вентилятори, відцентрові насоси, гребні гвинти
Гіперболічна	$M_c = k / \omega$	верстати з постійною потужністю різання
Залежна від положення	$M_c = f(\varphi)$	плунжерні насоси, кривошипні преси, косарки, соломотруси

Для вибору двигуна та аналізу режимів роботи агрегату суміщають характеристику двигуна й характеристику робочої машини. Точка їх перетину відповідає усталеному режиму, коли $M_д = M_c$. Режим буде

стійким, якщо при випадковому збільшенні швидкості момент двигуна спадає швидше, ніж момент опору, тобто $dM_д/d\omega < dM_c/d\omega$.

18.4. Виконання силових розрахунків: порядок і вихідні дані

Для силового розрахунку механізму мають бути задані: кінематична схема й розміри ланок; маси ланок і моменти інерції відносно центрів мас; закон руху вхідної ланки (як правило, її кутова швидкість ω_1, часто вважається сталою); зовнішні сили, прикладені до ланок, – рушійні й корисного опору як функції положення. За цими даними будують плани швидкостей і прискорень, обчислюють сили інерції (лекція 19) і виконують кінетостатичний аналіз (лекції 20–21). Результатом є реакції в кінематичних парах і зрівноважувальна сила (момент) на вхідній ланці.

Сили, що діють у машинах, поділяють на рушійні, сили опору (корисного й шкідливого), ваги, інерції та реакції в кінематичних парах. Механічні характеристики двигунів і робочих машин визначають режим роботи агрегату й умови його стійкості. Рушійні сили в поршневих машинах знаходять за індикаторною діаграмою, а сили опору – за технологічними даними. Наявність усіх сил і правильне задання їх залежностей є умовою успішного динамічного розрахунку.

Лекція 19. Сили інерції ланок плоского механізму

19.1. Принцип Даламбера і сила інерції

Рух ланки з прискоренням супроводжується силами інерції. Згідно з **принципом Даламбера**, якщо до всіх діючих на тіло зовнішніх сил та реакцій в'язей додати сили інерції, то тіло можна розглядати як таке, що перебуває в рівновазі, а для розрахунків застосувати рівняння статики.

Розглянемо ланку масою m з центром мас S. Сукупність елементарних сил інерції всіх її частинок за правилами теоретичної механіки зводять до головного вектора Φ та головного моменту M_Φ. Для плоскопаралельного руху ланки

$$\Phi = - m \cdot a_S \qquad (19.1)$$

$$M_\Phi = - J_S \cdot \varepsilon \qquad (19.2)$$

де a_S – прискорення центра мас, J_S – момент інерції ланки відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до площини руху, ε – кутове прискорення ланки.

19.2. Сили інерції при різних видах руху ланки

Поступальний рух (повзуни, поршні). Усі точки мають однакове прискорення, $\varepsilon = 0$, тому $M_\Phi = 0$. Сила інерції $\Phi = -m \cdot a_S$ прикладена в центрі мас і напрямлена протилежно прискоренню.

Обертання навколо нерухомої осі, що проходить через центр мас (добре зрівноважені ротори, зубчасті колеса, шківи). Тут $a_S = 0$, і виникає лише момент сил інерції $M_\Phi = -J_S \cdot \varepsilon$. При рівномірному обертанні $\varepsilon = 0$ і сили інерції відсутні.

Обертання навколо осі, що не проходить через центр мас (кривошип, ексцентрик, незрівноважений ротор). Центр мас рухається по колу радіуса e із доцентровим прискоренням $a_S = \omega^2 \cdot e$ (при $\omega = \text{const}$). Сила інерції $\Phi = m \cdot \omega^2 \cdot e$ напрямлена від осі обертання й створює змінне навантаження на опори, а також є причиною вібрацій (лекція 28).

Плоскопаралельний (складний) рух (шатуни, коромисла кулісних механізмів). Ланка має як прискорення центра мас, так і кутове прискорення, тому на неї діють і сила, і момент сил інерції. Щоб спростити розрахунок, їх замінюють однією силою Φ, прикладеною не в центрі мас S, а в точці T, зміщеній від S на плече

$$h = M_\Phi / \Phi \qquad (19.3)$$

Сила Φ залишається паралельною прискоренню центра мас, а її лінію дії зміщують у бік, за якого момент відносно точки S має напрям, протилежний кутовому прискоренню.

19.3. Моменти інерції типових ланок

Для визначення M_Φ потрібні моменти інерції відносно осей, що проходять через центри мас. Їх беруть з креслень, з розрахункової моделі в САПР або обчислюють за формулами для тіл простої форми (табл. 19.1).

Таблиця 19.1. Моменти інерції однорідних тіл відносно осі через центр мас

Тіло	Схема	Момент інерції J_S
Тонкий стрижень довжиною l (шатун, важіль)	вісь ⊥ стрижню	$m \cdot l^2 / 12$
Суцільний диск (колесо, маховик) радіусом R	вісь ⊥ диску	$m \cdot R^2 / 2$
Тонке кільце (обід) радіусом R	вісь ⊥ площини	$m \cdot R^2$
Прямокутна пластина зі сторонами a, b	вісь ⊥ площини	$m \cdot (a^2 + b^2) / 12$

Якщо вісь обертання не проходить через центр мас, момент інерції визначають за теоремою Гюйгенса–Штейнера: $J = J_S + m \cdot d^2$, де d – відстань між паралельними осями.

19.4. Приклади обчислення сил інерції

Приклад 1. Шатун маси m = 2,4 кг, довжини l = 0,30 м (приймаємо його за однорідний стрижень) у заданому положенні має прискорення центра мас a_S = 1200 м/с^2 і кутове прискорення ε = 3000 рад/с^2. Визначити силу інерції та точку її прикладення.

Розв’язання. Момент інерції $J_S = m \cdot l^2 / 12 = 2{,}4 \cdot 0{,}09 / 12 = 0{,}018$ кг·м^2. Сила інерції $\Phi = 2{,}4 \cdot 1200 = 2880$ Н. Момент сил інерції $M_\Phi = 0{,}018 \cdot 3000 = 54$ Н·м. Плече зміщення $h = M_\Phi / \Phi = 54 / 2880 = 0{,}0188$ м = 18,8 мм. Отже, вектор Φ напрямлений протилежно a_S, а лінія його дії зсунута відносно центра мас на 18,8 мм у бік, за якого створюваний нею момент протилежний напряму ε.

Приклад 2. Для кривошипно-повзунного механізму з $r = 0{,}05$ м, $\lambda = r / l = 0{,}25$ та $n = 3000$ об/хв знайти максимальну силу інерції поршня масою $m = 0{,}8$ кг.

Розв’язання. Кутова швидкість $\omega = \pi \cdot n / 30 = 314{,}16$ рад/с, $\omega^2 = 98\,696$ рад^2/с^2. Прискорення поршня $a = \omega^2 \cdot r \cdot (\cos\varphi + \lambda \cdot \cos 2\varphi)$. При $\varphi = 0$ воно максимальне: $a = 98\,696 \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}25 = 6168$ м/с^2. Тоді $\Phi_{max} = 0{,}8 \cdot 6168 = 4935$ Н. Таким чином, інерційне навантаження в швидкохідному двигуні може бути співрозмірним із газовим, а сила інерції зростає пропорційно квадрату частоти обертання.

19.5. Сили інерції в кривошипно-повзунному механізмі

Прискорення поршня в кривошипно-повзунному механізмі наближено визначається формулою, яка наведена в прикладі 2. Вона є сумою двох гармонік: першого порядку (cos φ) і другого порядку (λ · cos 2φ). Відповідно, сила інерції поршня також складається з сил першого та другого порядків.

Сили інерції – це фіктивні сили, що вводяться за принципом Даламбера; вони визначаються головним вектором $\Phi = -m \cdot a_S$ і головним моментом $M_\Phi = -J_S \cdot \varepsilon$. Для ланок зі складним рухом їх замінюють однією силою, зміщеною на плече $h = M_\Phi / \Phi$. Сили інерції швидкохідних механізмів можуть бути більшими від зовнішніх навантажень, тому їхнє врахування є обов’язковим.

Лекція 20. Кінетостатика: принцип Даламбера та статична визначність груп Ассура

20.1. Метод кінетостатики

Кінетостатикою називають розділ динаміки механізмів, у якому сили в кінематичних парах визначають за відомим рухом ланок із застосуванням принципу Даламбера. Ідея методу проста: до ланок механізму прикладають, крім заданих зовнішніх сил, ще й сили та моменти сил інерції. Після цього механізм умовно «зупиняють», вважаючи його такою системою, що перебуває в рівновазі, і записують звичайні рівняння статики для кожної ланки або групи ланок:

$$\Sigma F_i + \Phi = 0$$

$$\Sigma M_O(F_i) + M_\Phi = 0$$

Тут ΣF_i – геометрична сума всіх зовнішніх сил і реакцій, прикладених до ланки, Φ – сила інерції, а ΣM_O – сума їх моментів відносно довільної

точки *О*. Для плоскої системи з однієї векторної (еквівалентної двом скалярним) та однієї моментної умов маємо три рівняння на кожну ланку.

Метою кінетостатичного аналізу є визначення величини зрівноважувальної сили (зрівноважувального моменту) при заданих силах корисного опору, а також реакцій у всіх кінематичних парах. В окремих випадках, коли задана рушійна сила (момент), в результаті аналізу визначається сила корисного опору.

Кінетостатичному аналізу повинен передувати структурний і кінематичний аналіз механізму. При кінетостатичному аналізі не враховуються динамічні навантаження, що виникають в процесі роботи механізму. (Для деякого спрощення ми також не враховуватимемо сили тертя в кінематичних парах).

Аналіз заснований на використанні принципу Д'Аламбера, згідно якому, *якщо до діючих на точки матеріальної системи заданих активних сил і сил реакції зв'язків приєднати сили інерції, то одержана система сил знаходитиметься в рівновазі. Принцип Д'Аламбера дозволяє вирішувати динамічні задачі методами статики.*

Аналіз проводиться для кожної структурної групи в послідовності зворотній формулі будови механізму, тобто починаючи із структурної групи найбільш віддаленої від вхідної ланки.

Кінетостатичний аналіз може проводитись графоаналітично (метод планів сил) або аналітично.

Постановка завдання силового розрахунку: для досліджуваного механізму при відомих кінематичних характеристиках і зовнішніх силах визначити зрівноважувальну силу або зрівноважувальний момент і реакції в кінематичних парах механізму. Види силового розрахунку: ***статичний*** – для механізмів, що знаходяться у спокої або які рухаються з дуже Малими швидкостями, коли інерційними силами можна знехтувати, або у випадках, коли невідомі маси і моменти інерції ланок механізму (на етапах, передуючих ескізному проектуванню);

Рівняння статичної рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{f} F_i = 0; \qquad \sum_{i=1}^{m} M_i = 0; \tag{20.1}$$

де $\boldsymbol{F_i}$ **–** зовнішні сили, прикладені до механізму або його ланок, $\boldsymbol{M_i}$– зовнішні моменти сил, прикладені до механізму або його ланок.

Кінетостатичний – для рухомих механізмів при відомих масах і моментах інерції ланок, коли неврахування інерційних сил приводить до істотних погрішностей; рівняння кінетостатичної рівноваги:

$$\sum_{i=1}^{f} F_i + \sum_{i=1}^{n} F_i^{ін} = 0; \quad \sum_{i=1}^{m} M_i + \sum_{i=1}^{k} M_i^{ін} = 0; \tag{20.2}$$

де $F_i^{ін}$ – ***інерційні*** сили, прикладені до ланок, $M_i^{ін}$ – ***моменти*** сил інерції, прикладені до ланок.

20.2. Позначення сил і розкладання реакцій

Визначення суті сили було дано ще Л. Ейлером:

все що здатне змінити абсолютний стан тіла, називається силою.

Діючі в машинах сили підрозділяються на наступні основні групи – *сили рушійні і сили опору*, причому останні в свою чергу діляться на сили корисних і сили шкідливих опорів. Розрізняють також сили тяжіння ланок і сили інерції.

Рушійна сила. Рушійною силою називається сила, яка приводить машину в рух. У будь-якому випадку рух може здійснюватися лише при дії на вхідну ланку зовнішньої сили у вигляді робочого тіла, що не входить до складу машини (пар або газ, які діють на поршень, – електромагнітне поле).

Напрям рушійної сили і швидкості тієї точки, в якій вона прикладена, завжди або співпадають, або складають гострий кут. Тому проекція вектора сили на напрям швидкості завжди позитивна, що визначає *позитивну роботу рушійної сили.*

Сила корисного опору. Такою силою є технологічний опір руху веденої ланки.

Прикладом може служити опір різанню металів або вага вантажу, що піднімається підйомником, при опусканні цього вантажу його вага буде вже рушійною силою.

Звідси випливає, що в деяких машинах не можна одну і ту ж силу завжди відносити до однієї категорії сил.

Сила корисного опору напрямлена *протилежно руху або складає тупий кут з напрямом швидкості. Тому її робота завжди негативна.*

Сили шкідливих опорів. До цих сил відноситься сили тертя в кінематичних парах і опір середовища. *Робота сил тертя в загальному випадку – негативна.* Напрямлена убік протилежний руху. Є випадки, коли силу тертя не можна віднести до шкідливих опорів. У гальмах, наприклад або зонах опору провідних коліс локомотива з рейками або автомобіля з поверхнею дороги, тертя завжди корисне.

Сили тяжіння ланок. Вони обумовлені дією мас ланок, вони завжди направлені вертикально вниз і прикладені до центрів мас ланок. Унаслідок постійності напряму сил тяжіння і замкнутості траєкторій, що описуються точками ланки, робота вказаних сил за період руху завжди рівна нулю. Усередині періоду (циклу) вона відрізняється від нуля.

Сили інерції. Сили інерції виникають, коли швидкість змінюється по величині або напряму. Сили інерції прикладені в центрах мас. Робота цих сил може бути і позитивної і негативної, але в межах циклу рівна нулю.

Сили реакції. Розрізняють ще сили реакцій, що виникають при взаємодії ланок в місцях їх зіткнення. Реакції зв'язків – внутрішні силові чинники, вони завжди взаємно урівноважені, а тому на механізмі не показуються. Реакції зв'язків вступають в розгляд тоді, коли одна ланка від'єднана від іншої: $R_{ij} = R_{ji}$

Реакцію, з якою ланка i діє на ланку j, позначають R_{ij}, причому за третім законом Ньютона $R_{ij} = -R_{ji}$. Наприклад, R_{12} – сила дії ланки 1 на ланку 2, а R_{03} – реакція стояка на ланку 3.

У нижчих парах реакція має різні кількості невідомих (табл. 20.1).

Таблиця 20.1. Невідомі елементи реакцій у плоских кінематичних парах без тертя

Кінематична пара	**Відомо**	**Невідомо**	**Кількість невідомих**
Обертальна (шарнір)	точка прикладення (центр шарніра)	величина та напрям	2
Поступальна (повзун у напрямній)	напрям (перпендикулярно до напрямної)	величина та точка прикладення	2
Вища (кочення або ковзання без тертя)	напрям (за загальною нормаллю) і точка контакту	величина	1

Реакцію в обертальній парі розкладають на дві складові: **нормальну** R^{n}, напрямлену вздовж ланки, та **тангенціальну** R^{τ}, перпендикулярну до неї. Тангенціальну складову можна знайти прямо з рівняння моментів, складеного відносно сусіднього шарніра, а це різко спрощує розрахунок. Нормальну складову знаходять із векторного рівняння рівноваги за допомогою плану сил.

20.3. Умова статичної визначності

Щоб задачу можна було розв’язати методами статики, число невідомих має дорівнювати числу рівнянь. Розглянемо групу, що складається з n ланок, p_5 нижчих і p_4 вищих пар. Для кожної ланки можна скласти три рівняння, тому всього є $3n$ рівнянь. Невідомих – $2p_5 + p_4$. Умова статичної визначності тому така:

$$3 \cdot n = 2 \cdot p_5 + p_4 \qquad (20.3)$$

Ця умова збігається з умовою нульової рухомості кінематичного ланцюга $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 0$, тобто з визначенням групи Ассура. Отже, **групи Ассура є статично визначними**, і саме тому розрахунок силових факторів у механізмі зручно виконувати послідовно по групах. Наприклад, для двоповодкової групи II класу $n = 2$, $p_5 = 3$ і $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ – умова виконується. Для початкового механізму $n = 1$, $p_5 = 1$, а рівнянь три, невідомих – два (реакція в шарнірі стояка) плюс одна невідома зрівноважувальна сила або момент, тому також умова виконується.

20.4. Послідовність силового розрахунку

Розрахунок механізму виконують у такому порядку.

1) Виконують структурний аналіз і розбивають механізм на початковий механізм і групи Ассура.

2) Будують план швидкостей і прискорень для заданого положення (лекції 10–13).

3) Обчислюють сили та моменти інерції для кожної ланки й прикладають їх до ланок разом із заданими зовнішніми силами.

4) Розрахунок виконують у порядку, зворотному до утворення механізму: від групи, найвіддаленішої від початкової ланки, до початкової ланки. Реакції між групами передають за третім законом Ньютона: якщо ланка 2 діє на ланку 1 силою R_{21}, то при розгляді групи ланка 1 діє на ланку 2 силою $R_{12} = -R_{21}$.

6) Для початкової ланки визначають зрівноважувальну силу $P_{\text{ур}}$ (або момент $M_{\text{ур}}$), а також реакцію в шарнірі стояка.

7) Результати перевіряють: другим методом (теорема Жуковського, лекція 22), або за умовою рівноваги всього механізму.

Графічний метод кінетостатики називають **методом планів сил**.

Кінетостатика дозволяє звести динамічну задачу до статичної шляхом введення сил інерції. Групи Ассура статично визначні, що надає змогу виконувати розрахунок послідовно по групах, починаючи з найвіддаленішої від початкової ланки. Реакції в парах розкладають на нормальні та тангенціальні складові, а тангенціальні знаходять із рівнянь моментів.

20.5. Сили інерції

Принцип Д'Аламбера дозволяє застосувати до тіла, яке рухається з прискоренням, рівняння статики, якщо до всіх діючих на тіло сил додати так звані сили інерції.

Відомо, що елементарні сили інерції твердого тіла (ланки), що має складний плоский рух, можуть бути замінені результуючою силою інерції $F^{ін}$ і моментом від сил інерції $M^{ін}$.

Результуюча сила інерції $F^{ін}$ рівна масі ланки, помноженої на прискорення її центра мас, і направлена протилежно прискоренню $\bar{a}_S$.

$$\vec{F}^{ін} = -m \cdot \vec{a}_S \qquad (20.4)$$

Момент від сил інерції $M^{ін}$ рівний моменту інерції ланки відносно осі, що проходить через її центр мас, помноженому на кутове прискорення ланки, і напрямлений протилежно $\overline{\varepsilon}$.

$$\vec{M}^{ін} = -I_{Si} \cdot \vec{\varepsilon}\,. \qquad (20.5)$$

Момент інерції ланки I_S може бути визначений як добуток маси m ланки на квадрат його радіусу інерції, тобто $I_S = m\rho^2$ (кгм^2).

Момент від сил інерції можна представити у вигляді пари сил, кожна з яких рівна силі $\vec{F}_2^{ін}$.

Тоді плече пари

$$h = \frac{M_{u_2}}{P_{u_2}} = \frac{I_{S_2} \cdot \varepsilon_{BC}}{m_2 \cdot a_{S_2}}\,. \qquad (20.6)$$

Для того, щоб момент пари мав напрям, протилежний кутовому прискоренню, треба плече h пари відкласти від центра мас (т. S) у відповідну сторону. Сили $\vec{F}_2^{ін}$, прикладені в т. S_2 взаємно урівноважаться і залишиться одна сила $\vec{P}_{u_2}$, але прикладена вже не в т. S_2, а в т. Т, положення якої на ланці визначимо, продовживши напрям сили $\vec{P}_{u_2}$. Таким чином елементарні сили інерції ланки, що має складний рух, замінюємо однією силою. Сили інерції ланки, що має поступальний рух (ланка 3) можна замінити однією силою $\vec{P}_{u_3} = -m_3 \cdot \bar{a}_{S_3}$, яка прикладена в її центрі тяжіння.

Оскільки для цієї ланки $\varepsilon = 0$, отже M_u=0; сили інерції ланки, що рівномірно обертається (кривошип 1) також можуть бути замінені однією силою:

$$\bar{P}_{u_1} = -m_1 \bar{a}_{S_1} = -m_1 \cdot \omega_1^2 \cdot \bar{r}_{S_1}\,, \qquad (20.7)$$

де ω_1 – кутова швидкість ланки, r_{S_1} – радіус обертання його центру тяжіння.

Під кінематичним дослідженням механізму умовимося розуміти таке дослідження в результаті якого при заданих зовнішніх силах тяжіння, силах інерції, рушійних силах або що врівноважує момент пари сил: $P_{ур}$; $M_{ур}$. Зрівноважуючою силою або зрівноважуючим моментом ропи сил

називається така сила або момент пари сил, якій врівноважують всі сили, що діють на ланку.

20.6. Кінетостатичний аналіз механізму методом планів сил

План механізму (структурної групи), на якому показані всі прикладені до ланок механізму (групи) у відповідних точках сили, називається планом навантажень.

Формула будови механізму:

$$I(1,6) \rightarrow II_1(2,3) \rightarrow II_2(4,5) \tag{20.8}$$

Довжини ланок l_{OA}, l_{AC}, l_{AB}, l_{CO_1}, l_{BD} і маси ланок задані. Кінематичні параметри одержані при проведенні кінематичного аналізу. Задана сила корисного опору $\vec{F}_{KO}$, прикладена до ланки 5.

Будуємо план навантажень групи II_2 (4,5) як найбільш віддаленої від вхідної ланки. Дію відкинутих зв'язків замінюємо опорними реакціями. При цьому реакцію в обертальній кінематичній парі В замінюємо двома складовими: $\vec{R}_{24}^{n}$ – направлену уздовж ланки 4 і $\vec{R}_{24}^{\tau}$ – направлену перпендикулярно ланці. (Цифрові індекси відповідають номерам ланок, що з'єднуються в цій кінематичній парі.)

