МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕКОНОМІКИ ТА УПРАВЛІННЯ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА ПЕОМ

КУРС ЛЕКЦІЙ

для студентів інженерно-енергетичного факультету
VI курсу денної форми навчання
спеціальностей
8.10010203 – «Механізація сільського господарства»
та 8.01010401 – «Професійна освіта. Технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства»

Миколаїв
2014

УДК 519.85:330.562:338.43
ББК 65.32 – 3
М 34

Розглянуто на засіданні науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 22 січня 2014 року, протокол № 5.

Друкується за рішенням науково-методичної комісії Миколаївського національного аграрного університету від 30 січня 2014 року, протокол № 5.

Автори:
О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор
А. М. Жорова – канд. фіз.-мат.наук, старший викладач
І. І. Хилько – старший викладач
С. І. Тищенко – канд. пед. наук, в.о. доцента
М. А. Домаскіна – канд. екон. наук, в.о. доцента
М. О. Єгорова – асистент

Рецензенти:
І. П. Атаманюк – канд. техн. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету
І.В. Кулаковська – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського державного університету імені Петра Могили

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Одним з головних напрямків науково – технічного прогресу протягом кількох десятиріч є розвиток методів і засобів інформатики та обчислювальної техніки. Обчислювальна математика стала основою для реалізації та комп’ютерного розрахунку методів математичного моделювання. Впровадження персональних комп’ютерів, комп’ютерних інформаційних мереж, побудова та розвиток Internet, широке та різноманітне використання методів математичного моделювання призвели до розширення як практичної, так і теоретичної бази комп’ютерної математики. Використання методів математичного моделювання і комп’ютерного розв’язання інженерних та наукових задач дозволяє значно підвищити ефективність процесів проектування та управління. Математичне комп’ютерне моделювання стало головним засобом дослідження складних процесів і систем, на якому базуються сучасні підходи до проектування, оптимізації та управління в різних галузях науки і техніки. Моделювання є важливим засобом розв’язання багатьох технічних і технологічних завдань. Для інженера-механіка особливого значення набуває математичне моделювання.

Згідно з освітньо-професійною програмою підготовки магістрів за галузями знань: 1001 – Техніка та енергетика аграрного виробництва та – 0101- Педагогічна освіта до переліку нормативних дисциплін циклу професійно-практичної та наукової дисциплін підготовки майбутніх фахівців входить «Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ». Навчальна дисципліна покликана сформувати у студентів систему знань з методології та інструментарію побудови й використання різних типів математичних моделей. Тому виникає необхідність у розкритті сутності математичного моделювання.

Метою даних рекомендацій є ознайомлення студентів інженерно-технічних спеціальностей з основними поняттями комп’ютерного моделювання систем та процесів та методи розв’язання на комп’ютерах сучасних задач обчислювальної математики, що виникають в процесі дослідження та проектування систем управління.

За навчальним планом на вивчення дисципліни відведено 3,5 кредити ECTS, що становить 126 годин. З них:

- лекції – 30 годин / 0,84 кредита;
- практичні заняття – 30 годин / 0,84 кредита;
- самостійна робота – 66 годин / 1,83.

Форма підсумкового контролю – Іспит.

ТЕМА 1. ВСТУП. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ОПТИМІЗАЦІЇ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКУ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ МАШИНО ВИКОРИСТАННЯ В РОСЛИННИЦТВІ

ПЛАН

1.1. Поняття «модель» та «моделювання».
1.2. Узагальнена методика математичного моделювання та його етапи.
1.3. Основні види моделей.
1.4. Основні властивості моделей.
1.5. Принципи моделювання.
1.6. Засоби математичного моделювання.
1.7. Методи обґрунтування та оптимізації машинно-тракторного парку.
1.8. Математичне моделювання технологічних процесів.

1.1 ПОНЯТТЯ «МОДЕЛЬ» ТА «МОДЕЛЮВАННЯ»

Одне з найважливіших завдань фахівців інженерно-технічної служби агропромислового комплексу полягає у визначенні для кожного окремого господарства або машинно-технологічної станції такої мінімальної, але достатньої кількості машин і машинного парку в цілому, яка забезпечить найефективніше його використання.

В обґрунтуванні комплексів машин, що складають машинно-тракторний парк, головною умовою є дотримання операційної технології, тобто агротехнологічних вимог і в першу чергу строків виконання технологічних операцій. Це забезпечує підтримку виробничих процесів, заявленого технологічного рівня та відповідно можливість одержання максимально запланованої кількості продукції рослинництва.

Для вирішення цього важливого завдання – обґрунтування та оптимізації машинного парку – використовується математичне моделювання. Завдяки використанню персональних комп’ютерів вирішення цієї задачі значно вдосконалюється.

Взагалі, під моделюванням розуміють дослідження явищ, процесів або об'єктів шляхом побудови та вивчення їх моделей.

Моделі - це установки, пристрої або підсумкові логічні уявлення, подібні реальним, які відтворюють справжні процеси, явища в цілому або окремі їх властивості.

Можна сформулювати поняття «моделювання» та «моделі» інакше. Будь-які два об’єкти О1 та О2 людської діяльності в чомусь подібні, а в чомусь різні. Заміщення об’єкта О1 об’єктом О2 з метою вивчення найважливіших рис О1 за допомогою об’єкту О2 називається ***моделюванням*** об’єкта О1 об’єктом О2. При цьому об’єкт О1 називають ***оригіналом*** (або ***натурою***), а об’єкт О2 – ***моделлю***.

Таким чином, ***модель*** – це замісник оригіналу, який дозволяє вивчити або зафіксувати деякі важливі риси оригіналу.

Приклад 1.1. При проектуванні літаків, ракет, кораблів, автомобілів для дослідження залежності сили опору середовища рухові об’єкта від його швидкості (що практично неможливо визначити аналітично) використовують спосіб продувки зменшеної моделі транспортного засобу в аеродинамічній трубі. Заміщення оригінала моделлю в цьому випадку дозволяє зафіксувати важливі властивості оригінала та дослідити їх.

Приклад 1.2. При дослідженні роботи електричного генератора на споживача підключити реального споживача до генератора практично неможливо, тому споживача замінюють як правило послідовним підключенням опору та конденсатора. Тут має місце лише фіксація найбільш важливих рис оригіналу.

Оптимізацією об'єкта (чи його параметрів) називається процес вибору найкращого його варіанта з множини допустимих.

У більшості випадків поняття "найкращий" може бути виражене кількісно:

• максимальна продуктивність;
• мінімальні втрати врожаю;
• мінімальні витрати;
• максимальний коефіцієнт корисної дії тощо.

Оптимізація об'єкта полягає у визначенні таких значень факторів (керованих параметрів), при яких певний параметр приймає необхідне максимальне або мінімальне значення.

Якщо є тільки один фактор (внутрішній параметр), то функція, що характеризує залежність певного параметра від фактора, відображається кривою в плоскій системі координат

Історію вживання терміну модель і практичного використання методу моделювання можна умовно поділити на чотири етапи:

- на першому етапі моделювання застосовувалось без теоретичного обґрунтування в будівництві та архітектурі для дослідження споруд;
- на другому етапі формувались та ефективно використовувались теоретичні основи моделювання (у працях Галілео Галілея та Ісаака Ньютона в XVII – XVIII ст.);
- третій етап характеризується детальним дослідженням методу моделювання;
- четвертим є етап кібернетичного або комп'ютерного моделювання.

Як моделі, що заміщують оригінали, можуть використовуватися зокрема засоби спілкування людей (мова, писемність), засоби пізнання матеріального світу (модель сонячної системи, модель будови атома), засоби навчання та тренування (тренажери для льотчиків, водіїв), засоби прогнозування поведінки оригіналів в різних умовах (наприклад, для підбору параметрів, що відповідають оптимальному функціонуванню роботи приладу в певних умовах).

У практичній діяльності інженера-механіка як в галузі виробництва, так і в галузі проектування або наукової діяльності в основному використовується моделювання з використанням методів та засобів математики, тому подальша увага буде сконцентрована саме на математичному моделюванні.

Математиче моделювання - один з найбільш універсальних видів моделювання, що ставить у відповідність модельованому фізичному процесу систему математичних співвідношень, розв'язання якої дозволяє отримати відповідь на питання про поведінку об'єкту без створення фізичної моделі, яка часто є дорогою і малоефективною. Отже, *математичною моделлю* називається сукупність математичних співвідношень, рівнянь, нерівностей, що описують основні закономірності, властиві досліджуваному процесу, об'єкту або системі. При цьому використовують фундаментальні положення та закони математики, що описують явище, систему чи пристрій, що моделюються, на деякому рівні ідеалізації.

Таким чином, математична модель системи чи пристрою – це їх певний математичний опис, що забезпечує імітацію роботи системи чи пристрою на рівні, достатньо близькому до їх реальної поведінки при натурних випробуваннях.

Розрізняють і інші види моделювання: імітаційне, комп’ютерне, інформаційне тощо.

Імітаційне моделювання (simulation) передбачає представлення моделі у вигляді алгоритму та комп’ютерної програми, яка дозволяє відтворити поведінку об’єкту. *Імітаційні моделі* розглядаються як експерименти, що проводяться на комп’ютерах, з математичними моделями, що імітують поведінку реальних об'єктів. При цьому імітуються елементарні явища, що складають процес, зі збереженням їх логічної структури та послідовності у часі, що дозволяє отримати відомості про стан системи у певний момент часу та оцінити характеристики системи. Імітаційні моделі дозволяють вирішувати більш складні задачі, ніж аналітичні. Наприклад, вони дозволяють досить легко враховувати вплив випадкових факторів.

Традиційно під моделюванням на ЕОМ розумілося лише імітаційне моделювання. Але завдяки розвитку графічного інтерфейсу та графічних пакетів значного поширення набуло комп’ютерне структурно-функціональне моделювання, а також розпочалося використання комп’ютера з метою концептуального моделювання, наприклад для побудови систем штучного інтелекту.

Під комп’ютерною моделлю (computer model) найчастіше розуміють:

- умовний образ об’єкта чи деякої системи об’єктів (або процесів), описаних за допомогою взаємозалежних комп’ютерних таблиць, схем, діаграм, графіків, малюнків, анімаційних фрагментів, гіпертекстів і т. ін., що відбивають структуру та взаємозв’язки між елементами об’єкта чи системи. Комп’ютерні моделі такого типу називають структурно-функціональними;
- окрему програму, сукупність програм чи програмний комплекс, що дає змогу виконанням послідовності обчислень з подальшим графічним відображенням їх результатів відтворювати (імітувати) процеси функціонування об’єкта (системи об’єктів), що функціонує під впливом різних, як правило випадкових, факторів (імітаційну модель).

Комп’ютерне моделювання було започатковано в кінці 40-х – на початку 50-х років XX століття. Це було обумовлено тим, що, по-перше, з’явились перші ЕОМ, здатні позбавити вчених громіздкої обчислювальної роботи. І по-друге, досягнення фізики і техніки відкрили перспективи реалізації таких проектів, як освоєння космосу, створення ракетно-ядерного щита, оволодіння таємницями атомної енергії, пошук нових фундаментальних законів природи. Ці завдання не могли бути реалізовані традиційними методами, вони були попередньо «здійснені» в надрах ЕОМ за допомогою математичних модулів і лише потім – на практиці. Стосовно використання комп'ютерів основним етапом розрахунку математичних моделей є їх алгоритмізація, тобто розробка структури алгоритму, представленого у вигляді блок-схеми, граф-схеми або програмно-реалізованого з використанням принципів структурного програмування.

Комп'ютерне моделювання – метод розв'язування задачі аналізу або синтезу складної системи, що ґрунтується на використанні її комп'ютерної моделі. Сутність комп'ютерного моделювання полягає у відшуканні кількісних і якісних результатів із залученням наявної моделі.

Комп'ютерна модель складної системи має якомога повніше відбивати всі основні фактори й взаємозв'язки, що характеризують реальні ситуації, критерії та обмеження. До того ж модель має бути настільки універсальною (щоб охоплювати якнайширше коло близьких за призначенням об'єктів) настільки й простою (щоб сприяти виконанню необхідних досліджень із мінімальними витратами).

Комп'ютерний напрям моделювання в науці отримав назву обчислювального експерименту.

Обчислювальний експеримент (computational experiment) – це методологія дослідження, засновані на вивченні математичної (інформаційної) моделі за допомогою логіко-математичних алгоритмів на комп'ютері.

Комп'ютерне моделювання (обчислювальний експеримент) має істотні переваги перед натурним експериментом.

По-перше, не потрібно проводити експеримент на реальних фізичних, економічних чи інших об'єктах, тому затрати на різні комп'ютерні експерименти набагато менші, ніж на натурні експерименти. Масштаби експериментів можна вибрати на свій розсуд, при цьому є можливість проведення багатократних дослідів із поступовими змінами вхідних даних задачі.

По-друге, проведення реальних експериментів у деяких галузях науки небезпечне (екологія, ядерна фізика) або неможливе (астрофізика).

По-третє, у процесі побудови математичних моделей для проведення обчислювального експерименту і під час її дослідження можна проаналізувати і зрозуміти характеристики досліджуваного об'єкта.

Інколи застосовується комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання, яке полягає в тому, що об’єкт декомпозується на окремі підсистеми. Для тих підсистем, для яких це можливе, використовуються аналітичні моделі, а для інших розробляються імітаційні моделі.

Розробка моделей поєднує в собі науку і мистецтво. На жаль, немає чіткого формального алгоритму, який би дозволив побудувати модель для будь-якого об’єкту. Тому далі розглядаються лише певні методичні рекомендації щодо розробки моделей.

1.2. УЗАГАЛЬНЕНА МЕТОДИКА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЙОГО ЕТАПИ

Математичне моделювання можна розглядати як засіб вивчення реальної системи шляхом її заміни зручнішою для експериментального дослідження системою (моделлю), що зберігає істотні риси оригінала. При моделюванні здійснюється апроксимація функції опису більш простою і зручною для практичного аналізу функцією – моделлю.

Математичні моделі, особливо ті, що використовують чисельні методи, потребують для свого створення значних інтелектуальних, фінансових та часових затрат. Тому рішення про створення нової моделі приймається лише в разі відсутності більш простих шляхів вирішення поставленої проблеми (наприклад, модифікації однієї з існуючих моделей).

Дослідження об'єкту моделювання і складання його математичного опису полягають у встановленні зв'язків між характеристиками процесу, виявленні його граничних і початкових умов та формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень.

Процес побудови будь-якої математичної моделі можна представити послідовністю етапів, зображених на рис. 1.1.

На етапі *дослідження об'єкта моделювання* потрібно виконати наступні дії:

- аналіз взаємодії об'єкта з зовнішнім середовищем, виділення характеристик вхідних впливів та реакції об'єкту, класифікація їх на вимірні та невимірні, керуючі та перешкоди;
- проведення декомпозиції та дослідження внутрішньої структури об'єкту;
- дослідження порядку функціонування об'єкту, виявлення зв'язку між входом та виходом, формування множини станів об'єкту;
- збір та перевірка існуючих експериментальних даних про об'єкти-аналоги, проведення, при необхідності, додаткових експериментів;
- класифікація об'єкта моделювання на стаціонарний чи нестаціонарний, визначення міри впливу випадкових факторів на об'єкт та порядку нелінійності зв'язків між характеристиками об'єкту;
- аналітичний огляд літературних джерел, аналіз та порівняння побудованих раніше моделей подібних об'єктів;
- аналіз та узагальнення всього накопиченого матеріалу, розроблення загального плану створення математичної моделі.

У деяких випадках дослідження внутрішньої будови та порядку функціонування об'єкта моделювання неможливе або економічно недоцільне. Тому можливо розглядати об'єкт як „чорний ящик", стосовно якого нам відомі лише його входи та виходи.

На підставі аналізу об'єкту моделювання формується змістовна постановка моделювання, в якій мають бути зазначені:

- мета моделювання;
- тип моделі;
- вимоги до адекватності моделі та якості розв'язку.

Тип моделі має відповідати результатам класифікації об'єкта моделювання, інакше модель навряд чи буде адекватною.

Весь накопичений в результаті дослідження матеріал, змістовна постановка задачі моделювання, додаткові вимоги до реалізації моделі, оформлюються у вигляді технічного завдання на проектування та розробку моделі.

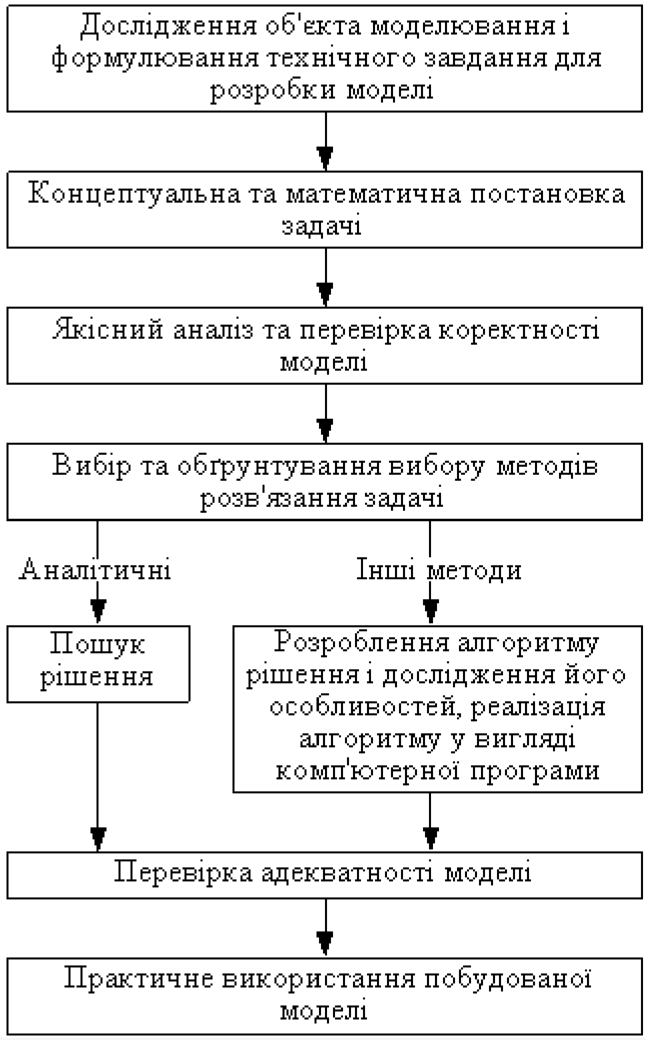


Рисунок 1.1 – Послідовність етапів побудови математичної моделі

Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології тощо) список основних питань, а також сукупність гіпотез відносно особливостей та поведінки об’єкта моделювання. Розробник моделі на підставі результатів аналізу об’єкта моделювання формує своє бачення стосовно процесів на об’єкті і формулює його на природній мові в термінах предметної області. При цьому з метою спрощення моделі він приймає низку припущень та обмежень. Припущення можуть містити нехтування певними процесами або зміну характеру їх протікання. Концептуальна модель має пройти погодження з експертами по даній предметній області з метою перевірки на адекватність. Адекватність концептуальної моделі визначає адекватність математичної моделі, яка формується на її основі.

Математична постановка задачі моделювання – це сукупність математичних співвідношень, які описують поведінку та характеристики об’єкта моделювання. Необхідно формалізувати змінні моделі та зв’язки між ними. Математичний опис моделі складається на основі законів фізики, хімії тощо, які характеризують динаміку і статику процесів в досліджуваному об'єкті, і виражається на мові будь-яких розділів математики. Найбільше поширення при побудові детермінованих моделей набули алгебраїчні рівняння та системи, звичайні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння в частинних похідних, матрична алгебра, а при стохастичному моделюванні і методи теорії імовірності, математичної статистики та теорії випадкових процесів. Якщо апріорні відомості про об'єкт недостатні, вигляд математичних моделей уточнюється за допомогою методів багатовимірної статистики: регресійного, кореляційного, багатофакторного і інших аналізів, а також проведення пасивного або планування активного експериментів. Для більшості складних об’єктів структура моделі містить параметри, які відображають особливості конкретних об’єктів. Пошук значень цих параметрів відбувається за допомогою методів параметричної ідентифікації на основі проведення пасивного або активного експериментів.

Поняття коректності задачі має важливе значення в процесі моделювання. Адже, наприклад, чисельні методи розв’язку задач доцільно застосовувати лише до коректно поставлених задач. При цьому, не всі практичні задачі можна вважати коректними. Математична модель є *коректною*, якщо для неї отримано позитивний результат по всіх контрольних перевірках: розмірності, порядку, характеру залежностей, граничних умов, фізичного сенсу тощо.