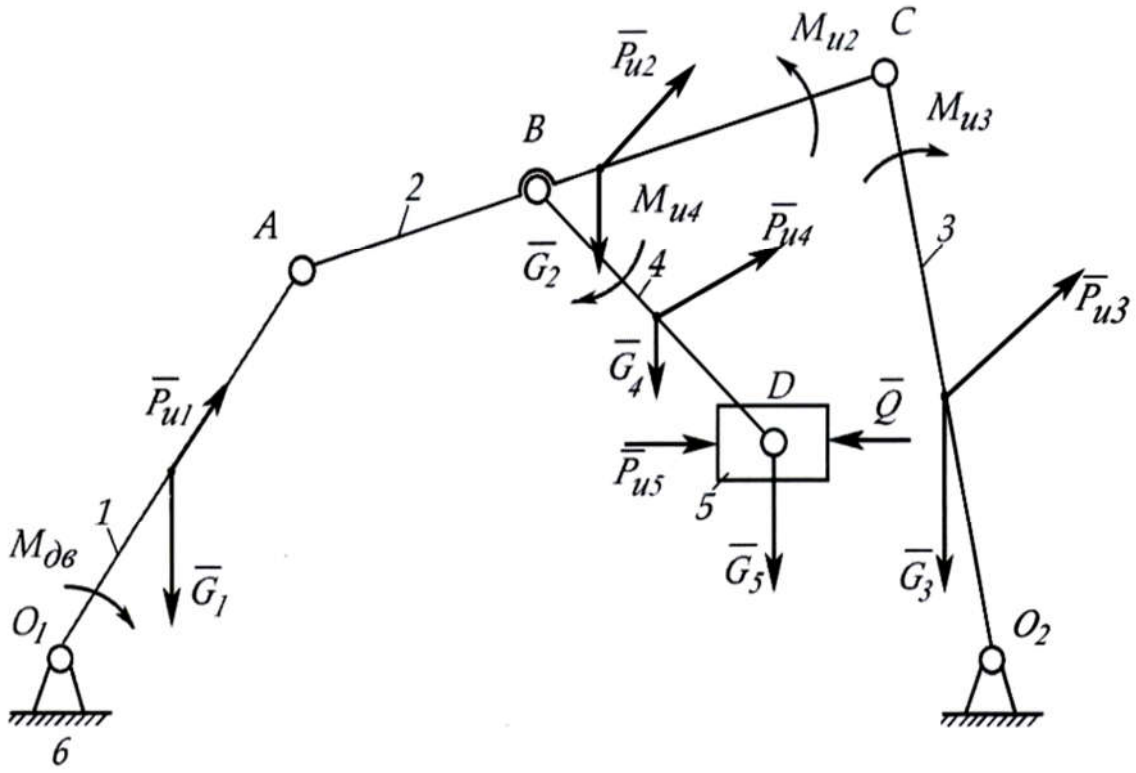


Рис. 20.1. План навантажень

Реакцію в поступальній кінематичній парі D ($\vec{R}_{65}$ направляємо перпендикулярно направляючій повзуна. Під дією даної системи сил група знаходиться в рівновазі. Групу Ассура розглядаємо як зчленування двох тіл (ланок 4 і 5 в обертальній кінематичній парі D*)*. Умови рівноваги:

$$\sum \vec{F}_i = 0,\ \vec{R}^n_{24} + \vec{R}^\tau_{24} + \vec{G}_4 + \vec{G}_5 + \vec{F}^{ін}_4 + \vec{F}^{ін}_5 + \vec{F}_{KO} + \vec{R}_{65}; \quad (20.9)$$

$$\sum M_D(F_i) = 0, \quad (20.10)$$

$$\sum M_D(P_i) = 0 \qquad R^\tau_{24} \cdot l_{BD} + G_4 \cdot h_{G4} \cdot k_e - P_{u4} \cdot h_{Pu4} \cdot k_e - M_{И4} \quad (20.11)$$

$$R^\tau_{24} = \frac{P_{u4} \cdot h_{Pu4} \cdot k_e + M_{u4} - G_4 \cdot h_{G4} \cdot k_e}{l_{BD}} \quad (20.12)$$

У векторному рівнянні (20.12) залишається 2 невідомих. Його вирішуємо графічно, шляхом побудови плану сил (рис.20.2).

Задаємося довжиною відрізка, яким зображатимемо вектор найбільшої відомої сили (наприклад F_{KO}), і визначимо масштаб плану сил:

$$\mu_F = F_{KO} / \overline{F}_{KO} \quad [Н/мм] \quad (20.13)$$

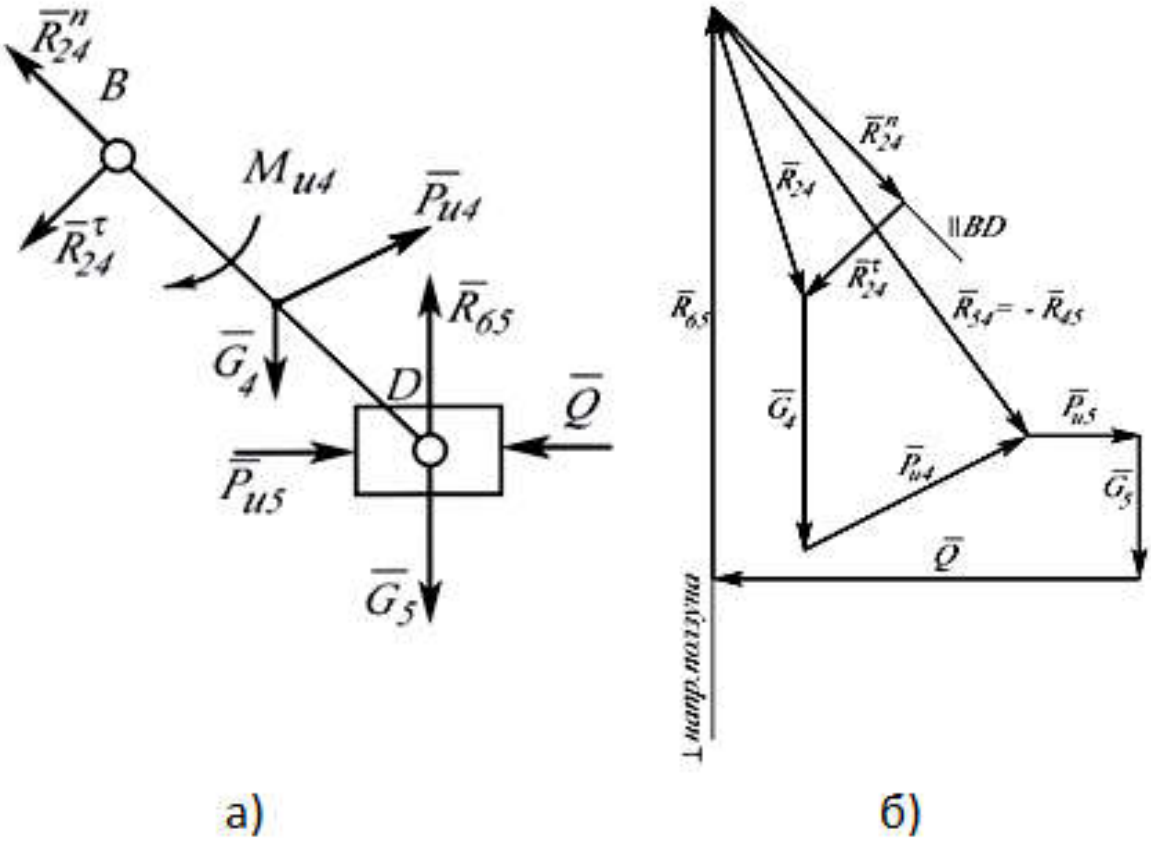


Рис. 20.2. План навантажень

У будь-якій послідовності (бажано почати з вектора $\vec{R}^\tau_{24}$) відкладаються у вибраному масштабі вектори всіх відомих сил, що діють

на ланку 4, потім вектори всіх відомих сил, що діють на ланку 5. Через початок першого і кінець останнього векторів відомих сил проводимо лінії дії невідомих сил до їх перетину. Оскільки (рис. 20.2) представляє векторну суму, то кінець одного вектора є початком наступного вектора. Цим визначається напрям стрілок векторів невідомих сил. Замірявши на плані сил довжини невідомих векторів, знаходимо шукані сили

$$R_{24}^{n} = \mu_F \cdot \overline{R}_{24}^{n}; \qquad R_{65} = \mu_F \cdot \overline{R}_{65} \qquad (20.14)$$

Повну реакцію в кінематичній парі *B* R_{24} знайдемо з'єднавши початок вектора $\vec{R}_{24}^{n}$ і кінець вектора $\vec{R}_{24}^{\tau}$

$$\mathrm{R}_{24} = \mu_F \cdot \overline{R}_{24} \qquad (20.15)$$

Для знаходження реакції в обертальній кінематичній парі D (шатун 4 – повзун 5) розчленуємо групу, замінивши дію ланки 4 на ланку 5 реакцією R_{45} (відповідно, дія ланки 5 на ланку 4 реакцією R_{54}).

Запишемо умову рівноваги ланки 5:

$$\bar{G}_5+P_{u5}+R_{45}+Q+R_{65}=0 \qquad (20.16)$$

Вектор R_{45} може бути знайдений з плану сил як вектор, що замикає багатокутник сил, що діють на ланку 5 (вектор R_{54} – як вектор, що замикає багатокутник сил, що діють на ланку 4).

$$\bar{R}_{45}=-R_{54}=k_p\cdot \mathrm{l}_{\mathrm{R45}} \qquad (20.17)$$

Переходимо до групи $\mathrm{II}_1(2,3)$. Будуємо план вантаження групи.

У крапці В ланки 2 прикладаємо силу дії четвертої ланки на другу:

$$\vec{R}_{42} = -\vec{R}_{24} \qquad (20.18)$$

Умови рівноваги:

$$\Sigma P_i = 0 \qquad \vec{R}_{12}^{n} + \vec{R}_{12}^{\tau} + \vec{R}_{42} + \vec{P}_{u2} + \vec{G}_2 + \vec{P}_{u3} + \vec{G}_3 + \vec{R}_{63}^{\tau} + \vec{R}_{63}^{n} = 0 \qquad (20.19)$$

$$\Sigma M_{C2}(P_i) = 0 \qquad R_{12}^{\tau} \cdot l_{AC} - R_{42} \cdot h_{R42} \cdot k_l - P_{u2} \cdot h_{Pu2} \cdot k_l + G_2 \cdot h_{G2} \cdot k_l + M_{u2} = 0 \qquad (20.20)$$

$$\Sigma M_{C3}(P_i) = 0 \qquad R_{63}^{\tau} \cdot l_{CO1} - P_{u3} \cdot h_{Pu3} \cdot k_l + G_3 \cdot h_{G3} \cdot k_l + M_{u3} = 0 \qquad (20.21)$$

$$R_{12}^{t} = \frac{P_{u2} \cdot h_{Pu2} \cdot k_l - G_2 \cdot h_G \cdot k_l + R_{42} \cdot h_{R42} \cdot k_l - M_{u2}}{l_{AC}} \qquad (20.22)$$

$$R_{63}^{t} = \frac{P_{u3} \cdot h_{Pu3} \cdot k_l - G_3 \cdot h_{G3} \cdot k_l - M_{u3}}{l_{CO2}} \qquad (20.23)$$

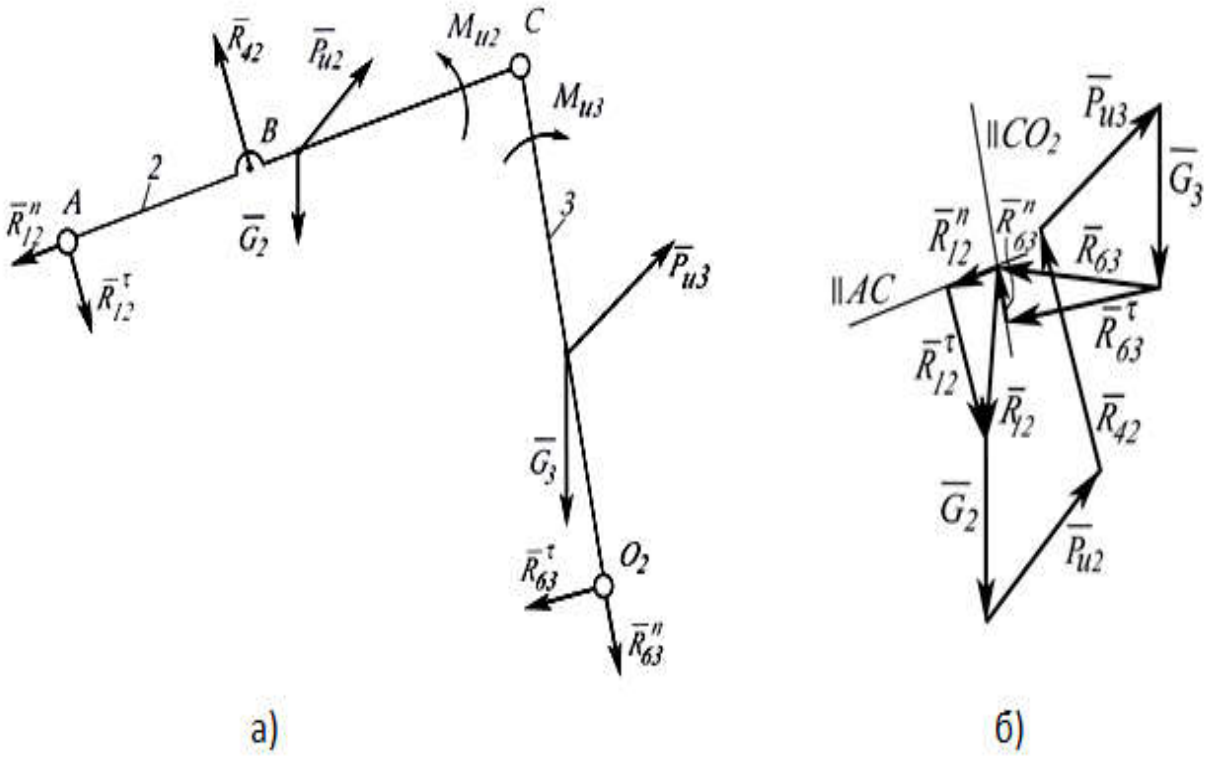


Рис. 20.3. План сил

Для знаходження R_{12}^n і R_{63}^n будуємо план сил. Методика побудови плану сил аналогічна описаною вище.

З урахуванням масштабу плану сил визначаємо $R_{12}^n, R_{12}, R_{63}^n, R_{12}$. Для знаходження реакції в обертальній кінематичній парі 3 ($R3_2$) поступаємо аналогічно описаному для знаходження $R4_5$.

$$\bar{R}_{32} = - \bar{R}_{23} = kp \cdot l \cdot R_{32} \qquad (20.24)$$

Масштаб для побудови кожного плану сил може відрізнятися від попереднього.

Кінетостатика вхідної ланки. У кінематичній парі *A* прикладаємо силу взаємодії другої ланки з першим

$$\bar{R}_{21} = - R_{12} \qquad (20.25)$$

У кінематичній парі прикладаємо силу взаємодії шостої ланки з першим R_{61}. Цей вектор може бути направлений на плані навантаження (рис.20.4 а) довільно, оскільки його напрям визначиться при побудові плану сил.

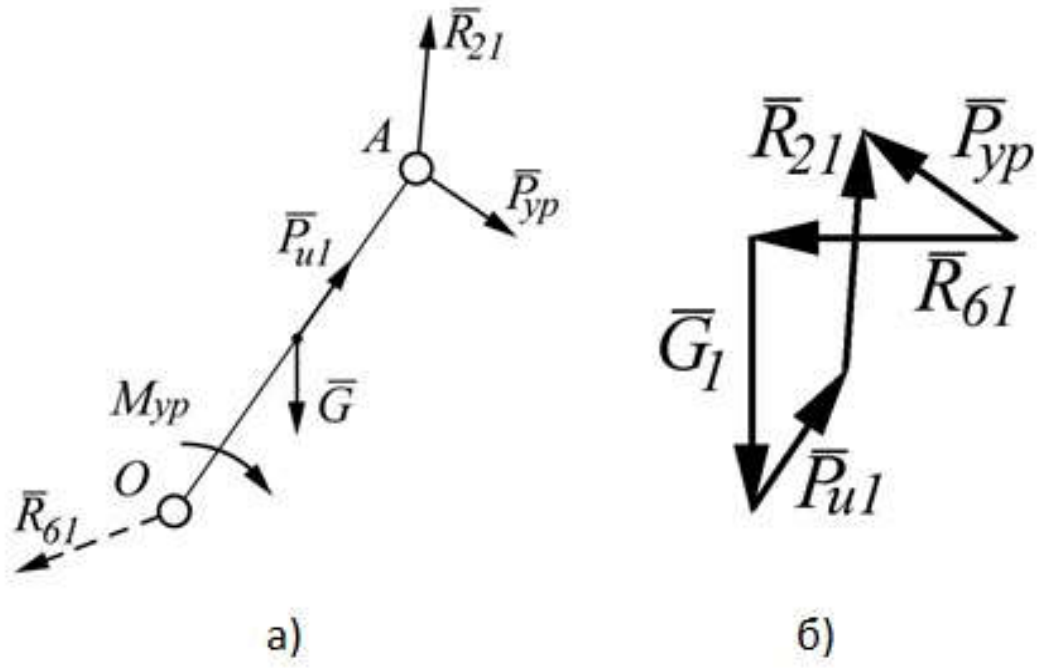


Рис. 20.4. План сил

Умови рівноваги:

$$\Sigma \overrightarrow{P_i} = 0; \quad \overrightarrow{P_{yp}} + \overrightarrow{R_{61}} + \overrightarrow{G_1} + \overrightarrow{P_{u1}} + \overrightarrow{R_{21}} = 0 \tag{20.26}$$

$$\Sigma M_O(P_i) = 0; \; M_{yp} + G_1 \cdot h_{G1} \cdot k_l + R_{21} \cdot h_{R21} \cdot k_l = 0 \tag{20.27}$$

$$M_{yp} = - G_1 \cdot h_{G1} \cdot k_l - R_{21} \cdot h_{R21} \cdot k_l \tag{20.28}$$

Вважаючи, що зрівноважуюча сила (якщо інше не обумовлене) $F_{зр}$ прикладена в точці *A,* знаходимо цю силу $F_{зр} = M_{зр}/lOA$. R_{61} знаходимо з плану сил (рис.20.4.б).

Лекція 21. Кінетостатичний аналіз груп Ассура та початкової ланки

21.1. Групи Ассура 1-го виду (ВВВ)

Група II класу 1-го виду складається з двох ланок і трьох обертальних пар: двох зовнішніх (*B*, *D*) і однієї внутрішньої (*C*). Розглянемо шарнірний чотириланковик, у якому початковою є ланка 1, а групу утворюють шатун 2 (*BC*) та коромисло 3 (*CD*). Невідомими є реакції R_{12} у шарнірі *B* і R_{03} у шарнірі *D*, тобто чотири скалярні величини.

Розрахунок виконують у такій послідовності.

1) Реакції розкладають на складові: $R_{12} = R_{12}^{n} + R_{12}^{\tau}$ (вздовж *BC* та перпендикулярно до нього), $R_{03} = R_{03}^{n} + R_{03}^{\tau}$.

2) З рівняння моментів для ланки 2 відносно шарніра *C* знаходять тангенціальну складову

$$R_{12}^{\tau} = - \Sigma M_C(F_2) / l_{BC} \tag{21.1}$$

де $\Sigma M_C(F_2)$ – сума моментів відносно точки C усіх сил (зовнішніх, ваги, сил інерції, включаючи момент $M_{Ф2}$), що діють на ланку 2, окрім самої R_{12}^{τ}; l_{BC} – довжина ланки BC.

3) Аналогічно з рівняння моментів для ланки 3 відносно C визначають R_{03}^{τ}.

4) Складають векторне рівняння рівноваги всієї групи:

$$R_{12}^{n} + R_{12}^{\tau} + Ф_2 + F_2 + Ф_3 + F_3 + R_{03}^{\tau} + R_{03}^{n} = 0 \qquad (21.2)$$

Нормальні складові R_{12}^{n} (вздовж BC) та R_{03}^{n} (вздовж CD) відомі за напрямами, а їхні величини знаходять із побудови замкненого багатокутника сил (плану сил) у вибраному масштабі μ_F (Н/мм). Послідовність дії векторів у багатокутнику повинна збігатися з порядком запису в рівнянні.

21.2. Особливості груп 2-го і 3-го видів

У групах 2-го (ВВП) і 3-го (ВПВ) видів є поступальна пара, в якій реакція перпендикулярна до напрямної, але точка її прикладення невідома. Тому в алгоритм вводять додаткове рівняння моментів.

Група 2-го виду (ВВП). Складається з шатуна 2 і повзуна 3 (кривошипно-повзунний механізм). Тангенціальну складову R_{12}^{τ} знаходять із рівняння моментів для ланки 2 відносно шарніра B. Реакція стояка R_{03} перпендикулярна до напрямної. План сил для групи будують за рівнянням

$$R_{12}^{n} + R_{12}^{\tau} + Ф_2 + F_2 + Ф_3 + F_3 + R_{03} = 0 \qquad (21.3)$$

Тут невідомі лише R_{12}^{n} (за напрямом вздовж AB) та R_{03} (за напрямом перпендикулярно до напрямної), тому багатокутник замикається. Точку прикладення R_{03} знаходять із рівняння моментів для повзуна. Реакцію в шарнірі B визначають із рівноваги повзуна: $R_{23} + Ф_3 + F_3 + R_{03} = 0$.

Група 3-го виду (ВПВ). Ланки 2 і 3 з'єднані поступальною парою; зовнішні пари – обертальні. Напрям реакції в поступальній парі відомий (перпендикулярно до напрямної), а величину й точку прикладення знаходять із рівнянь моментів, складених відносно центрів зовнішніх шарнірів.

21.3. Початкова ланка. Зрівноважувальна сила

Після розрахунку всіх груп переходять до початкового механізму: ланки 1 разом зі стояком 0. До ланки 1 у точці A прикладена сила $R_{21} = -R_{12}$, відома після розрахунку останньої групи. Крім неї, діють сила інерції та момент сил інерції кривошипа (якщо вони не дорівнюють нулю) та **зрівноважувальна сила** $P_{ур}$ – сила, яку потрібно прикласти до початкової ланки для забезпечення заданого закону її руху. Її прикладають у точці A перпендикулярно до кривошипа. Знаходять з рівняння моментів відносно шарніра O:

$$P_{ур} = (R_{21} \cdot h_{21} + Ф_1 \cdot h_{Ф} + M_{Ф1}) / l_{OA} \qquad (21.4)$$

де h_{21} і h_Φ – плечі сил R_{21} та Φ_1 відносно точки O (з урахуванням знаків моментів). Момент, що діє на вал привода, $M_{ур} = P_{ур} \cdot l_{OA}$. Реакцію стояка R_{01} знаходять із побудови векторного багатокутника сил, що діють на початкову ланку: $R_{01} + R_{21} + \Phi_1 + P_{ур} = 0$.

Якщо початкова ланка зрівноважена й обертається рівномірно, то $\Phi_1 = 0$ та $M_{\Phi 1} = 0$, і розрахунок значно спрощується.

21.4. Числовий приклад

Приклад. Для кривошипно-повзунного механізму з довжинами $r = l_{OA} = 0{,}05$ м та $l_{AB} = 0{,}20$ м ($\lambda = 0{,}25$) при $\varphi_1 = 90°$ сила тиску газів на поршень $P_3 = 23{,}56$ кН напрямлена по осі напрямної в бік кривошипа. Ваги та сили інерції не враховувати. Визначити реакції та зрівноважувальну силу.

Розв'язання. Кут нахилу шатуна: $\sin\psi = \lambda \cdot \sin\varphi_1 = 0{,}25$, $\psi = 14{,}5°$, $\cos\psi = 0{,}968$. Шатун без сил інерції та ваги є двосиловою ланкою, що навантажена тільки в шарнірах; отже, реакції R_{12} і R_{32} напрямлені вздовж AB і рівні за величиною. З рівноваги повзуна 3: проєкція на вісь напрямної $R_{23} \cdot \cos\psi = P_3$, звідки $R_{23} = 23{,}56 / 0{,}968 = 24{,}3$ кН. Нормальна реакція напрямної $R_{03} = R_{23} \cdot \sin\psi = 24{,}3 \cdot 0{,}25 = 6{,}1$ кН.

Для кривошипа сила $R_{21} = R_{23} = 24{,}3$ кН діє в точці A вздовж шатуна. Її складова вздовж осі напрямної дорівнює 23,56 кН і створює відносно точки O момент $23{,}56 \cdot 0{,}05 = 1{,}178$ кН·м. Для рівноваги кривошипа до точки A перпендикулярно до OA прикладаємо $P_{ур} = 1{,}178 / 0{,}05 = 23{,}6$ кН, тобто момент на валу $M_{ур} = 1178$ Н·м. Реакція в стояку: складові вздовж осі напрямної взаємно знищуються, залишається нормальна складова = 6,1 кН.

Силовий розрахунок виконують у порядку, зворотному до утворення механізму, – від віддаленої групи Ассура до початкової ланки. Тангенціальні складові реакцій знаходять із рівнянь моментів, нормальні – з плану сил. Результатом розрахунку початкової ланки є зрівноважувальна сила (момент) та реакція в шарнірі стояка.

Лекція 22. Теорема Жуковського про «жорсткий важіль»

22.1. Формулювання теореми

У багатьох задачах динаміки не потрібно знаходити реакції в кінематичних парах: достатньо лише зрівноважувальної сили чи моменту.

Теорема Жуковського. Якщо всі зовнішні сили (включаючи сили інерції та зрівноважувальну силу), що діють на ланки механізму, перенести в однойменні точки повернутого на 90° плану швидкостей, то цей план швидкостей можна розглядати як жорсткий важіль із віссю обертання в полюсі, і цей важіль перебуває в рівновазі, тобто алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно полюса дорівнює нулю.

Обґрунтування випливає з принципу можливих переміщень. Для механізму з одним ступенем рухомості сума миттєвих потужностей усіх сил, прикладених до його ланок, у стані рівноваги дорівнює нулю:

$$\Sigma F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i + \Sigma M_j \cdot \omega_j = 0 \qquad (22.1)$$

де v_i – швидкість точки прикладення сили F_i, α_i – кут між силою та швидкістю, M_j – момент, а ω_j – кутова швидкість відповідної ланки. Швидкості точок механізму пропорційні відрізкам плану швидкостей, що виходять із полюса: $v_i = \mu_v \cdot (p, i)$, де μ_v – масштабний коефіцієнт швидкостей. Член $F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i$ дорівнює добутку сили на проєкцію вектора швидкості на напрям сили. Якщо повернути план швидкостей на 90°, ця проєкція перетвориться на плече h_i сили F_i відносно полюса (позначення відрізків – пропорційно μ_v), і сума потужностей перетвориться на суму моментів:

$$\Sigma F_i \cdot h_i = 0 \qquad (22.2)$$

22.2. Послідовність застосування

Для визначення зрівноважувальної сили за методом Жуковського діють у такому порядку.

1) Будують у вибраному масштабі кінематичну схему механізму у заданому положенні.

2) Будують план швидкостей і повертають його на 90° у будь-який бік (як правило, проти ходу годинникової стрілки, як на рис. 22.1) так, щоб полюс залишився на місці.

3) У відповідних точках повернутого плану (однойменних із точками схеми) прикладають усі зовнішні сили, сили інерції, а також невідому зрівноважувальну силу $P_{\text{ур}}$. Напрями сил зберігають такими, як на схемі механізму (не повертаючи їх). Моменти пар (наприклад, M_Φ) замінюють парою сил, прикладених у кінцях ланки: $F = M / l$, де l – довжина ланки, на яку діє пара.

4) Сили, прикладені до ланки, але в точках, які не лежать на плані (наприклад, у центрі мас S), прикладають у точках, знайдених за теоремою подібності (лекція 11).

$$P_{\text{ур}} = (\Sigma F_i \cdot h_i) / h_{\text{ур}} \qquad (22.3)$$

де h_i – плечі сил відносно полюса (виміряні на кресленні в міліметрах), $h_{\text{ур}}$ – плече зрівноважувальної сили (у разі її прикладення в точці A перпендикулярно до кривошипа плече дорівнює відрізку (p, a)).

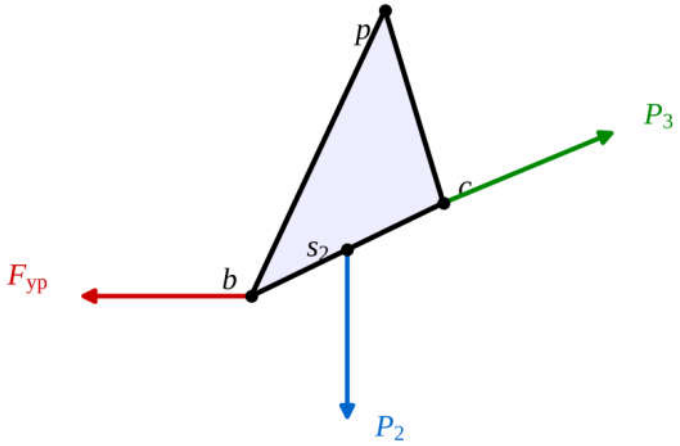


Рис. 22.1. Важіль Жуковського: повернутий на 90° план швидкостей із прикладеними силами

22.3. Числовий приклад

Приклад. Для кривошипно-повзунного механізму з попередньої лекції (r = 0,05 м, λ = 0,25, φ_1 = 90°) визначити зрівноважувальну силу методом Жуковського, якщо P_3 = 23,56 кН, кутова швидкість кривошипа ω_1 = 100 рад/с. Сили інерції та ваги не враховуємо.

Розв'язання. Швидкість точки A $v_A = \omega_1 \cdot r = 100 \cdot 0{,}05 = 5$ м/с. При $\varphi_1 = 90°$ шатун здійснює миттєво поступальний рух, тому $v_B = v_A = 5$ м/с, $\omega_2 = 0$. Приймаючи μ_v = 0,1 (м/с)/мм, одержуємо відрізки плану $(p, a) = (p, b) = 50$ мм. Після повороту плану на 90° обидва відрізки розташовані вздовж осі напрямної. Прикладаємо P_3 у точці b та $P_{ур}$ – у точці a (перпендикулярно до кривошипа). Рівняння моментів відносно полюса:

$$P_{ур} \cdot (p, a) - P_3 \cdot (p, b) = 0 \qquad (22.4)$$

звідки $P_{ур} = 23{,}56 \cdot 50 / 50 = 23{,}56$ кН. Це дорівнює значенню, знайденому в лекції 21 за методом планів сил. Момент на вхідному валу $M_{ур} = P_{ур} \cdot r = 1178$ Н·м, потужність $P = M_{ур} \cdot \omega_1 = 117{,}8$ кВт.

Для зіставлення результатів двох методів обчислюють похибку (різницю) у відсотках від значення, знайденого за теоремою Жуковського:

$$\delta_P = |P_{пл} - P_Ж| / P_Ж \cdot 100\ \% \qquad (22.5)$$

Тут $P_{пл}$ – значення за методом планів сил, $P_Ж$ – за теоремою Жуковського.

У випадку задач, у яких необхідно знайти зрівноважувальну силу або зрівноважувальний момент, а визначати реакції в кінематичних парах немає потреби, використовують теорему (метод) Жуковського. Прикладом таких задач є: визначення потужності та типу двигуна, моменту інерції маховика, характеристики регулятора та інші задачі динаміки.

Співвідношення між силами, прикладеними до ланок механізму (включаючи і сили інерції), можна дістати, застосувавши теорему Жуковського про жорсткий важіль: якщо для механізму, що перебуває в русі, побудувати план швидкостей, а потім вектори усіх активних сил та сил інерції, які прикладені в різних точках механізму, повернути на 90^0 в один і той же бік та перенести в однойменні точки плану швидкостей, то сума моментів цих сил відносно полюса буде дорівнювати нулю.

Замість сил можна повертати план швидкостей на 90°, а сили прикладати так, як вони показані на схемі механізму. Тоді теорему Жуковського можна сформулювати таким чином: *якщо до плану швидкостей, повернутого на* 90°, *у відповідних точках прикласти всі зовнішні сили (і моменти), сили інерції (і моменти сил інерції), а також зрівноважувальну силу (момент) і розглядати план швидкостей як жорсткий важіль, закріплений у полюсі, то під дією цих сил і моментів він буде перебувати в рівновазі, а сума моментів сил відносно полюса дорівнюватиме нулю.* Таким чином, рівновазі механізму відповідає рівновага повернутого плану швидкостей, який розглядається як «жорсткий важіль», що шарнірно закріплений в полюсі плану.

Доведення теореми ґрунтується на принципі можливих переміщень.

Моменти сил, що прикладені до ланок механізму найчастіше зображають у вигляді пар сил, які переносять на план швидкостей. Якщо моменти M_i, що діють на ланки механізму, переносяться на план швидкостей безпосередньо у вигляді моментів, їх величина визначається рівняння

$$M_i^0 = M_i \frac{ab}{l_{AB}}, \qquad (22.6)$$

де l_{AB}, *м* – довжина ланки, до якої прикладений момент M_i; ab, *мм* – відрізок плану швидкостей, до якого прикладається момент M_i^0. При цьому момент M_i^0 має той же знак, що і заданий момент M_i, якщо напрям відрізка *ab* (порядок літер) співпадає з напрямом відрізка *AB* схеми механізму. Якщо напрям *ab* протилежний *AB*, то моменти M_i^0 та M_i мають різні знаки.

Застосування важеля Жуковського дозволяє визначити шукану силу за допомогою тільки одного рівняння моментів. У випадку застосування методу плану сил необхідно провести повний силовий розрахунок механізму.

Відзначимо, що метод Жуковського можна застосовувати для знаходження величини будь-якої сили, якщо точка прикладання та лінія дії цієї сили задані, а також відомі лінії дії, величини та точки прикладання усіх інших сил, які діють на ланки механізму.

З наведеного випливає наступна послідовність визначення зрівноважувальної сили за способом Жуковського:

– креслять кінематичну схему механізму у заданому положенні та вибраному масштабі з прикладеними усіма зовнішніми силами. Моменти замінюють парами сил;

– будують план швидкостей, повернутий на 90^0;

– до однойменних точок повернутого плану прикладають усі зовнішні сили, сили інерції, а також зрівноважувальну силу, зберігаючи їх напрям;

– складають рівняння суми моментів усіх сил відносно полюса і визначають зрівноважувальну силу.

Приклад. За допомогою важеля Жуковського визначити $F_{зр}$ для механізму, що зображений на рис. 22.2. Згідно з умовою $F_{зр}$ прикладена в т. *A* кривошипа.

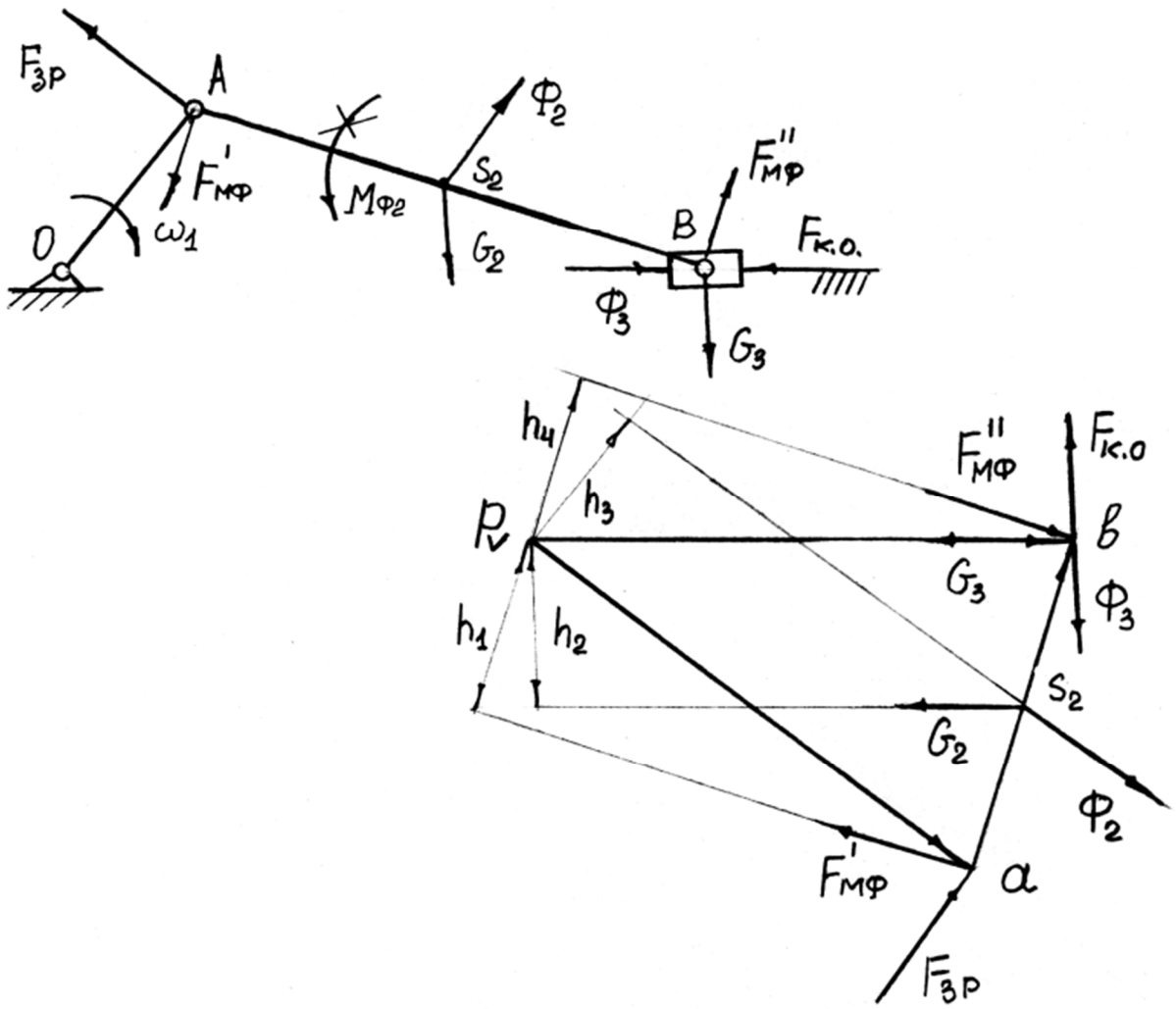


Рис. 22.2. Приклад визначення зрівноважувальної сили

У довільному масштабі будуємо план швидкостей. Прикладаємо у відповідних точках плану швидкостей всі сили, повернуті на 90^0 за рухом стрілки годинника. При цьому моменти $M_{\Phi 2}$ замінюємо парою сил $F'_{M\Phi}$ *і* $F''_{M\Phi}$, що прикладені в точках *A* та *B*, зі збереженням напрямку моменту

$$F'_{M\Phi} = F''_{M\Phi} = \frac{M_{\Phi 2}}{l_{AB}} \qquad (22.7)$$

Складаємо рівняння моментів відносно полюса плану швидкостей

$$\sum M_{Pv}(F) = 0,\ F_{ЗР} p_v a - F'_{M\Phi} h_1 - G_2 h_2 - \Phi_2 h_3 + F_{KO} p_v b - \Phi_3 p_v b - F''_{M\Phi} h_4 = 0. \qquad (22.8)$$

Звідки

$$F_{ЗР} = \frac{F'_{M\Phi} h_1 + G_2 h_2 + \Phi_2 h_3 - F_{KO} p_v b + F''_{M\Phi} h_4 + \Phi_3 p_v b}{p_v a}. \qquad (22.9)$$

Якщо при розв'язку даного рівняння сила $F_{ЗР}$ додатня, то це означає, що її напрям вибрано правильно. При від'ємному значенні правої частини напрям сили $F_{ЗР}$ треба змінити на протилежний.

22.4. Можливості й обмеження методу

Водночас метод має обмеження. Він не дає реакцій у кінематичних парах, а тому не придатний для розрахунку на міцність. Він не враховує сил тертя, якщо їх не прикласти як зовнішні сили, оскільки за ідеальних в'язей робота реакцій дорівнює нулю. У разі врахування тертя спочатку знаходять зрівноважувальну силу для ідеального механізму, а потім – за допомогою механічного ККД η переходять до реальної: $P_{\text{ур}}^{\text{реальна}} = P_{\text{ур}} / \eta$.

Теорема Жуковського зводить силовий розрахунок механізму до розгляду рівноваги повернутого плану швидкостей як жорсткого важеля. Метод дозволяє знайти зрівноважувальну силу одним рівнянням моментів і є ефективним способом перевірки результатів кінетостатики. Реакції в парах він не визначає, а тертя враховується окремо через механічний ККД.

Лекція 23. Тертя в кінематичних парах. Механічний ККД

23.1. Види тертя

За характером відносного руху розрізняють тертя ковзання, коли поверхні ковзають одна по одній, і тертя кочення, коли одне тіло перекочується по іншому. У інженерних розрахунках найчастіше користуються моделлю сухого тертя, яку описує закон Кулона–Амонтона: сила тертя ковзання пропорційна нормальній реакції в точці контакту й напрямлена проти відносної швидкості:

$$F_{\text{т}} = f \cdot N \qquad (23.1)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання, що залежить від матеріалів пари, стану поверхонь, мастила й температури. Орієнтовні значення наведено в таблиці 23.1.

Таблиця 23.1. Орієнтовні коефіцієнти тертя ковзання для технічних поверхонь

Пара матеріалів	Стан поверхонь	Коефіцієнт f
Сталь по сталі	без змащення	0,15–0,20
Сталь по сталі	з мастилом	0,05–0,10
Сталь по чавуну	без змащення	0,15–0,25
Сталь по бронзі	з мастилом	0,04–0,10
Гума по бетону або ґрунту	суха	0,6–0,8
Шкіра чи фрикційна накладка по чавуну	суха	0,25–0,45

Результуючу реакцію R, що складається з нормальної N та сили тертя $F_т$, відхилено від нормалі на кут тертя ρ:

$$f = \operatorname{tg} \rho \tag{23.2}$$

Так само, як існує кут тертя, вводять поняття **конуса тертя** – геометричного місця положення результуючої реакції, що проходить через точку контакту і створює з нормаллю кут ρ. Якщо рушійна сила розташована всередині конуса тертя, тіло не зрушується з місця, яким би великим не було її значення. Це явище називають **самогальмуванням**.

23.2. Тертя ковзання: похила площина, клин, гвинт

Розглянемо повзун вагою G на похилій площині з кутом нахилу α, який переміщується вгору під дією горизонтальної сили F. За наявності тертя результуюча реакція відхилена від нормалі до площини на кут ρ, і з умови рівноваги трьох сил отримуємо

$$F = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \rho) \tag{23.3}$$

Якщо рух відбувається вниз, то $F = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \rho)$. Коли $\alpha \le \rho$, сила F стає недодатною – тіло самостійно вниз не ковзає: настає самогальмування.

Гвинтову пару із прямокутною різьбою розглядають як повзун, що рухається по похилій площині, яка є розгорткою гвинтової лінії на середньому діаметрі d_2. Кут підйому різьби визначається кроком різьби S:

$$\operatorname{tg} \psi = S / (\pi \cdot d_2) \tag{23.4}$$

Момент, який потрібно прикласти до гвинта, щоб піднімати вантаж Q, дорівнює

$$M = Q \cdot (d_2 / 2) \cdot \operatorname{tg}(\psi + \rho) \tag{23.5}$$

Приклад. Гвинт з прямокутною різьбою середнім діаметром $d_2 = 20$ мм і кроком $S = 3$ мм піднімає вантаж $Q = 10$ кН. Коефіцієнт тертя $f = 0{,}12$. Визначити момент на гвинті та ККД.

Розв’язання. $\operatorname{tg} \psi = 3 / (\pi \cdot 20) = 0{,}0477$, $\psi = 2{,}73°$. Кут тертя $\rho = \operatorname{arctg} 0{,}12 = 6{,}84°$. Сума $\psi + \rho = 9{,}57°$, $\operatorname{tg} 9{,}57° = 0{,}169$. Момент $M = 10\,000 \cdot 0{,}010 \cdot 0{,}169 = 16{,}9$ Н·м. Без тертя момент був би $M_0 = 100 \cdot 0{,}0477 = 4{,}77$ Н·м, отже ККД $\eta = M_0 / M = 0{,}28$. Оскільки $\psi < \rho$, пара самогальмівна: вантаж не опускається під власною вагою, що характерно для домкратів і затискних гвинтів, але зумовлює низький ККД.

23.3. Тертя в обертальній парі

В обертальній парі (підшипнику ковзання) вал радіусом r притискається до вкладиша реакцією R. У нерухомому стані результуюча реакція проходить через центр шарніра; при обертанні вона зміщується, оскільки вал піднімається по вкладишу й контактує з ним у точці, відхиленій від вертикалі. У результаті лінія дії реакції проходить на відстані

$$\rho_т = f \cdot r \tag{23.6}$$

від центра шарніра (формула наближена, дійсна для малих кутів тертя). Коло радіусом $\rho_т$, що проводиться з центра шарніра, називають **колом тертя**. Лінія дії реакції в обертальній парі завжди дотична до кола тертя, а її момент відносно осі шарніра

$$M_т = R \cdot \rho_т \qquad (23.7)$$

спрямований проти відносного обертання. Користуючись колом тертя, зручно виконувати силовий розрахунок із врахуванням тертя: в обертальній парі реакцію проводять дотично до кола тертя так, щоб її момент протидіяв відносному кутовому руху. Для упорних підшипників (п'яти) з тертям на кільцевій поверхні моментом тертя є $M_т = (2/3) \cdot f \cdot N \cdot r$ для суцільної п'яти при рівномірному тиску та $M_т = f \cdot N \cdot (R_1 + R_2) / 2$ для кільцевої з рівномірним зношуванням.

23.4. Тертя кочення

Під час кочення циліндра чи колеса по площині нормальна реакція внаслідок деформації поверхні зміщується від лінії, що проходить через центр, у бік руху на відстань k (коефіцієнт тертя кочення, що має розмірність довжини). Момент опору коченню дорівнює $M_k = k \cdot N$, а відповідна сила, прикладена на колесо радіусом r,

$$F_k = k \cdot N / r \qquad (23.8)$$

Для сталевого колеса по рейці $k = 0{,}05$ мм, для пневматичної шини по твердому покриттю – 2–5 мм, по м'якому ґрунту – до 50 мм і більше. Саме велике значення k при русі по ріллі та стерні є причиною значних витрат потужності на самопересування сільськогосподарських машин.

23.5. Механічний ККД

Частина енергії, яка надходить у машину, витрачається на подолання шкідливих опорів. Відношення роботи (потужності) корисного опору до роботи (потужності) рушійних сил за період усталеного руху називають **механічним коефіцієнтом корисної дії**:

$$\eta = A_к / A_д = 1 - A_т / A_д \qquad (23.9)$$

де $A_к$ – робота сил корисного опору, $A_д$ – робота рушійних сил, $A_т$ – робота сил шкідливого опору (тертя). При послідовному з'єднанні механізмів, коли потужність передається від двигуна через k ланок (наприклад, пасова передача, редуктор, підшипники), загальний ККД дорівнює добутку ККД окремих механізмів:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \ldots \cdot \eta_k \qquad (23.10)$$

Наприклад, для привода з пасовою ($\eta = 0{,}95$) та двома зубчастими (по 0,97) передачами $\eta = 0{,}95 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}97 = 0{,}89$. При паралельному розгалуженні потоку потужності, коли машина складається з окремих гілок, що споживають потужності P_i з ККД η_i, ККД визначають за формулою

$$\eta = \Sigma P_i / \Sigma (P_i / \eta_i) \qquad (23.11)$$

ККД зубчастої передачі становить 0,96–0,99, ланцюгової 0,92–0,97, черв'ячної 0,5–0,9, пара підшипників ковзання 0,95–0,99. Значення $\eta \le 0$ означає, що рух механізму в заданому напрямі неможливий – настає самогальмування.

Тертя визначає втрати енергії та працездатність кінематичних пар. Силу тертя ковзання описує закон Кулона, а в обертальній парі її враховують колом тертя. Тертя кочення значно менше за тертя ковзання. Механічний ККД характеризує втрати енергії та визначається як добуток ККД окремих ланок при послідовному з'єднанні.

Лекція 24. Динамічна модель машинного агрегату. Зведення сил і мас

24.1. Машинний агрегат та його динамічна модель

Машинний агрегат – це технічна система, що складається з двигуна, передавального механізму та робочої машини, які об'єднані в одне ціле й працюють спільно. Тому застосовують метод зведення, який дозволяє замінити реальний агрегат з багатьма ступенями рухомості еквівалентною простою динамічною моделлю з одним ступенем рухомості.