Для математичної моделі обирається один з методів розв’язку, який дозволяє при заданих значеннях вхідних змінних отримати значення вихідних змінних. Вибір методу обгрунтовується на підставі властивостей моделі, даних про точність вимірювання значень змінних, вимог до точності та швидкості отримання розв’язку.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об’єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об’єкт моделювання є вимога адекватності моделі об’єкту.*Адекватність* – це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об’єкта, важливих для цілей даного дослідження. Як правило, адекватність моделі визначається на підставі статистичних оцінок розбіжностей значень вихідних змінних моделі та об’єкту при однакових значеннях вхідних змінних, розрахованих за результатами серії експериментів на об’єкті моделювання. Для перевірки адекватності моделі використовуються дані іншої серії експериментів, ніж для параметричної ідентифікації. Відмінність значень виходу моделі та об’єкту може бути обумовлена наступними причинами:

- спрощеність моделі;
- похибка чисельних методів;
- похибка вимірювальних пристроїв;
- обчислювальна похибка, пов’язана з переходом між десятичною і двійковою системами числення та особливостями комп’ютерних обчислень.

Якщо модель не задовольняє критеріям адекватності, необхідно крок за кроком перевірити коректність розробки на всіх етапах:

- умови проведення експерименту та правильність вимірювання і фіксування його результатів;
- правильність програмної реалізації алгоритмів;
- адекватність результатів параметричної ідентифікації;
- обгрунтованість вибору методу розв’язку моделі;
- коректність математичного опису явищ та характеристик об’єкту;
- адекватність концептуальної моделі.

Після успішної перевірки адекватності модель може бути застосована в задачах прогнозу та дослідження об’єкта.

Метод математичного моделювання дозволяє виключити необхідність виготовлення громіздких фізичних моделей, пов'язаних з матеріальними витратами; скорочувати час визначення характеристик (особливо при розрахунку математичних моделей на комп’ютері і вживанні ефективних обчислювальних методів і алгоритмів); вивчати поведінку об'єкту моделювання при різних значеннях параметрів; аналізувати можливість застосування різних елементів; отримувати характеристики і показники, які складно отримувати експериментально (кореляційні, частотні, параметричної чутливості).

1.3. ОСНОВНІ ВИДИ МОДЕЛЕЙ

На підставі різних критеріїв класифікації, виділяють наступні види моделей:

- динамічні або статичні;
- детерміновані або стохастичні;
- неперервні, дискретні або дискретно-неперервні;
- лінійні чи нелінійні;
- з розподіленими або зосередженими параметрами;
- аналітичні, імітаційні чи комп’ютерні.

Динамічні моделі (dynamic models) відтворюють поведінку нестаціонарних об’єктів, що змінюються у часі. Статичні моделі описують стан об’єкта у деякий момент часу. Такі моделі розробляються для стаціонарних об’єктів, зміни яких у часі не є істотними стосовно періоду розробки та використання моделі.

Детерміновані моделі (deterministic models) використовують для опису процесів, що не містять істотної випадковості. Наприклад, поведінку більшості технічних систем можна охарактеризувати за допомогою так званих фазових змінних – фізичних величин типу потоку і потенціалу. При цьому доцільно виділити в об'єктах моделювання досить великі елементи, що розглядаються як неділимі одиниці. Закони функціонування елементів системи задаються компонентними рівняннями, що зв'язують різнорідні фазові змінні**.** Загальність опису процесів, що відбуваються в різних технічних системах, дозволяє виділити декілька типів елементів: R – елемент розсіювання енергії; C і L – елементи накопичення енергії. Поєднанням цих простих елементів і джерел фазових змінних отримують еквівалентну схему технічної системи будь-якої складності і її математичну модель. Конкретний зміст фазових змінних і простих елементів фізичних систем наведений у таблиці. 1.1.

Таблиця 1.1

Підсистема	Фазові змінні		Елементи		
	типу течії	типу потенціалу	типу Р	типу С	типу L
Електрична	Струм	Напруга	Опір	Ємність	Індуктивність
Механічна поступальна	Сила	Швидкість	Тертя	Маса	Пружність
Механічна обертальна	Момент	Кутова швидкість	Тертя	Момент інерції	Обертальна гнучкість
Гідравлічна (пневматична)	Витрата	Тиск	Тертя	Гідравлічна ємність	Гідравлічна індуктивність
Теплова	Тепловий струм	Температура	Теплоопір	Теплоємність	-

Для моделювання нестаціонарних імовірнісних процесів використовують стохастичні моделі (stochastic models). Якщо об'єкт моделювання стаціонарний і піддається випадковим впливам, то модель називають статистичною. Наприклад, для моделювання функцій перетворення вимірювальних пристроїв досить скористатися детермінованим способом опису, тоді як для аналізу похибок, оцінки інформаційних характеристик необхідно застосувати ймовірнісно-статистичні методи.

Неперервні моделі (continuous model) представляють системи з неперервними процесами, а дискретні моделі відображають поведінку систем з дискретними станами. Дискретно-неперевні моделі використовуються, коли на об'єкті виділяються обидва типи процесів.

Якщо при описі моделі використовуються лише лінійні математичні конструкції (наприклад, лінійні алгебраїчні рівняння), то модель називають лінійною, інакше – нелінійною.

Моделі з розподіленими параметрами (models with distributed parameters) описують просторове поширення явищ, а моделі з зосередженими параметрами нехтують просторовою складовою. Динамічні неперервні детерміновані моделі з розподіленими параметрами використовують апарат диференціальних рівнянь у частинних похідних, а з зосередженими параметрами – звичайних диференціальних рівнянь.

Моделі, що спрощують оригінал, зберігають подібність лише в самому істотному, називаються *гомоморфними*. Подібність в даному випадку однозначна лише в один бік: по моделі неможливо відтворити повністю оригінал, але вона дозволяє дослідити найбільш істотні його властивості. На межі гомоморфізм переходить в *ізоморфізм*. Ізоморфні моделі формально можна поміняти місцями, оскільки між ними існує взаємно однозначна відповідність.

Для розв'язання практичних задач недостатньо подібності. Необхідна можливість експериментувати на моделі. Це досягається перш за все спрощенням системи, обмеженням досліджуваних властивостей.

В залежності від способу відображення властивостей досліджуваної системи через ті чи інші носії всі моделі можна підрозділити на дві великі групи: *матеріальні (фізичні)* і *абстрактні*. По своїй природі фізичні моделі можуть бути механічними, електричними, гідравлічними і т.д. Фізичні моделі будуються на принципах прямої аналогії, коли оригінал і модель можуть відрізнятися лише масштабами, чи коли змінюються носії базових властивостей. Зустрічаються і змішані моделі. Вони припускають реальне втілення тих фізичних властивостей оригіналу, які цікавлять дослідника. Спрощені фізичні моделі,нерідко зменшених габаритів, називаються макетами. Тому фізичне моделювання часто іменують макетуванням. Абстрактні моделі, описують поведінку об’єктів абстрактно-логічними засобами, числовими, знаковими, графічними та інші.

Залежно від способу реалізації всі моделі можна розділити на два великих класи.

Фізичні моделі. Вони припускають реальне втілення тих фізичних властивостей оригіналу, які цікавлять дослідника. Спрощені фізичні моделі,нерідко зменшених габаритів, називаються макетами. Тому фізичне моделювання часто іменують макетуванням.

Математичні моделі. Вони являють собою формалізовані описи об'єкта або системи за допомогою деякої абстрактної мови, наприклад у вигляді сукупності математичних співвідношень або схеми алгоритму. Розрізняють такі види математичного моделювання:вербальні (словесні), графічні, табличні, аналітичні та алгоритмічні.

В залежності від того, чи є в моделях керовані параметри, вони поділяються на ***конструктивні*** та ***дескриптивні*** (описуючі). На відміну від конструктивних описуючі моделі не містять керованих параметрів і тому не дозволяють вирішувати задачу про знаходження найбільш ефективного керування.

До найважливіших типів моделей можна також віднести ***матричні*** моделі. Назва цієї родини моделей означає, що кількість елементів структури і функцій системи обмежується певною таблицею чисел (матрицею). Моделі цього типу широко використовуються в екології для пошуку простих залежностей при відносно простих розрахунках (найчастіше популяційного характеру). Більш складні варіанти матричних моделей використовують для аналізу таких динамічних явищ, як кругообіг речовин та енергії на рівні балансу (вхід-вихід). Вадою цього типу моделей є прийняті положення про лінійність зв'язків між досліджуваними елементами природного середовища. Крім того, передбачається сталість структурних коефіцієнтів. В цілому при застосуванні цього типу моделей для екосистеми з'являється потреба у використанні високоагрегованих величин через нестачу багатьох фактичних даних або складність їх отримання. В кінцевому підсумку це може привести до грубих оцінок результатів моделювання.

На відміну від моделей, що характеризують випадкову зміну одного результативного параметра внаслідок дії кількох факторіальних, ***багатовимірні*** моделі враховують поведінку більш як одного результативного показника. Ці моделі особливо цінні для вивчення складних змінних системи, особливо складних взаємозв'язків між двома множинами. Багатовимірні моделі досить численні і придатні до розв'язування найрізноманітнішою класу задач (описових, оціночних, прогностичних) і не підходять до цілей оптимізації.

За ступенем математичної абстракції детерміновані моделі можна поділити на **складні** та **спрощені структури.** Складні математичні структури, що описують усі причинні зв'язки реальної системи, дозволяють доволі точно спрогнозувати поведінку системи в залежності від зміни параметрів. Спрощені структури, при яких вибирають ряд основних, найсуттєвіших залежностей, установлюють і математично описують зв'язки між окремими параметрами, що відповідають причинно-наслідковим закономірностям (ідеалізовані моделі).

Складна система може бути виражена комплексом з детермінованих, стохастичних та ін. моделей. Крім того, реальний процес протікає за обставин, що змінюються. Тому математичні моделі, що адекватно відображають дійсність в певний момент часу, можуть не відображати умови, що змінилися, в наступний момент. Постає потреба поновлення, адаптації моделей (тобто пристосування до параметрів, які змінилися), що виконується за допомогою ЕОМ.

Крім вищеназваних широких класів математичних моделей, існує ще багато інших класів.

Це, насамперед, **оптимізаційні** моделі. У загальному випадку оптимізаційні задачі можуть бути поділені на три групи: детерміновані, стохастичні та задачі, що вирішуються в умовах невизначеності (або неповної інформації). Останні характеризуються тим, що стохастичні характеристики системи, яка досліджується, не можуть бути отримані. Існуючі методи розв'язування цих задач, як правило, враховують тільки доволі мані зміни коефіцієнтів цільової функції та системи обмежень моделі, і практично не дозволяють врахувати варіації структури моделі. Оптимізаційна задача вимагає переробки великої кількості експериментального матеріалу, його треба проаналізувати та на основі отриманих результатів прийняти рішення для подальшого удосконалення процесу.

Останнім часом успішно намагаються побудувати екологічні моделі, які спираються на теорію катастроф. Моделі цього типу застосовують щодо систем, які мають властивості бімодальності, перервності, гістерезису і дивергенції, а також характеризуються диссипативністю енергетичних та матеріальних потоків. Такими властивостями характеризуються, наприклад, екосистеми ґрунту, їх біогеохімічні цикли та енергетичні потоки. Для екосистеми ґрунту характерним є перебування її у багатьох станах, що пов'язано з добовими, сезонними, річними і багаторічними циклами природної динаміки (бімодальність). Екосистеми ґрунту уповільнено реагують на сторонні впливи (за рахунок потужного механізму гомеостазу)(гістерезис). Ґрунтові системи функціонують так, що близькі вихідні умови нерідко еволюціонують у досить віддалені кінцеві результати (дивергенція). Складніше описати перервність екосистеми ґрунту і процесів, що відбуваються, оскільки ґрунт, як природне тіло, належить до континуальних об'єктів природи.

Широко застосовуються моделі систем, що розвиваються. їх основною властивістю є така: на момент початку розвитку присутні деякі початкові ресурси. У динамічну систему повинна надходити речовина, енергія та інформація. У системах розвитку повинна бути підсистема відтворення та вдосконалення, має враховуватися характер використання умов довкілля, у взаємодії з яким система створює та поглинає продукти, а також виділяє застарілі та непотрібні. Повинні виконуватися деякі балансові співвідношення між субстратами, що надходять у динамічну систему, та продуктами динамічної системи (причому обов'язковим є функціональний взаємозв'язок між ресурсами, що витрачаються на внутрішній розвиток та на виконання зовнішніх функцій динамічної системи, між швидкістю відтворення ресурсів, інтенсивністю їх використання та результатами функціонування системи).

Розглянемо самоорганізаційні моделі. На основі принципу самоорганізації моделей на ЕОМ здійснюється перебір моделей різної складності за рядом критеріїв та знаходження оптимальної. За обраними критеріями визначається модель оптимальної структури.

У математичних моделях окремо виділяють **імітаційні** моделі. Термін «імітаційне моделювання» означає, що маємо справу з такими математичними моделями, за допомогою яких результат неможливо попередньо обчислити або передбачити (для передбачення поведінки реальної системи необхідно проводити її експеримент, імітацію, на моделі за заданих початкових даних). Імітація являє собою чисельний метод проведення на ЕОМ експериментів з математичними моделями, які описують поведінку системи впродовж заданого або сформованого періоду часу. Поведінка компонент складної системи та їх взаємодія в імітаційному моделюванні часто описуються набором алгоритмів (реалізуються певною мовою моделювання). Усі ці описи є програмною імітацією, яку необхідно спочатку підладити та випробувати, а потім використати для постановки імітаційного експерименту на ЕОМ. Тому під процесом імітації на ЕОМ розуміють конструювання моделі, її випробування та використання для вивчення певного явища або проблеми. Отже, імітаційні моделі є достатньо складним програмним виробом. Технологія їх проектування – працемісткий процес, що включає методи та засоби, які забезпечують створення та розвиток моделі. Великі розміри системи, складність поведінки и складників, велика вартість розробки вимагають математичного моделювання на всіх етапах проектування такої системи. Тому моделювання супроводжує і процес проектування, і процес випробування, і процес експлуатації складної системи.

1.4. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДЕЛЕЙ

Моделі мають ряд властивостей, від яких залежить успіх їх застосування в практиці моделювання. Відзначимо лише деякі з них, найбільш важливі:

Адекватність – це ступінь відповідності моделі досліджуваного реальному об'єкту. Вона ніколи не може бути повною. На практиці модель вважають адекватною, якщо вона з задовільною точністю дозволяє досягти цілей дослідження. ·

Простота (складність) – чим більша кількість властивостей об'єкта описує модель, тим більш складною вона виявляється. Не завжди чим складніше модель, тим вище її адекватність. Треба прагнути знайти найбільш просту модель, що дозволяє досягти бажаних результатів вивчення. ·

Потенційність (самий корінь) – здатність моделі дати нові знання про досліджуваний об'єкт,спрогнозувати його поведінку або властивості. На основі вивчення математичних моделей, що описують рух планет Сонячної системи з урахуванням закону всесвітнього тяжіння, теоретично були передбачені існування орбіти планет Нептун і Плутон.

1.5. ПРИНЦИПИ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання базується на декількох основоположних принципах.

Принцип інформаційної достатності. При повній відсутності інформації про досліджуваний об'єкт побудова його моделі неможливо. З іншого боку, за наявності повної інформації про об'єкт побудова його моделі не має сенсу. Існує певний рівень апріорної інформації про об'єкт, при досягненні якої може бути побудована його адекватна модель.

Принцип здійсненності. Створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети досліджуваного з ймовірністю, що істотно відрізняється від нуля.

Принцип множинності моделей. Даний принцип є ключовим. Мова йде про те, що створювана модель повинна відображати в першу чергу ті властивості реальної системи, які цікавлять дослідника. Відповідно, при використанні будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі сторони реальності. Для більш повного її дослідження необхідний ряд моделей, що дозволяє з різних сторін і з різним ступенем деталізації розглянути досліджуваний об'єкт.

Принцип агрегування. У більшості випадків складну систему можна уявити що складається з агрегатів (підсистем), для адекватного математичного опису яких виявляються придатним деякі стандартні математичні схеми.

Принцип параметризації. Цей принцип означає, що модель будується у вигляді відомої системи, параметри якої невідомі.

1.6. ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Математичне моделювання суспільних, економічних, біологічних та фізичних явищ, об’єктів, систем та різних пристроїв – важливий засіб пізнання природи та проектування доволі різноманітних систем та пристроїв. Хрестоматійними стали приклади ефективного використання моделювання в створенні ядерних технологій, авіаційних та аерокосмічних систем, в прогнозуванні атмосферних та океанічних явищ, погоди тощо.

Однак для таких сфер моделювання частіше за все потрібні суперкомп’ютери та роки роботи великих груп вчених для підготовки даних для моделювання та його відпрацювання.

Між тим математичне моделювання на рівні рішення більш простих задач, наприклад, в галузі механіки, електротехніки, автоматики, електроніки та радіотехніки (та ще багатьох галузей науки та техніки) як потреб виробництва, так і для потреб проектування чи наукових досліджень в наш час стало доступним багатьом користувачам сучасних ПК. А при використанні узагальнених моделей стає можливим моделювання досить складних систем, наприклад систем управління, електроенергетичних систем або промислових комплексів.

Існує досить багато програмних пакетів, які дозволяють більш легко проводити моделювання різноманітних систем та пристроїв. Для здійснення математичних досліджень та розрахунків зокрема використовуються пакети Mathematica, Maple, Mathcad, для моделювання електронних пристроїв – EWB, для моделювання систем управління та електротехнічних систем – VisSim, для наукових досліджень та для програмування робото технічних систем – LabView, але найбільше розповсюдження практично у всіх прикладних галузях отримав програмний пакет MATLAB, що має в своєму складі багато спеціалізованих за окремими напрямками чи галузями програмних пакетів.

Сучасні математичні пакети можна використовувати і як звичайний калькулятор, і як засоби для спрощення виразів при розв’язанні будь-яких математичних задач, і як генератори графіки або навіть звука Стандартними стали також засоби взаємодії з Internet, шляхом генерації HTML-сторінок прямо в процесі обчислень.

Звичайно, кваліфікований користувач, який в достатній мірі володіє однією з мов програмування (C++, Java, Pascal, Fortran, Prolog та іншими), може самостійно створити окрему програму або комплекс програм, що дозволить реалізувати на ПК алгоритм його задачі. Проте, такий підхід потребує, як правило, великих працезатрат на програмування, від лагодження та тестування кожної програми. Тому, для скорочення часу програмування було створено згадані прикладні програмні пакети, області використання яких у значній мірі перекриваються. Для найбільш ефективного використання обчислювальної техніки необхідно правильно вибрати найкращий пакет програм на самій ранній стадії розв’язання прикладної задачі. Адже, реальна мета полягає в рішенні певної проблем, а обчислення – всього лише проміжний етап на шляху до цього рішення..

При дослідженні систем автоматичного регулювання, обчислювальних математичних задач, найбільш ефективним є використання програмної системи Matlab з широким класом предметно-орієнтованих бібліотек (toolbox) та інструментом візуального моделювання Simulink. У системі MatLab також існують широкі можливості для програмування. Її бібліотека C Math (компілятор MatLab) є об'єктною і містить понад 300 процедур обробки даних мовою C. Усередині пакета можна використовувати як процедури самої MatLab, так і стандартні процедури мови C, що робить цей інструмент наймогутнішою підмогою при розробці додатків (використовуючи компілятор C Math, можна вбудовувати будь-які процедури MatLab у готові додатки).

Для візуалізації моделювання система MatLab має бібліотеку Image Processing Toolbox, що забезпечує широкий спектр функцій, що підтримують візуалізацію проведених обчислень безпосередньо із середовища MatLab, збільшення тв аналіз, а також можливість побудови алгоритмів обробки зображень. Систему MatLab можна використовувати для обробки зображень, сконструювавши власні алгоритми, які будуть працювати з масивами графіки як з матрицями даних. Оскільки мова MatLab оптимізована для роботи з матрицями, у результаті забезпечується простота використання, висока швидкість і економічність проведення операцій над зображеннями.