Для механізму з $W = 1$ положення всіх ланок однозначно визначається положенням однієї з них. Цю ланку називають **ланкою зведення** (початковою ланкою). Зазвичай це кривошип або головний вал, що обертається; його узагальнена координата – кут повороту φ_1, а швидкість – ω_1. Динамічна модель – це умовна обертальна ланка з моментом інерції $J_{зв}$, на яку діє зведений момент $M_{зв}$. Модель має ту саму кінетичну енергію й ту саму потужність, що й реальний агрегат. Тоді рівняння руху агрегату зводиться до рівняння руху одного тіла, що значно спрощує розрахунок.

24.2. Зведення сил і моментів

Зведеним моментом $M_{зв}$ називають момент, прикладений до ланки зведення, потужність якого дорівнює сумі потужностей усіх сил і моментів, що діють на ланки механізму. Умову рівності потужностей записують у вигляді:

$$M_{зв} \cdot \omega_1 = \Sigma F_i \cdot v_i \cdot \cos \alpha_i + \Sigma M_j \cdot \omega_j \qquad (24.1)$$

звідки

$$M_{зв} = \Sigma F_i \cdot \cos \alpha_i \cdot (v_i / \omega_1) + \Sigma M_j \cdot (\omega_j / \omega_1) \qquad (24.2)$$

Тут F_i – сили, прикладені до ланок у точках зі швидкостями v_i; α_i – кути між напрямами сил і швидкостей; M_j – моменти, що діють на ланки, які обертаються з кутовими швидкостями ω_j. Відношення v_i/ω_1 і ω_j/ω_1 є **аналогами швидкостей**; їх визначають із планів швидкостей або аналітично, і вони залежать тільки від положення механізму, але не від ω_1. Тому $M_{зв}$ – функція положення (φ_1); у разі, коли сили залежать також від швидкості (характеристика двигуна), $M_{зв}$ залежить і від ω_1.

Зведений момент може бути як додатним (зведений рушійний момент $M_{зв.д}$), так і від'ємним (зведений момент опору $M_{зв.с}$). Зведення можна

виконувати і до поступально рухомої ланки; тоді замість моменту знаходять **зведену силу** $F_{зв}$ з умови рівності потужностей: $F_{зв} \cdot v = \Sigma P$.

24.3. Зведення мас

Зведеним моментом інерції $J_{зв}$ називають момент інерції ланки зведення, кінетична енергія якого дорівнює кінетичній енергії всього механізму. Кінетична енергія ланки зі складним рухом дорівнює $m_i \cdot v_{Si}^2 / 2 + J_{Si} \cdot \omega_i^2 / 2$. Запишемо рівність енергій:

$$J_{зв} \cdot \omega_1^2 / 2 = \Sigma \left(m_i \cdot v_{Si}^2 / 2 + J_{Si} \cdot \omega_i^2 / 2 \right) \qquad (24.3)$$

Звідси зведений момент інерції

$$J_{зв} = \Sigma \left[m_i \cdot (v_{Si} / \omega_1)^2 + J_{Si} \cdot (\omega_i / \omega_1)^2 \right] \qquad (24.4)$$

Для кривошипно-повзунного механізму ця формула набуває вигляду:

$$J_{зв} = J_1 + J_{S2} \cdot (\omega_2 / \omega_1)^2 + m_2 \cdot (v_{S2} / \omega_1)^2 + m_3 \cdot (v_B / \omega_1)^2 \qquad (24.5)$$

де J_1 – момент інерції кривошипа (з урахуванням ротора, маховика та інших ланок, жорстко з'єднаних із ним), m_2, J_{S2} – маса й момент інерції шатуна, m_3 – маса повзуна. Аналоги швидкостей змінюються з положенням механізму, тому $J_{зв}$ під час руху змінюється, за винятком постійних складових. Для ланок, що обертаються з постійним передавальним відношенням, момент інерції $J_{зв}$ постійний: для зубчастої передачі $J_{зв} = J_1 + J_2 \cdot u^{-2}$, де $u = \omega_1/\omega_2$. Аналогічно для зведення маси до поступально рухомої ланки B вводять **зведену масу** $m_{зв} = \Sigma \left[m_i \cdot (v_{Si}/v_B)^2 + J_{Si} \cdot (\omega_i/v_B)^2 \right]$.

24.5 Зведення сил

При динамічному дослідженні руху механізмів зручно всі сили (моменти сил), що діють на різні ланки механізму, замінити однією силою або моментом сил, які прикладають до однієї з ланок механізму. Така сила, що замінює всі інші, називається *зведеною силою,* момент – *зведеним моментом,* а ланка – *ланкою зведення.*

Оскільки більшість механізмів, які входять до складу агрегату, представляють систему яка має один ступінь вільності, то можна стежити за рухом агрегату по руху однієї ланки, так званої *головної* або *ланки зведення.*

Координати, що визначають положення головної ланки (кутові і лінійні) називаються *узагальненими координатами* в рівнянні руху агрегату.

Така заміна буде еквівалентною, якщо робота (або потужність) зведеної сили (моменту сили) на деякому можливому переміщенні точки її прикладання дорівнює сумі робіт прикладених до механізму сил на тому самому переміщенні їх точок прикладання. Це і є *умовою зведення сил* або *моментів сил*. На практиці частіше використовується рівність потужностей:

$$P_{зв} = \sum_{i=1}^{n} P_i \qquad (24.6)$$

де $P_{зв}$, P_I відповідно потужності, які розвиває зведена сила (момент) і сили (моменти), що діють на ланку *i.*

Тут $P_{зв} = F_{зв}\upsilon_{зв}\cos\alpha$ або $P_{зв} = M_{зв}\omega_{зв}$

$$\sum_{ш=1}^{m} P_i = \sum_{i=1}^{n} F_i\upsilon_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} M_i\omega_i \qquad (24.7)$$

У формулах (24.7): $F_{зв}$ – зведена сила, $\upsilon_{зв}$ – швидкість точки прикладання зведеної сили, α – кут між напрямками векторів $\overline{F}_{зв}$ і $\overline{\upsilon}_{зв}$ $M_{зе}$ – зведений момент сил; $\omega_{зв}$ – кутова швидкість ланки зведення; F_i, M_i. – сила або момент сили, які прикладені до і–тої ланки; υ_i – швидкість точки, в якій прикладена сила F_i, α –кут між напрямком векторів $\overline{F}_i$ та $\overline{\upsilon}_i$; ω_i – кутова швидкість і–тої ланки.

24.6. Зведення мас

При динамічному дослідженні руху механізмів маси і моменти інерції всіх ланок також зручно замінити *зведеною масою* $m_{зв}$ або *зведеним моментом інерції* $M_{зв}$. При цьому необхідно, щоб кінетична енергія зведеної маси (моменту інерції) у відповідних положенням механізму дорівнювала сумі кінетичних енергій всіх ланок цього механізму, тобто

$$T_{зв} = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad (24.8.)$$

де T_i – кінетична енергія і–ої ланки: $T_{зв}$ – кінетична енергія ланки зведення

$$T_{зв} = \frac{m_{зв}\upsilon_{зв}^2}{2} \text{ або } T_{зв} = \frac{J_{зв}\omega_{зв}^2}{2} \qquad (24.9)$$

Якщо ланка здійснює:

обертовий рух $T_i = \dfrac{J_{O_i}\omega_i^2}{2}$ (24.10)

складний рух $T_i = \dfrac{m_i\upsilon_{S_i}^2}{2} + \dfrac{J_{S_i}\omega_i^2}{2}$ (24.11)

де m_i – маса і–ої ланки, υ_{S_i} – швидкість центра мас *i–ої* ланки; J_{O_i} – момент інерції ланки відносно осі, що проходить через її центр обертання; ω_i – кутова швидкість цієї ж ланки; J_{S_i} – момент інерції ланки відносно осі, що проходить через центр мас відповідної ланки. Тоді

$$J_{O_i} = J_{S_i} + m_i l_{O_i S_i}^2 \qquad (24.12)$$

24.5. Рівняння руху механізму

Для механізмів, які мають ступінь рухомості W=1, досить встановити закон руху однієї ланки (зведення), як правило, це початкова ланка. При цьому ***записують рівняння руху механізму,*** під яким розуміють аналітичну залежність між швидкістю руху ланки зведення, силами і масами ланок механізму, що також зводять до ланки зведення.

Рівняння руху одержують, використовуючи теорему *про зміну кінетичної енергії*, згідно з якою зміна кінетичної енергії механічної системи за будь-який проміжок часу дорівнює сумі робіт усіх прикладених сил, що діють на цю систему протягом цього ж проміжку часу, тобто

$$\Delta T = T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (24.13)$$

де $T = m_{зв}\upsilon_{зв}^2/2,\ \ T_0 = m_{зв.0}\upsilon_{зв.0}^2/2$ – кінетичні енергії механічної системи відповідно в кінці і на початку проміжку часу, який ми розглядаємо; $\sum_{i=1}^{n} A_i$ – сума робіт усіх прикладених до системи сил (моментів сил).

Рівняння руху записують у *енергетичній формі* (інтеграла енергії):

$$\frac{m_{зв}\upsilon_{зв}^2}{2} - \frac{m_{зв.0}\upsilon_{зв.0}^2}{2} = A_p - A_{ко} - A_{шо} \qquad (24.14)$$

і диференціальній формі:

$$F_{зв} = m_{зв} a_{зв} + \frac{\upsilon_{зв}^2}{2}\frac{dm_{зв}}{ds} \qquad (24.15)$$

де $A_р$, $A_{ко}$, $A_{шо}$ – відповідно роботи рушійних сил, сил корисного опору та сил шкідливого опору, $F_{зв}$ – зведена сила, s, $\upsilon_{зв}$, $a_{зв}$ – відповідно переміщення, швидкість та прискорення ланки зведення.

Якщо ланка зведення здійснює обертовий рух, то залежності приймають вигляд:

$$\frac{J_{зв}\omega_{зв}^2}{2} - \frac{J_{зв.0}\omega_{зв.0}^2}{2} = A_p - A_{ко} - A_{шо} \qquad (24.16)$$

$$M_{зв} = J_{зв}\varepsilon_{зв} + \frac{\omega_{зв}^2}{2}\frac{dJ_{зв}}{d\varphi} \qquad (24.17)$$

Тут $M_{зв} = M_p - M_0$ – зведений момент сил, $\varepsilon_{зв}$ – кутове прискорення ланки зведення. Нагадуємо, що роботу можна записати:

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F ds \cos\alpha \quad \text{або} \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \qquad (24.18)$$

де α – кут між напрямком дії сили $\overline{F}$ і переміщенням ланки $\overline{S}$ *(кут тиску).*

Режими руху механізму. У роботі механізму (машини) відрізняють три характерні періоди руху:

а) період розбігу;

б) період усталеного руху;

в) період вибігу.

В період розбігу (пуск машини) швидкість руху початкової ланки зростає від нуля ($\upsilon_{зв}=0$) до деякої середньої (робочої) швидкості ($\upsilon_{зв}=\upsilon_р$).

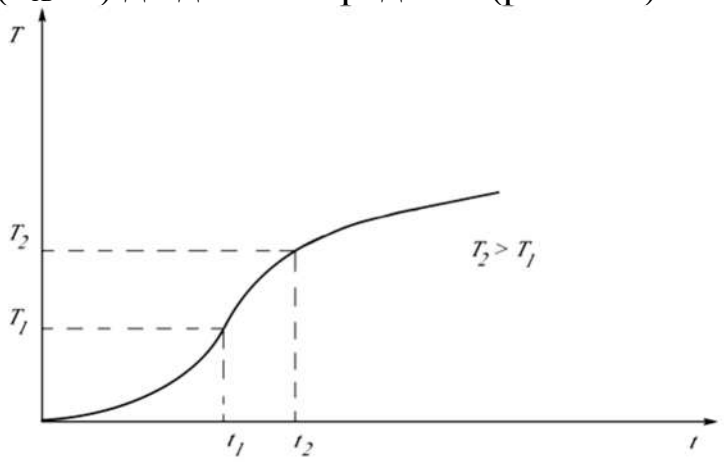


Рис. 24.1. Графік руху машини в період пуску

Такий рух характеризується безперервним зростанням кінетичної енергії, а отже швидкості і прискорення, що в свою чергу веде до зростання сил інерції і може викликати поломку. Такий рух звичайно короткочасний.

Рівняння руху механізму приймає вигляд:

$$\frac{m_{зв}\upsilon_p^2}{2} = A_p - A_{ко} - A_{шо} \qquad (24.19)$$

Враховуючи, що $m_{зв}\upsilon_p^2 / 2 > 0$, то для періоду пуск механізму справедлива така нерівність:

$$A_p > A_{ко} + A_{шо} \qquad (24.20)$$

З цього випливає, що *в період пуску машини (механізму) робота рушійних сил має бути більшою за суму робіт сил опору.* Надлишок роботи рушійних сил витрачається на збільшення кінетичної енергії машини, тобто збільшення швидкості рухомих мас.

Часто для скорочення часу пуску машини знімають з неї корисне навантаження *($A_{ко}=0$).* Рух машини без корисного навантаження називають *холостим ходом машини.* При *усталеному русі* машини швидкість

початкової ланки (головного вала) коливається навколо середнього значення, яке відповідає робочій швидкості цієї ланки. Проміжок часу, по закінченні якого положення, швидкості і прискорення початкової ланки механізму набирають початкового значення, називають періодом зміни кінетичної енергії механізму або *циклом* $t_ц$ усталеного руху. Швидкості на початку і в кінці циклу усталеного руху рівні між собою ($\upsilon_{зв.0} = \upsilon_{зв} = \upsilon_p$ *).*

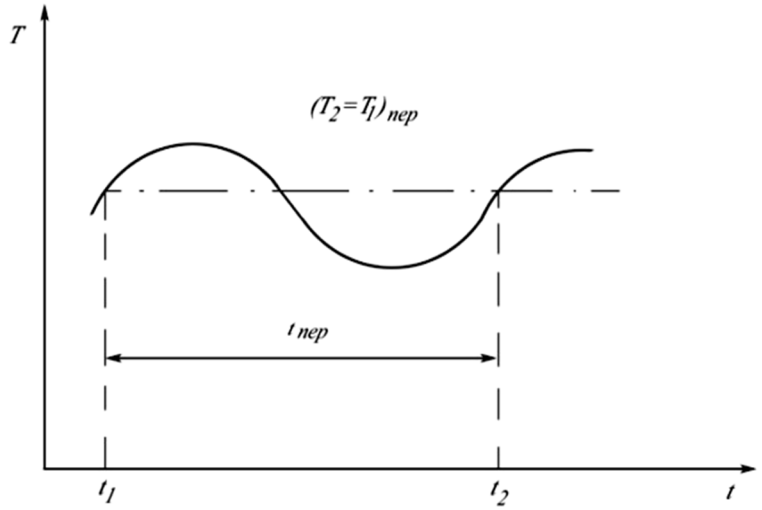


Рис. 24.2. Графік усталеного руху машини

Тоді рівняння руху має вигляд:

$$A_p = A_{ко} + A_{шо} \qquad (24.21)$$

Отже, *при усталеному русі механізму (машини) робота рушійних сил за один цикл дорівнює сумі робіт сил корисного і шкідливого опорів.* У середині циклу ця рівність може не зберігатися, а тому мають місце коливання швидкості початкових ланок механізму ($\omega \neq const$).

При *вибігу* машини перш за все треба зупинити подачу рушійної енергії машині, тобто відключити двигун ($A_р$ =0).

Кінцевим станом машини буде спокій ($\upsilon_{зв} - 0, \quad \upsilon_{зв.0} = \upsilon_p$).

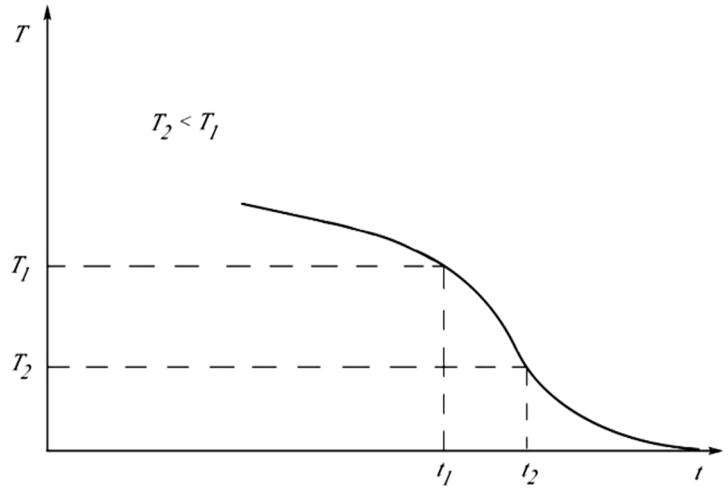


Рис. 24.3. Графік машини в стані спокою

Тоді рівняння руху приймає вигляд:

$$\frac{m_{зв}\upsilon_p^2}{2} = A_{ко} + A_{шо} \qquad (24.22)$$

Отже, зупинка машини буде досягнута лише тоді, коли вся нагромаджена кінетична енергія рухомих мас буде поглинута роботою сил корисного і шкідливого опорів.

На практиці для скорочення часу зупинки дуже часто штучно збільшують роботу сил шкідливого опору за допомогою установки гальм.

24.6. Механічний коефіцієнт корисної дії

Механічним коефіцієнтом корисної дії (ККД) називається відношення роботи сил корисного опору до роботи рушійних сил за цикл усталеного руху, тобто

$$\eta = A_{ко} / A_p < 1 \qquad (24.23)$$

Відношення сил шкідливого опору до роботи рушійних сил називається *коефіцієнтом втрат:*

$$\psi = A_{шо} / A_p \qquad (24.24)$$

Оскільки для усталеного руху $A_{шо} = A_p - A_{ко}$, то $\eta = 1 - \psi$

ККД машини або механізму може змінюватись в межах $0 \le \eta \le 1$.

Треба мати на увазі, що механічний ККД і коефіцієнт втрат не дають повної характеристики машини. Вони характеризують лише *ефективність використання енергії в машині.* Під час руху машини ККД і коефіцієнт втрат, як правило, не залишаються сталими. Тому відрізняють ***миттєвий*** **і** ***цикловий ККД.*** Перший обчислюється для відповідного положення механізму, другий можна знайти як середнє значення миттєвих ККД за один цикл руху механізму.

ККД машини. Загальний ККД машини $\eta_{заг}$ залежить не тільки від ККД окремих механізмів η_i (i=1,2,3,...,n), що входять у її склад, але від способу їх з'єднання. Відрізняють три способи з'єднання механізмів у машині: послідовне, паралельне та змішане. При *послідовному з'єднанні механізмів* загальний механічний ККД машини дорівнює добуткові механічних ККД окремих механізмів, що утворюють машину, тобто

$$\eta_{заг} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 .. \eta_n \qquad (24.25)$$

Отже, чим складніша машина, тим нижчий загальний її ККД, причому він завжди менший за найменший ККД механізму, що входить у її склад ($\eta_{заг} < \eta_{min}$) При **паралельному з'єднанні механізмів** загальний ККД залежить не лише від ККД окремих механізмів, але і від характеру розподілу енергії між механізмами і визначається за формулою:

$$\eta_{заг} = \frac{\sum A_i \eta_i}{\sum A_i} = \frac{A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + ... + A_n\eta_n}{A_1 + A_2 + ... + A_n} \qquad (24.26)$$

де A_i – робота рушійних сил, яка приводить в рух відповідний механізм, η_i – ККД відповідного механізму. З формули (24.26) випливає, що *загальний ККД машини буде тим більшим, чим більша частина роботи рушійних сил надходить в механізм з найбільшим ККД і, навпаки, загальний ККД буде найменшим, чим більша частина роботи рушійних сил надходить в механізм з найменшим ККД*. При паралельному з'єднанні – $\eta_{min} \le \eta_{заг} \le \eta_{max}$.

При ***змішаному з'єднанні механізмів*** використовуємо загальну формулу:

$$\eta_{заг} = A_{ко} / A_{р} = \sum_{i=1}^{n} A_i \eta_i / \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (24.27)$$

Лекція 25. Рівняння руху машинного агрегату. Режими руху

25.1. Рівняння руху в енергетичній формі

Закон руху машинного агрегату встановлює залежність кутової швидкості ланки зведення від часу або від кута повороту. Його виводять із теореми про зміну кінетичної енергії: приріст кінетичної енергії механізму на певному шляху дорівнює сумі робіт усіх сил за цей же шлях. Для моделі з ланкою зведення

$$\int (M_д - M_c) \, d\varphi = J \cdot \omega^2 / 2 - J_0 \cdot \omega_0^2 / 2 \qquad (25.1)$$

Інтегрування виконується від початкового положення φ_0 до поточного φ; $M_д$ – зведений рушійний момент, M_c – зведений момент опору (включаючи корисні та шкідливі), J та J_0 – зведені моменти інерції у поточному й початковому положеннях, ω і ω_0 – відповідні кутові швидкості. Ліва частина – різниця робіт рушійних сил $A_д$ та сил опору A_c,

права – приріст кінетичної енергії $T - T_0$. Розв’язавши рівняння відносно кутової швидкості, отримують

$$\omega = \sqrt{\left[(J_0 \cdot \omega_0^2 + 2 \cdot (A_д - A_c)) / J \right]} \qquad (25.2)$$

Це співвідношення дозволяє визначити швидкість у кожному положенні, якщо відомі $J(\varphi)$ та роботи сил.

25.2. Диференціальна форма рівняння

Продиференціювавши рівняння енергії за кутом φ та врахувавши, що $d\omega/dt = \varepsilon$ та $dT/d\varphi = M_д - M_c$, отримують диференціальне рівняння руху

$$J \cdot d\omega/dt + (\omega^2 / 2) \cdot dJ/d\varphi = M_д - M_c \qquad (25.3)$$

Другий доданок враховує зміну моменту інерції зведеної моделі під час руху, що притаманно механізмам із змінними аналогами швидкостей (кривошипно-повзунним, кулісним). Якщо $J = \text{const}$, то $dJ/d\varphi = 0$, і рівняння набуває вигляду рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої осі:

$$J \cdot \varepsilon = M_д - M_c \qquad (25.4)$$

Кутове прискорення додатне, коли рушійний момент більший за момент опору, і від’ємне – у протилежному випадку. У загальному разі $M_д$ та M_c залежать від положення та швидкості, і рівняння розв’язують чисельно (наприклад, методом Ейлера чи Рунге–Кутта) або графоаналітично.

25.3. Режими руху машини

У роботі машинного агрегату виділяють три періоди (рис. 25.1).

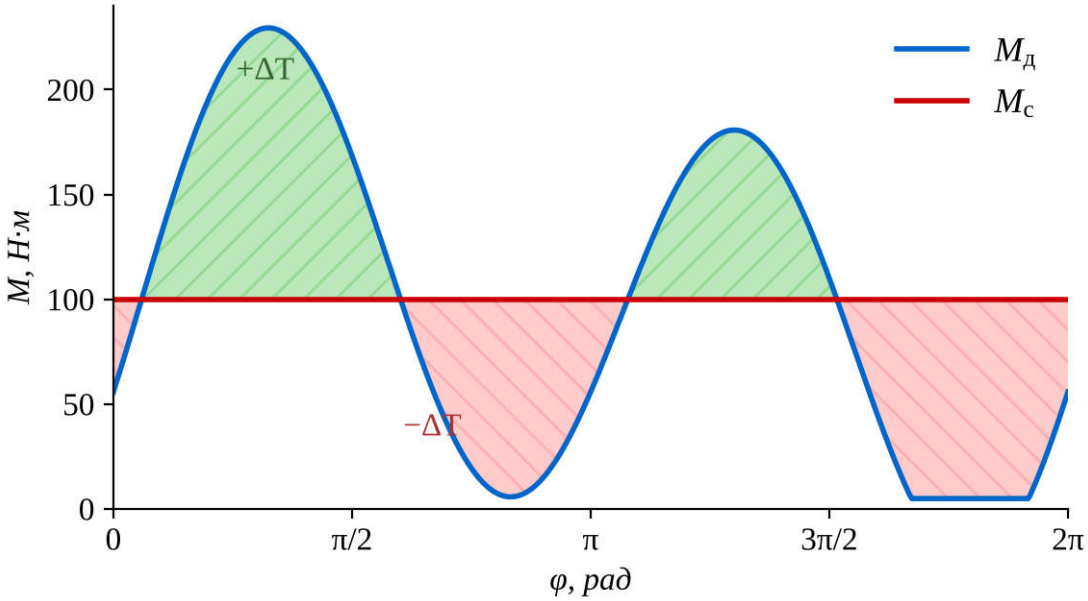


Рис. 25.1. Графіки зведених моментів рушійних сил та сил опору за цикл усталеного руху

Розбіг (пуск). Двигун розвиває момент, що перевищує момент опору: $A_д > A_c$. Надлишок роботи йде на збільшення кінетичної енергії, швидкість ланки зведення зростає від нуля до робочого значення. У разі сталих моментів та J, з рівняння $J \cdot \varepsilon = M_д - M_c$ час розбігу від ω_0 до ω становить

$$t = J \cdot (\omega - \omega_0) / (M_д - M_c) \qquad (25.5)$$

Усталений рух. Агрегат працює з середньою кутовою швидкістю $\omega_{ср}$, що залишається незмінною від циклу до циклу, хоча в межах циклу швидкість коливається. Робота рушійних сил за цикл дорівнює роботі сил опору (корисного та шкідливого): $A_д = A_c$, або $\oint(M_д - M_c)\,d\varphi = 0$. Приріст кінетичної енергії за цикл дорівнює нулю, а початкові й кінцеві значення ω та J однакові. Тривалість циклу (період) $T_ц$ відповідає куту повороту ланки зведення $\varphi_ц$: для двотактного поршневого двигуна $\varphi_ц = 2\pi$, для чотиритактного – 4π, для кривошипного преса за один хід – 2π. Середню кутову швидкість визначають як

$$\omega_{ср} = (\omega_{max} + \omega_{min}) / 2 \qquad (25.6)$$

і для приблизних розрахунків ототожнюють із номінальною кутовою швидкістю $\omega_{ном} = \pi \cdot n / 30$.

Вибіг (зупинка). Привод відключено, або навантаження збільшено: $A_д < A_c$. Кінетична енергія зменшується до зупинки. Якщо двигун вимкнено ($M_д = 0$) і момент опору M_c сталий, то час вибігу від ω до нуля дорівнює $t = J \cdot \omega / M_c$. Вибіг використовують для визначення втрат в агрегаті та підбору гальм.

25.4. Приклади

Приклад 1 (розбіг). Агрегат має зведений момент інерції $J = 2$ кг·м^2. Зведений рушійний момент 100 Н·м, зведений момент опору 60 Н·м вважати сталими. Визначити час розбігу до $\omega = 100$ рад/с (з нуля) та кут повороту за цей час.

Розв'язання. Надлишковий момент $M_д - M_c = 40$ Н·м. Кутове прискорення $\varepsilon = 40 / 2 = 20$ рад/с^2. Час розбігу $t = 100 / 20 = 5$ с. Кут повороту $\varphi = \omega^2 / (2\varepsilon) = 10\,000 / 40 = 250$ рад, тобто близько 39,8 оберту. Перевірка за енергією: $A = 40 \cdot 250 = 10\,000$ Дж; $T = 2 \cdot 100^2 / 2 = 10\,000$ Дж.

Приклад 2 (вибіг). Після відключення двигуна агрегат ($J = 2$ кг·м^2) зупиняється під дією сталого моменту опору $M_c = 30$ Н·м, початкова швидкість 100 рад/с. Час вибігу $t = 2 \cdot 100 / 30 = 6{,}7$ с, а кут вибігу $\varphi = \omega^2 \cdot J / (2\,M_c) = 10\,000 \cdot 2 / 60 = 333$ рад (53 оберти).

Лекція 26. Нерівномірність ходу машин. Діаграма енергомас

26.1. Причини нерівномірності ходу

В період усталеного руху робота рушійних сил за цикл дорівнює роботі сил опору, тому на початку та наприкінці циклу кутова швидкість початкової ланки приймає одне й те саме значення. Проте всередині циклу моменти $M_д$ та M_c змінюються по-різному, і в кожен момент часу їхня різниця відмінна від нуля. Коли рушійний момент перевищує момент опору, агрегат накопичує кінетичну енергію й прискорюється; коли момент опору більший, енергія витрачається, а швидкість зменшується. Так виникають періодичні коливання кутової швидкості ω навколо середнього значення $\omega_{ср}$.

26.2. Коефіцієнт нерівномірності ходу

Мірою коливань швидкості є **коефіцієнт нерівномірності ходу** δ, який дорівнює відношенню різниці найбільшої й найменшої кутових швидкостей за цикл до середньої швидкості:

$$\delta = (\omega_{max} - \omega_{min}) / \omega_{ср} \qquad (26.1)$$

Середню кутову швидкість у практичних розрахунках визначають як середнє арифметичне крайніх значень або безпосередньо за частотою обертання:

$$\omega_{ср} = (\omega_{max} + \omega_{min}) / 2 = \pi \cdot n / 30 \qquad (26.2)$$

де n – частота обертання, об/хв. З формул (26.1) та (26.2) випливають співвідношення для крайніх швидкостей:

$$\omega_{max} = \omega_{ср} \cdot (1 + \delta/2),\ \omega_{min} = \omega_{ср} \cdot (1 - \delta/2) \qquad (26.3)$$

Допустиме значення δ залежить від призначення машини. Воно встановлюється технічним завданням або нормами й наведено в таблиці 26.1.

Таблиця 26.1. Орієнтовні допустимі значення коефіцієнта нерівномірності ходу

Машина	δ
Дробарки, преси, ковальські машини	1/5 – 1/20
Поршневі насоси, компресори	1/30 – 1/50
Металорізальні верстати	1/20 – 1/50
Двигуни внутрішнього згоряння (автотракторні)	1/80 – 1/150
Прядильні, ткацькі машини	1/100 – 1/200
Електричні генератори змінного струму	1/200 – 1/300

Приклад. Частота обертання колінчастого вала n = 1000 об/хв, δ = 0,02. Знайти крайні значення кутової швидкості.

Розв'язання. Середня кутова швидкість $\omega_{ср} = \pi \cdot 1000 / 30 = 104{,}7$ рад/с. Далі $\omega_{max} = 104{,}7 \cdot 1{,}01 = 105{,}7$ рад/с; $\omega_{min} = 104{,}7 \cdot 0{,}99 = 103{,}7$ рад/с.

26.3. Кінетична енергія агрегату та її зміна

Кінетична енергія машинного агрегату, зведеного до початкової ланки, дорівнює

$$T = J_{зв} \cdot \omega^2 / 2 \qquad (26.4)$$

де $J_{зв}$ – зведений момент інерції, який у загальному випадку змінюється залежно від кута φ. Розглянемо приріст кінетичної енергії відносно початкового положення. За енергетичною формою рівняння руху він дорівнює різниці робіт:

$$\Delta T(\varphi) = T - T_0 = \int (M_д - M_c)\, d\varphi = A_д(\varphi) - A_c(\varphi) \qquad (26.5)$$

Графічно величина ΔT(φ) визначається за графіками моментів (рис. 25.1 у попередній лекції) шляхом інтегрування. Спочатку графічним інтегруванням, як було показано в лекції 15, будують графіки робіт $A_д(φ)$ та $A_c(φ)$, а потім віднімають ординати одного від другого. Додатні ділянки кривої ΔT(φ) відповідають накопиченню енергії, від'ємні – її віддачі. Найбільша різниця між максимальним і мінімальним значеннями ΔT за цикл називається **найбільшим коливанням кінетичної енергії** $ΔT_{max}$.

26.4. Діаграма енергомас (діаграма Віттенбауера)

Виразимо кінетичну енергію двома способами. З одного боку, вона дорівнює $T = T_0 + ΔT$. З іншого – $T = J_{зв}\,ω^2 / 2$. Тут обидві змінні, ΔT і $J_{зв}$, залежать від кута φ, а кутова швидкість ω – функція положення механізму. Якщо виключити з цих двох залежностей кут φ, отримаємо криву в координатах ($J_{зв}$, ΔT), яку називають **діаграмою енергомас**, або діаграмою Віттенбауера. Вона зв'язує енергію (по осі ординат) і масу (точніше, момент інерції – по осі абсцис) і тому дістала таку назву.

Побудова виконується в такій послідовності:

1) на ділянках циклу, що відповідають кутам $φ_0$, $φ_1$, $φ_2$, …, обчислюють або знімають із графіків значення ΔT та $J_{зв}$;

2) вибирають масштабні коефіцієнти $μ_T$ (Дж/мм) та $μ_J$ (кг·м²/мм);

3) у прямокутній системі координат відкладають для кожного положення точку з абсцисою $J_{зв}/μ_J$ та ординатою $ΔT/μ_T$;

4) сполучають точки плавною кривою; крива замикається, оскільки в кінці циклу всі величини повертаються до початкових значень.

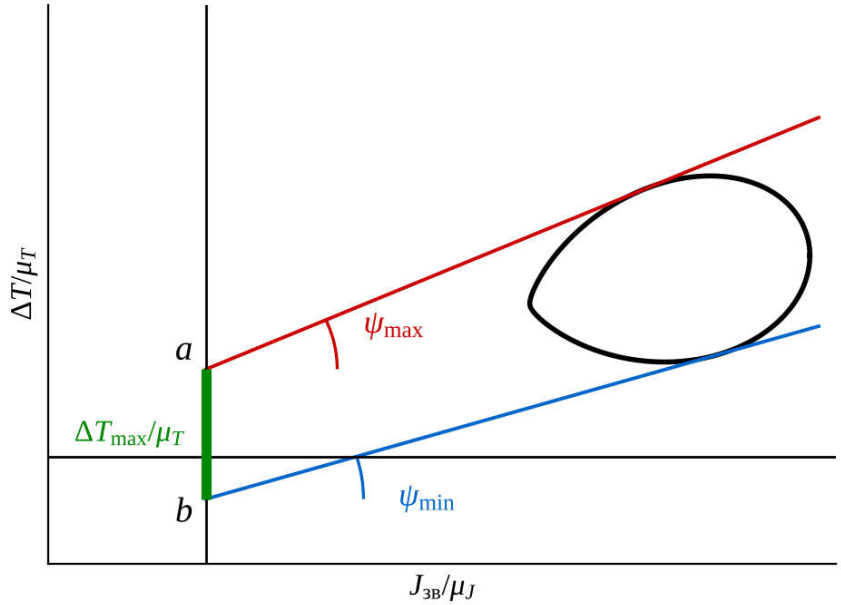


Рис. 26.1. Діаграма енергомас і дотичні під кутами $ψ_{max}$ та $ψ_{min}$

Кожна точка діаграми характеризує стан агрегату, а промінь, проведений з початку координат до цієї точки, нахилений під кутом ψ, тангенс якого пропорційний квадрату кутової швидкості в даному

положенні. Справді, з рівняння $T = J_{зв}\ \omega^2/2$ маємо $\Delta T = J_{зв}\ \omega^2/2$ (якщо початок координат узято у відповідній точці), звідки

$$\operatorname{tg}\psi = (\Delta T / \mu_T) / (J_{зв} / \mu_J) = \mu_J \cdot \omega^2 / (2 \cdot \mu_T) \qquad (26.6)$$

Найбільшому значенню ω відповідає найбільший кут ψ_{max}, найменшому – кут ψ_{min}. Отже, дотичні до діаграми, проведені під цими кутами, торкаються діаграми в точках найбільшої та найменшої швидкості, і саме за ними розв'язують задачу про розрахунок маховика.

26.5. Кути нахилу дотичних до діаграми

Користуючись співвідношеннями (26.3) і наближенням $\omega^2 = \omega_{ср}^2\ (1 \pm \delta)$, записуємо кути нахилу дотичних:

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \mu_J \cdot \omega_{ср}^2 \cdot (1 + \delta) / (2 \cdot \mu_T) \qquad (26.7)$$

$$\operatorname{tg}\psi_{min} = \mu_J \cdot \omega_{ср}^2 \cdot (1 - \delta) / (2 \cdot \mu_T) \qquad (26.8)$$

Дві дотичні – верхня під кутом ψ_{max} і нижня під кутом ψ_{min} – проводяться до діаграми так, щоб вона розташувалась між ними. Вони перетинаються з віссю ординат і відтинають на ній відрізок *ab*, довжина якого, помножена на μ_T, визначає найбільше коливання кінетичної енергії, яке потрібно «погасити» додатковою масою:

$$\Delta T_{max} = ab \cdot \mu_T \qquad (26.9)$$

Саме це значення використовується в наступній лекції для розрахунку моменту інерції маховика.

Нерівномірність ходу зумовлена різним характером зміни рушійного моменту й моменту опору протягом циклу й оцінюється коефіцієнтом δ, значення якого нормується. Для визначення найбільшого коливання кінетичної енергії будують діаграму енергомас, до якої проводять дві дотичні під кутами ψ_{max} та ψ_{min}; відрізок між ними на осі ординат у масштабі μ_T дає ΔT_{max}.

Лекція 27. Маховик. Розрахунок маховика та регулювання ходу

27.1. Призначення й принцип дії маховика

Щоб зменшити нерівномірність ходу до допустимого значення, на валу машини встановлюють масивну деталь – **маховик**. Маховик має великий момент інерції, тому при зміні швидкості його кінетична енергія змінюється значно, а сама швидкість майже не змінюється. Можна сказати, що маховик працює як накопичувач енергії: у періоди, коли рушійний момент перевищує момент опору, він запасає надлишок енергії, а в періоди, коли момент опору більший, віддає її агрегату. Тим самим коливання швидкості гасяться.

27.2. Момент інерції маховика

Нехай зведений момент інерції всіх ланок механізму та ротора двигуна, без маховика, дорівнює J_0, а момент інерції маховика – $J_м$. Загальний зведений момент інерції $J = J_0 + J_м$. Найбільше коливання кінетичної енергії за цикл зв'язане з коефіцієнтом нерівномірності так:

$$\Delta T_{max} = T_{max} - T_{min} = J \cdot (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) / 2 = J \cdot \omega_{ср}^2 \cdot \delta \qquad (27.1)$$

Тут використано рівність $\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2 = (\omega_{max} - \omega_{min})(\omega_{max} + \omega_{min}) = \delta\ \omega_{ср} \cdot 2\ \omega_{ср}$. Звідси загальний момент інерції, який забезпечує заданий δ, дорівнює $J = \Delta T_{max} / (\delta\ \omega_{ср}^2)$, а необхідний момент інерції маховика

$$J_м = \Delta T_{max} / (\delta \cdot \omega_{ср}^2) - J_0 \qquad (27.2)$$

Якщо величина J_0 мала порівняно з $J_м$ (що типово для машин із потужними маховиками), нею нехтують і приймають $J_м = \Delta T_{max} / (\delta\ \omega_{ср}^2)$. Формула (27.2) показує, що момент інерції маховика обернено пропорційний як допустимому коефіцієнту нерівномірності, так і квадрату кутової швидкості.

27.3. Розміри маховика

Знаючи $J_м$, визначають розміри маховика. Для маховика з масивним ободом, що має середній діаметр D та масу m, момент інерції з достатньою точністю дорівнює (масою диска й спиць зазвичай нехтують або враховують коефіцієнтом 1,1–1,2)

$$J_м = m \cdot D^2 / 4 \qquad (27.3)$$

Звідси маса обода $m = 4\ J_м\ /\ D^2$. Діаметр D вибирають за конструктивними міркуваннями, але обмежують окружною швидкістю обода, яка не повинна перевищувати допустимого значення за міцністю: для чавунних маховиків $v = \omega\ D/2 \le 30–35$ м/с, для сталевих – до 80–100 м/с, інакше відцентрові сили розірвуть обід. Далі за густиною матеріалу ρ знаходять площу поперечного перерізу обода $F = m\ /\ (\pi\ D\ \rho)$, вибирають його ширину b і висоту h з умови $F = b \cdot h$, зазвичай $h = (1{,}5–2)b$.

27.4. Числовий приклад

Приклад. Для поршневого компресора з частотою обертання вала $n = 300$ об/хв за діаграмою енергомас знайдено $\Delta T_{max} = 1200$ Дж. Допустимий коефіцієнт нерівномірності $\delta = 1/50$. Моментом інерції ланок J_0 знехтувати. Визначити $J_м$, масу чавунного обода середнім діаметром $D = 1$ м і перевірити його міцність за окружною швидкістю.

Розв'язання. Середня кутова швидкість $\omega_{ср} = \pi \cdot 300 / 30 = 31{,}4$ рад/с, $\omega_{ср}^2 = 986{,}9$ рад²/с². Момент інерції маховика $J_м = 1200 / (0{,}02 \cdot 986{,}9) = 60{,}8$ кг·м². Маса обода $m = 4 \cdot 60{,}8 / 1^2 = 243$ кг. Окружна швидкість $v = 31{,}4 \cdot 0{,}5 = 15{,}7$ м/с, що значно менше допустимої для чавуну (30–35 м/с), тому міцність обода забезпечена. Якщо ж потрібен вдвічі менший δ (1/100), то момент інерції й маса подвояться: $J_м = 122$ кг·м², $m = 486$ кг.

27.5. Регулювання середньої швидкості. Регулятори

Маховик гасить лише періодичні коливання швидкості в межах циклу. Якщо ж змінюється середнє значення навантаження (наприклад, трактор переходить із легкого ґрунту на важкий), змінюється й середня швидкість, і маховик допомогти не може. У таких випадках потрібен

регулятор – механізм, що автоматично змінює підведення енергії до двигуна залежно від швидкості.

Найпоширеніший у минулому – відцентровий регулятор. Дві вантажі на важелях обертаються разом з валом; при збільшенні швидкості відцентрова сила розводить їх, муфта піднімається й через важільну систему прикриває дросель чи рейку палива, зменшуючи подачу енергії; при зменшенні швидкості відбувається зворотний процес. Регулятор характеризується ступенем нерівномірності (різницею найбільшої й найменшої сталих швидкостей при зміні навантаження від нуля до максимуму) та нечутливістю.

27.6. Принцип роботи маховика

Маховик в машині є ніби акумулятором кінетичної енергії, який нагромаджує її в момент прискорення руху механізмів і віддає назад у моменти сповільнення руху машин. Така акумулююча роль маховика дає можливість використовувати нагромаджену ним енергію для подолання підвищення корисних навантажень без збільшення потужності двигуна, виводити механізм з мертвих положень тощо. Для зменшення коливань швидкості маховик повинен мати відповідний момент інерції. Дія маховика ефективна при короткочасних коливаннях швидкості. Для зменшення ваги і габаритів маховика його доцільно встановлювати на більш швидкохідних валах.

Визначення моменту інерції маховика за заданою величиною δ виконується в процесі проектування машини та складає одну із задач її динамічного синтезу.

Розв’язок даної задачі зводиться до визначення моменту інерції маховика.

Задачу будемо розв’язувати методом Віттенбауера, графоаналітичним методом за допомогою побудови діаграми енергомас – залежності кінетичної енергії механізму від зведеного моменту інерції.

Для визначення моменту інерції махового колеса вважають заданими або попередньо знайденими:

- схема механізму та розміри ланок;
- маси і моменти інерції ланок;
- середня кутова швидкість ланки зведення $\omega_{ср}$;
- коефіцієнт δ нерівномірності руху ланки зведення;
- сили, прикладені до ланок механізму.

Виберемо за початкову ланку головний вал механізму, що виконує неперервний обертальний рух.

Послідовність визначення моменту інерції маховика за методом Віттенбауера:

- будуються *n* (дванадцять) рівновіддалених за кутом повороту кривошипа планів положень механізму;
- для побудованих планів положень будуються плани швидкостей;
- для *n* положень механізму визначаються зведені моменти сил, при цьому для робочих машин знаходяться зведені моменти сил корисного опору M_0, а зведені моменти рушійних сил M_p наближено приймаються такими, що мають деяке постійне значення, поки що невідоме. Для машин – двигунів, навпаки, знаходяться зведені M_p, а M_0 приймаються постійними;
- будується графік зведеного моменту сил корисного опору (для машин двигунів – рушійних сил) (рис. 27.1, *а)*.

Всі графіки будуються для одного циклу усталеного руху.

- графічно інтегруючи зведений момент сил корисного опору, отримуємо графік робіт сил опору $A_o = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_o d\varphi$. Графік робіт рушійних сил для робочих машин з врахуванням прийнятих припущень, а також враховуючи те, що за один цикл усталеного руху $A_P=A_O$, що являє собою пряму лінію, яка з'єднує початок і кінець графіка роботи сил опору (рис. *б)* (для машин–двигунів навпаки);
- віднявши від ординат графіка робіт рушійних сил ординати робіт сил корисного опору, будуємо графік надлишкової роботи, який одночасно є графіком приросту кінетичної енергії (рис. 27.1, *в)* $A_p - A_o = \Delta T$;
- для побудованих положень механізму визначаємо зведені до кривошипа моменти інерції механізму (без маховика).

Зауважимо, що в результаті виконання перших трьох пунктів та даного – механізм приводиться до динамічної моделі;

- будуємо графік зведеного моменту інерції як функцію кута повороту кривошипа, розмістивши вісь ординат перпендикулярно до осі ординат на попередніх графіках (рис. 27.1, *г*);
- шляхом графічного виключення спільного параметра φ з діаграм приросту кінетичної енергії та зведеного моменту інерції будуємо графік приросту кінетичної енергії як функції зведеного моменту інерції – діаграму енергомас (рис. *д*).

Підкреслимо, що цю діаграму накреслено для механізму без маховика. Такою ж діаграма залишиться і для механізму з маховиком. Але початок осей координат зміститься: вліво, оскільки зведений момент інерції буде більшим на величину моменту інерції маховика; і до низу, оскільки за такої ж самої ω_{cp} має збільшитись кінетична енергія механізму.

Таким чином, при зменшені величини δ зростає зведена маса механізму та його кінетична енергія, яка необхідна для забезпечення руху механізму з заданою середньою швидкістю;

– до кривої діаграми енергомас проводяться дотичні під кутами

$$\psi_{\max}, \psi_{\min}, \; tg\psi_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\mu_I}{2\mu_{\Delta T}} \omega_{cp}^2 (1 \pm \delta), \tag{27.4}$$

де μ_I, $\mu_{\Delta T}$ – відповідно масштаби по осі абсцис і ординат діаграми енергомас.

Точка перетину дотичних є початком нової системи координат діаграми енергомас механізму з маховиком.

Величина моменту інерції маховика визначається за формулою

$$I_M = \mu_I O_1 m, \tag{27.5}$$

де $O_1 m$ – відстань, на яку зміститься вісь ординат.

При малих значення коефіцієнта δ внаслідок невеликої різниці між кутами $\psi_{\max}, \psi_{\min}$ точка перетину дотичних часто знаходиться за межами рисунка. У цьому випадку користуються формулою

$$I_M = \frac{\mu_{\Delta T}(kl)}{\omega_{CP}^2 \delta}, \tag{27.6}$$

де kl – відстань по осі ординат діаграми енергомас.