Серед інших бібліотек системи MatLab можна також відзначити System Identification Toolbox – набір інструментів для створення математичних моделей динамічних систем, заснованих на спостережуваних вхідні/вихідних даних. Особливістю цього інструменту є наявність гнучкого користувацького інтерфейсу, що дозволяє організувати дані й моделі. Бібліотека System Identification Toolbox підтримує як параметричні, так і непараметричні методи. Інтерфейс системи полегшує попередню обробку даних, роботу з ітеративним процесом створення моделей для одержання оцінок і виділення найбільш значимих даних. Що стосується математичних обчислень, то MatLab надає доступ до величезної кількості підпрограм, що містяться в бібліотеці NAG Foundation Library компанії Numerical Algorithms Group Ltd (інструмент має сотні функцій з різних областей математики, і багато з цих програм були розроблені широко відомими у світі фахівцями). Це унікальна колекція реалізацій сучасних чисельних методів комп'ютерної математики, створених за останні три десятки років. Лише додану до системи велику кількість документації цілком можна розглядати як фундаментальний багатотомний електронний довідник по математичному забезпеченню. Сьогодні система MatLab широко використовується в техніці, науці та освіті, але все-таки вона більше підходить для аналізу даних і організації обчислень, ніж для чисто математичних викладень.

Для візуального моделювання та моделювання сумісно з реальною апаратурою більш зручним є програмний пакет VisSim.

Аналітичні перетворення дозволяють виконувати більшість математичних програмних продуктів MathCad, Mathematica, Maple. З цих трьох поширених математичних пакетів, найбільш потужним є Maple. **Maple** надає зручне середовище для комп'ютерних експериментів. Пакет дозволяє створювати інтегровані середовища за участю інших систем і універсальних мов програмування високого рівня. Коли розрахунки зроблені й потрібно оформити результати, то можна використовувати засоби цього пакета для візуалізації даних і підготовки ілюстрацій для публікації.. Робота проходить интерактивно - користувач уводить команди й відразу бачить на екрані результат їхнього виконання. При цьому пакет Maple зовсім не схожий на традиційне середовище програмування, де потрібна тверда формалізація всіх змінних і дій з ними. Тут же автоматично забезпечується вибір типів змінних і перевіряється коректність виконання операцій, так що в загальному випадку не потрібно опису змінних і строгої формалізації запису. Ядро символьних обчислень Maple включено до складу цілого ряду систем комп'ютерної математики – від систем для широкого кола користувачів типу MathCad до однієї із кращих систем для чисельних розрахунків і моделювання MatLab.

На відміну від потужного та орієнтованого на високоефективні обчислення при аналізі даних пакета MatLab, програма MathCad – це, скоріше, редактор математичних текстів із широкими можливостями символьних обчислень і прекрасним інтерфейсом. MathCad не має мови програмування як такої, а можливості символьних обчислень запозичений з пакета Maple. Проте інтерфейс програми MathCad дуже простий, а можливості візуалізації широкі. Всі обчислення тут здійснюються на рівні візуального запису виразів у загальновживаній математичній формі. Пакет має гарні підказки, докладну документацію, цілий ряд додаткових модулів та вбудованих функцій. Однак поки математичні можливості MathCad уступають системам Maple, Mathematica, MatLab. Не зважаючи на це, по програмі MathCad випущено багато книг і навчальних курсів. Сьогодні ця система стала буквально міжнародним стандартом для технічних обчислень. Розробники Mathcad зробили все можливе, щоб користувач, який не володіє спеціальними знаннями в програмуванні, міг реалізувати велику кількість обчислювальних методів та досягнути значного результату в області математичних розрахунків.

Звичайно, кожен з математичних пакетів має свої переваги та недоліки та є зручнішим для розв’язання конкретних завдань. В даній книзі більш детально зосереджено увагу на системах MatLab та MathCad, які орієнтовані на різні типи задач і дають можливість розв’язання різних за складністю завдань.

1.7. МЕТОДИ ОБҐРУНТУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКУ

На етапі програмної реалізації моделі та реалізації плану експериментів необхідний вибір методів рішення задач моделювання. При цьому використовуються три основні групи методів:

1) Графічні – оціночні наближені методи, засновані на побудові та аналізі графіків.

2) Аналітичні - рішення, отримані суворо у вигляді аналітичних виразів(Придатні для вузького кола завдань).

3) Чисельні - основний інструмент для вирішення складних математичних задач, заснованих на застосуванні різних чисельних методів.

Аналітичні методи полягають у пошуку явних залежностей між характеристиками. Однак такі залежності можливо отримати лише для невеликої кількості простих моделей, як правило, лінійних. Інколи виконують спрощення моделей для отримання можливості вивчити хоча б загальні властивості об’єкта.

При аналітичному рішенні використовуються диференціальне і варіаційне обчислення. Аналітичному методі розрахунку відповідають моделі, в яких задача визначення складу МТП формулюється як задача лінійного програмування, в ній знаходять максимум або мінімум деякої цільової функції, зона визначення якої обмежена системою рівнянь або нерівностей.

Чисельні методи (numerical methods) дозволяють отримати розв'язок аналітичних моделей, для котрих застосування аналітичних методів неможливо або недоцільно. Розв'язок чисельними методами здійснюється для конкретних вихідних даних і має додаткову похибку.

Економіко-математична модель задачі обґрунтування оптимального складу МТП містить у собі функцію мети, або критерій оптимізації, і обмеження, обумовлені умовами задачі. Можливі наступні обмеження:

• виконання річного обсягу робіт в оптимальний термін відповідно до агротехнічних, зоотехнічних та інших вимог;

• кількість використовуваних машин не повинна перевищувати їх загального числа;

• чисельність механізаторів повинна бути точно визначеною.

При чисельному випадку ця задача формулюється таким чином: наприклад, необхідно знайти значення n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ - сукупність керованих змінних, які відповідають m умовам $q_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le b_i,\ i = \overline{1, m},$ - система нерівностей, які задовольняють умови функціонування складної системи, та максимізують або мінімізують функцію $F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) -$. Тоді математичну модель найкращого функціонування системи формулюють як оптимізаційну задачу: знайти найбільше (найменше) значення цільової функції

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to \max\left(\min\right) \qquad (1.1)$$

За додаткових обмежень

$$q_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le b_i, i = \overline{1, m}. \qquad (1.2)$$

Умови називаються *обмеженнями*, а функція – *цільовою функцією*, або *критерієм оптимальності*.

Задача знаходження найбільшого або найменшого значення функції F за умов (2) називається загальною задачею математичного програмування. Сама назва предмета «математичне програмування» пов'язана з тим, що метою розв'язування задач є вибір програми дій.

Графічному методові розрахунку складу МТП відповідають моделі процесу його використання, в яких критерій мінімуму приведених затрат змінений вимогою максимально рівномірного завантаження тракторів протягом виробничого циклу вирощування сільськогосподарських культур. При такій зміні процес вирішення задачі спрощується настільки, що стає можливим визначити склад МТП, використовуючи елементарний математичний апарат і найпростіші обчислювальні засоби. При цьому одержані результати близькі до оптимальних і з економічного боку цілком допустимі.

Визначення раціонального складу МТП господарства графічним методом виконують у такій послідовності:

1) визначають обсяг та строки проведення польових механізованих робіт;

2) розраховують потребу в агрегатах для виконання окремих технологічних операцій запланованого обсягу робіт;

3) будують графіки використання тракторів та сільськогосподарських машин;

4) визначають потребу господарства в техніці.

У ряді випадків застосовують нормативний (сумарний) метод планування потреби парку машин, заснований на зональних нормативах енерговитрат на вирощування 1000га кожної культури і річного наробітку тракторів кожного класу в умовних еталонних гектарах.

Зональні нормативи енерговитрат на 1000га встановлюються нормативно-дослідницькими установами за типовими технологічними картами, а нормативи річного наробітку для кожного типу тракторів-розрахунково-аналітичним методом або, при нестачі вихідної інформації, середньопрогресивним методом на основі аналізу даних наробітку за минулий період з урахуванням деякої неодночасності виконання робіт у різних процесах.

У процесі аналізу результатів оптимізації одержують кращі проектні рішення в інженерній та виробничо-фінансовій діяльності організації і на цій основі вирішують питання планування і управління виробництвом продукції рослинництва.

Аналітичне рішення вдається отримати рідко і найчастіше лише при спрощеній формулюванні задачі моделювання в лінійному наближенні. Основним засобом моделювання є алгоритмічний підхід, який реалізує обчислювальний експеримент на персональному комп'ютері (ПК). Отриманий розв’язок майже завжди містить деяку похибку.

Наявність похибки рішення обумовлено рядом причин. Основні джерела похибки.

1. Математична модель є лише наближеним описом реального процесу (похибка моделі).

2. Вихідні дані, як правило, містять похибки, оскільки є результатами наближених експериментів (вимірів) або рішеннями допоміжних завдань (похибка даних).

3. Застосовується для розв'язання задач методи в більшості випадків є наближеними (похибка методу).

4. При введенні вихідних даних в ЕОМ, виконання операцій виробляються округлення (обчислювальна похибка).

Похибки 1 і 2 - усуваються на даному етапі рішення, для їх зменшення доводиться повертатися знову до побудови математичної, а іноді й концептуальної моделі, проводити додаткове експериментальне уточнення умов завдання.

Чисельні методи групуються навколо типових математичних задач: задач аналізу, алгебри, оптимізації, рішення диференціальних та інтегральних рівнянь, обернених задач (синтез). Цей етап розв’язку закінчується вибором і обґрунтуванням конкретних чисельних методів рішення, розробкою алгоритму, які можуть бути реалізовані програмно засобами комп'ютерної техніки.

1.7.1. Особливості аналітичного динамічного моделювання

Дана методика застосовується для створення моделей об'єктів, що змінюються в часі (нестаціонарних об’єктів). Специфіка динамічного моделювання полягає в особливій побудові концептуальної моделі (гіпотези про механізм процесів) і формалізації залежностей математичної постановки.

Концептуальна модель грунтується на розгляді об'єкта на кількох рівнях декомпозиції. Як правило, виділяють явища на макро- і мікрорівні об’єкту. На макрорівні процеси розглядаються узагальнено, «великими мазками». Наприклад, рух потоків маси і енергії, надходження грошових коштів і т.п. На мікрорівні ці процеси розглядаються більш детально.

На кожному рівні декомпозиції виділяють явища і зв'язки між ними. При динамічному моделюванні під явищем будемо розуміти зміну деякої величини. У концептуальній моделі описується перебіг кожного явища. Зв'язки між явищами поділяються на взаємозв'язки явищ одного рівня декомпозиції і зв'язки між явищами різних рівнів декомпозиції. Наприклад, для гіпотези з двома рівнями декомпозиції можливі зв'язки трьох видів:

- зв'язки між явищами на мікрорівні;
- зв'язки між явищами на мікро-та макрорівні;
- зв'язки між явищами на макрорівні.

Для спрощення явищ об'єкта з метою їх формального опису приймається ряд припущень. Припущення стосуються особливостей протікання фізичних, економічних, хімічних та інших типів процесів на об'єкті моделювання. Припущення є однією з основних частин концептуальної моделі і обов'язково підлягають узгодженню з замовником, тому що безпосередньо впливають на адекватність моделі.

Формалізація залежностей здійснюється на основі фізичних законів перебігу описаних явищ. Кожному явищу зазвичай відповідає звичайне диференціальне рівняння першого порядку. Права частина рівняння описує складові частини цього явища. Якщо явище має стохастичний характер, у праву частину рівняння включаються відповідні характеристики випадкових процесів. Величини, загальні для правих частин рівнянь і залежні від змінних, що стоять в лівій частині (які диференціюються за часом), розраховуються окремо. Відповідно до порядку та розмірності моделі задаються початкові або граничні умови. Крім того, праві частини можуть містити параметри, що характеризують специфіку конкретного об'єкта моделювання.

У результаті формалізації буде отримана структура математичної моделі, придатна для класу однотипних об'єктів моделювання. Специфіку конкретного об'єкта моделювання визначають параметри моделі. Для практичного використання моделі необхідна розробка процедури її рішення та параметричної ідентифікації.

Для розв’язку динамічних моделей, як правило, використовують відповідні чисельні методи. Особливістю цих методів є дискретизації часу, що призводить до апроксимації моделі різницевими рівняннями. Розв’язок моделі дозволяє отримати вихідні змінні у вигляді таблично-заданих функцій на заданому інтервалі часу.

Розробка процедури параметричної ідентифікації моделі включає:

- фізичну та формальну постановки задачі ідентифікації;
- вибір методу ідентифікації та його програмна реалізація;
- проведення експерименту та розрахунок значень параметрів.

Динамічні моделі використовуються для прогнозу поведінки та дослідження змін нестаціонарних об'єктів у часі. Для стаціонарних об'єктів розробляються статичні моделі.

1.8. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У промисловій практиці універсальним і загальним є прагнення максимально можливого наближення до поставленої мети найбільш швидким способом і з найменшими витратами.

Практика показує, що великі утруднення викликає навіть однозначне формулювання мети в кількісному вираженні, так звана цільова функція, або критерій ефективності. При цьому часто доводиться одночасно вирішувати суперечливі задачі, напр., про підвищення вилучення корисного компонента при одночасному зниженні собівартості переробки корисної копалини. Задача полягає у тому, щоб знайти екстремальне значення цільової функції, аргументами якої є продуктивність, якість корисної копалини, витрати матеріалів і реагентів тощо. Необхідно також враховувати і те, що діяння управління можуть змінюватись лише у визначених межах. Крім того, на систему можуть бути накладені додаткові обмеження: на значення параметрів процесу, на складність алгоритму управління, на обсяг використаної інформації і ін. Оптимальне управління процесом може розглядатись як прийняття визначених рішень, що відповідають змінам ситуації. Прийняття рішення пов'язане з вибором якогось одного рішення з їх можливої множини. Чим більше варіантів, тим більше інформації необхідно для їх характеристики і тим більш громіздким буде опис усієї задачі.

В процесі прийняття рішення оперують функцією, аргументами якої є допустимі варіанти рішення, а значеннями – числа, що описують міру досягнення поставленої цілі. Задача прийняття рішення тим самим зводиться до знаходження максимального (або мінімального) значення цільової функції, а також значень аргументів, при яких цей максимум досягається. Для відшукання оптимального рішення у подібній ситуації одним з найбільш ефективних методів є математичне моделювання. Правильно побудована модель допомагає досліднику отримати нову інформацію про модельований процес. При цьому, у випадку складних технологічних систем, які часто зустрічаються у практиці роботи збагачувальних фабрик, така інформація може бути отримана тільки таким способом.

Теоретичне дослідження фізичної системи починається з вивчення загальних законів, які відображають досвід, накопичений для інших аналогічних систем. Використовуються рівняння кінетики хімічних реакцій, енергетичного і матеріального балансу, що витікають з загальних законів збереження маси і енергії, і особливо закон великих чисел або великих мас.

Певні технологічні процеси важко задовільно описати теоретичними моделями, основаними за принципами фізичних явищ масопереносу або балансових рівнянь, через складність протікання цих процесів і ще недостатньо чітке їх розуміння. У цьому випадку для практичних цілей можна застосувати емпіричний спосіб побудови моделей. Вони складаються на основі методологічної концепції «чорного ящика» і виходять з можливості описання механізму протікання процесів на основі вхідних і вихідних змінних параметрів без проникнення у сутність досліджуваного процесу.

Математичні моделі бувають статичні $y = f(x)$ і кінетичні або динамічні $y = f(x,t)$, які прямо або непрямо враховують тривалість досліджуваного процесу. Отримана будь-яким способом модель частіше за все справедлива тільки у визначеному діапазоні змін Δx, які потрібно вказувати поряд з похибкою при записі моделі.

Вся сучасна наука буквально просочена моделями, і що наука не лише використовує модель, але і в буквальному розумінні сама є величезною моделлю навколишнього світу. Яку ми, у свою чергу, нескінченно апроксимуємо до реальної дійсності, за допомогою більш простих моделей (складових частин загальної моделі). Фактично у нас в руках є інструмент для пізнання навколишнього світу, причому мова цього інструменту універсальна і формалізована - цим інструментом є математика. Але пізнання реальності цілком, одразу, не піддається вивченню за допомогою цього "інструменту" тому ми "відрізаємо по шматочку" і вивчаємо, ці "шматочки", які і є моделі.

ТЕМА 2. СИСТЕМА

ПЛАН

2.1. Основні системні поняття
2.2. Класифікація систем
2.3. Системні властивості
2.4. Ознаки системи
2.5. Динаміка системи
2.6. Структура систем
2.7. Вхідні та вихідні величини
2.8. Стійкість системи
2.9. Аграрна система

2.1. ОСНОВНІ СИСТЕМНІ ПОНЯТТЯ

Основним науковим методом дослідження взаємозв'язків у моделюванні технічних і технологічних процесів є ***системний аналіз***, який розглядає загальні принципи дослідження складних об'єктів із врахуванням їх системного характеру.

«Система» є центральним поняттям кібернетики – науки про управління. Розглянемо основні поняття системного аналізу.

Системою називають комплекс взаємопов'язаних елементів, які спільно реалізують певні цілі. Складність системи визначається кількістю елементів, які до неї входять, зв'язками між ними, а також взаємовідношеннями між системою і зовнішнім оточенням.

Під ***елементом системи*** розуміють об'єкт, який виконує певну функцію і не підлягає подальшому розкладенню у рамках сформульованої задачі. Його зв'язок із зовнішнім оточенням моделюється за допомогою входів (***екзогенних*** величин) і виходів (***ендогенних*** величин). Елемент розглядається як перетворювач входів **X** у виходи **Y**. Зрозуміло, що елемент системи неподільний лише з позицій дослідника. Систему також можна уявити як окремий елемент. Кожний елемент має структуру і характеризується внутрішнім станом **Q**.

Система – певна цілісність, що складається із взаємозалежних елементів, кожний з яких робить свій внесок у характеристики цілого й у свою чергу також може бути системою.

Рослини, машини, ґрунти - усе це приклади систем, що є частиною певної цілісності - загальної системи землеробства. Вони складаються з множини частин, кожен з яких працює у взаємодії з іншими для створення цілого, що має свої особливі властивості. Ці частини взаємозалежні. Якщо одна з них буде відсутня або буде неефективно функціонувати, то система не досягне своєї мети, тобто не буде ефективною. В якості прикладу можна навести систему „комбайн" з одного боку це набір заліза, коліс, ланцюгів, а з іншого – це множина предметів на якій реалізується визначені відношення з метою збирання врожаю.

У кожному окремому випадку "контури" систем окреслює сам дослідник з урахуванням проблематики задачі. У цьому розумінні однозначних твердих меж систем не існує.

Будь-яку підсистему системи землеробства можна трактувати як об'єкт чи елемент, що отримує зовні вхідний ресурс та видає у середовище вихідний. Таким чином, об'єкт має набір параметрів, яким відповідає певна функція відгуку. Складність системи визначається кількістю контрольованих параметрів.

Разом із тим, всередині зазначених систем мають місце множини зв'язків та взаємовпливів між складовими. У системах із великою кількістю змінних, детальна формалізація яких надмірно ускладнена, за функцію відгуку приймають інтегровану цільову функцію.

Кожен елемент системи може бути системою, яка по відношенню до початкової системі є підсистемою. У свою чергу, будь-яка система може бути підсистемою іншої системи, яка по відношенню до неї є надсистемою.

Середовищем даної системи називається система, що складається з елементів, які не належать цій системі.

Об'єднання двох систем є система, складена з елементів об'єднуються систем. *Перетин* двох систем є система, що складається з елементів, що належать одночасно обох цих систем. Об'єднання системи та її середовища називається система-універсум. Перетин системи та її середовища називається порожній системою. Вона не містить жодного елементу.

Для того, щоб елементи системи могли сприймати, запам'ятовувати і переробляти інформацію, вони повинні мати мінливість, тобто змінювати свої властивості. Кажуть, що елемент може перебувати в різних станах. Кожен елемент характеризується набором показників. При зміні значення хоча б одного з показників елемент переходить в інший стан, тобто стан елемента визначається сукупністю конкретних значень показників елементу. Система в цілому також може розглядатися як елемент, вона характеризується своїми показниками і може переходити з одного стану в інший.

Показники можуть бути числовими і нечисловими. Числові показники можуть бути безперервними і дискретними. Нечислові показники звичайно виражають у вигляді числових, наприклад - Інтелект (коефіцієнт інтелекту), рівень знань студента (оцінка в балах), ставлення однієї людини до іншої (соціологічні індекси).

Елемент може здійснювати вплив на інші елементи системи, змінюючи їх стан. Для переходу елемента з одного стану в інший потрібна певна енергія. Якщо фізичний процес впливу одного елемента на інший дає також енергію для переводу в інший стан, то на другий елемент здійснюється енергетичний вплив. Якщо ж вказаний процес дає тільки відомості про стані впливає елемента, а енергія для переводу в інший стан елемента, на який спрямована дія, береться з іншого джерела, то на елемент здійснюється інформаційний вплив. Кажуть, що перший елемент передає сигнал другому елементу.

Сигнал є повідомлення про стан елементу. Надалі ми будемо вживати термін «передача сигналу» замість «інформаційний вплив» і «вплив» замість «енергетичний вплив».

Стан елемента може змінюватися мимоволі, або в результаті сигналів і впливів, що надходять ззовні системи. Оскільки система є цілеспрямованою, то це означає, що серед багатьох станів виходів існує більш або менш кращий. Активний вплив на систему полягає у знаходженні такого співвідношення між вхідними і внутрішніми станами системи за яких досягається найкращий стан виходів, тобто реалізується цільова функція системи.

Система описується моделлю «чорна скринька», якщо її структура, внутрішній стан закриті для дослідника. Підхід дослідження системи, коли дослідник цікавиться не тим «що являє собою система», а тим «що вона робить», тобто описується залежність виходу від зміни входу, отримав назву функціональний.

Елемент до якого розкладається система, має ознаки чорної скриньки, а метод його дослідження буде функціональним, призначення якого є з'ясувати за якими законами відбувається перетворення вхідних станів елемента у вихідні.

Елементи складної системи взаємопов'язані поміж собою і вивчення цих взаємозв'язків належить до структурного аналізу систем.

Метою аналізу систем є пізнання закономірностей їх функціонування за заданої структури.

Завданням синтезу є побудова такої структури системи, за якої найкращим чином будуть реалізовані задані її функції.

Повідомлення – це сукупність сигналів.

Сигнали, виробляються елементами системи, можуть надходити за межі системи, в цьому випадку вони називаються вихідними сигналами системи. У свою чергу, на елементи можуть надходити сигнали ззовні системи, вони називаються вхідними. Аналогічним чином визначаються вхідні і вихідні впливу.

Структура системи - це сукупність її елементів і зв'язків між ними, за якими можуть проходити сигнали і впливи.

Входами називаються елементи системи, до яких включені вхідні впливу або на які надходять вхідні сигнали.

Вхідними показниками називаються ті показники, які змінюються в результаті вхідного впливу або сигналу. Виходами називаються елементи системи, які здійснюють вплив або передають сигнал в іншу систему. Вихідними показниками називаються ті показники системи, зміни яких викликають вихідна вплив або вихідний сигнал, або самі є таким впливом або сигналом.

У сучасних умовах – умовах «стабільної нестабільності», перманентних змін, ризику, підйомів та спадів, традиційні наукові школи з їх універсальною методологією досить часто втрачають свою актуальність. Реалією постає необхідність швидкого пристосування до змін, такого собі «наукового конформізму» у вигляді набору особливих методик або окремого методу, що відповідає ситуації.

Очевидно, що система має ієрархічні рівні, множину елементів із певними властивостями, множину зв'язків, структуру, композицію. Елементам системи - підсистемам властиві ознаки, що відображають (демонструють) становище зовнішнє та внутрішнє.

Зрозуміло, що ситуаційний підхід повинен передбачати моделювання ситуації. Завдання подібного моделювання виробити рекомендації (методи, способи та ін.) щодо ефективності системи (як «поводитися» у середовищі, щоб досягти мети системи).

Передбачення розвитку ситуаційної складової здійснюється у випадках:

• природного розвитку системи (система досягає мети без стороннього втручання);

• керування розвитком системи (по відношенню до системи застосовують комплекс керуючих дій).

Комплекс машин є перехідною системою, або інакше підсистемою в ієрархічній структурі загальної системи землеробства. Формування комплексів машин залежить насамперед від визначених сівозміною системи технологічних операцій, а також від агротехнічних вимог операційних технологій.

Прогнозування розвитку системи, у випадку керування ситуацією, у свою чергу можна виокремити в так звані пряму та обернену задачі. Розв'язання прямої задачі дозволяє за умов використання певного набору різноманітних керуючих впливів на складові системи:

- обчислити із заданою точністю значення підсумкових, ключових показників стану системи;
- визначити параметри завершального стану системи з врахуванням розвитку ситуації.

Обернена задача моделювання ситуації обумовлює, на які складові системи впливати, протягом якого терміну часу, які впливи необхідні, а також у який спосіб їх потрібно використовувати в управлінні розвитком ситуації з метою досягнення бажаного, наперед визначеного стану системи.

2.2. КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ

Система розглядається як порядок протилежний до хаосу.

Розрізняють системи *прості* і *кібернетичні* динамічні системи. Прості це системи з відомими і обов'язковими переходами з одного стану в інший. Прикладом таких систем є годинник. Прості динамічні системи відносяться до систем стійкої рівноваги, яка розуміється як повернення до початкового стану рівноваги в результаті взаємодії її частин (складових).

Більша частина систем відрізняється такою властивістю, що перехід з одного стану системи в інший пов'язано з використанням інформації. Такі системи називаються динамічними кібернетичними системами.

Кібернетична система - це безліч взаємозалежних об'єктів - елементів системи, здатних сприймати, запам'ятовувати і переробляти інформацію, і навіть обмінюватися інформацією. Приклади кібернетичних систем: автопілот, регулятор температури не в холодильнику, ЕОМ, людський мозок, живий організм, біологічна популяція, людське суспільство.

Класифікацію кібернетичних систем проведемо за двома критеріями: ступінь складності системи і її детермінованість.

За ступенем складності системи бувають:

1. Прості.
2. Складні.
3. Надскладні.

До простих відносяться системи, що мають просту структуру і легко піддаються математичному опису, вони можуть бути реалізовані без використання ЕОМ.

Складними є системи, які мають багато внутрішніх зв'язків і складне математичне опис, що реалізовується на ЕОМ.
надскладні системи не піддаються математичному опису.

Межі між зазначеними класами розмиті і можуть з часом зміщуватися, наприклад, вдосконалення математичного апарату та обчислювальної техніки дозволяє дати опис систем, для яких це раніше було неможливо, або складний опис зробити простим.

За другий критерієм системи поділяються на детерміновані та ймовірні.

Всі можливі випадки виходять комбінуванням зазначених класів:

1. Прості детерміновані системи:
- холодильник з регулятором;
- система розміщення верстатів у цеху;
- система автобусних маршрутів;
- сімейний бюджету;
- розклад занять факультету;
2. Складні детерміновані системи:
- ЕОМ;
- кольоровий телевізор;
- складальний автоконвейер;
3. Надскладні детерміновані системи:
- шахи.
4. Прості імовірнісні системи:

- лотерея;
- система статистичного контролю продукції на підприємстві;
5. Складні імовірнісні системи:
- система матеріально-технічного постачання на підприємстві;
- система диспетчеризація руху літаків поблизу великого аеропорту;
- система диспетчеризація енергетичної системи Росії;
6. Надскладні імовірнісні системи:
- підприємство в цілому, включаючи всі його технічні, економічні, адміністративні, соціальні характеристики;
- суспільство;
- людський мозок.

Також розрізняють природні і штучні системи. У створенні природних систем людина не приймає участі. Вони склалися в результаті еволюції і природного відбору. Але людина, використовуючи накопичений досвід та знання, розвиває технологічну еволюцію. Вона проектує із матеріальних елементів і частин штучні системи. Серед штучних систем виділяють системи енергетичні та інформаційні. Енергетичні системи в яких вхід і вихід є матеріальні речі – це заводи, сільськогосподарські підприємства та ін. Прикладами інформаційних систем є радіо, телебачення, телефон, телеграф, опис господарських процесів.

Серед них розрізняють:
1. інформаційно-пошукові системи (ІПС), які забезпечують збір, накопичення, зберігання, оновлення інформації;
2. інформаційно-наукові фактографічні системи, які в результаті пошуку видають окремий факт, показник або масив;
3. інформаційно-пошукові документальні системи, які видають в результаті пошуку документ.

По характеру функціонування всі системи поділяються на:
1. автоматичні, в яких процес функціонування здійснюється за допомогою автоматичних приборів;
2. автоматизовані, в яких людиною здійснюється лише функції творчого характеру;
3. дискретні, тобто з дискретним сигналом на вході;
4. неперервні, в яких вхідні сигнали працюють неперервно протягом терміну роботи системи.

Системи діляться на детерміновані і випадкові або ймовірні (стохастичні). Розвиток детермінованої системи повністю обумовлений і не носить випадковий характер. Ймовірна система – це така система, де рух є випадковим і розглядається як ймовірний процес.

2.3. СИСТЕМНІ ВЛАСТИВОСТІ

Складним системам притаманна низка властивостей, які потрібно враховувати в їх моделюванні, інакше неможливо твердити про адекватність побудованої моделі. Серед цих властивостей зазначимо, зокрема, такі:

- ***Емерджентність*** — це результат виникнення між елементами системи так званих ***синергетичних*** зв'язків, які забезпечують збільшення загального ефекту до більших обсягів, ніж сума ефектів окремо взятих елементів системи, що діють (функціонують) незалежно. Тому соціально-економічні системи потрібно досліджувати й моделюватизважаючи на синергізм;

- ***динамічність*** економічних процесів, що полягає в зміні у часі параметрів і структури економічних систем під впливом як внутрішніх, так і зовнішніх чинників (навколишнього середовища), часу;

- ***невизначеність*** щодо розвитку економічних явищ (процесів). Економічні явища та процеси мають випадковий характер. Невизначеність притаманна економічнимсистемам, тому для вивчення їх потрібно застосовувати економіко-математичні моделі на базі теорії ймовірностей і математичної статистики, а також на базі теорії нечітких (розпливчастих) множин тощо. Важливою також є розбудова *ризикології (науки про економічний ризик)* тощо;

- ***неможливість*** ізолювати процеси, котрі здійснюються в економічних системах від процесів у навколишньому середовищі. Тому не правильно спостерігати та досліджувати їх незалежно

2.4. ОЗНАКИ СИСТЕМИ

Досліджувану множину елементів можна розглядати як систему, якщо вона характеризується такими ознаками:

1) ***цілісність***, тобто принципова не зведеність властивостей системи до суми властивостей окремих її елементів;

2) ***наявність цілей і критеріїв*** щодо дослідження даної множини елементів;

3) ***наявність*** більш загальної системи — зовнішньої стосовно до даної, котру називають «***надсистемою***», чи «середовищем».

4) ***можливість виокремлення*** в даній системі певних частин («***підсистем***»).

До найбільш складних типів систем належать системи ***цілеспрямовані*** і ***здатні до самоорганізації***, які у процесі функціонування змінюють свою структуру й організацію.

Визначною властивістю системи є цілісність, яка обґрунтована взаємодією елементів системи у відповідності з метою її функціонування. Отже, в системі виявляються якісно нові характеристики, які не притаманні її початковим елементам.

Загальносистемні якості існують у всіх складних системах. Ліс має властивості, які відрізняються від властивостей окремих дерев. Поведінка групи людей не співпадає з сумою поведінки окремих особистостей.

Під зв'язаністю системи розуміють особливий характер взаємозв'язків між їх елементами. До властивості зв'язності приєднується поняття різноманітності системи. Цілеспрямоване функціонування системи можливе лише за умови обмеження різноманітності елементів. Таке обмеження покладено в основу управління системами.

Кожній системі притаманна визначена степінь складності, яка залежить від числа елементів системи. Удосконалення структури і організованості збільшує керованість системи.

2.5. ДИНАМІКА СИСТЕМИ

Стан системи - це сукупність значень її показників.

Всі можливі стану системи є її безліч станів. Якщо в цій безлічі визначено поняття близькості елементів, то воно називається простором станів.

Рух (поведінка) системи – це процес переходу системи з одного стану в інший, з нього в третій і т.д.

Якщо перехід системи з одного стану в інший відбувається без проходження будь-яких проміжних станів, то система називається ***дискретною***.

Якщо при переході між будь-якими двома станами система обов'язково проходить через проміжне стан, то вона називається ***динамічною*** (безперервною).

Можливі наступні режими руху системи:

1) рівноважний, коли система знаходиться весь час в одному і тому ж стані;

2) періодичний, коли система через рівні проміжки часу проходить одні й ті ж стану;

Якщо система знаходиться в стані рівноваги або періодичному режимі, то говорять, що вона знаходиться у сталому або стаціонарному режимі.

3) перехідний режим - рух системи між двома періодами часу, в кожному з яких система перебувала в стаціонарному режимі;

4) аперіодичний режим - система проходить деякий безліч станів, однак закономірність проходження цих станів є більш складною, ніж періодичні, наприклад, змінний період;

5) ергодичної режим - система проходить весь простір станів таким чином, що з плином часу проходить скільки завгодно близько до будь-якого заданого стану.

Властивості об'єкта та його поведінка залежать від того, яким чином ми його представляємо в вигляді системи. Наприклад, якщо повітря, що знаходиться в цій кімнаті, подати до вигляді системи молекул, кожна з яких характеризується своїми координатами і швидкістю, то поведінка такої системи буде ергодично, якщо ж визначити його як систему, що складається з одного елемента, показниками якого є тиск і температура, то така система перебуває в стаціонарному режимі.

Для всіх практичних завдань другий спосіб визначення системи переважно. Ми отримуємо просту детерміновану систему, а в першому випадку - надскладну імовірнісну, яку ми не зможемо дослідити, а якщо б навіть змогли, то ніде б не використовували отримані результати. Необхідно правильне визначення системи і при дослідженні економічних об'єктів, якими ми бажаємо керувати. Інструментом дослідження об'єктів для цілей вибору оптимальних способів управління є кібернетичного моделювання.

2.6. СТРУКТУРА СИСТЕМ

Для складних систем характерні ієрархічні (багаторівневі) структури. Рівні ієрархії можуть відрізнятися за ознаками: організаційному, тому чи іншому аспекту діяльності системи (рівні зв'язку по технології виробництва, руху матеріальних потоків), способу розкладання проблеми на ієрархію більш простих задач, часовим інтервалам і т.д. В кожному випадку утворюються багаторівневі або горизонтальні ієрархічні структури. Багаторівнева ієрархічна структура забезпечує системі високу надійність функціонування завдяки можливості створення елементів надлишку.

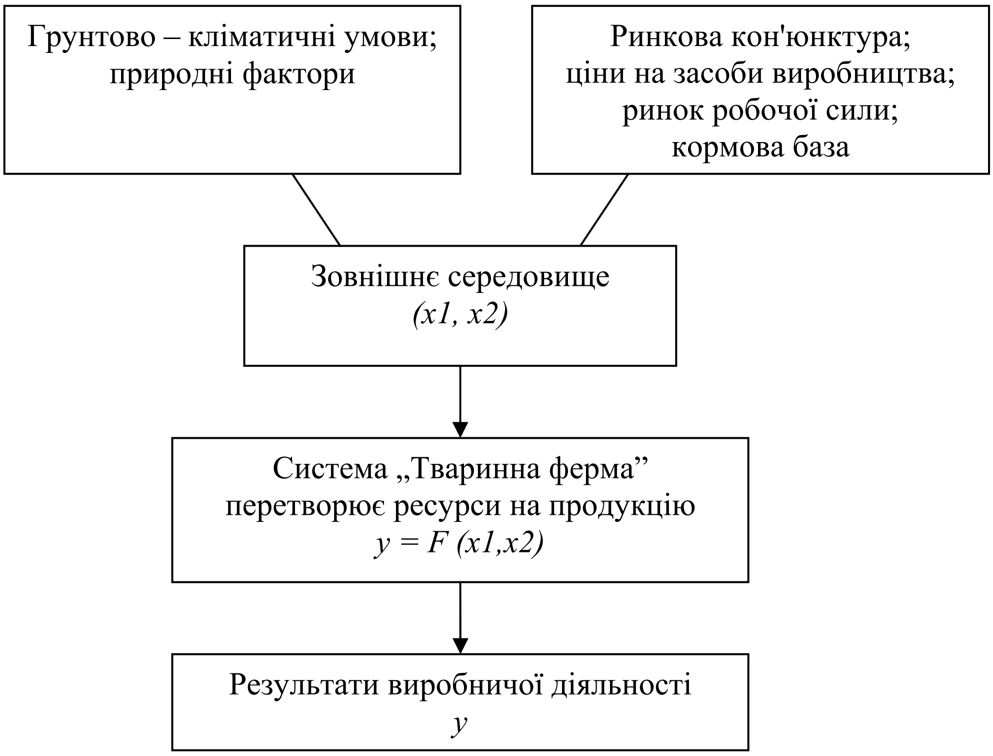
В зв'язку з ієрархічною побудовою економічних систем важливе значення набуває інфраструктура. Інфраструктура – це сукупність галузей і видів діяльності обслуговуючих економіку з метою побудови фундаменту для нормальної діяльності матеріального виробництва.

2.7. ВХІДНІ ТА ВИХІДНІ ВЕЛИЧИНИ

Система функціонує безпосередньо у зовнішньому середовищі. Зовнішнє середовище – це все те, що знаходиться поза системою, і складає необхідні умови існування і розвитку системи. Воно складається з ряду природних, виробничих, суспільних та інших факторів, які впливають на функціонування системи й самі знаходяться під впливом системи. Наприклад, на аграрну систему впливають природні фактори, суспільні фактори – через поведінку людей, які працюють на виробництві, національні традиції населення.

Зовнішнє середовище і система завжди знаходяться в єдності та взаємодії. Взаємодії здійснюються через вхід та вихід системи.

Наприклад, на систему „тваринний комплекс" впливає стан кормової бази, кваліфікована робоча сила, рівень цін на комбікорм, основні засоби виробництва. В свою чергу, комплекс впливає на середовище використовуючи засоби виробництва, робочу силу, природні ресурси.



При визначенні системи і її середовища дуже часто важко між ними провести межу. Взаємодій між системою і середовищем велика множина, тому при рішенні практичних задач враховуються найбільш суттєві взаємодії, тобто суттєві перемінні входів.

Стан входів називають імпульсами, а виходів – реакціями. Вхід системи характеризується сукупністю дій на неї зовнішнього середовища (позначається незалежним фактором x). Вихід системи – результат реакції системи на дію середовища (позначається вектором y).

Наприклад, для системи „комбайн” вхідними величинами є топливо-мастильні матеріали, врожай на корню, праця механізаторів. На виході – зібрані гектари, намолочене зерно, солома, економічні показники агрегату. Агрегат виступає в ролі функції, тобто маємо: $y=f(x)$.

Визначення системи, як комплексу суттєвих змінних є основою математичного моделювання. Дослідження системи припускає визначення її елементів, вираз їх у вигляді змінних, вибір найбільш суттєвих з них, виходячи з мети дослідження, знаходження значень змінних, визначення параметрів - величин значення яких в границях даного дослідження залишаються незмінними.

Глибина дослідження системи залежить від степені деталізації змінних на вході та виході дозволяючого рівня.

Мінімальним є дозволяючий рівень, коли дослідник виділяє лише один вхід і один вихід, хоча припускається, що в даній системі мають місце різноманітні імпульси та реакцій. Наприклад, функція приросту маси тварин на виробництві від кормів. Тобто маса кормів на вході, приріст маси тварин на виході. При більш детальних дослідженнях в якості змінних можуть розглядуватись конкретні види кормів, а в якості реакцій, крім приросту маси, зміни в фізіології тварин, зміни в надоях (якщо корова), стан шкіри (особливо для вовни).

Найвищий дозволяючий рівень так розрізняє входи й виходи, що кожен вхід відповідає відповідному єдиному точно визначеному імпульсу, а кожен вихід – єдиній визначеній реакції. При цьому кожен імпульс або діє або не діє, а реакція є, чи не має.

Входи системи бувають енергетичними, матеріальними, інформаційними. В процесі взаємодії системи з зовнішнім середовищем відбувається присвоєння, передача матерії, енергії та інформації.

Системи, що використовують інформацію, діляться на закриті і відкриті. У закритих системах використовується тільки та інформація, яка характеризує внутрішні зміни системи. Приклади таких систем: автомати, термостати. На кібернетичних системах з закритим контуром управління базується автоматичне управління.

Відкриті системи знаходяться під впливом середовища й самі впливають на нього, застосовуючи інформацію.

В якості типових прикладів відкритих систем є системи, які реагують на дослідження суттєвими змінами в їх поведінці. Це самоадаптовані і самоорганізовані системи. Наприклад, рослині організми.

2.8. СТІЙКІСТЬ СИСТЕМИ

Стійкість системи одне із основних понять кібернетики.

Воно застосовується для опису сталості станів системи в часі або сталості деякої послідовності станів.

Точне математичне визначення поняття стійкості для рівноважного стану динамічних систем дано російським вченим А.М.Ляпуновим. Нехай нерухома точка a зображує в фазовому просторі системи її рівноважний стан.