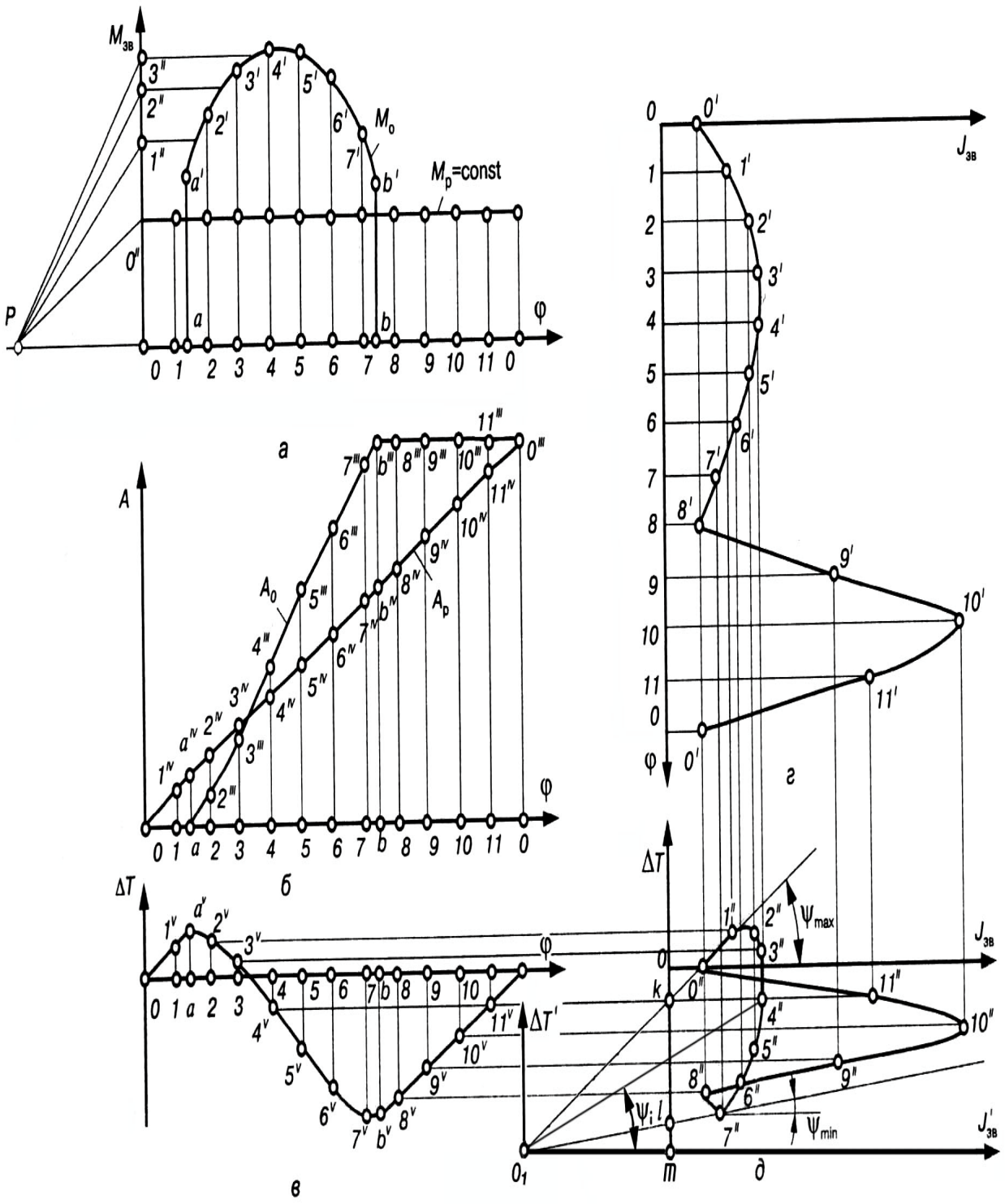


Рис. 27.1. Визначення моменту інерції маховика

Для зменшення маси та габаритів маховика доцільніше його встановлювати на найбільш швидкохідному валі, оскільки кінетична енергія маховика, в результаті зміни якої здійснюється регулювання швидкості, прямо пропорційна ω^2. Якщо маховик встановлюється не на ланці зведення, а на іншій ланці механізму, то повинна задовольнятися умова рівності кінетичної енергії

$$\frac{I_M\omega^2}{2}=\frac{I_i\omega_i^2}{2}\,, \qquad (27.7)$$

звідки

$$I_i = I_M\left(\frac{\omega_1}{\omega_i}\right)^2 = I_M u_{1i}^2\,, \qquad (27.8)$$

де I_i – момент інерції маховика, встановленого на *i*–й ланці; ω_i – кутова швидкість цієї ланки; u_{1i} – передатне відношення. Таким чином, чим більша кутова швидкість *i*–ї ланки, тим менший момент інерції маховика, і, відповідно менші його маса та габарити.

Після визначення моменту інерції маховика та місця його встановлення розраховують його основі розміри.

Відмітимо, що за допомогою кривої енергомас легко встановити залежність кутової швидкості ланки зведення як функції кута повороту q. Вибираємо на цій кривій будь-яку точку (точка $4^{//}$, рис. 27.1, *д*) та з'єднуємо її з початком координат (точка O_1). Швидкість ланки зведення в положенні, яке визначається вибраною точкою, знаходимо за формулою

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2T}{I}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\Delta T}}{\mu_I} tg\psi_i} \qquad (27.9)$$

За формулою (27.9) будують графік $\omega(\varphi)$. Порівнюючи між собою кути ψ, можна наочно прослідкувати, як змінюється кутова швидкість ланки зведення при зміні її положення.

Відмітимо також, що за допомогою кривої енергомас можна визначити коефіцієнт нерівномірності руху механізму. Для цього з початку системи координат (т.O_1, рис. 27.1, *д*) проводимо дві дотичні до кривої енергомас. Вимірюємо кути $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$. Коефіцієнт нерівномірності руху визначаємо за формулою

$$\delta = \frac{\mu_{\Delta T}}{\mu_I}\frac{tg\psi_{\max} - tg\psi_{\min}}{\omega_{cp}^2} \qquad (27.10)$$

27.6. Визначення розмірів маховика

Форма маховика, загалом може бути вибрана довільною. Але за конструктивними міркуваннями, найбільш зручною є форма у вигляді диска з важким ободом, колеса зі спицями або форма, яка симетрична відносно головних осей інерції. При цій формі легше за все досягається співпадання вісі обертання з однією із головних центральних осей інерції. Це дозволяє уникнути додаткових тисків на вальниці вала, на якому розміщений маховик.

Якщо маховик виконаний у вигляді колеса зі спицями, то моментами інерції з'єднувальних частин нехтують і наближено вважають , що маса маховика рівномірно розподілена по колу радіуса $R = D/2$ – геометричному місцю центрів ваги поперечних перерізів обода. Тоді момент інерції маховика можна виразити так (використовується формула для моменту інерції тонкого кільця):

$$I_м = mR^2 = \frac{mD^2}{4}, \qquad (27.11)$$

де m – маса маховика.

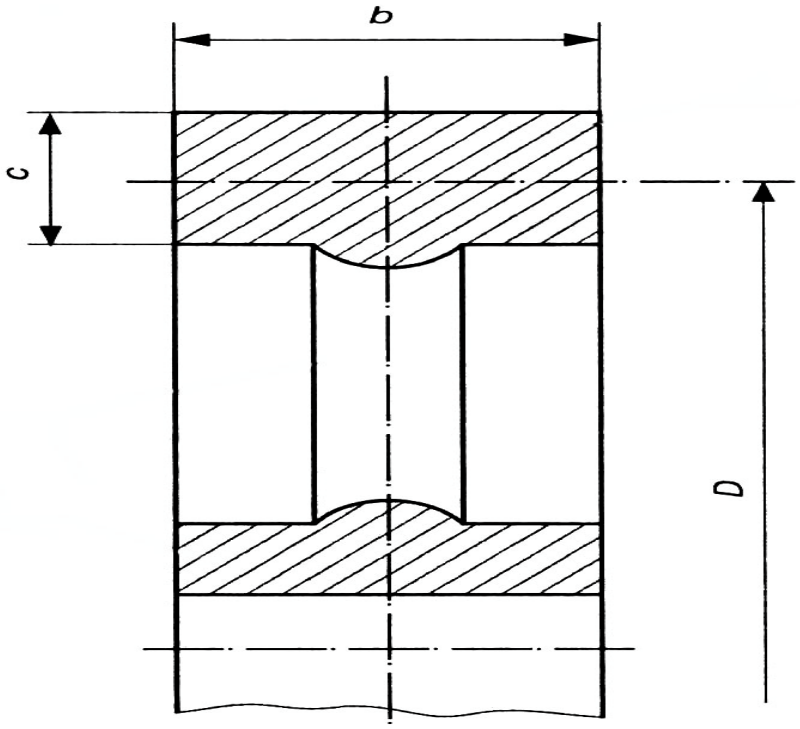


Рис. 27.2. Маховик, який виконаний у вигляді колеса зі спицями

Добуток маси обода маховика на квадрат його діаметра mD^2 називається *маховим моментом* або *характеристикою маховика.* Для багатьох деталей машин, що здійснюють обертальний рух (муфти, ротори електродвигунів тощо), ця характеристика наводиться у довідниках. Характеристика маховика має одиницю виміру *кг·м*^{2}. За цією характеристикою можна визначити необхідну масу маховика, якщо задано або вибрано його діаметр, значення якого визначається з суто конструктивних міркувань.

З рівняння слідує, що при визначеній величині $I_м$ вага маховика обернено пропорційна квадрату його діаметра D і для зменшення металоємкості вигідно брати більші діаметри. Але це заперечує вимозі малих габаритів та лімітується допустимою кутовою швидкістю. Для запобігання небезпеці можливого розриву маховика відцентровими силами його діаметр D вибирають таким чином, щоб колова швидкість на

ободі не перевищувала допустиму для матеріалу маховика величину. Для перевірки діаметра маховика можна рекомендувати таку залежність:

$$D \le \frac{60\,\mathrm{v}_{\text{доп}}}{\pi \mathrm{n}}, \qquad (27.12)$$

де $\mathrm{v}_{\text{доп}}$ – допустима колова швидкість обода маховика, яка не повинна перевищувати для сталевих маховиків *70 – 120 м/с*, для чавунних – *30 – 45 м/с;* n – частота обертання маховика, *хв*$^{-1}$. Зауважимо, що хромонікелеві маховики допускають колову швидкість до *150 м/с.*

Маса обода маховика практично може бути взята (27.13)

$$m_{об} = 0,9\,m,$$

тоді ширина *b* обода визначається з виразу

$$m_{об} = \pi D b c \rho. \qquad (27.14)$$

Тут *c = 0.4b;* ρ – густина матеріалу, *кг/м*^{3}*;* для сталевих маховиків (ρ *=7800 кг/м*^{3}) матимемо:

$$b = 0,01\sqrt{m / D} \qquad (27.15)$$

Лекція 28. Зрівноваження механізмів і роторів

28.1. Незрівноваженість і її наслідки

Під час роботи машини ланки, що обертаються або рухаються з прискоренням, створюють сили інерції. Якщо ці сили не зрівноважені всередині самої машини, вони передаються на стояк, фундамент або раму трактора, змінюються за величиною й напрямком з частотою обертання і викликають вібрацію. Наслідками є додаткові динамічні навантаження в підшипниках, прискорене зношування, втомні руйнування, шум, погіршення якості технологічного процесу та шкідлива дія вібрації на оператора.

Зрівноваженням називають добір мас і їх розташування, за яких головний вектор і головний момент сил інерції ланок, що передаються на стояк, дорівнюють нулю або не перевищують допустимих значень. Розрізняють зрівноваження **роторів** (обертових тіл) і зрівноваження **механізмів**, у яких частина ланок рухається поступально або складно.

Ротор, що обертається з кутовою швидкістю ω, має точкову масу *m* на відстані *r* від осі. Відцентрова сила інерції цієї маси дорівнює

$$F_{\text{ц}} = m \cdot \omega^2 \cdot r \qquad (28.1)$$

28.2. Статичне зрівноваження

Ротор вважають **статично зрівноваженим**, якщо його центр мас лежить на осі обертання.

Нехай на роторі розташовано k незрівноважених мас m_i на радіусах r_i, напрямки яких задають кути. Додаємо коригувальну масу $m_к$ на радіусі $r_к$. Рівнодійна відцентрових сил дорівнює нулю, якщо векторна сума статичних моментів мас відносно осі обертання дорівнює нулю:

$$\Sigma\, m_i \cdot r_i + m_к \cdot r_к = 0 \qquad (28.2)$$

Добуток $m \cdot r$ називають **дисбалансом** (кг·м). Будують замкнений багатокутник векторів $m_i r_i$.

28.3. Динамічне зрівноваження

Якщо ротор має значну довжину, маси розподілені по довжині й лежать у різних поперечних площинах. Тоді умова рівності нулю суми сил недостатня: відцентрові сили, розміщені в різних площинах, утворюють пару сил, що створює момент, який намагається повернути вісь ротора. Ротор називають **динамічно зрівноваженим**, якщо рівні нулю і головний вектор, і головний момент сил інерції.

Для динамічного зрівноваження вибирають дві площини корекції I та II, перпендикулярні до осі, і в кожній розташовують коригувальну масу (рис. 28.1). Нехай дві незрівноважені маси m_1 та m_2 розташовані на радіусах r_1, r_2. Позначимо через a відстань від площини I до першої маси, через b відстань між масами, через c відстань від другої маси до площини II; відстань між площинами корекції $L = a + b + c$.

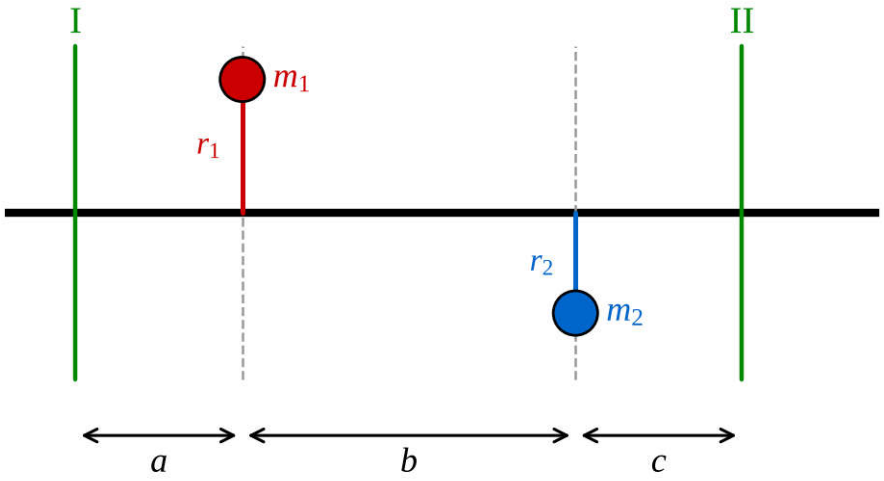


Рис. 28.1. Ротор із двома незрівноваженими масами та площини зрівноваження I і II

Складемо умови рівності нулю моментів відцентрових сил відносно точок на площинах II та I.

$$m_I \cdot r_I \cdot L = -(\, m_1 \cdot r_1 \cdot (b + c) + m_2 \cdot r_2 \cdot c\,) \qquad (28.3)$$

$$m_{II} \cdot r_{II} \cdot L = -(\, m_1 \cdot r_1 \cdot a + m_2 \cdot r_2 \cdot (a + b)\,) \qquad (28.4)$$

Знайдені дисбаланси $m_I r_I$ та $m_{II} r_{II}$ вказують величину й напрямок (кут відносно заданого радіуса) коригувальних мас.

Приклад. Ротор має дві маси: $m_1 = 2$ кг, $r_1 = 0{,}10$ м (кут 0°) і $m_2 = 3$ кг, $r_2 = 0{,}08$ м (кут 90°); $a = 0{,}1$ м, $b = 0{,}2$ м, $c = 0{,}1$ м. Знайти коригувальні маси на радіусі 0,1 м.

Розв'язання. $L = 0{,}4$ м. Для площини I: складові моментів $2 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$ кг·м (по осі 0°) і $3 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}1 = 0{,}024$ кг·м (по осі 90°); модуль суми $\sqrt{(0{,}06^2 + 0{,}024^2)} = 0{,}0646$ кг·м, звідси $m_I r_I = 0{,}0646/0{,}4 = 0{,}1615$ кг·м, $m_I = 1{,}62$ кг, напрямок протилежний до суми: 180° + 21,8° = 201,8°. Для площини II: $2 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$ кг·м (0°) і $3 \cdot 0{,}08 \cdot 0{,}3 = 0{,}072$ кг·м (90°); модуль 0,0747 кг·м, $m_{II} r_{II} = 0{,}1868$ кг·м, $m_{II} = 1{,}87$ кг, кут 180° + 74,5° = 254,5°.

28.4. Допустима незрівноваженість і балансування

Тому стандарт (ISO 1940) встановлює класи точності балансування G, кожен з яких відповідає допустимому добутку питомого дисбалансу (ексцентриситету) e на кутову швидкість:

$$e_{\text{доп}} = G / \omega \qquad (28.5)$$

де G – клас точності, мм/с; ω – кутова швидкість, рад/с; $e_{\text{доп}}$ – допустимий ексцентриситет центру мас, мм.

Таблиця 28.1. Класи точності балансування і приклади роторів

Клас G	Добуток e·ω, мм/с	Типові ротори
G 2,5	2,5	шпинделі, турбіни, шліфувальні круги
G 6,3	6,3	вентилятори, робочі колеса насосів, якорі електродвигунів
G 16	16	карданні вали, колінчасті вали без пружних елементів
G 40	40	колеса, обід, колінчасті вали швидкохідних двигунів

Фактичне балансування виконують на спеціальних верстатах: ротор розганяють, датчики вібрації вимірюють амплітуду та фазу коливань опор, обчислювальний блок показує величину і кут коригувальних мас у двох площинах.

28.5. Зрівноваження сил інерції кривошипно-повзунного механізму

Для кривошипно-повзунного механізму, що має зведену до поршня масу $m_{\text{п}}$ (маса поршня й частини шатуна), кривошип радіуса r, відносну довжину $\lambda = r/l$, сила інерції поступально рухомих мас розкладається на гармоніки: першого порядку (частота ω) та другого порядку (частота 2ω):

$$P_I = m_{\text{п}} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos\varphi \qquad (28.6)$$

$$P_{II} = m_{\text{п}} \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \lambda \cdot \cos 2\varphi \qquad (28.7)$$

Сила P_I діє по лінії руху поршня, і її не можна повністю усунути противаговою на кривошипі: противаги створюють обертову силу, яка

зменшує вертикальну складову, але збільшує горизонтальну. Практично встановлюють противаги, що зрівноважують усю масу кривошипа й приблизно половину поступально рухомих мас. У багатоциліндрових двигунах сили першого й другого порядків і їх моменти зрівноважують за рахунок розташування колін колінчастого вала й числа циліндрів.

28.6. Вібрація та віброзахист

Власна кутова частота системи «машина – пружні опори» дорівнює $\omega_0 = \sqrt{(c/m)}$, де c – жорсткість опор, m – маса машини. Коефіцієнт передачі сили на фундамент при гармонічному збудженні (без урахування демпфування):

$$K = 1 / | 1 - (\omega / \omega_0)^2 | \qquad (28.8)$$

Віброізоляція ефективна, коли $\omega/\omega_0 > \sqrt{2}$, тобто власна частота опор має бути суттєво нижча за частоту збудження; тоді $K < 1$.

Незрівноваженість мас спричиняє вібрацію, динамічні навантаження й передчасне руйнування машин. Статичне зрівноваження ротора вимагає, щоб центр мас лежав на осі, динамічне – ще й рівності нулю моменту сил інерції, для чого застосовують дві площини корекції. Точність балансування нормують класами G. У кривошипно-повзунних механізмах сили інерції першого та другого порядків зрівноважують частково противаговими та підбором схеми колінчастого вала; вібрацію обмежують віброізоляцією з відношенням частот понад $\sqrt{2}$.

Лекція 29. Зубчасті механізми. Основний закон зачеплення

29.1. Призначення та класифікація зубчастих передач

Зубчастий механізм – це механізм, що складається з двох або більше зубчастих коліс (ланок із зубцями), які утворюють вищі кінематичні пари, і стояка (корпуса). Зубчасті передачі використовують для передачі обертання між валами з незмінним у часі передавальним відношенням, для зміни частоти обертання й крутного моменту, для перетворення обертового руху в поступальний (рейкові передачі). Вони мають найвищий ККД серед механічних передач (0,96–0,99), великий ресурс.

Зубчасті передачі класифікують за взаємним розташуванням осей коліс (табл. 29.1), формою зубців, профілем, розташуванням зубців на колесі та кінематикою.

Таблиця 29.1. Основні види зубчастих передач

Вид передачі	Розташування осей	Передавальне відношення (однієї ступені)	ККД
Циліндрична (прямозуба, косозуба)	паралельні	до 8	0,97–0,99

Вид передачі	Розташування осей	Передавальне відношення (однієї ступені)	ККД
Конічна	перетинаються	до 6	0,95–0,97
Черв'ячна	схрещуються	8–80	0,70–0,92
Рейкова	вісь колеса ⊥ рейки	–	0,95–0,98
Гвинтова	схрещуються	до 5	0,70–0,90

За розташуванням зубців розрізняють передачі зовнішнього та внутрішнього зачеплення, за формою профілю зубців – евольвентні (найпоширеніші), циклоїдні, годинникові, передачі Новікова з круговим профілем.

29.2. Початкові кола, полюс зачеплення, передавальне відношення

Розглянемо пару зубчастих коліс 1 і 2, що обертаються навколо нерухомих осей O_1 та O_2 з кутовими швидкостями ω_1 та ω_2 (рис. 29.1). У точці дотику K профілів зубців проведемо спільну нормаль n–n. Вона перетинає лінію центрів O_1O_2 у точці P, яку називають **полюсом зачеплення**. Полюс – це миттєвий центр відносного обертання коліс: у ньому швидкості точок обох коліс однакові.

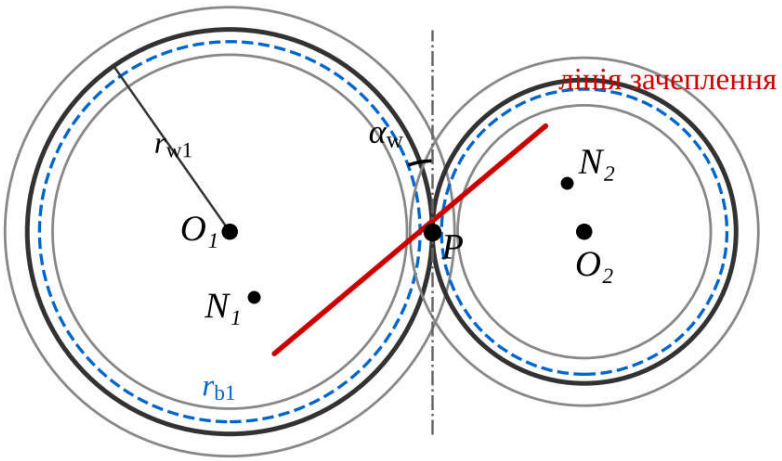


Рис. 29.1. Евольвентне зачеплення пари коліс: початкові та основні кола, лінія зачеплення, полюс P, кут зачеплення α_w

Кола, що проходять через полюс із центрами в O_1 та O_2, називають **початковими**. Їхні радіуси r_{w1} і r_{w2}. Початкові кола перекочуються одне по

одному без ковзання, оскільки швидкості точок цих кіл у полюсі збігаються:

$$v_P = \omega_1 \cdot r_{w1} = \omega_2 \cdot r_{w2} \qquad (29.1)$$

Відношення кутових швидкостей називають **передавальним відношенням**:

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = r_{w2} / r_{w1} = O_2P / O_1P \qquad (29.2)$$

Якщо колеса обертаються в різні боки (зовнішнє зачеплення), передавальному відношенню приписують знак мінус, при внутрішньому зачепленні – плюс. Через частоти обертання n (об/хв) і числа зубців z:

$$i_{12} = n_1 / n_2 = \mp z_2 / z_1 \qquad (29.3)$$

Останній вираз випливає з того, що в зачепленні мають бути однакові кроки (модулі) коліс, тому діаметри початкових кіл пропорційні числам зубців. Передача, у якої $i > 1$, зменшує швидкість і є **редукторною**, при $i < 1$ – **мультиплікаторною**.