Цей рівноважний стан буде стійким, якщо для будь-якої заданої області допустимих відхилень від стану рівноваги (область ε) можна вказати область δ(δ містить в собі стан рівноваги), що траєкторія будь-якого руху, який почався в області $б$ не досягне границі області ε.

В якості стійкої економічної системи можна розглянути підприємство, функціонування якого кожен рік задовольняє рівні темпи, розширеного відтворення.

З поняттям стійкості пов’язано поняття інваріантності. Його зміст в тому, що хоча система в цілому змінюється, але деякі її властивості або елементи зберігаються незмінними. Вони інваріантні відносно даної системи.

Важливішими є поняття глобальної і локальної стійкості.

Система глобально стійка, якщо властивість стійкості виконується для усіх траєкторій системи всередині всієї області, в якій досліджується система. Система локально стійка, якщо властивість стійкості має місце тільки для траєкторій, які знаходяться «близько» до рівноважної траєкторії.

Складність дослідження системи збільшується, якщо існує декілька рівноважних точок. Наприклад, рівноважні ціни в моделях стихійного ринку.

2.9. АГРАРНА СИСТЕМА

Сільське господарство є ієрархічною, кібернетичною, ймовірнісною, динамічною системою. З цієї великої системи можна виділити багато систем, які характеризуються тісною залежністю всередині себе та відносною вільністю з’єднань між собою. Ієрархія побудови аграрних економічних систем спостерігається як по часу, так і в просторі. Крім того, виділяються системи і по функціональним ознакам: системи машин, фінансів, обліку і т.д.

Взаємодія між елементами різних рівнів ієрархії досягається через їх зв’язок. Ці зв’язки забезпечують їх спільне узгоджене функціонування. Що обумовлює принцип двоїстого розглядання економічної системи. Згідно цього принципу для будь-якого матеріального об’єкту управління можна побудувати відображаючу його інформаційну систему і, навпаки, будь-яка інформаційна система може бути реалізована матеріальним об’єктом.

Сільське господарство як велика кібернетична система відрізняється від промислових, технічних, соціальних та інших систем деякими особливостями.

Це насамперед форми власності сільськогосподарських підприємств, які зумовлюють форми управління. Це земля, яка є постійним і незмінним засобом виробництва. Без землі, взагалі, не можливе виробництво. Крім того, при правильному її використанні родючість ґрунту відновлюється і, навіть, підвищується. Таких можливостей не мають інші галузі матеріального виробництва, тому що всі інші засоби виробництва зношуються і старіють. Кліматичні умови є важливим фактором сільськогосподарського виробництва. Крім того, робота працівників поєднується з природними процесами, в ході яких відбуваються хімічні, фізичні, фізіологічні зміни без сприяння праці.

Сезонність сільськогосподарських робіт також є особливістю сільськогосподарського виробництва. Враховуючи її виконують розподіл праці, але не допускають дуже вузької спеціалізації. Не менш важливою особливістю є те що рослини і тварини є засобом власного виробництва (насіння, яйця), продуктами якого вони є. Сезонність використання сільськогосподарської техніки відрізняється від постійного навантаження техніки на заводах промисловості. Метою сільськогосподарського виробництва є підвищення ефективності його функціонування

Сільськогосподарське виробництво здійснюється в природних умовах, вплив яких має стохастичний характер.

Природні явища і їх вплив на урожайність, продуктивність тварин, розміри витрат на 1 га, і т.д. можуть прогнозуватися з деяким ступенем достовірності.

Перелічені особливості обумовлюють специфіку аграрної економічної системи та впливають на процес її функціонування. Тому ці особливості слід враховувати при управлінні цією системою.

Лекція 3

ТЕМА 3. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВЯЗАННЯ

ПЛАН

3.1. Загальна математична модель лінійного програмування.
3.2. Форми запису задач лінійного програмування.
3.3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.
3.4. Двоїстість у задачах лінійного програмування. Правила побудови двоїстих задач.

3.1. ЗАГАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування – це розділ математичного програмування, в якому розглядаються методи розв'язання екстремальних задач з лінійною цільовою функцією та лінійними обмеженнями, яким повинні задовольняти шукані змінні.

Загальна лінійна математична модель, так звана загальна задача лінійного програмування (ЗЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$L = \tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 x_2 + \ldots + \tilde{n}_n x_n, \tag{3.1}$$

або

$$L = \tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 x_2 + \ldots + \tilde{n}_n x_n \to \max\ (\min)$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \tag{3.3}$$

Необхідно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють обмеженням (3.2), (3.3) тоді як цільова функція (3.1) набуває екстремального значення.

3.2. ФОРМИ ЗАПИСУ ЗЛП

Задачі лінійного програмування можуть бути записані в загальній, стандартній (симетричній) та канонічній (основній) формі.

Більш компактно ***загальну задачу лінійного програмування*** можна записати у вигляді:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}\tilde{n}_j\tilde{o}_j \to \max(\min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\{\le,\ge,=\}b_i,\ (i=1,\,2,\,\ldots,m);$$

$$x_j\ge 0,\ (j=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Стандартна (симетрична) форма задачі лінійного програмування має вид:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}\tilde{n}_j\tilde{o}_j \to \max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i\quad (i=1,\,2,\,\ldots,m);$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Канонічною (основною) формою задачі лінійного програмування називається задача (3.1)–(3.3), коли в системі обмежень (3.2) всі значення $b_j\ge 0\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,m)$ невід’ємні**,** а всі обмеження є рівностями, тобто

$$Z=\sum_{j=1}^{n}\tilde{n}_j\tilde{o}_j \to \max(\min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i(i=1,\,2,\,\ldots,m);$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Для цього якщо якесь значення $\boldsymbol{b_i}$ від’ємне, то помноживши *і*-обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли *і*-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}\le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну балансуючу змінну x_{n+1}:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots.+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$$

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну балансуючу змінну $\boldsymbol{x_{n+2}}$, тобто

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k .$$

Якщо в задачі деяка змінна x_k довільного знаку, то її заміняють як $x_k = x'_k - x''_k$, де $x'_k \ge 0, x''_k \ge 0$. У випадку, коли деяка змінна $x_p \le 0$, то її заміняють на $x'_p = -x_p$

Якщо задача задана на знаходження максимуму, то її можна розв'язати також і на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$$\max Z = -\min(-Z) == \min\left(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots c_nx_n\right)$$

залишивши систему обмежень без зміни.

Канонічну форму задачі лінійного програмування можна записати компактніше у ***векторно-матричному*** вигляді:

$$Z = CX \to \max(\min)$$

за умов

$$AX = A_0,$$
$$X \ge 0,$$

де $A = \left\{ a_{ij} \right\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$ є матриця коефіцієнтів при змінних; $X = \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_2 \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix}$ — вектор змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\grave{o}} \end{pmatrix}$ — вектор вільних членів; $C = \left(c_1, c_2, \ldots, c_n\right)$– вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Канонічну форму задачі лінійного програмування часто записують у ***векторній формі***

$$Z = CX \to \max(\min)$$

за умов

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0 ,$$
$$X \ge 0 ,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних,

Розглянуті форми задачі лінійного програмування (загальна, стандартна та канонічна) еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути приведена до любої з двох інших.

3.3. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальним методом розв'язування задач лінійного є симплекс-метод (метод послідовного поліпшення плану), основна ідея якого полягає в тому, щоб збільшуючи значення вільної змінної, збільшити значення цільової функції, але при цьому залишити невід'ємними базисні змінні.

Процес розв'язання задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Алгоритм розв'язування ЗЛП симплекс-методом

Нехай необхідно знайти *max* цільової функції (3.1), запишемо (3.1) у вигляді:

$$L = -\tilde{n}_1(-x_1) - \tilde{n}_2(-x_2) - \ldots - \tilde{n}_n(-x_n).$$

Систему обмежень нерівностей (3.2) зведемо до системи обмежень-рівностей. Для цього до лівої частини кожної нерівності додаємо відповідну невід'ємну невідому.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + y_m = b_m \end{cases}.$$

Виражаємо невід’ємну невідому:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + ... + a_{1n}(-x_n) + b_1 \\ y_2 = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + ... + a_{2n}(-x_n) + b_2 \\ .... \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + ... + a_{mn}(-x_n) + b_m \end{cases}.$$

Умови задачі запишемо в вигляді симплекс-таблиці

Таблиця 3.1.

$$\begin{array}{|c|cccccc|c|} \hline & -x_1 & -x_2 & \dots & -x_s & \dots & -x_n & \\ \hline y_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_i & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{is} & \dots & a_{in} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline L = & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_s & \dots & -c_n & 0 \\ \hline \end{array}$$

<u>Алгоритм знаходження опорного плану</u>

1. Розглядаємо стовпець вільних членів. Якщо всі $b_i \geq 0$, то опорний розв’язок знайдено, а саме: всі елементи (невідомі), які розташовані зверху таблиці дорівнюють нулю, а решта – вільним членам.
2. Нехай $b_i < 0$. Розглянемо рядок з номером i. Якщо всі $a_{ij} > 0$, то система обмежень несумісна і задача розв’язку не має.

Припустимо, i-му рядку є і додатні, і від’ємні елементи, знаходимо $\min\left(\frac{b_i}{a_{ij}} > 0\right) = \frac{b_r}{a_{is}}$. Звідки, a_{is} - ключовий або ведучий елемент.

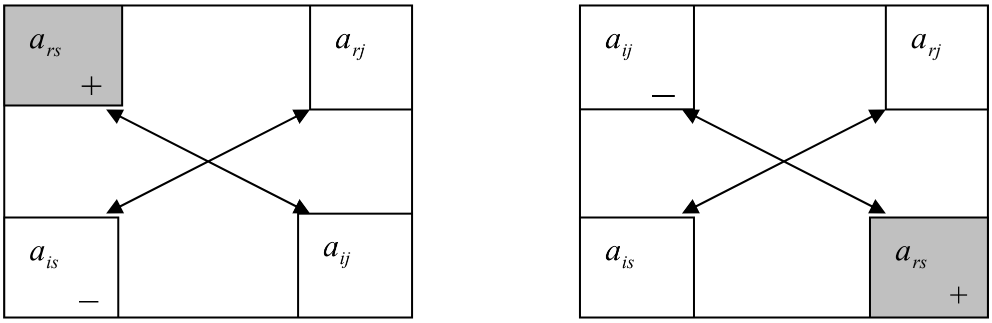
3. Виконуємо *крок модифікованих жорданових виключень.*

Перехід до нової таблиці здійснюється за правилами:

- ключовий елемент замінюється одиницею;
- елементи ключового стовпця змінюють знак на протилежний;
- елементи ключового рядка залишаються без змін;

- решта елементів обчислюється за формулою $b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}$;
- всі елементи нової таблиці діляться на ключовий елемент.

4. Таким чином, перетворюємо всі від'ємні вільні члени.



Цю схему обчислень назвемо схемою (правилом) прямокутника. Так перетворюють всі елементи розширеної матриці системи рівнянь, які розташовані поза ключовим рядком і стовпчиком.

У результаті знайдемо опорний план, або доведемо, що система несумісна.

Алгоритм знаходження оптимального плану

1. Опорний план знайдено. Усі вільні члени невід'ємні числа. Розглянемо рядок $\boldsymbol{L}$. Якщо всі коефіцієнти L- рядка невід'ємні, то знайдений розв'язок і буде оптимальним. Якщо в L- рядку декілька від'ємних коефіцієнтів, то беремо найбільший з них по абсолютній величині. Припустимо, що це елемент $c_s < 0$. Тоді s- ключовий стовпець.
2. У ключовому стовпці визначаємо додатні коефіцієнти і знаходимо $\frac{b_i}{a_{is}} > 0$. Якщо додатних елементів не має, то лінійна форма необмежена зверху.
3. Ключовий елемент знаходимо з найменшого симплексного відношення $\min\left(\frac{b_j}{a_{js}} > 0\right) = \frac{b_r}{a_{rs}}$, a_{rs} - ключовий елемент.
4. Виконуємо крок модифікованих жорданових виключень.
5. Отриманий план перевіряємо на оптимальність. Якщо план не оптимальний, то алгоритм повторюється.

Приклад 3.1. Знайти оптимальний план ЗЛП симплекс методом.

$$L = 48x_1 - 69x_2 + 58x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 \le 4 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 \le -1 \\ -6x_1 - 8x_2 + 4x_3 \ge -6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Розв'язання. 1. Систему обмежень-нерівностей зведемо до системи обмежень-рівностей. Для цього до лівої частини кожної нерівності додамо відповідну невід'ємну невідому:

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + y_1 = 4 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 + y_2 = -1 \\ 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 + y_3 = 6 \end{cases}$$

Виражаємо невід'ємну невідому:

$$\begin{cases} y_1 = 4 - 4x_1 - 9x_2 - 5x_3 \\ y_2 = -1 - 7x_1 - x_2 + 6x_3 \\ y_3 = 6 - 6x_1 - 8x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

2. Складаємо першу симплекс-таблицю (Всі коефіцієнти при змінних заносяться до симплекс-таблиці з протилежним знаком).

Таблиця 3.2.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	b_i
y_1	4	9	5	4
y_2	7	1	-6	-1
y_3	6	8	-4	6
$L =$	-48	69	-58	0

3. Знайдемо опорний план. Розглянемо стовпчик вільних членів. Оскільки $b_2 < 0$, то даний план не опорний. Розглянемо ІІ-й рядок. Оскільки $a_3 < 0$, то a_3 – ключовий або ведучий елемент. Виконуємо *крок модифікованих жорданових виключень*. Результати заносимо до таблиці 3.3.

Таблиця 3.3.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	b_i
y_1	(-59)/(-6)	(-59)/(-6)	5/6	(-19)/(-6)
x_3	7/(-6)	1/(-6)	1/(-6)	-1/(-6)
y_3	(-8)/(-6)	(-44/(-6)	(-4)/6	(-40)/(-6)
$L=$	694/(-6)	(-356)/(-6)	(-58)/6	(-58)/(-6)

Перевіряємо знайдений план на опорність. Оскільки всі $b_i \geq 0$, то даний план опорний, перевіримо його на оптимальність. У L рядку є від'ємні елементи. Отже, даний план не оптимальний, беремо найбільший з них по абсолютній величині: 694/(-6), тоді І-й стовпчик – ключовий. Знайдемо відношення $\frac{b_i}{a_{i1}} > 0$. Ключовий елемент знаходимо з найменшого симплексного відношення $\min\left(\frac{19}{6} : \frac{59}{6}; \frac{1}{6} : \frac{7}{-6}; \frac{40}{6} : \frac{8}{6} > 0\right)$, a_{11}- ключовий елемент. Виконуємо крок модифікованих жорданових виключень.

4. Обчислюємо елементи симплекс-таблиці (таблиця 3.4) з ключовим елементом $a_{11} = \frac{-59}{-6}$.

Таблиця 2.4.

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_3$	b_i
x_1	0,102	1	0,085	0,322
y_2	0,119	1	-0,068	0,543
x_3	-0,136	6	-0,78	6,238
$L=$	11,763	175	0,132	46,921

В останній таблиці крім невід'ємних вільних членів невід'ємні всі коефіцієнти $\boldsymbol{L}$- рядка. Отже, отриманий розв'язок є оптимальним. $L_{\max} = 46{,}921$, при $x_1 = 0{,}322$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}543$.

Для перевірки правильності обчислення підставимо знайдений розв'язок у лінійну функцію: $L_{\max} = 48 \cdot 0{,}322 + -69 \cdot 0 + 58 \cdot 0{,}543 = 46{,}921$.

Відповідь: $L_{\max} = 46{,}921$, при $x_1 = 0{,}322$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}543$.

3.4. ДВОЇСТІСТЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ПРАВИЛА ПОБУДОВИ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста***, що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge o,\ j = \overline{1,n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що ***двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими правилами.***

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця A

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця A^T коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$\grave{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

7. Якщо змінна x_j прямої задачі може приймати тільки додатні значення, то $j-$те обмеження в системі двоїстої задачі є нерівність виду «$\geq$». Якщо змінна x_j може приймати як додатні, так і від'ємне значення, та $j-$те обмеження в системі двоїстої задачі є рівняння.

Якщо $i-$те обмеження в системі прямої задачі є нерівність, то $i-$змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В противному випадку змінна y_i може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої—лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Форми прямих ЗЛП та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач

Пряма задача **Двоїста задача**

Симетричні

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_i \ge 0.$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \qquad F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_i \ge 0.$$

Несиметричні

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad F=\sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_i \in [-\infty;\ \infty].$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \qquad F=\sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_i \in \left]-\infty;\ \infty\right[.$$

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв’язок, який випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв’язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\max Z = \min F$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв’язків. Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \vec{c}_{\text{áàç}} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{\text{áàç}}$ — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; D^{-1}—матриця, обернена до матриці D, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі.

Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв’язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі $\boldsymbol{i}-$те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний $\boldsymbol{i}-$й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо $\boldsymbol{i}-$й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне $\boldsymbol{i}-$те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Розв’язавши пряму задачу ЛП симплекс-методом, можна побачити, що оптимальне значення $\boldsymbol{i}-$двоїстої змінної дорівнює сумі оптимальної оцінки вектора, який входить в початковий базис і взятого з цільової функції прямої задачі коефіцієнтів біля невідомих з тим же індексом, що і у вектора.

Наприклад, якщо змінні $x_3 \, {}^{3} x_5$ входять в початковий базис – то

$$y_1^{opt} = \Delta_3^{opt} + c_3^{opt}$$

$$y_1^{opt} = \Delta_5^{opt} + c_5^{opt}$$

Отже, компоненти оптимального плану двоїстої задачі співпадають з елементами $(m+1)$ рядка стовпців одиничних векторів, якщо даний коефіцієнт $c_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елементу цього рядка і c_j, якщо $c_j \neq 0$.

Приклад 3.2. Скласти двоїсту задачу до даної.

Знайти $min\ L^* = 5y_1 - y_2$, при обмеженнях

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ 4y_1 + 6y_2 \geq -1 \\ -2y_1 - 2y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$$

Двоїста задача буде мати вигляд $\max L = 2x_1 - x_2 + 3x_3$,

при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq -1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

ТЕМА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

ПЛАН

4.1. Математична постановка транспортної задачі
4.2. Метод потенціалів

4.1. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Транспортна задача (ТЗ) — це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників ($A_1, A_2, ..., A_m$) до споживачів ($B_1, B_2, ..., B_n$) (або мінімальна вартість перевезення всього товару, або ж мінімальний час його перевезення).

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min; \tag{4.1}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \tag{4.4}$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i – го постачальника до j – го споживача;

c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i – го постачальника до j – го споживача (тариф перевезення);

a_i – запаси продукції i – го постачальника; b_j – попит на продукцію j – го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{4.5}$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (4.2)—(4.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $X = (x_{ij})\ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = (\vec{x}^*_{ij})\ \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (4.1) набуває найменшого значення.

Транспортна таблиця

Постачальники A_i та запаси продукції	Споживачі B_j та попит на продукцію					Потенціали u_i
	$B_1 = b_1$	$B_2 = b_2$	$B_3 = b_3$	…	$B_n = b_n$	
$A_1 = a_1$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}	u_1
$A_2 = a_2$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…	c_{2n} x_{2n}	u_2
$A_3 = a_3$	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	…	c_{3n} x_{3n}	u_3
…	…	…	…	…	…	…
$A_m = a_m$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}	u_m
Потенціали v_j	v_1	v_2	v_3	…	v_n	Z_1

Теорема *(умова існування розв'язку транспортної задачі)*.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вихідні дані ТЗ заносять в спеціальну таблицю, яку називають транспортною таблицею, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі — стовпчиками.

4.2. МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування більш ефективний метод – ***метод потенціалів***, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму.

Алгоритм методу потенціалів

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.

3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (4.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} або фіктивного споживача B_{n+1} вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану ТЗ задачі існує декілька методів:

- північно-західного кута;
- мінімальної вартості;
- подвійної переваги;
- апроксимації Фогеля.

Метод північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці x_{11}, в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Метод мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції c_{ij} . Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць декілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

У транспортній задачі з $\boldsymbol{m}$ – постачальниками і $\boldsymbol{n}$ – споживачами кількість невідомих $\boldsymbol{x_{ij} = m \cdot n}$, а кількість рівнянь в (4.2)—(4.4) повинна дорівнювати $\boldsymbol{m + n}$.

Після побудови першого опорного плану одним із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено $\boldsymbol{(m + n - 1)}$ клітинок, де $\boldsymbol{m}$ – кількість постачальників; $\boldsymbol{n}$ – кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***невиродженим***.

Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $\boldsymbol{(m + n - 1)}$, то початковий план побудовано неправильно і він є ***неопорним.*** *Ознакою опорності* плану транспортної задачі є його *ациклічність*, тобто неможливість побудови циклу.

Циклом у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці. Якщо ламана лінія, що утворює цикл перетинається, то точки самоперетину не є вершинами циклу.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $\boldsymbol{(m + n - 1)}$, то опорний план називають ***виродженим***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану, тобто щоб не утворилося циклу.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів $\boldsymbol{u_i}$ та $\boldsymbol{v_j}$ відповідно постачальників та споживачів.

Теорема (*умова оптимальності опорного плану транспортної задачі*). Якщо для деякого опорного плану $\boldsymbol{X^* = \left(x_{ij}^*\right)}$ існують числа $\boldsymbol{u_i}$ та $\boldsymbol{v_j}$, для яких виконується умови

$$1)\ \boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0},$$

$$2)\ \boldsymbol{u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0}$$

для всіх $\boldsymbol{i = \overline{1,m}}$ та $\boldsymbol{j = \overline{1,n}}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

Правильність обчислення потенціалів перевіряється згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = z$$

4. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності

$$u_i + v_j \le c_{ij}$$

для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j \ge c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок декілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $max\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$, яке записують в лівому нижньому куточку відповідної клітинки. Якщо декілька однакових порушень Δ_{ij} , то вибираємо ту клітинку, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Для вибраної порожньої клітинки, яку називають ***потенціальною клітинкою*** будують ***цикл перерахування*** та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим по черзі — знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел $x_{ij\,j}$, що стоять у клітинках зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+», і віднімають від чисел у клітинках зі знаком «–».

Отже, потенціальна клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

Якщо знайдений опорний план є оптимальним, але в останній транспортній таблиці серед значень Δ_{ij} крім від'ємних є також нульові, то існують альтернативні опорні плани, які можна знайти взявши відповідні клітинки в яких $\Delta_{ij} = 0$ як потенціальні і виконати цикл перерахування.

Приклад 4.1. Для будівництва 4 доріг використовується гравій із 3 кар'єрів із запасами 120, 280 та 160 ум.од. Для будівництва кожної з доріг необхідно 130, 220, 60 та 70 ум.од. гравію. Тарифи перевезення 1 ум.од гравію із кожного кар'єру до кожної з доріг, що будується задані матрицею перевезення $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Скласти такий план перевезення гравію, при якому попит в ньому був би задоволений при найменшій загальній вартості перевезення.

Розв'язання. 4.1.1. Побудова математичної моделі транспортної задачі.

Побудуємо математичну модель транспортної задачі. Нехай x_{ij}– кількість продукції (гравію), що перевозиться від $i-$го постачальника (кар'єра) до $j-$го споживача (дороги) $(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4})$; c_{ij} – вартість (тарифи) перевезення одиниці продукції від $i-$го постачальника до $j-$го споживача задані у матриці C; a_i–- запаси продукції $i-$го постачальника; b_j– попит на продукцію $j-$го споживача.

Оскільки $\sum_{i=1}^{3} a_i = 120 + 280 + 160 = 560$, а

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 130 + 220 + 60 + 70 = 480,$$

то транспортна задача є незбалансованою.

Щоб отримати збалансовану модель, введемо додаткового споживача B_5 з попитом $b_5 = 560 - 480 = 80$ ум.од. Вартість перевезення 1 ум. од. продукції до споживача B_5 беремо рівну нулю.

Таким чином, транспортна таблиця матиме вигляд:

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 x_{11}	7 x_{12}	9 x_{13}	5 x_{14}	0 x_{15}
$A_2 = 280$	4 x_{21}	2 x_{22}	6 x_{23}	8 x_{24}	0 x_{25}
$A_3 = 160$	3 x_{31}	8 x_{32}	1 x_{33}	2 x_{34}	0 x_{35}

Тоді, математична модель транспортної задачі запишеться таким чином:

$$\begin{gathered}Z = x_{11} + 7x_{12} + 9x_{13} + 5x_{14} + 0x_{15} + \\ + 4x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24} + 0x_{25} + \\ + 3x_{31} + 8x_{32} + 1x_{33} + 2x_{34} + 0x_{35} \to \min;\end{gathered}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 120, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 280, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 160, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 130, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \mathrm{i} = \overline{1,3}, \ \mathrm{j} = \overline{1,5}.$$

Економічний зміст перших трьох обмежень полягає в тому, що вся продукція від кожного постачальника має вивозитися до споживачів повністю, а **економічний зміст інших чотирьох обмежень** полягає в тому, що вся продукція, що надходить до кожного споживача, має повністю задовольняти його попит.

4.1.2.Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом «північно-західного» кута

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0
$A_1 = 280$	4 **10**	2 **220**	6 **50**	8	0
$A_3 = 160$	3	8	1 **10**	2 **70**	0 **80**

Послідовність заповнення клітинок: 120 – 10 – 220 –50 – 10 –70 –80.

4.1.3. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом мінімальної вартості

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **40**	7	9	5	0 **80**
$A_1 = 280$	4 **60**	2 **220**	6	8	0
$A_3 = 160$	3 **30**	8	1 **60**	2 **70**	0

Послідовність заповнення клітинок: 80 – 40 – 60 –220 – 70 – 30 –60.

4.1.4. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом подвійної вартості

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **40** V	7	9	5	0 **80** VV
$A_1 = 280$	4 **60**	2 **220** V	6	8	0 VV
$A_3 = 160$	3 **30**	8	1 **60** V	2 **70** V	0 VV

Послідовність заповнення клітинок: 80 – 40 – 220 –60 – 70 – 30 –60

4.1.5. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Різниці для рядків
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	1,1,1,1,1,1,1
$A_1 = 280$	4	2 **220**	6	8	0 **60**	2,2,**4**,–,–,–,–
$A_3 = 160$	3 **10**	8	1 **60**	2 **70**	0 **20**	1, 2,2,2,**3**,**5**,–
Різниці для стовпців	2 2 2 2 2 2 **2**	5 **5** – – – – –	**5** – – – – – –	3 3 3 **3** – – –	0 0 0 0 0 – –	

Послідовність заповнення клітинок: 60 – 220 – 60 –70 – 20 – 10 –120

4.1.6. Метод потенціалів визначення оптимального плану транспортної задачі

Розглянемо початковий опорний план ТЗ, що був одержаний методом «північно-західного» кута.

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6 **50**	8	0	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1 **10**	2 **70**	0 **80**	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_1 = 1050$

Визначимо початкове значення цільової функції

$$Z_1 = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 6 \cdot 50 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 80 = 1050.$$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок 7, то перший опорний план **невироджений.**

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j.

Згідно **1 умови оптимальності** $u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_3 = 3 \\ u_3 = -2 \\ v_4 = 4 \\ v_5 = 2 \end{cases}$$

Правильність обчислення потенціалів перевіримо згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$0 \cdot 120 + 3 \cdot 280 + (-2) \cdot 160 + 1 \cdot 130 + (-1) \cdot 220 + 3 \cdot 60 + 4 \cdot 70 + 2 \cdot 80 = 1050$. Перевіримо виконання **2 умови оптимальності** $u_i + v_j \le c_{ij}, x_{ij} = 0$ для незаповнених клітинок:

$A_iB_j : u_i + v_j \qquad c_{ij}, \qquad \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$

$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + (-1) = -1 < 7, \quad \Delta_{12} = -1 - 7 = -8$

$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 0 + 3 = 3 < 9, \quad \Delta_{13} = 3 - 9 = -6$

$A_1B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 4 = 4 < 5, \quad \Delta_{14} = 4 - 5 = -1$

$A_1B_5 : u_1 + v_5 = 0 + 2 = 2 > 0, \quad \Delta_{15} = 2 - 0 = 2 > 0$

$A_2B_4 : u_2 + v_4 = 3 + 4 = 7 < 8, \quad \Delta_{24} = 7 - 8 = -1$

$A_2B_5 : u_2 + v_5 = 3 + 2 = 5 > 0, \quad \Delta_{25} = 5 - 0 = 5 > 0 \quad \max$

$A_3B_1 : u_3 + v_1 = -2 + 1 = -1 < 3, \quad \Delta_{31} = -1 - 3 = -4$

$A_3B_2 : u_3 + v_2 = -2 + (-1) = -3 < 8, \quad \Delta_{32} = -3 - 8 = -11$

Перший опорний план **неоптимальний**, оскільки існують значення $\Delta_{ij} > 0$. Визначимо найбільше порушення

$max\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$, яке записуємо в лівому нижньому куточку відповідної потенціальної клітинки:

$$max\{\Delta_{15} = 2; \Delta_{25} = 5\} = \Delta_{25}$$

Для вибраної порожньої клітинки A_2B_5, яку називають ***потенціальною клітинкою*** будуємо ***цикл перерахування*** та виконуємо перерозподіл продукції в межах цього циклу.

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	$u_1 = 0$
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	− 6 **50**	8	+ 0 $\boxed{5}$	$u_2 = 3$
$A_3 = 160$	3	8	+ 1 **10**	2 **70**	− 0 **80**	$u_3 = -2$
Потенціали, v_i	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$	$v_5 = 1$	$Z_1 = 1050$

У результаті отримаємо новий опорний план

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6	8	0 **50**	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1 **60**	2 **70**	0 **30**	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_2 = 800$

$$Z_2 = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 0 \cdot 50 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 30 = 800$$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок *7*, то другий опорний план **невироджений.**

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів $\boldsymbol{u_i}$ та $\boldsymbol{v_j}$.

Згідно **1 умови оптимальності** $\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0}$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_2 + v_5 = 0 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_5 = -3 \\ u_3 = 3 \\ v_4 = -1 \\ v_3 = -2 \end{cases}$$

Правильність обчислення потенціалів перевіримо згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$0 \cdot 120 + 3 \cdot 280 + 3 \cdot 160 + 1 \cdot 130 + (-1) \cdot 220 + (-2) \cdot 60 + (-1) \cdot 70 + (-3) \cdot 80 = 800$$

Перевіримо виконання **2 умови оптимальності** $u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0$ для незаповнених клітинок:

$$A_i B_j : u_i + v_j \qquad c_{ij}, \quad \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$$

$$A_1 B_2 : u_1 + v_2 = 0 + (-1) = -1 < 7, \quad \Delta_{12} = -1 - 7 = -8$$

$$A_1 B_3 : u_1 + v_3 = 0 + (-2) = -2 < 9, \quad \Delta_{13} = -2 - 9 = -11$$

$$A_1 B_4 : u_1 + v_4 = 0 + (-1) = -1 < 5, \quad \Delta_{14} = -1 - 5 = -6$$

$$A_1 B_5 : u_1 + v_5 = 0 + (-3) = -3 < 0, \quad \Delta_{15} = -3 - 0 = -3$$

$$A_2 B_3 : u_2 + v_3 = 3 + (-2) = 1 < 6, \quad \Delta_{23} = 1 - 6 = -5$$

$$A_2 B_4 : u_2 + v_4 = 3 + (-1) = 2 < 8, \quad \Delta_{25} = 2 - 8 = -6$$

$$A_3 B_1 : u_3 + v_1 = 3 + 1 = 4 > 3, \quad \Delta_{31} = 4 - 3 = 1 > 0$$

$$A_3 B_2 : u_3 + v_2 = 3 + (-1) = 2 < 8, \quad \Delta_{32} = 2 - 8 = -6$$

Другий опорний план **неоптимальний**, оскільки $\Delta_{31} = 1 > 0$.

Для вибраної потенціальної порожньої клітинки A_3B_1 будуємо ***цикл перерахування*** та виконуємо перерозподіл продукції в межах цього циклу

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	$u_1 = 0$
$A_2 = 280$	– 4	2 **220**	6	8	+ 0	$u_2 = 3$
$A_3 = 160$	+ 3	8	1	2 **70**	– 0	$u_3 = -2$
Потенціали, v_i	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$	$v_5 = 1$	$Z_2 = 800$

У результаті отримаємо новий опорний план

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціал и,
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4	2 **220**	6	8	0	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1	2 **70**	0	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_3 = 790$

$Z_3 = 1 \cdot 120 + 2 \cdot 220 + 0 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 20 = 790$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок *7*, то новий опорний план **невироджений.**

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів $\boldsymbol{u_i}$ та $\boldsymbol{v_j}$.

Згідно **1 умови оптимальності** $u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_5 = 0 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_3 = 2 \\ v_3 = -1 \\ v_4 = 0 \\ v_5 = -2 \\ u_2 = 2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Правильність обчислення потенціалів перевіримо згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$0 \cdot 120 + 2 \cdot 280 + 2 \cdot 160 + 1 \cdot 130 + 0 \cdot 220 + (-1) \cdot 60 + 0 \cdot 70 + (-2) \cdot 80 = 790$$

Перевіримо виконання **2 умови оптимальності** $u_i + v_j \le c_{ij}, x_{ij} = 0$ для незаповнених клітинок:

$$\begin{array}{lll}
A_i B_j : u_i + v_j & c_{ij}, & \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \\
A_1 B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 0 & = 0 < 7, & \Delta_{12} = 0 - 7 = -7 \\
A_1 B_3 : u_1 + v_3 = 0 + (-1) & = -1 < 9, & \Delta_{13} = -1 - 9 = -10 \\
A_1 B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 0 & = 0 < 5, & \Delta_{14} = 0 - 5 = -5 \\
A_1 B_5 : u_1 + v_5 = 0 + (-2) & = -2 < 0, & \Delta_{15} = -2 - 0 = -2 \\
A_2 B_1 : u_2 + v_1 = 2 + 1 & = 3 < 4, & \Delta_{23} = 3 - 4 = -1 \\
A_2 B_3 : u_2 + v_3 = 2 + (-1) & = 1 < 6, & \Delta_{25} = 1 - 6 = -5 \\
A_2 B_4 : u_2 + v_4 = 2 + 0 & = 2 < 8, & \Delta_{31} = 2 - 8 = -5 \\
A_3 B_2 : u_3 + v_2 = 2 + 0 & = 2 < 8, & \Delta_{32} = 2 - 8 = -6
\end{array}$$

Третій опорний план **оптимальний**, оскільки усі значення $\Delta_{ij} < 0$.

Отже оптимальний план має вигляд

$$X^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 & 60 \\ 10 & 0 & 60 & 70 & 20 \end{pmatrix},$$

Йому відповідає оптимальне (мінімальне) значення цільової функції $Z_{\min} = 790$.

При цьому залишаються не використанні 60 ум.од. у 2 постачальника і 20 ум.од у 3 постачальника.

ТЕМА 5. МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИКОРИСТАННЯ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКУ

Обґрунтування набору техніки та її ефективне використання на сучасному рівні сільськогосподарського виробництва необхідно розглядати окремо для кожного господарства з його природно-кліматичними умовами у єдиному системному взаємозв'язку: набір культур –сівозміна – попередник – культура – технологія – технологічна операція –машина – енергетичний засіб – машинний агрегат – комплекс машин – парк машин.

Комплекс машин є перехідною системою, або інакше підсистемою в ієрархічній структурі загальної системи землеробства. Формування комплексів машин залежить насамперед від визначених сівозміною системи технологічних операцій, а також від агротехнічних вимог операційних технологій (рис. 1).

Визначення раціональної площі вирощування сільськогосподарських культур, яка забезпечить ефективне використання комплексів машин також входить у завдання побудови математичної моделі (за даними проф. Крамарова В.С. рекомендоване значення коефіцієнта використання комплексів машин повинно становити 0,7...0,9). Тому питання визначення складу комплексів машин і їх використання у структурі загального машинного парку має велике значення.

Раціональна (мінімально необхідна) площа вирощування кожної сільськогосподарської культури в рослинництві повинна орієнтовно дорівнювати: в зоні Полісся – 130 га, Лісостепу – 150 га, Степу – 170 га.

Технологічний процес вирощування, збирання та переробки сільськогосподарських культур складається із основних, допоміжних і суміжних операцій.

Основні, допоміжні та суміжні операції технологічного процесу виконуються різними за складом машинно-тракторними агрегатами, які мають різну продуктивність. Тому тривалість виконання операцій залежить від складу агрегатів, їх кількості та продуктивності.

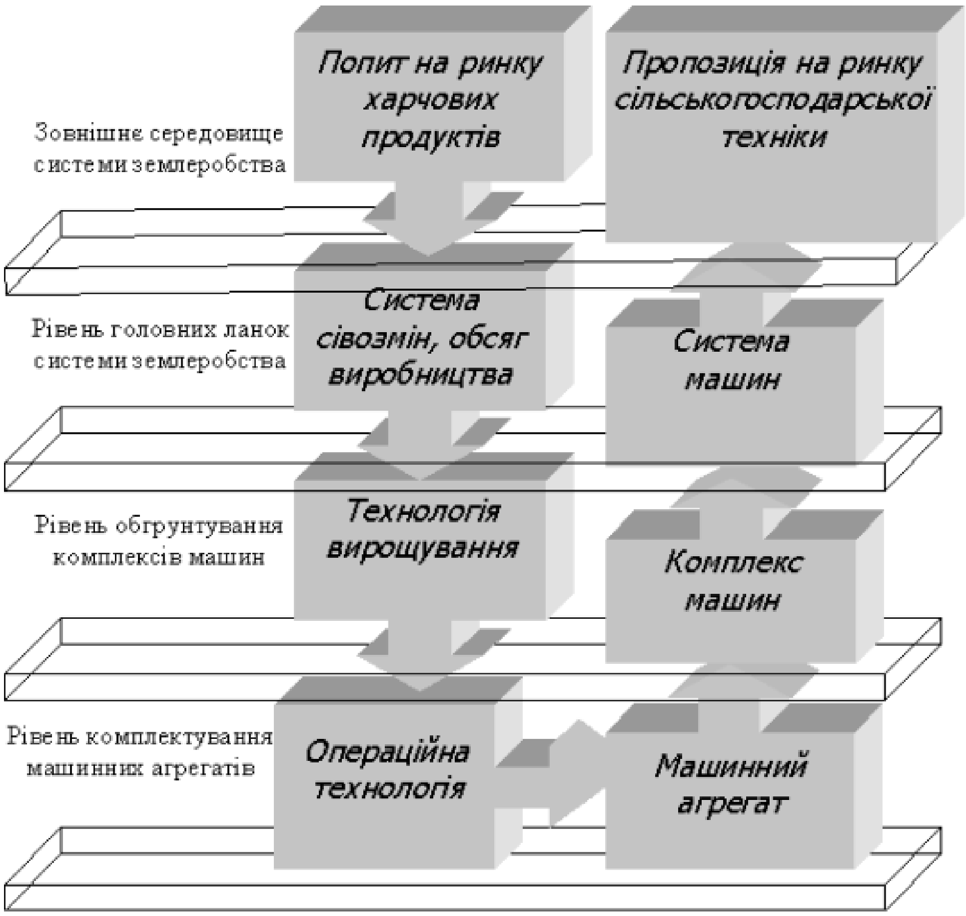


Рис. 1 – Причинно – наслідкова діаграма в розрізі ієрархії відношень „технологія → техніка”.

Для раціональної організації сільськогосподарського виробництва та поліпшення використання техніки дуже важливе значення має планування оптимального забезпечення господарств необхідною сільськогосподарською технікою. Велика кількість факторів, що впливають на результати її використання, вимагає визначення оптимальної структури машино-тракторного парку. Один і той самий тип машин може мати різні конструкторські рішення і характеризуватися різною економічністю роботи. У зв'язку з цим слід підбирати такі типи тракторів, машин та інших знарядь, які максимально відповідали б агротехнічним вимогам і були найбільш вигідними в умовах конкретного господарства, району чи регіону.

Модель формулюється наступним чином:

Знайти екстремум цільової функції

$$Z = \sum_{l=1}^{n} c_l x_l + \sum_{L=n+1}^{s} c_L x_L$$

при умовах

1) кількість машин, необхідна для використання робіт у господарстві по кожному з агротехнічних періодів може бути більшою, ніж фактично потрібно: $\sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l \geq b_k$, $k = \overline{1,m}$;

2) агрегати не можуть працювати більше днів, ніж визначено агротехнічними вимогами: $\sum_{L=n+1}^{s} q_{jL} x_L \geq \sum_{l=}^{n} P_{jl} x_l$, $j = \overline{m+1,t}$

3) кількість машин кожної марки не перевищує кількості тракторів з якими їх використовують $x_{jl} \succ \sum_{L=n+1}^{s} \alpha^{\frac{l}{L}} x_{jl}$, $j = \overline{l+1,w}$;

4) невід'ємність змінних $x_l \geq 0$, $x_L \geq 0$.