29.3. Основний закон зачеплення

Основний закон зачеплення (теорема Вілліса): спільна нормаль до профілів зубців у точці їх дотику в будь-який момент часу проходить через полюс зачеплення, який ділить лінію центрів на відрізки, обернено пропорційні кутовим швидкостям коліс.

Для виведення розкладемо швидкості $v_1 = \omega_1 \cdot O_1K$ та $v_2 = \omega_2 \cdot O_2K$ точки дотику K на складові вздовж спільної нормалі й вздовж дотичної. Щоб профілі не вклинювалися й не розходилися, проекції швидкостей на нормаль мають бути рівні. З подібності трикутників, утворених перпендикулярами з центрів на нормаль, отримують співвідношення $\omega_1/\omega_2 = O_2P/O_1P$. Для сталого передавального відношення точка P повинна бути нерухомою на лінії центрів – отже, профілі зубців мають бути такими, щоб спільна нормаль у всіх положеннях проходила через одну точку. Профілі, що задовольняють цій умові, називають **спряженими**.

29.4. Швидкості ковзання

У точці дотику K профілі не лише перекочуються, а й ковзають один відносно одного. Швидкість ковзання дорівнює різниці проекцій швидкостей на дотичну до профілів, або

$$v_{ск} = (\omega_1 + \omega_2) \cdot KP \qquad (29.4)$$

де KP – відстань від точки дотику до полюса (для зовнішнього зачеплення, де кутові швидкості мають протилежні знаки, береться сума модулів). У полюсі ковзання відсутнє, чисте кочення; по обидва боки від полюса швидкість ковзання змінює напрямок і зростає з віддаленням від нього.

29.5. Рядові багатоступеневі передачі

У **рядовій передачі** кожне колесо входить не більше ніж у дві пари зачеплення, і кінематичний ланцюг не має рухомих осей. Загальне

передавальне відношення дорівнює добутку передавальних відношень ступенів:

$$i_{1k} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot \ldots \cdot i_{(k-1)k} = (-1)^m \cdot (z_2 \cdot z_4 \cdot \ldots \cdot z_k) / (z_1 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_{k-1}) \quad (29.5)$$

де m – кількість зовнішніх зачеплень; у формулі колеса, що стоять на одному валу (подвійні блоки), не мають спільного зачеплення, тому в чисельник входять числа зубців *ведених*, а в знаменник – *ведучих* коліс кожної пари. Колесо, що перебуває між двома іншими й входить у зачеплення і з ведучим, і з веденим (проміжне, або паразитне), не впливає на значення i, а лише змінює напрямок обертання.

Приклад. Двоступінчастий редуктор: $z_1 = 20$, $z_2 = 50$ (перша ступінь), $z_3 = 18$, $z_4 = 63$ (друга ступінь). Частота обертання електродвигуна $n_1 = 1440$ об/хв. Визначити частоту обертання вихідного вала.

Розв'язання. $i_{12} = 50/20 = 2{,}5$; $i_{34} = 63/18 = 3{,}5$. Обидва зачеплення зовнішні, $m = 2$, знак «+». $i_{14} = 2{,}5 \cdot 3{,}5 = 8{,}75$. Тоді $n_4 = n_1/i_{14} = 1440/8{,}75 = 164{,}6$ об/хв, а крутний момент на вихідному валу (при ККД $\eta = 0{,}96$) $T_4 = T_1 \cdot i_{14} \cdot \eta$ збільшується приблизно у 8,4 рази.

Зубчасті механізми забезпечують передачу обертання зі сталим передавальним відношенням за умови виконання основного закону зачеплення: спільна нормаль до профілів проходить через полюс, що не змінює положення на лінії центрів. Початкові кола перекочуються без ковзання, а передавальне відношення дорівнює відношенню чисел зубців. У рядових багатоступеневих передачах загальне передавальне відношення дорівнює добутку відношень окремих ступенів.

Лекція 30. Евольвентне зачеплення

30.1. Евольвента кола та її властивості

Евольвентою кола називають траєкторію точки прямої, яка без ковзання перекочується по колу. Коло, по якому перекочується пряма, називають **основним** (його радіус r_b), а саму пряму – твірною прямою. Нехай твірна пряма N–K перекочується по основному колу, початкове положення точки K збігається з точкою B_0 кола (рис. 30.1). Тоді відрізок NK дорівнює довжині дуги NB_0, яку пряма прокотила: $NK = r_b \cdot (\theta + \alpha_y)$, де кут θ – кут розгорнутості евольвенти. Позначимо кут профілю в довільній точці K через α_y, радіус-вектор точки через r_y.

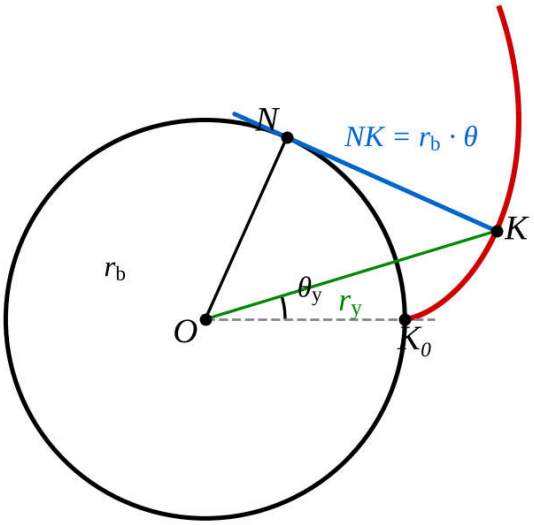


Рис. 30.1. Утворення евольвенти кола: r_b – радіус основного кола, r_y – радіус-вектор точки K, α_y – кут профілю

Із прямокутного трикутника $O\,N\,K$ отримуємо

$$r_y = r_b / \cos \alpha_y \qquad (30.1)$$

$$NK = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha_y \qquad (30.2)$$

Кут розгорнутості дорівнює різниці tg α_y та α_y. Цю величину називають **евольвентною функцією** кута і позначають inv α_y:

$$\operatorname{inv} \alpha_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y \qquad (30.3)$$

де кут α_y у радіанах.

Властивості евольвенти:

– нормаль до евольвенти в будь-якій точці дотична до основного кола;
– центр кривини евольвенти в точці K лежить у точці N, тобто радіус кривини $\rho = NK = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha_y$; основне коло є еволютою евольвенти;
– форма евольвенти повністю визначається радіусом основного кола; усі евольвенти одного кола еквідистантні;
– всередині основного кола евольвенти немає.

30.2. Евольвентне зачеплення, лінія зачеплення

Два колеса, профілі зубців яких окреслені евольвентами, мають основні кола радіусів r_{b1} та r_{b2}. Нормаль до евольвент у точці дотику дотична до обох основних кіл, тобто збігається зі спільною внутрішньою дотичною N_1N_2 до цих кіл (рис. 29.1 із попередньої лекції зображено повторно на рис. 30.2). Оскільки така дотична єдина і нерухома, точка дотику профілів у процесі обертання завжди рухається по прямій N_1N_2. Цю пряму називають **лінією зачеплення**. Вона перетинає лінію центрів у полюсі P, положення якого не змінюється, отже, виконується основний закон зачеплення, і передавальне відношення стале:

$$i_{12} = \omega_1 / \omega_2 = r_{b2} / r_{b1} = r_{w2} / r_{w1} = z_2 / z_1 \qquad (30.4)$$

Кут між лінією зачеплення й перпендикуляром до лінії центрів (дотичною до початкових кіл у полюсі) називають **кутом зачеплення** α_w. Радіуси основного й початкового кіл пов'язані співвідношенням

$$r_b = r_w \cdot \cos \alpha_w \qquad (30.5)$$

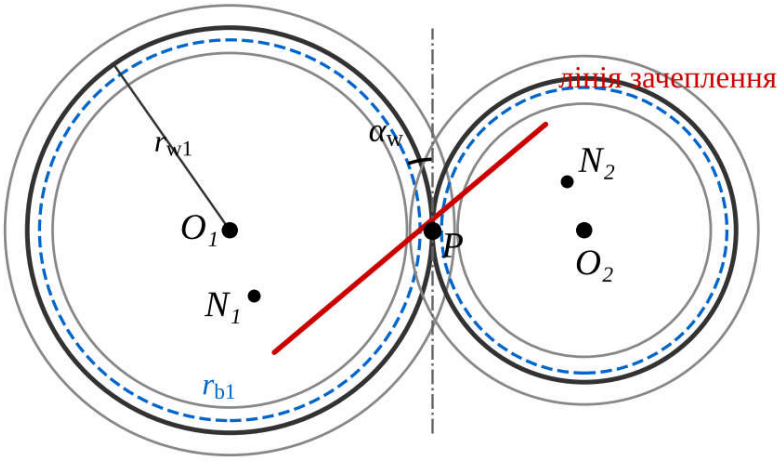


Рис. 30.2. Лінія зачеплення N_1N_2 і кут зачеплення α_w у евольвентній передачі

Важлива перевага евольвентного зачеплення: при зміні міжосьової відстані основні кола не змінюються, тому передавальне відношення залишається незмінним, змінюються лише початкові кола й кут зачеплення.

30.3. Параметри евольвентного колеса

Колесо характеризують числом зубців z і модулем m. **Кроком** по ділильному колу p називають відстань між однойменними профілями сусідніх зубців по дузі ділильного кола. **Модулем** називають

$$m = p / \pi \qquad (30.6)$$

Ділильне коло – це коло, на якому крок і кут профілю мають стандартні значення; для нього кут профілю $\alpha = 20°$ (стандартний кут профілю вихідного контуру). Основні розміри колеса визначають за формулами:

$$d = m \cdot z \qquad (30.7)$$

$$d_b = d \cdot \cos \alpha \qquad (30.8)$$

$$d_a = m \cdot (z + 2 \cdot h_a^*) \qquad (30.9)$$

$$d_f = m \cdot (z - 2 \cdot h_a^* - 2 \cdot c^*) \qquad (30.10)$$

де d – діаметр ділильного кола, d_b – основного, d_a – вершин зубців, d_f – западин, $h_a^* = 1$ – коефіцієнт висоти голівки, $c^* = 0{,}25$ – коефіцієнт

радіального зазору. Висота зубця $h = 2{,}25 \cdot m$, крок по основному колу $p_b = \pi \cdot m \cdot \cos\alpha$, товщина зубця по ділильному колу $s = \pi \cdot m/2$.

Міжосьова відстань стандартної (нульової) передачі

$$a = m \cdot (z_1 + z_2) / 2 \qquad (30.11)$$

Оскільки $r_b = r \cdot \cos\alpha$ і $r_b = r_w \cdot \cos\alpha_w$, при зміні міжосьової відстані справедливе співвідношення $a_w \cdot \cos\alpha_w = a \cdot \cos\alpha$.

Таблиця 30.1. Геометричні параметри стандартного евольвентного колеса ($\alpha = 20°$, $h_a^* = 1$, $c^* = 0{,}25$)

Параметр	Позначення	Формула
Діаметр ділильного кола	d	m·z
Діаметр основного кола	d_b	d·cos α
Діаметр вершин	d_a	m·(z + 2)
Діаметр западин	d_f	m·(z − 2,5)
Крок по ділильному колу	p	π·m
Висота зубця	h	2,25·m

30.4. Дуга зачеплення та коефіцієнт перекриття

Зачеплення починається, коли ніжка зубця ведучого колеса вступає в контакт з голівкою зубця веденого на перетині лінії зачеплення з колом вершин веденого колеса, і закінчується на перетині цієї лінії з колом вершин ведучого. Відрізок лінії зачеплення між цими точками – **активна лінія зачеплення** g_α. Щоб обертання передавалось безперервно, наступна пара зубців повинна вступити в контакт до того, як попередня вийде із зачеплення. Мірою безперервності є **коефіцієнт перекриття**

$$\varepsilon_\alpha = g_\alpha / p_b = (\sqrt{(r_{a1}^2 - r_{b1}^2)} + \sqrt{(r_{a2}^2 - r_{b2}^2)} - a_w \cdot \sin\alpha_w) / (\pi \cdot m \cdot \cos\alpha) \qquad (30.12)$$

Фізично ε_α показує середню кількість пар зубців, що одночасно перебувають у зачепленні. Для прямозубих передач ε_α = 1,2…1,9; допускається не менше 1,2 (для передач невідповідального призначення – до 1,1).

Приклад. Прямозуба передача нульова: m = 4 мм, z_1 = 20, z_2 = 50, α = 20°. Визначити розміри коліс і коефіцієнт перекриття.

Розв'язання. d_1 = 80 мм, d_2 = 200 мм, a = 140 мм. $d_{b1} = 80 \cdot 0{,}9397 = 75{,}18$ мм (r_{b1} = 37,59 мм), $d_{b2} = 200 \cdot 0{,}9397 = 187{,}94$ мм (r_{b2} = 93,97 мм). d_{a1} = 88 мм (r_{a1} = 44 мм), d_{a2} = 208 мм (r_{a2} = 104 мм). $\sqrt{(44^2 - 37{,}59^2)} = 22{,}87$ мм; $\sqrt{(104^2 - 93{,}97^2)} = 44{,}56$ мм; $a \cdot \sin 20° = 140 \cdot 0{,}3420 = 47{,}88$ мм. $g_\alpha = 22{,}87 + 44{,}56 - 47{,}88 = 19{,}55$ мм; $p_b = \pi \cdot 4 \cdot 0{,}9397 = 11{,}81$ мм. $\varepsilon_\alpha = 19{,}55/11{,}81 = 1{,}66$.

Евольвента кола – найпоширеніший профіль зубців завдяки сталому передавальному відношенню, нечутливості до зміни міжосьової відстані й простоті обробки. Зачеплення відбувається по прямій лінії зачеплення, дотичній до основних кіл, кут зачеплення сталий. Розміри колеса визначають через модуль і число зубців, а безперервність передачі руху оцінюють коефіцієнтом перекриття, який має бути не менше 1,2.

Лекція 31. Геометрія й синтез евольвентної передачі

31.1. Способи виготовлення зубчастих коліс

Зубчасті колеса виготовляють двома основними способами: **копіюванням** і **обкатуванням** (огинанням). При копіюванні профіль впадини між зубцями формується фасонною фрезою (дисковою або пальцевою) за формою западини.

Основним способом є **обкатування**. Інструмент і заготовка відтворюють рух відповідної зубчастої передачі: заготовка обертається, а інструмент здійснює різальний і допоміжні рухи. Використовують три види інструменту:

- зубчаста рейка (гребінка), профіль якої – пряма лінія з кутом $\alpha = 20°$;
- довбяк – зубчасте колесо із загостреними різальними кромками;
- черв'ячна фреза – різальний черв'як, що обкатує колесо в безперервному обертанні (найпродуктивніший метод для циліндричних коліс).

Профіль рейки називають **вихідним контуром**; його параметри стандартні: кут профілю 20°, коефіцієнт висоти голівки $h_a^* = 1$, коефіцієнт радіального зазору $c^* = 0{,}25$.

31.2. Підрізання зубців. Мінімальне число зубців

При малому числі зубців голівка інструмента може заходити під основне коло колеса, де евольвенти немає, і зрізати частину ніжки зубця. Це явище називають **підрізанням**.

Підрізання не відбувається, якщо вершина прямолінійної частини рейки не виходить за межу лінії зачеплення – точку N (дотичну до основного кола). Ця умова приводить до мінімального числа зубців нульового колеса

$$z_{\min} = 2 \cdot h_a^* / \sin^2 \alpha \qquad (31.1)$$

При $h_a^* = 1$ та $\alpha = 20°$ маємо $z_{\min} = 2/0{,}117 = 17{,}1$, тобто практично $z_{\min} = 17$.

31.3. Зміщення інструмента (корекція)

Зміщенням називають відхилення ділильної прямої рейки від ділильного кола заготовки. Величину зміщення виражають добутком $x \cdot m$,

де x – **коефіцієнт зміщення** (може бути додатним і від'ємним). При додатному зміщенні рейку віддаляють від центра заготовки, зубці стають товщими біля основи, не підрізаються, зростає міцність. Мінімальний коефіцієнт зміщення, що забезпечує відсутність підрізання:

$$x_{\min} = (z_{\min} - z) / z_{\min} = (17 - z) / 17 \qquad (31.2)$$

Найменші допустимі значення наведено в таблиці 31.1.

Таблиця 31.1. Мінімальний коефіцієнт зміщення залежно від числа зубців

z	17	15	14	12	10
$x_{\min}$	0	0,12	0,18	0,29	0,41

Зміщення застосовують для: усунення підрізання, підвищення міцності зубців на згин і контактної міцності, вирівнювання зносостійкості шестерні й колеса, а також для забезпечення заданої міжосьової відстані без зміни модуля. Розміри колеса зі зміщенням змінюються:

$$d_a = m \cdot (z + 2 \cdot h_a^* + 2 \cdot x) \qquad (31.3)$$

$$s = m \cdot (\pi / 2 + 2 \cdot x \cdot \operatorname{tg} \alpha) \qquad (31.4)$$

Діаметр ділильного кола залишається $d = m \cdot z$, а діаметр западин $d_f = m \cdot (z - 2h_a^* - 2c^* + 2x)$.

31.4. Передача зі зміщенням

Залежно від сумарного коефіцієнта зміщення $x_\Sigma = x_1 + x_2$ розрізняють три види передач:

- **нульова** ($x_1 = x_2 = 0$): початкові кола збігаються з ділильними, $\alpha_w = \alpha$;
- **рівнозміщена** ($x_1 = -x_2$, $x_\Sigma = 0$): міжосьова відстань нормальна, але ніжка шестерні зміцнена, голівка колеса зменшена; підходить при $z_1 + z_2 \geq 2 \cdot z_{\min}$;
- **позитивна** ($x_\Sigma > 0$): $\alpha_w > \alpha$, міжосьова відстань збільшується; підвищується міцність, зменшується коефіцієнт перекриття.

Кут зачеплення позитивної передачі визначають із рівності

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \cdot (x_1 + x_2) / (z_1 + z_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{inv} \alpha \qquad (31.5)$$

а міжосьову відстань з умови нерозривності зачеплення

$$a_w = a \cdot \cos \alpha / \cos \alpha_w \qquad (31.6)$$

де $a = m(z_1 + z_2)/2$. Значення $\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{inv} 20° = 0{,}014904$.

Приклад. $m = 5$ мм, $z_1 = 14$, $z_2 = 40$, $x_1 = 0{,}4$, $x_2 = 0{,}2$. Знайти α_w та a_w.

Розв'язання. $x_\Sigma = 0{,}6$; $z_1 + z_2 = 54$. $\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \cdot 0{,}6/54 \cdot 0{,}36397 + 0{,}014904 = 0{,}00809 + 0{,}014904 = 0{,}02299$. З таблиць евольвентної функції $\operatorname{inv} 22° = 0{,}02006$, $\operatorname{inv} 23° = 0{,}02304$, тому $\alpha_w = 23°$. Нормальна міжосьова відстань $a = 5 \cdot 54/2 = 135$ мм. $a_w = 135 \cdot \cos 20°/\cos 23° = 135 \cdot 0{,}93969/0{,}92050 = 137{,}8$ мм.

31.5. Сили в зачепленні та порядок синтезу

Нормальна сила F_n між зубцями діє по лінії зачеплення. У циліндричній прямозубій передачі її розкладають на колову силу F_t (передає крутний момент) і радіальну F_r:

$$F_t = 2 \cdot T_1 / d_{w1} \quad (31.7)$$

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha_w \quad (31.8)$$

де T_1 – крутний момент на шестерні, d_{w1} – діаметр початкового кола.

Синтез евольвентної передачі полягає в такому порядку. За заданим передавальним відношенням і умовою міцності вибирають числа зубців z_1, z_2 ($z_1 \geq z_{min}$) і модуль m із ряду стандартних значень. Для передачі зі зміщенням призначають коефіцієнти x_1, x_2 за блокувальними контурами (залежно від z_1, z_2) або з умови заданої міжосьової відстані, обчислюють α_w, a_w. Перевіряють умови: відсутність підрізання, відсутність загострення зубців (товщина зубця на колі вершин $s_a \geq 0{,}25 \cdot m$), коефіцієнт перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 1{,}2$, відсутність інтерференції (перетину профілів).

Колеса виготовляють копіюванням або обкатуванням, найпоширенішим є нарізання черв'ячною фрезою. Мінімальне число зубців нульового евольвентного колеса дорівнює 17; для меншого числа застосовують додатне зміщення інструмента. Передачі зі зміщенням дозволяють поліпшити міцність, змінити міжосьову відстань і вирівняти знос. Синтез передачі завершується перевіркою відсутності підрізання, загострення й достатнього коефіцієнта перекриття.

Лекція 32. Багатоланкові зубчасті механізми. Планетарні та диференціальні передачі

32.1. Види багатоланкових зубчастих механізмів

Багатоланкові зубчасті механізми застосовують для отримання великих передавальних відношень, розподілу потужності між кількома потоками, зміни напрямку обертання, а також для складання (додавання або віднімання) рухів. Залежно від того, чи є колеса з рухомими осями, їх поділяють на три групи:

- **рядові** – усі осі коліс нерухомі (розглядалися в лекції 29);
- **планетарні** – один або кілька коліс мають рухомі геометричні осі, при цьому ступінь рухомості механізму $W = 1$;
- **диференціальні** – мають рухомі осі та ступінь рухомості $W = 2$ і більше.

Рядові передачі прості, але при великих i потребують кількох ступенів і стають громіздкими. Планетарні передачі, навпаки, забезпечують передавальне відношення 3…12 в одній ступені при малих габаритах і масі, з розподілом навантаження між кількома сателітами.

32.2. Будова планетарного механізму

Найпростіший планетарний механізм складається з центрального **сонячного колеса** 1 (зовнішні зубці), **сателіта** 2, що обертається навколо власної осі й одночасно разом з водилом навколо осі сонячного колеса, **водила** *H*, що несе вісь сателіта, та **корончастого (епіциклічного) колеса** 3 із внутрішніми зубцями (рис. 32.1). Сонячне та корончасте колеса, а також водило мають спільну нерухому геометричну вісь; їх називають **центральними ланками**.

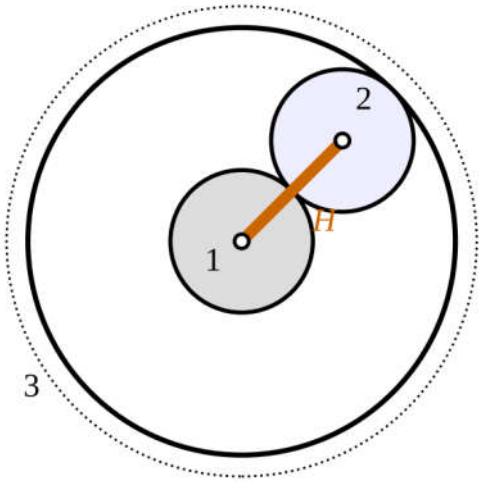


Рис. 32.1. Планетарний механізм: 1 – сонячне колесо, 2 – сателіт, *H* – водило, 3 – корончасте колесо

Ступінь рухомості визначаємо за формулою Чебишева $W = 3n - 2p_5 - p_4$. Якщо корончасте колесо закріплено на стояку, рухомих ланок $n = 3$ (1, 2, *H*), нижчих пар $p_5 = 3$ (обертальні 1–0, *H*–0, 2–*H*), вищих $p_4 = 2$ (зачеплення 1–2 та 2–3). Отже $W = 3\cdot3 - 2\cdot3 - 2 = 1$ – механізм планетарний. Якщо корончасте колесо вільне, то $n = 4$, $p_5 = 4$, $p_4 = 2$, $W = 12 - 8 - 2 = 2$: це **диференціальний** механізм.

32.3. Метод обернення руху та формула Вілліса

Для визначення передавальних відношень планетарних механізмів застосовують метод обернення руху (метод Вілліса). Усьому механізму надають додатковий обертовий рух із кутовою швидкістю, рівною за модулем і протилежною за напрямком кутовій швидкості водила ($-\omega_H$). Тоді водило стає нерухомим, і механізм перетворюється на **обернений** – рядовий – механізм із нерухомими осями, для якого справедливі формули рядової передачі. Кутові швидкості ланок у оберненому русі:

$$\omega_1{}^H = \omega_1 - \omega_H,\ \omega_3{}^H = \omega_3 - \omega_H \qquad (32.1)$$

Передавальне відношення оберненого механізму від колеса 1 до колеса 3 записують через числа зубців:

$$i_{13}^{H} = (\omega_1 - \omega_H) / (\omega_3 - \omega_H) = - z_3 / z_1 \qquad (32.2)$$

Знак «мінус» враховує, що колеса 1 і 3 при нерухомому водилі обертаються в різні боки. Це співвідношення називають **формулою Вілліса**. Її записують у вигляді, зручному для практичних розрахунків:

$$n_1 - n_H = - (z_3 / z_1) \cdot (n_3 - n_H) \qquad (32.3)$$

При нерухомому корончастому колесі ($n_3 = 0$) отримуємо передавальне відношення від сонячного колеса до водила:

$$i_{1H}^{(3)} = n_1 / n_H = 1 + z_3 / z_1 \qquad (32.4)$$

Значення i_{1H} зазвичай 3…8; воно завжди більше одиниці, а напрямок обертання водила збігається з напрямком сонячного колеса.

Приклад. У планетарному редукторі $z_1 = 24$, $z_2 = 18$, $z_3 = 60$. Корончасте колесо нерухоме, $n_1 = 1400$ об/хв. Знайти n_H.

Розв'язання. $i_{1H} = 1 + 60/24 = 3{,}5$; $n_H = 1400/3{,}5 = 400$ об/хв. Перевіряємо співвісність: $z_3 = z_1 + 2z_2 = 24 + 36 = 60$ – виконується.

32.4. Умови підбору чисел зубців

Числа зубців планетарного механізму не можна вибирати довільно. Для механізму з сонячним колесом, одним рядом сателітів і корончастим колесом повинні виконуватися умови:

1) співвісності – осі центральних коліс збігаються; при однакових модулях

$$z_3 = z_1 + 2 \cdot z_2 \qquad (32.5)$$

2) складання – щоб k рівномірно розташованих сателітів можна було встановити без натягу, сума $z_1 + z_3$ має ділитися націло на число сателітів k: $(z_1 + z_3)/k$ = ціле;

3) сусідства – сателіти не повинні торкатися один одного вершинами зубців: $\sin(\pi/k) > (z_2 + 2)/(z_1 + z_2)$;

4) відсутності підрізання й інтерференції – $z_1 \geq 17$ (або застосовують зміщення), $z_3 \geq 85$ і $z_2 \geq 17$ для зовнішніх коліс без зміщення, $z_3 - z_2 \geq 8$ для внутрішнього зачеплення.

У прикладі $k = 3$: $(24 + 60)/3 = 28$ – ціле, умова складання виконується; $\sin 60° = 0{,}866 > 20/42 = 0{,}476$ – умова сусідства виконується.

32.5. Диференціальні механізми

У диференціальному механізмі обидві центральні ланки, наприклад сонячне й корончасте колеса, можуть рухатися незалежно. Тоді формула Вілліса дозволяє знайти кутову швидкість водила за двома заданими:

$$n_H = (n_1 + (z_3 / z_1) \cdot n_3) / (1 + z_3 / z_1) \qquad (32.6)$$

Приклад. Для того самого механізму ($z_1 = 24$, $z_3 = 60$) задано $n_1 = 1000$ об/хв, $n_3 = -200$ об/хв (обертання в зворотний бік). Визначити n_H.

Розв'язання. $z_3/z_1 = 2{,}5$; $n_H = (1000 + 2{,}5 \cdot (-200))/3{,}5 = 500/3{,}5 = 142{,}9$ об/хв.

Диференціали застосовують як суматори й роздільники потоків потужності: у диференціалах заднього моста автомобілів і тракторів (колеса, що рухаються по різних траєкторіях при повороті, отримують різні кутові швидкості за однакового моменту), у механізмах повороту гусеничних тракторів, у гідрооб'ємних і електромеханічних трансмісіях з розподілом потужності, у вимірювальних і обчислювальних пристроях. Вони можуть працювати і як **замкнені** диференціали, коли додаткова ланка з'єднує два з вільних валів через рядову передачу – це знижує потужність, що передається через зубчасті пари, і підвищує ККД трансмісії.

32.6. ККД планетарних передач

Планетарні передачі мають високий ККД: для простої планетарної передачі з нерухомим корончастим колесом $\eta = 0{,}96\ldots0{,}98$ при $i_{1H} < 8$. При більших значеннях i ККД різко падає, а при деяких схемах настає самогальмування, тому доцільніше з'єднувати кілька ступенів послідовно.

Планетарні та диференціальні механізми містять колеса з рухомими осями; їх кінематичний аналіз виконують методом обернення руху за формулою Вілліса. Планетарні передачі компактні, мають велике передавальне відношення й високий ККД, але потребують виконання умов співвісності, складання та сусідства. Диференціальні механізми дозволяють додавати й розподіляти рухи та потужність.

Лекція 33. Кулачкові механізми

33.1. Призначення та класифікація

Кулачковий механізм – це механізм, у складі якого є ланка з вищою кінематичною парою – кулачок, що має робочу поверхню змінної кривизни й забезпечує вихідній ланці (штовхачу або коромислу) заданий закон руху. Основна перевага цих механізмів – можливість точно відтворити практично будь-який закон руху з потрібними зупинками (витримками), що важко реалізувати важільними механізмами.

Кулачкові механізми класифікують за рядом ознак:

- за рухом кулачка: з обертовим, з поступально рухомим (клин), з коливним кулачком;
- за рухом вихідної ланки: зі штовхачем (поступальний рух) і з коромислом (коливальний);
- за формою робочої поверхні штовхача: гостроконечні, роликові, тарілчасті (з плоскою або сферичною поверхнею);
- за розташуванням осі штовхача: центральні (вісь проходить через вісь обертання кулачка) і з дезаксіалом e;

– за способом замикання вищої пари: силове (пружиною, вагою) і геометричне (пази, подвійні кулачки, з'єднання за формою).

33.2. Будова та ступінь рухомості

Простий кулачковий механізм (рис. 33.1) складається з кулачка 1, що обертається навколо нерухомої осі, ролика 2 і штовхача 3, що рухається в напрямній стояка 0. Ролик має власну обертальну пару зі штовхачем.

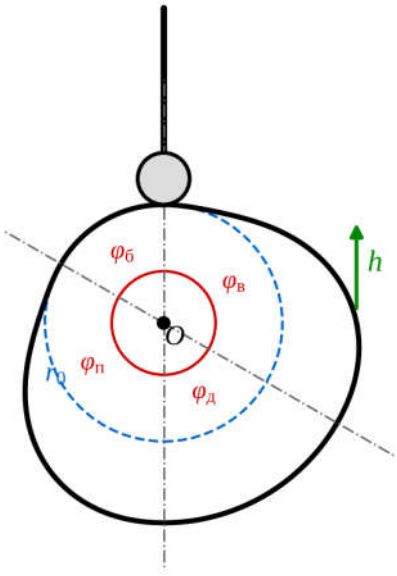


Рис. 33.1. Кулачковий механізм з роликовим штовхачем та фазові кути

За формулою Чебишева $W = 3n - 2p_5 - p_4$: рухомих ланок $n = 3$; нижчих пар $p_5 = 3$ (1–0, 3–0, 2–3); вищих $p_4 = 1$ (1–2). Тоді $W = 9 - 6 - 1 = 2$. Другий ступінь рухомості – це можливість незалежного обертання ролика навколо власної осі, яке не впливає на рух штовхача. Така рухомість називається **місцевою** (див. лекцію 6). Після виключення ролика із розрахунку (він замінюється точкою контакту штовхача з кулачком) отримуємо $n = 2$, $p_5 = 2$, $p_4 = 1$ і $W = 6 - 4 - 1 = 1$.

33.3. Основні параметри та фазові кути

Профіль кулачка характеризується такими величинами (рис. 33.1):

– **радіус основного (початкового) кола** r_0 – найменший радіус центрового профілю кулачка;
– **хід штовхача** h – найбільше переміщення вихідної ланки від найближчого положення;
– **кут тиску** – кут між напрямком руху штовхача й нормаллю до профілю в точці контакту; він визначає співвідношення між корисною та шкідливою складовими сили;
– **дезаксіал** e – відстань між віссю штовхача й віссю обертання кулачка.

Один оберт кулачка поділяється на **фази**. Кут повороту кулачка, на якому штовхач віддаляється від центра, називають **кутом віддалення** $\varphi_в$;

кут, протягом якого штовхач стоїть у найвіддаленішому положенні, – кутом **дальнього стояння** $\varphi_д$; кут, на якому штовхач повертається, – кутом **повернення** $\varphi_п$; кут, протягом якого він знаходиться в найближчому положенні, – кутом **ближнього стояння** $\varphi_б$. Сума фазових кутів дорівнює повному оберту:

$$\varphi_в + \varphi_д + \varphi_п + \varphi_б = 360° \qquad (33.1)$$

Кут $\varphi_р = \varphi_в + \varphi_д + \varphi_п$ називають **робочим кутом** кулачка.

33.4. Закони руху штовхача

Закон руху вихідної ланки задають залежністю переміщення s від кута повороту кулачка φ: $s = s(\varphi)$. Швидкість і прискорення штовхача знаходять диференціюванням:

$$v = \omega \cdot ds / d\varphi,\ a = \omega^2 \cdot d^2s / d\varphi^2 \qquad (33.2)$$

Величини $ds/d\varphi$ і $d^2s/d\varphi^2$ називають відповідно **аналогом швидкості** та **аналогом прискорення**; вони не залежать від частоти обертання, тому зручні при проектуванні. Закон руху вибирають з урахуванням динаміки, точності й технологічності, а також наявності **ударів**.

Жорсткий удар виникає, коли швидкість змінюється стрибком (прискорення теоретично нескінченне). **М'який удар** – коли стрибком змінюється прискорення, при цьому швидкість неперервна, а сила інерції змінюється скінченно. Основні закони й характер ударів наведено в таблиці 33.1.

Таблиця 33.1. Закони руху штовхача (фаза віддалення)

Закон	Переміщення s(φ)	Удари
Рівномірний	$s = h\cdot\varphi/\varphi_в$	жорсткі в початку й кінці
Постійного прискорення (параболічний)	$s = 2h\cdot(\varphi/\varphi_в)^2$ на першій половині фази	м'які на початку, середині й кінці
Косинусоїдальний	$s = (h/2)\cdot(1 - \cos(\pi\cdot\varphi/\varphi_в))$	м'які на початку й кінці
Синусоїдальний (циклоїдальний)	$s = h\cdot(\varphi/\varphi_в - \sin(2\pi\cdot\varphi/\varphi_в)/(2\pi))$	без ударів

Для симетричного закону постійного прискорення на першій половині фази віддалення ($0 \le \varphi \le \varphi_в/2$) переміщення, аналог швидкості й аналог прискорення:

$$s = 2 \cdot h \cdot \varphi^2 / \varphi_в^2,\ ds/d\varphi = 4 \cdot h \cdot \varphi / \varphi_в^2,\ d^2s/d\varphi^2 = 4 \cdot h / \varphi_в^2 \qquad (33.3)$$

На другій половині фази прискорення змінює знак на протилежний (гальмування). Максимальна швидкість досягається на межі половин ($\varphi = \varphi_в/2$): $v_{max} = 2 \cdot h \cdot \omega / \varphi_в$.

Приклад. Ролик штовхача піднімається на $h = 12$ мм за $\varphi_в = 60°$ (1,047 рад) за законом постійного прискорення. Частота обертання кулачка 600 об/хв. Знайти максимальні швидкість і прискорення.

Розв'язання. $\omega = \pi \cdot 600/30 = 62{,}83$ рад/с; $v_{max} = 2 \cdot 0{,}012 \cdot 62{,}83/1{,}047 = 1{,}44$ м/с; $a_{max} = 4 \cdot 0{,}012 \cdot 62{,}83^2/1{,}047^2 = 0{,}048 \cdot 3948/1{,}0966 = 172{,}8$ м/с².

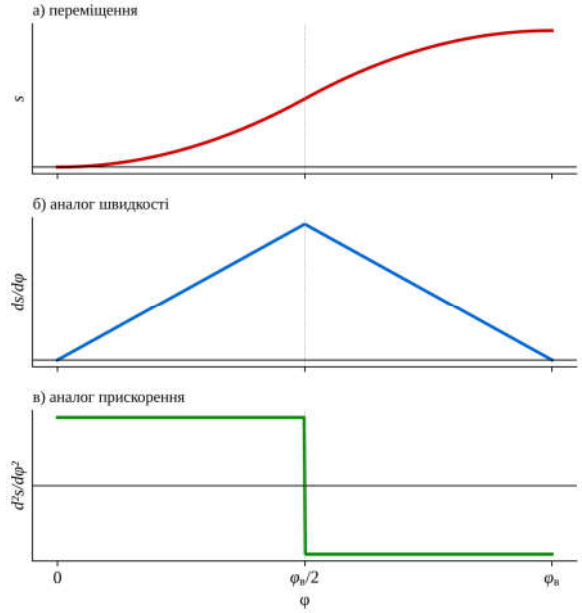


Рис. 33.2. Діаграми переміщення, аналога швидкості й аналога прискорення при законі постійного прискорення

33.5. Кінематичний аналіз кулачкового механізму

Задача аналізу – за заданим профілем кулачка визначити положення, швидкість і прискорення штовхача. Найпростіший шлях – графічний: профіль будують у масштабі, штовхач послідовно ставлять у положення, що відповідають кутам повороту φ_i кулачка, вимірюють переміщення s_i і будують графік $s(\varphi)$. Диференціюють графік методом хорд (лекція 14) і одержують діаграми аналога швидкості та аналога прискорення (рис. 33.2).

Кулачкові механізми дозволяють реалізувати практично будь-який закон руху ланки, включно із зупинками. Простий механізм з роликом має місцеву рухомість, яка не впливає на закон руху. Основними параметрами є радіус r_0, хід h, фазові кути; закон руху вибирають так, щоб уникнути жорстких, а за можливості й м'яких ударів, і оцінюють за аналогами швидкості та прискорення.

Лекція 34. Синтез кулачкових механізмів. Підсумок курсу

34.1. Задачі синтезу кулачкового механізму

Синтез кулачкового механізму – це визначення профілю кулачка за заданими умовами. Вихідними даними служать: схема механізму (тип штовхача, дезаксіал e); закон руху вихідної ланки $s(\varphi)$, хід h та фазові кути ($\varphi_в$, $\varphi_д$, $\varphi_п$, $\varphi_б$); частота обертання n кулачка, допустимий кут тиску $[v]$; радіус ролика $r_р$; діаметр вала. Проектування виконують у два етапи: спочатку визначають мінімально допустимий радіус основного кола r_0 з умови обмеження кута тиску, потім за законом руху будують профіль кулачка.

34.2. Кут тиску

Кут тиску v – кут між напрямком швидкості точки штовхача (лінією його руху) та нормаллю до профілю в точці контакту, тобто напрямком сили, що діє на штовхач від кулачка. Сила F від кулачка розкладається на корисну складову $F\cos v$, яка рухає штовхач, і шкідливу $F\sin v$, що притискає його до напрямної й викликає тертя. Із ростом v зростає тиск у напрямній, збільшуються втрати, а при досягненні кута тертя настає **заклинювання** механізму – штовхач не рухається за будь-якої сили. Тому кут тиску обмежують: для штовхачів $[v] = 25…30°$, для коромисел $[v] = 40…45°$.

Для штовхача з роликом при дезаксіалі e кут тиску визначається формулою

$$\operatorname{tg} v = (ds/d\varphi - e) / (\sqrt{}(r_0^2 - e^2) + s) \qquad (34.1)$$

де $ds/d\varphi$ – аналог швидкості штовхача, s – переміщення. Для центрального штовхача ($e = 0$) вона спрощується:

$$\operatorname{tg} v = (ds/d\varphi) / (r_0 + s) \qquad (34.2)$$

Із цієї формули видно: кут тиску зростає із збільшенням аналога швидкості (ходу h і швидкості підйому) та зменшується із зростанням радіуса r_0.

34.3. Визначення мінімального радіуса r_0

З умови $v \le [v]$ для центрального штовхача отримуємо

$$r_0 \ge (ds/d\varphi) / \operatorname{tg} [v] - s \qquad (34.3)$$

Мінімальний радіус визначають як максимум правої частини за всіма положеннями механізму на фазі віддалення. Найчастіше його знаходять графічно за допомогою діаграми Льозі: будують у масштабі залежність $ds/d\varphi$ від s; з початку координат проводять промені під кутом $[v]$ до осі s, до дотичних до діаграми; область допустимого розташування осі обертання лежить під ними й обмежена знизу променями.

Приклад. $h = 12$ мм, $\varphi_в = 60°$, закон постійного прискорення, $[v] = 30°$, штовхач центральний. Визначити r_0.

Розв'язання. Кут v найбільший на межі половин фази ($\varphi = \varphi_в/2$), де $s = h/2 = 6$ мм, а аналог швидкості $ds/d\varphi = 2h/\varphi_в = 2\cdot 12/1{,}047 = 22{,}92$ мм/рад.

Тоді $r_0 \geq 22{,}92/\mathrm{tg}\,30° - 6 = 22{,}92/0{,}5774 - 6 = 39{,}70 - 6 = 33{,}7$ мм. Приймаємо $r_0 = 35$ мм. Радіус ролика обмежують $r_р \leq 0{,}4 \cdot r_0 = 14$ мм; приймаємо $r_р = 10$ мм.

34.4. Побудова профілю методом обернення руху

Профіль кулачка будують за допомогою **методу обернення руху** (інверсії): уявно зупиняють кулачок, надаючи всьому механізму кутову швидкість ($-\omega$) кулачка. Тоді вісь штовхача обертається навколо центра O у протилежний бік, а штовхач виконує свій закон руху відносно неї. Послідовність побудови:

1) із центра O проводять коло радіуса r_0 (при ролику – центрового профілю) і відкладають від осі штовхача фазові кути $\varphi_в$, $\varphi_д$, $\varphi_п$, $\varphi_б$, розбиваючи їх на рівні ділянки (зазвичай 6…12);

2) за графіком $s(\varphi)$ знаходять переміщення s_i для кожного положення;

3) на кожному промені (положенні осі штовхача в оберненому русі) від кола r_0 відкладають відрізок s_i; для дезаксіального штовхача промені проводять дотичними до кола радіуса e;

4) з'єднують одержані точки плавною кривою – це **теоретичний (центровий) профіль** кулачка, який описує центр ролика;

Практичний профіль має бути без самоперетинань і загострень. Для цього радіус кривини теоретичного профілю в опуклих ділянках повинен перевищувати радіус ролика: $\rho_{min} > r_р$ (практично $\rho_{min} \geq 1{,}2 \cdot r_р$). Якщо умову не виконано, збільшують r_0 або зменшують $r_р$.

Сила інерції штовхача $F_{ін} = m \cdot a$ на ділянці гальмування спрямована від кулачка, тому для силового замикання пружина повинна забезпечити притискну силу

$$F_{пр} \geq m \cdot a_{max} + F_{оп} \qquad (34.4)$$

де a_{max} – максимальне прискорення штовхача, $F_{оп}$ – зовнішня сила опору.

Список використаних джерел:

1. Стрілець О. Р. Теорія механізмів і машин. Конспект лекцій : навчально-методичний посібник. Рівне : НУВГП, 2023. 229 с. ISBN 978-966-327-558-1. URL: http://ep3.nuwm.edu.ua/id/eprint/27728
2. Фурсіна А. Д., Шевченко В. Г., Кружнова С. Ю. Теоретична та прикладна механіка. Частина 2. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Запоріжжя : НУ «Запорізька політехніка», 2023. 122 с. URL: https://eir.zp.edu.ua/items/eebf8492-e703-4629-afcd-c1cb083fe0dd
3. Кірієнко О. А. Теорія механізмів і машин. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування». Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46216
4. Ткачук М. А., Гречка І. П., Зарубіна А. О., Зінченко О. І., Кротенко Г. А. Методи аналізу та синтезу механізмів : теорія механізмів і машин : підручник. Харків : НТУ «ХПІ», 2024. 156 с. URL: https://repository.kpi.kharkov.ua/handle/KhPI-Press/83409.
5. Перегон В. А., Воропай О. В., Коряк О. О., Поваляєв С. І. Синтез механізмів і динаміка машин : навчальний посібник. Харків : ФОП Бровін О. В., 2023. 164 с.
6. Перегон В. А., Воропай О. В., Богдан Д. І., Єгоров П. А., Коряк О. О. Методичні вказівки і завдання до курсової роботи, СРС та практичних занять з дисципліни «Теорія механізмів і машин». Харків : ХНАДУ, 2025.
7. Mechanisms. Amsterdam : Academic Press, 2022. DOI: https://doi.org/10.1016/C2021-0-02621-3.
8. Теорія механізмів і машин : методичні рекомендації для виконання практичних робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП «Агроінженерія» спеціальності 208 «Агроінженерія» денної та заочної форми здобуття вищої освіти / уклад. Н. А. Доценко. Миколаїв : МНАУ, 2024. 44 с. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/19254
9. Теорія механізмів і машин. Модуль "Кінематичний аналіз механізмів" : методичні рекомендації для виконання практичних робіт здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти ОПП "Агроінженерія" спеціальності 208 "Агроінженерія" денної та заочної форм здобуття вищої освіти / уклад. Н. А. Доценко, Д. В. Бабенко. Миколаїв : МНАУ, 2025. 52 с. URL: https://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/23170

10. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А. Теорія механізмів і машин: практикум для навчання в умовах інформаційно-освітнього середовища : навч. посіб. Миколаїв : МНАУ, 2019. 168 с. URL: http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/6395
11. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А. Дослідження конструктивних і кінематичних характеристик енергоефективного олійного пресу. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science.* 2024. Вип. 28(3). С. 41-54. DOI: 10.56407/bs.agrarian/3.2024.41.
12. Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А., Бацуровська І. В. Дослідження характеру руху подрібненої маси по поверхні решіт сепаратора насіння овочевих та баштанних культур. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science.* 2023. Вип. 27(4). С. 18-35. DOI: https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/4.2023.18.
13. Babenko, D., Dotsenko, N., Gorbenko, O. Justification of the design parameters of improved equipment for tomato processing. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science*. 2025. Vol. 29, No. 3. P. 9–22. DOI: https://doi.org/10.56407/bs.agrarian/3.2025.09
14. Babenko, D., Dotsenko, N., Baczurovskaya, I. et al. Determination of the parameters of the use of water-lifting equipment in the conditions of livestock farms. *Ukrainian Black Sea Region Agrarian Science.* 2022. Vol. 26, No. 3. P. 32–46. DOI: https://doi.org/10.56407/2313-092X/2022-26(3)-3.
15. Зубко В. М. Агроінжиніринг : навчальний посібник для здобувачів вищої освіти спеціальностей 208 «Агроінженерія», 202 «Агрономія». Суми : СНАУ, 2022. 468 с.

Навчальне видання

Теорія механізмів і машин

курс лекцій

Укладач: **Доценко** Наталія Андріївна

Редактор: Н. А. Доценко

Комп'ютерний набір: Н. А.Доценко

Дизайн і верстка: Н. А. Доценко

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 11,75
Тираж 15 прим. Зам. №_

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету.
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9