Позначення:

l - порядковий номер машини, $l = \overline{1,n}$;

L - порядковий номер трактора, $L = \overline{n+1,s}$;

k - порядковий номер сільськогосподарських робіт, $k = \overline{1,m}$;

j - період робіт, $j = \overline{m+1,t}$;

P - час роботи машини або агротехнічний термін виконання роботи;

q - запас часу трактора;

x_l - кількість l-того типу машин;

x_L - кількість L-того типу факторів;

c_l - коефіцієнт цільової функції для l-того типу машин;

a_{kl} - продуктивність l-того типу машин на k-тій роботі;

c_L - коефіцієнт цільової функції для L-того типу факторів;

b_k - обсяг роботи k-того виду;

P_{jL} - агротехнічні терміни виконання роботи в агротехнічному періоді;

q_{jL} - можлива кількість робочих днів для виконання роботи трактором L-того типу в агротехнічному періоді;

$\alpha^{\frac{l}{L}}$ - коефіцієнт-зв'язка (якщо машина l-того виду взаємодіє з трактором L-того типу, $\alpha = 0$; якщо машина l-того виду взаємодіє з трактором L-того типу, $\alpha = 1$).

Розв’язок нерівностей першої групи дозволить визначити які марки машин і в якій кількості потрібні для виконання усіх необхідних робіт у господарстві. Результат розв’язання нерівностей третьої групи покаже який повинен бути машино-транспортний парк у господарстві.

ТЕМА 6. ДРОБОВО-ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ПЛАН

6.1. Постановка задачі дробово-лінійного програмування
6.2. Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

При розв'язанні задач, часто за критерій оптимальності беруть показники рентабельності, продуктивності праці тощо, які математично подаються дробово-лінійними функціями. Загальна математична модель у цьому разі матиме вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_o}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o} \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = \overline{1,n}\right),$$

$$x_j \geq 0 \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Припускають, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

6.2. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ

Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування передбачає зведення її до задачі лінійного програмування. Для цього позначимо знаменник

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0},$$

зробимо заміну змінних

$$y_j = y_0 x_j \Rightarrow x_j = \frac{y_j}{y_0}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

і виконаємо відповідні перетворення:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{y_j}{y_0} + c_0}{\frac{1}{y_0}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{1} = \sum_{j=1}^{n} c_l y_j + c_0 y_0 \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i y_0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j-1}^{n} d_j x_j y_0 + d_0 y_0 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$y_0 > 0.$$

У результаті отримаємо задачу лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{il} y_j - b_i y_0 = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

$$y_0 > 0$$

Нехай її оптимальний план $y_{0j} = \{y_{01}, \quad y_{02}, \quad ..., \quad y_{0n}, \quad y_0\}$.

Тоді значення x_{0j} оптимального плану заданої задачі дробово-лінійного програмування знайдемо за формулою

$$x_{0j} = \frac{y_{0j}}{y_0} \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

ТЕМА 7. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ПЛАН

7.1. Постановка задачі цілочислового програмування
7.2. Метод Гоморі
7.3. Метод «віток і меж»

7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень, наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах тощо, тобто коли така вимога випливає з особливостей технології виробництва. До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень — 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні).

До цілочислового програмування відносять задачі про призначення, найкоротший шлях і т. ін. У реальних задачах часто цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних. Такі задачі називають ***частково цілочисловими***.

Загальна задача цілочислового програмування записується так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \tag{7.1}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{7.2}$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{7.3}$$

$$x_j \text{ — цілі} \qquad \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{7.4}$$

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів:

- методи відтинання;

- комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв’язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв’язування задачі з так званими ***послабленими обмеженнями***, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв’язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв’язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв’язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв’язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв’язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є ***метод віток і меж***.

Починаючи з розв’язування послабленої задачі, він передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв’язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв’язків.

Для розв’язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

7.2. МЕТОД ГОМОРІ

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (7.1)—(7.4). Для її розв’язування можна скористатися ітеративним методом Гоморі.

1. Знаходять розв’язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних — (7.1)—(7.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (7.1)—(7.4).

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове ***обмеження Гоморі***:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_j\},$$

де символ $\{\ \}$ позначає ***дробову частину*** числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа від цього числа віднімають ***цілу його частину*** — найбільше ціле число, що не перевищує даного. Цілу частину числа позначають символом $[\ ]$. Наприклад,

$$[1{,}8] = 1; \quad \{1{,}8\} = 1{,}8 - 1 = 0{,}8;$$

$$[-1{,}8] = -2; \quad \{-1{,}8\} = -1{,}8 - (-2) = -1{,}8 + 2 = 0{,}2$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Здобуту розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Істотними є також похибки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

7.3. МЕТОД «ВІТОК І МЕЖ»

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є метод ***«віток і меж».***

1. Розв'язується послаблена без умови цілочисловості задача — (7.1)—(7.3) за допомогою симплекс-методу.

2. Нехай x_j – шукана цілочислова змінна, значення якої x_j^* в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left(\left[x_j^*\right],\ \left[x_j^*\right]+1\right)$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо $x_j^* = 3{,}2,$ то в інтервалі $(3;4)$ цілих значень x_j не існує, а якщо $x_j^* = -3{,}2$, то в інтервал $(-4;3)$ також не існує цілих значень x_j.

Отже, допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей

$$x_j \le \left[x_j^*\right] \quad \text{або} \quad x_j \ge \left[x_j^*\right] + 1.$$

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \quad (7.5)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \quad (7.10)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i,\ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (7.6)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (7.7)$$

$$x_j \text{ — цілі, } \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (7.8)$$

$$x_j \le \left[x_j^*\right]; \quad (7.9)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i,\ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (7.11)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (7.12)$$

$$x_j \text{ — цілі, } \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (7.13)$$

$$x_j \ge \left[x_j^*\right] + 1, \quad (7.14)$$

де x_j^* — компонент розв'язку задачі (7.1)—(7.4).

3. Далі симплекс-методом розв'язуємо послаблені задачі (7.5)—(7.9) і (7.10)—(7.14), тобто з відкиданням обмежень (7.8) і (7.13).

Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (7.1)—(7.4).

Інакше пошук розв’язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв’язку. Здобутий план – оптимальний.

Розв’язування цілочислових задач методом «віток і меж» можна значно прискорити, приєднавши обмеження виду (7.9) і (7.14) до останньої симплекс-таблиці не початкової (7.1) – (7.4), а відповідних задач.

Приклади цілочислових економічних задач

1. Задача лінійного розкрою.
2. Задача комівояжера
3. Задача планування виробничої лінії.
4. Задача оптимального призначення.

ТЕМА 8. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ПЛАН

8.1. Постановка задачі нелінійного програмування.
8.2. Методи розв'язування задач нелінійного програмування.
8.3. Екстремуми функцій багатьох змінних.
8.4. Метод Лагранжа розв'язування задач нелінійного програмування.

8.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розв'язуючи задачі оптимального управління (планування), доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між показниками. У загальному вигляді ***нелінійна економіко-математична модель*** має вигляд:

$$Z = f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) \to \max(\min) \tag{8.1}$$

за умов

$$q_i(x_1,\ x_2,\ \dots, x_n)\{\le, =, \ge\} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{8.2}$$

де

$$f(x_1,\ x_2,\ \dots, x_n) \text{ і } q_i(x_1,\ x_2,\ \dots, x_n) \text{ — нелінійні функції.} \tag{8.3}$$

Труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, при цьому можливі значні похибки. Взагалі лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, тому щоразу слід доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність. Це досить складна математична задача.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому постають труднощі обчислювального характеру. Навіть для сучасних ПЕОМ відповідні алгоритми є доволі трудомісткими.

Для розв'язування нелінійних задач застосовують наближені методи, стикаючись із проблемою локальних і глобальних оптимумів.

8.2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує, як уже зазначалося, універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які ґрунтуються, здебільшого, на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають ***прямі*** та ***непрямі.***

Прямими методами оптимальні розв'язки відшукують у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є ***градієнтні***.

Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, найбільш розроблені методи ***квадратичного*** та ***сепарабельного*** програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами ***класичної математики***. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами ***зведеного градієнта***, скажімо ***методом Якобі***, та ***множників Лагранжа***. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму ***Куна—Таккера***.

8.3. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області точки (x_0, y_0). Кажуть, що функція $z = f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) строгий максимум (мінімум), якщо $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$ $(f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0))$ для всіх точок (x, y) достатньо близьких до x_0, y_0. Точка (x_0, y_0)) – точка ***максимуму*** (***мінімуму***).

Максимум і мінімум функції називають ***екстремумами*** функціями.

Теорема 8.1. (**Необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних**).

Якщо диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $P_0(x_0, y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Теорема 8.2. (**Достатні умови існування екстремуму функції двох змінних**).

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в *D(f)* разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядків і точка $P_0(x_0, y_0)$ є критичною. Знайдемо в точці P_0 похідні другого порядку і позначимо: $A = (z''_{xx})_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, $B = (z''_{xy})_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$, $C = (z''_{yy})_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$.

Якщо $AC - B^2 > 0$, то функція має в точці $P_0(x_0, y_0)$ екстремум: максимум якщо $A < 0$ і мінімум якщо $A > 0$.

Якщо $AC - B^2 < 0$, то в точці $P_0(x_0, y_0)$ екстремуму немає.

Якщо $AC - B^2 = 0$, то висновок про екстремум зробити не можна.

8.4. МЕТОД ЛАГРАНЖА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Нехай задано функцію Z, стосовно якої ставиться вимога знайти її ***умовні екстремуми*** при умові, що $q_i(x_1\ x_2,\ \ldots, x_n) = b_i\ \ (i = \overline{1, m})$, – рівняння розв'язку. Теормін «умовні» означає, що змінні задачі мають задовольняти деякі умови.

Задача умовного екстремуму зводиться до знаходження звичайного екстремуму функції

У класичному математичному аналізі для знаходження умовного екстремуму задачі нелінійного програмування застосовується метод множників Лагранжа, який дозволяє звести задачу пошуку умовного екстремуму до пошуку безумовного екстремуму.

Розглянемо таку задачу нелінійного програмування:

$$Z = f(x_1, x_2,\ \ldots, x_n) \to \max(\min) \qquad (8.4)$$

за умов

$$q_i(x_1\ x_2,\ \ldots, x_n) = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (8.5)$$

де функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервні та диференційовані в деякій області *D*. Рівняння (8.5) називаються **рівняннями** (або **умовами**) **зв'язку**.

Означення. Точка $X_0 \in D$, що задовольняє умові (8.5), називається точкою умовного максимуму (мінімуму) функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо в D існує такий окіл точки X_0, що нерівність $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ виконується для всіх точок X околу, координати яких задовольняють систему рівнянь (8.5).

Точки умовного максимуму та мінімуму називають точками умовного екстремуму, а задачу (8.4)-(8.5) називаються **задачею на умовний екстремум.**

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою: на знаходження екстремуму іншої функції, на аргументи якої не накладено обмежень.

У розгляд вводять функцію виду:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n;\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right), \qquad (8.7)$$

яка називається ***функцією Лагранжа.*** Тут λ_i – не визначені поки що величини, так звані ***множники Лагранжа***.

Метод множників Лагранжа дозволяє вести пошук точок умовного екстремуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ серед стаціонарних точок функції Лагранжа L.

Необхідні умови існування умовного екстремуму функції багатьох змінних.

Якщо $X_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – точка екстремуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умов зв'язку (8.5), то (за деяких додаткових обмежень на функції $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують сталі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, для яких виконуються умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1, n}\right), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 & \left(i = \overline{1, m}\right), \end{cases} \qquad (8.8)$$

запишемо систему у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1, n}\right), \\ b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 & \left(i = \overline{1, m}\right), \end{cases} \qquad (8.9)$$

що забезпечує виконання умов (8.5) початкової задачі нелінійного програмування і, яка, як правило, нелінійна.

Розв’язавши цю систему, знайдемо $X_0=(x_1,\,x_2,\,...,\,x_n)$ і $\lambda_0=(\lambda_1,\,\lambda_2,\,...,\,\lambda_m)$ — ***стаціонарні точки функції Лагранжа***. Оскільки їх визначено з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум задачі (8.4)-(8.6), або можуть бути точками перегину (***сідловими точками***). Серед стаціонарних точок функції Лагранжа є точки умовного екстремуму, однак серед них можуть бути і точки, в яких функція $f(x_1,\,x_2,\,...,\,x_n)$ не досягає умовного екстремуму.

Для діагностування стаціонарних точок і визначення типу екстремуму необхідно перевірити виконання достатніх умов екстремуму, тобто дослідити в околі стаціонарних точок диференціали другого порядку (існування других частинних похідних та їх неперервність).

Узагальнення достатньої умови існування локального екстремуму для функції від *n* (*n*>2): знаходимо всі можливі другі частинні похідні і будуємо матрицю (матрицю Гессе):

$$H=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & ... & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & ... & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Означення. Матриця $H=H(x_1\ldots x_n)$ називається додатно визначеною в точці $(x_1^0...x_n^0)$, якщо визначники $M_1>0$, $M_2>0,\ldots$, $M_n>0$, де

$$\text{M1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}=A;$$

$$M_2=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1\, \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}=\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2=AC-B^2;$$

$$M_n=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} & ... & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n \partial x_1} \\ ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n} & ... & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}.$$

Означення. Матриця $H=H(x_1\ldots x_n)$ називається від’ємно визначеною, якщо $M_1>0$, $M_2<0$, $M_3>0,\ldots,(-1)^n M_n>0$.

Теорема 8.3. Нехай функція $z = f(x_1 \ldots x_n)$ визначена в околі точки $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ і $f'_{x_1} = f'_{x_2} = \ldots = f'_{x_n} = 0$.

Тоді в разі додатної визначеності матриці Гессе ($A>0$, $AC-B^2>0$) в точці $(x_1^0 \ldots x_n^0)$ функція $Z = f(x_1, x_2, \ \ldots, x_n)$ має мінімум, а в разі від'ємної ($A<0$, $AC-B^2>0$) – максимум.

Алгоритм розв'язування задачі нелінійного програмування на умовний екстремум методом множників Лагранжа.

1. Скласти узагальнену функцію Лагранжа

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i(x)$$

2. Знайти частинні похідні функції Лагранжа за змінними $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і записати необхідні умови умовного екстремуму (8.8).
3. Розв'язати систему рівнянь (8.8) і знайти стаціонарні точки функції Лагранжа.
4. Для кожної стаціонарної точки записати другий диференціал функції Лагранжа за умов зв'язку на диференціали $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.
5. За достатніми умовами знайти точки умовного екстремуму.
6. Обчислити значення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точках умовного екстремуму.

Приклад 8.1. Дослідити на екстремум функцію $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$.

1. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10$$

2. Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0, \\ x - 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

3. Знайдемо із першого рівняння $y=2x-1$ і підставимо у друге:

$$\begin{cases} x-4(2x-1)+10=0, \\ y=2x-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-8x+14=0, \\ y=2x-1. \end{cases}$$

$$x=2; y=3.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx}=-2,\ z''_{xy}=1,\ z''_{yy}=-4.$

Як бачимо, частинні похідні другого порядку дорівнюють сталим числам в будь-який точці, а значить і в точці $P_0(2;3)$. Тому $A=-2, B=1, C=-4.\ \ AC-B^2=(-2)\cdot(-4)-1=7>0.$

Таким чином, в точці $P_0(2;3)$ функція має максимум

$Z(2;3)=2\cdot 3-2^2-2\cdot 3^2+2+10\cdot 3-8=8.$

Приклад 8.2. Знайти умовний екстремум функції $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$ на множинні X при умові $g_1(x_1,x_2)=x_1+x_2-2=0$

Розв'язання.

1. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1,x_2,\lambda_1)=x_1^2+x_2^2+\lambda_1(x_1+x_2-2)$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1)}{\partial x_1}=2x_1+\lambda_1=0$, тобто $x_1=\dfrac{-\lambda_1}{2}$

$\dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda_1)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda_1=0$, тобто $x_2=\dfrac{-\lambda_1}{2}$

б) $g_1(x)=x_1+x_2-2=0$

3. Розв'язок системи $x_1^*=x_2^*=1, \lambda_1^*=-2$ – умовно стаціонарна точка.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму:

а) $d^2L(x^*,\lambda_1^*)=2dx_1^2+2dx_2^2$, оскільки

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda 1)}{\partial x_2\partial x_1}=0$$

б) $dq_1(x^*)=dx_1+dx_2=0$, оскільки $\dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial q_1(x)}{\partial x_2}=1$

в) виразимо диференціал dx_1 через $dx_2: dx_1=-dx_2$ і підставимо в d^2L;

г) $d^2L(x^*, \lambda 1^*) = 4dx_2^2 \triangleright 0$ при $dx_2 \neq 0$ в точці $x^* = (1;1)^T$ регулярний локальний умовний мінімум.

Лекція 11-13

ТЕМА 9. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

ПЛАН

9.1. Основні поняття теорії ігор.
9.2. Класифікація ігор.
9.3. Матричні ігри двох осіб.
9.4. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловини точками.
9.5. Мішані стратегії в матричних іграх.
9.6. Геометрична інтерпретація гри теорії гри.
9.7. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

9.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІГОР

За умов ринкової економіки все частіше мають місце конфліктні ситуації, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець — покупець (монополія — монопсонія). Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об'єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, дві фірми, які надають однакові послуги, можуть об'єднуватися з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

Теорія ігор *— це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.*

Характерною особливістю ігрової ситуації є взаємодія протилежних (не завжди) інтересів двох чи більше «розумних» суперників, кожний з яких намагається оптимізувати свої рішення. Існує багато різних ігор, серед яких найпоширеніші ***стратегічні.*** У таких іграх джерелом невизначеності є відсутність інформації про його стратегію. Кожна протидіюча сторона (гравці) мають можливість вибору одного (або кількох) варіантів дій — стратегій.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають ***гравцями***, по-друге, опису можливих дій кожної із сторін, що називаються ***стратегіями***, по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що подаються ***функціями виграшу***.

Стратегією гравця називають план, за яким він здійснює вибір у будь-якій можливій ситуації, і володіючи будь-якою фактично можливою інформацією.

Ігри будуються за певними правилами й відбуваються в результаті певної кількості ходів. ***Ходом теорії ігор*** називають вибір однієї з можливих, визначених правилами гри дій і реалізацію цієї дії. Кожному ходові гравців відповідає певний виграш (програш), який вони одержують (сплачують).

Завдання кожного гравця — знайти оптимальну стратегію, яка за багаторазового повторення гри забезпечує йому максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор. Прикладом «гри» в буквальному розумінні цього слова, передусім, є спортивна, карточна гра, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об'єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінки можливих рішень з різних поглядів. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення за складних реальних умов, проте слугують математично обґрунтованою підставою для прийняття таких рішень.

9.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ІГОР

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається ***парною*** (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є ***множинною***.

Залежно від кількості стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра — ***скінченна***, в іншому разі — ***нескінченна***.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо ***гру з нульовою сумою***. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри — з ненульовою сумою, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

За можливості поєднання інтересів гравців та домовленості між ними про вибір стратегій можна казати про ***кооперативну гру***, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається ***некооперативною***.

9.3. МАТРИЧНІ ІГРИ ДВОХ ОСІБ

Щоб описати гру, потрібно вказати множину гравців, їх допустимі ходи, правила проведення і оцінки результатів гри.

Множина гравців задається переліком учасників гри, множина їх допустимих ходів – описом ходів. У правилах звичайно вказано, які ходи є в розпорядженні гравця, деколи може задаватися також кількість ходів у грі. Оцінку результатів гри гравець отримує за допомогою функції виграшу, яка може набувати певного значення під час гри або після її закінчення.

Надалі будемо розглядати найпростіші варіанти деяких ігор. Для цього зробимо три припущення. Перше – у грі беруть участь лише двоє гравців. Друге – кожен гравець має скінченну кількість допустимих ходів, серед яких повинен вибрати лише один. Третє – всі ігри двоходові, тобто кожна гра складається лише з двох ходів, виконаних по одному кожним гравцем, але так, що, обираючи свій хід, гравець нічого не знає про вибір суперника. За умов двоходової гри стратегія як план на гру зводиться до допустимого ходу гравця. Тому надалі поняття стратегії і ходу ми ототожнюватимемо.

Отже, припускаємо, що гра відбувається між двома учасниками A та B; така гра називається парною. Учасник A може користуватися допустимими ходами (стратегіями) $A_1, A_2, ..., A_m$, а учасник B – допустимими ходами $B_1, B_2, ..., B_n$. Правила гри: кожен з гравців A та B вибирає по одній зі своїх допустимих стратегій відповідно A_i та B_j, $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ і на цьому гра закінчується. Пара стратегій $\left(A_i, B_j\right)$ називається **ситуацією**. Повторення гри полягає в створенні гравцями іншої ситуації $\left(A_i, B_j\right)$. Ступінь зацікавленості гравців у результатах гри відображають функції виграшу.

Нехай $\varphi_1(A_i; B_j)$ – виграш гравця A, $\left(i = \overline{i,m};\ j = \overline{i,n}\right)$;

$\varphi_2\left(A_i; B_j\right)$ — виграш гравця B, $\left(i = \overline{i,m};\ j = \overline{i,n}\right)$.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1\left(A_i; B_j\right) + \varphi_2\left(A_i; B_j\right) \equiv 0$.

Тоді в разі $\varphi_1(A_i; B_j) = \varphi(A_i; B_j)$ маємо $\varphi_2(A_i; B_j) = -\varphi(A_i; B_j)$.

Отже, мета гравця A максимізувати $\varphi(A_i; B_j)$, а гравця B – її мінімізувати.

Функції виграшу набувають mn значень кожна. Тому їх можна задавати матрицями розміру $m \times n$, у яких рядки матриць відповідають стратегіям першого гравця A, стовпці – стратегіям другого гравця B. Звичайно ці дві матриці об'єднують в одну матрицю виграшів (або платіжну матрицю, матрицю гри). Рядки матриці виграшів відповідають стратегіям гравця A, стовпці – стратегіям гравця B.

Нехай $\varphi(A_i; B_j) = a_{ij}$, тобто маємо матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Зображення гри платіжною матрицею виграшів називається **нормальною формою запису гри**. Ця форма особливо зручна для ігор з двома гравцями. Ігри, для зображення яких можна застосувати матриці, називають також **матричними**.

9.4. МІНІМАКСНІ СТРАТЕГІЇ. ІГРИ З СІДЛОВИНИ ТОЧКАМИ

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією гри для вибору раціональних варіантів рішень, найпоширенішим (песимістичним) є ***критерій мінімаксу-максиміну.*** Сутність його полягає ось у чому.

Нехай гравець $\boldsymbol{A}$ вибрав стратегію $\boldsymbol{A_i}$. Тоді в найгіршому випадку він отримає виграш, що дорівнює $\boldsymbol{min\, a_{ij}}$. Якщо навіть гравець $\boldsymbol{B}$ знає його стратегію, гравець $\boldsymbol{A}$ має діяти так, щоб максимізувати свій мінімальний виграш: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$.

Таку стратегію гравця $\boldsymbol{A}$ називають ***максимінною***, а розмір його гарантованого виграшу — ***нижньою ціною гри.***

Стратегія, яка забезпечує цей виграш, називається ***максимінною*** і позначається A_{i0}.

Гравець B, який програє суми в розмірі елементів платіжної матриці, навпаки, має обрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця A. Стратегію гравця B називають ***мінімаксною*** і позначають B_{j_0}. Розмір його програшу — ***верхня ціна гри***: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$.

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні не вигідно змінювати обрану стратегію, оскільки суперник може у відповідь обрати іншу стратегію, яка дасть йому кращий результат. Якщо $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon$, тобто $a = \beta = \upsilon$, то гра називається ***цілком визначеною***, число $\boldsymbol{\upsilon}$ називається ***ціною гри***. Цілком визначені ігри називаються ***іграми із сідловою точкою.*** У цій ситуації оптимальним для обох гравців є вибір чистих стратегій — максимінної для гравця $\boldsymbol{A}$ і мінімаксної для $\boldsymbol{B}$. Адже, якщо один із гравців додержує оптимальної стратегії, то для іншого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Приклад 9.1. Маємо гру гравців ***A і B***, яка задана платіжною матрицею. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії дій гравців

$$\begin{array}{cc} & \text{Гравець } \boldsymbol{B} \\ \text{Гравець } \boldsymbol{A} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Розв'язання. Оптимізацію гри починають, як правило, визначенням домінуючих стратегій для кожної зі сторін, а також відкиданням невигідних і дублюючих стратегій.

Насамперед визначають домінуючу стратегію. Перша стратегія гравця ***A*** домінує над третьою, оскільки всі значення його виграшів за будь-яких дій суперника є не гіршими, ніж у разі вибору третьої стратегії, тобто всі елементи першого рядка платіжної матриці не менші за відповідні елементи її третього рядка. Тому третя стратегія гірша за першу й може бути вилучена з платіжної матриці.

Аналізуючи далі можливі дії гравця ***B***, зауважимо, що його перша стратегія домінує над п'ятою, яку можна відкинути як більш збиткову, а тому невигідну для цього гравця. Отже, маємо таку платіжну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

У разі вибору гравцем ***A*** першої стратегії, залежно від дій гравця ***B*** він може отримати 6,3,8,*ààî* 5 одиниць. Але завжди його виграш буде не меншим за $\min\{6, 3, 8, 9\} = 3$, тобто незалежно від поведінки гравця ***B***. Якщо розглянути можливі наслідки вибору гравцем ***A*** другої стратегії, то аналогічно його гарантований виграш становитиме $\min(6, 5, 7, 6) = 5$. Для третьої стратегії відповідно маємо: $\min(4, 4, 3, 8) = 3$.

Отже, ***нижня ціна*** гри: $\alpha = \max\{3, 5, 3\} = 5$, а гравець ***A*** для максимізації мінімального виграшу має обрати другу з трьох можливих стратегій. Така стратегія є максимінною в цій грі.

Гравець ***B***, який намагається мінімізувати свій програш, обираючи першу стратегію, може програти 6, 6, ààî 4 одиниці. Але за будь-яких варіантів дій гравця ***A*** він може програти не більш як

$\max\{6, 6, 4\} = 6$. Для другої стратегії маємо $\max\{3, 5, 4\} = 5$, для третьої — $\max\{8, 7, 3\} = 8$, для четвертої — $\max\{5, 6, 8\} = 8$. Отже, ***верхня ціна*** гри $\beta = \min\{6, 5, 8, 9\} = 5$. І гравцю ***B*** доцільно вибирати другу стратегію, яка є мінімаксною у грі.

Оскільки $\alpha = \beta$, ця гра має ***сідлову точку***, ***ціна гри*** $\upsilon = 5$. Оптимальною максимінною стратегією гравця ***A*** є друга з трьох можливих стратегій його дій. Для гравця ***B*** оптимальною є також друга з чотирьох можливих. Компактно це можна записати так:

A_i	B_j				$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	3	8	5	**3**
A_2	6	5	7	6	**5**
A_3	4	4	3	8	**3**
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	**6**	**5**	**8**	**8**	$\alpha = 5$ $\beta = 5$

$$\alpha = \max\{\min(6;3;8;5); \min(6;5;7;6); \min(4;4;3;8)\} = \max\{3;5;3\} = 5$$

$$\beta = \min\{\max(6;6;4); \max(3;5;4); \max(8;7;3); \max(5;6;8)\}$$

$$= \min\{6;5;8;8\} = 5$$

$$\upsilon = \alpha = \beta = 5$$

9.5. МІШАНІ СТРАТЕГІЇ В МАТРИЧНИХ ІГРАХ

Ігри зі сідловою точкою на практиці трапляються рідко. Значно поширеніші ігри, у яких нижня ціна гри менша за верхню. Навіть якщо гравці *A* і *B* дотримуються своїх «обережних» стратегій, то величину виграшу заздалегідь вказати неможливо.

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $a \neq \beta$ і $a \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними: кожна зі сторін може поліпшити свій результат, обираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять, застосовуючи ***змішані стратегії***, які є певними комбінаціями початкових чистих стратегій.

Імовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами.

Для гравця A: $X = (x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_m)$, де $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$;

Для гравця $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{Y=\left(y_1,\quad y_2,\quad \dots\quad y_n\right)}$, де $\boldsymbol{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1}$.

Очевидно, що $\boldsymbol{x_i \geq 0,\left(i=\overline{1,m}\right);\quad y_j \geq 0,\left(j=\overline{1,n}\right)}$

9.6. Геометрична інтерпретація гри теорії гри

Найпростішим випадком скінченої гри є парна гра, коли у кожного учасника є дві стратегії (табл. 9.1).

Таблиця 9.1.

A_j \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Розглянемо випадок, коли гра не має сідловок точки. Отже, $\alpha \neq \beta$. Необхідно знайти змішані стратегії та ціну гри. Позначимо шукані значення ймовірностей застосування «чистих» стратегій гравця A через $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, а для гравця B – через $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*\right)$.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, якщо гравець А притримується своєї оптимальної стратегії, то виграш дорівнюватиме ціні гри. Отже, якщо гравець А притримуватиметься своєї оптимальної стратегії $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, то:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{9.1}$$

Оскільки $x_1^* + x_2^* = 1$, то $x_2^* = 1 - x_1^*$. Підставивши цей вираз у систему рівнянь (9.1), отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}\left(1 - x_1^*\right) = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}\left(1 - x_1^*\right) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}x_1^* + a_{21}\left(1 - x_1^*\right) = a_{12}x_1^* + a_{22}\left(1 - x_1^*\right).$$

Розв’язавши дане рівняння відносно невідомого x_1^*, маємо: $x_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$, тоді $x_2^* = 1 - x_1^* = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Провівши аналогічні міркування стосовно гравця B, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{9.2.}$$

Оскільки $y_1^* + y_2^* = 1$, то $y_2^* = 1 - y_1^*$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}\left(1 - y_1^*\right) = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}\left(1 - y_1^*\right) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}y_1^* + a_{12}\left(1 - y_1^*\right) = a_{21}y_1^* + a_{22}\left(1 - y_1^*\right).$$

Розв'язавши це рівняння відносно невідомого y_1^*, маємо: $y_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$, тоді $y_2^* = 1 - y_1^* = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Ціну гри υ знаходять, підставляючи значення x_1^*, x_2^* (або y_1^*, y_2^*) в будь-яке з рівнянь (9.1) або (9.2): $\upsilon = \dfrac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Приклад 9.2. Знайти розв'язок гри, яка задана матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, дати геометричну інтерпретацію цього розв'язку.

Розв'язання. Перевіримо наявність сідлової точки в даній матриці. Для цього знайдемо мінімальні елементи в кожному рядку (2 і 4) й максимальні елементи в кожному з стовбців (6 і 5). Отже, нижня ціна гри $\alpha = \max(2;4) = 4$, а верхня ціна гри $\beta = \min(6;5) = 5$. Оскільки $\alpha = 4 \neq \beta = 5$, то розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри υ знаходиться в межах $4 \le \upsilon \le 5$.

Припустимо, що для гравця A стратегія задається вектором $U = (u_1; u_2)$. Тоді при застосуванні гравцем B чистої стратегії B_1 або B_2 гравець A отримає середній виграш, який дорівнює ціні гри, тобто

$2u_1^* + 6u_2^* = \upsilon$ (при стратегії B_1),

$5u_1^* + 4u_2^* = \upsilon$ (при стратегії B_2).

Крім цих рівнянь, добавимо рівняння, що зв'язує частоти u_1^* та u_2^*:

$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Розв'язуючи отриману систему трьох рівнянь з трьома невідомими знаходимо $u_1^* = \dfrac{2}{5};\ u_2^* = \dfrac{3}{5};\ u_3^* = \dfrac{22}{5}$.

Знайдемо тепер оптимальну стратегію для гравця B. Нехай стратегія для даного гравця задається вектором $Z = (z_1; z_2)$. Тоді

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, матимемо $z_1^* = \frac{1}{5}, z_2^* = \frac{4}{5}.$ Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $U^* = \left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$ та $Z^* = \left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$, а ціна гри $\upsilon = \frac{22}{5}.$

Дамо тепер геометричну інтерпретацію розв'язку даної гри. Для цього на площині *uOz* введемо систему координат й на осі *Ou* відкладемо відрізок одиничної довжини A_1A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію $U = (u_1, u_2) = (u_1, 1-u_1)$ (мал. 9.1). Зокрема, точці $A_1(0;1)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_2(1;0)$ - стратегія A_2 і т.д.

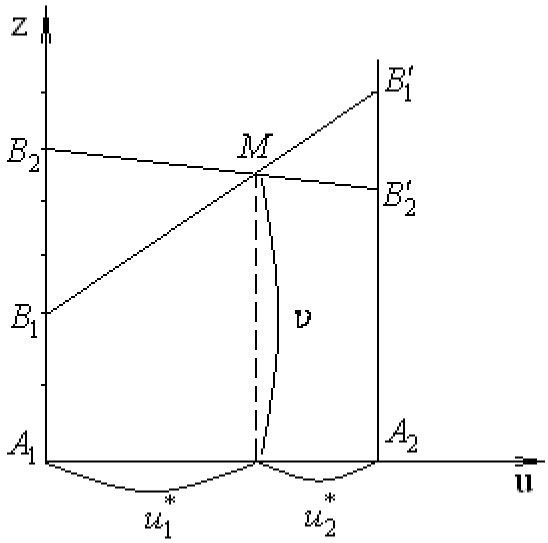


Рис. 9.1.

Через точки A_1 та A_2 проведемо перпендикуляри й на отриманих прямих будемо відкладати виграш гравців. На перпендикулярі, який співпадає з віссю *Oz*, відкладемо виграш гравця *A* при стратегії A_1, а на другому – при стратегії A_2. Якщо гравець *A* застосовує стратегію A_1, то його виграш при стратегії B_1 гравця *B* дорівнює 2, а при стратегії B_2 він дорівнює 5. Числам 2 і 5 на осі *Oz* відповідають точки B_1 та B_2.

Якщо ж гравець *A* приймає стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 гравця *B* дорівнює 6, а при стратегії B_2 він дорівнює 4. Ці два числа визначають дві точки B_1' та B_2 на перпендикулярі, проведеного через точку A_2. З'єднуючи між собою точки B_1 та B_1', B_2 та B_2', матимемо дві прямі, відстань до яких від осі *Ou* визначає середній виграш при будь-якій комбінації відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка $B_1 B_1'$ до осі *Ou* визначає середній виграш υ_1 при будь-якій комбінації стратегій A_1 та A_2 (з частотами u_1 та u_2) й стратегії B_1 гравця *B*. Ця відстань дорівнює $2u_1 + 6u_2 = \upsilon_1$. Аналогічно, середній виграш при застосуванні стратегії B_2 визначається ординатами точок, що належать відрізку $B_2 B_2'$.

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній $B_1 M B_2'$, визначають мінімальний виграш гравця *A* при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці *M*, а отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $U^* = \left(u_1^*, u_2^*\right)$, а її ордината дорівнює ціні гри υ. Координати точки *M* знаходимо як координати точки перетину прямих $B_1 B_1'$ та $B_2 B_2'$. Тобто матимемо три рівняння: $\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \upsilon, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \upsilon, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо: $u_1^* = \dfrac{2}{5}; u_2^* = \dfrac{3}{5}; \upsilon = \dfrac{22}{5}.$

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію для гравця *B*. Матимемо таку систему рівнянь: $\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \dfrac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1, \end{cases}$

яка має розв'язок: $z_1^* = \dfrac{1}{5}; z_2^* = \dfrac{4}{5}.$

Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $U^* = \left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{3}{5}\right)$ і $Z^* = \left(\dfrac{1}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$, а ціна гри $\upsilon = \dfrac{22}{5}$.

Підсумовуючи викладене вище, можна вказати ***основні етапи*** знаходження розв'язку гри $2 \times n$ або $n \times 2$:

1. Будують прямі, які відповідають стратегіям другого (першого) гравця.

2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.

3. Знаходять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.

4. Визначають ціну гри та оптимальні стратегії.

Основні типові випадки взаємного розташування відрізків виграшів гравця А зображено на рис. 9.2 – 9.4.

Точки відрізків, які відповідають найменшим виграшам, позначено потовщеною лінією, вона називається **лінією найменших виграшів** гравця А. Оптимальна (максимінна) поведінка гравця А полягає у виборі такої мішаної стратегії, яка відповідає точці з найбільшою ординатою на лінії найменших виграшів. Розглянемо деякі випадки.

Випадок 1 (рис. 9.2). Лінія найменших виграшів є ламаною $B_1'NB_2''$, а точка $N(x_N; v_N)$, $0 < x_N < 1$, на ній має найбільшу ординату. Тоді $v = v_N$ – ціна гри, а стратегія $\vec{X}^0 = (1 - x_N; x_N)^T$ – оптимальна для гравця А.

Випадок 2 (рис. 9.3). Лінія найменших виграшів є ламаною $B_1'NB_2''$, але найбільшу ординату на ній має один з кінців, наприклад, $B_2''(1;c_{22})$. Оптимальними є стратегії A_2 (для гравця А) і B_2 (для гравця В). Отже, розв'язок гри складають чисті стратегії $\vec{X}^2 = (0;1)^T$, $\vec{Y}^2 = (0;1)^T$ і сідлова точка $v = c_{22}$.

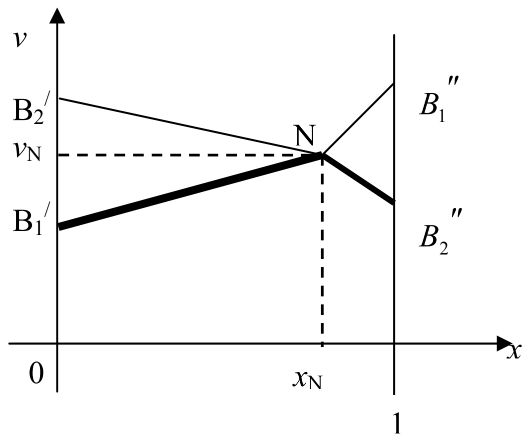


Рис. 9.2

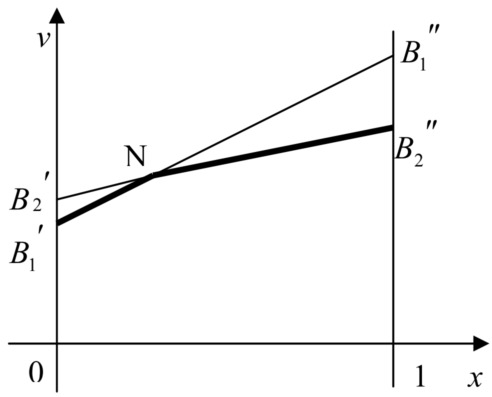


Рис. 9.3

Випадок 3 (рис. 9.4). Лінією найменших виграшів є один з відрізків $B_1'B_1''$ або $B_2'B_2''$, наприклад, перший. Тоді стратегія B_2 є невигідною для гравця В, оскільки за стратегії B_2 він програє більше, ніж за стратегії B_1. Тому другий стовпець в матриці гри C можна викреслити і звести гру до гри 2×1. Точка $B_1''(1; c_{21})$ з найбільшою ординатою на відрізку найменших виграшів $B_1'B_1''$ визначає оптимальні стратегії A_2 і B_1. Розв'язок гри складають чисті стратегії $\vec{X}^2 = (0;1)$, $\vec{Y}^1 = (0;1)$ і сідлова точка $v = c_{21}$.

Оптимальну мішану стратегію гравця В можна також знайти геометрично. На рис. 9.5 побудовано графіки середніх програшів гравця *B* в системі координат *y*O*v* за умови застосування ним мішаних стратегій $\vec{Y} = (1-y;y)^T$, а гравець A – чистих стратегій A_1 (відрізок $A_1'A_1''$) і A_2 (відрізок $A_2'A_2''$). Потовщена ламана $A_1'MA_2''$ складена з точок, які відповідають найбільшим програшам, і називається **лінією найбільших програшів** гравця В. Якщо точка $M(y_M;v_M)$ на ній має найменшу ординату, то v_M – ціна гри, а мішана стратегія $\vec{Y}^0 = (1-y_M;y_M)$ – оптимальна для гравця B.

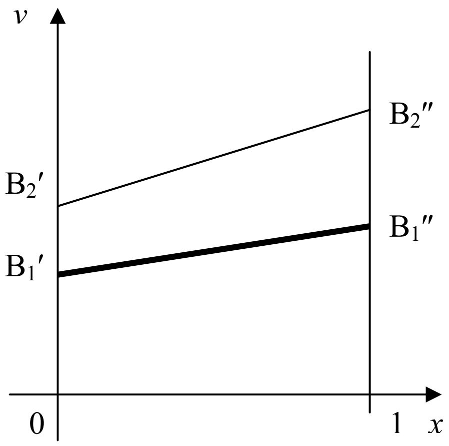


Рис. 9.4

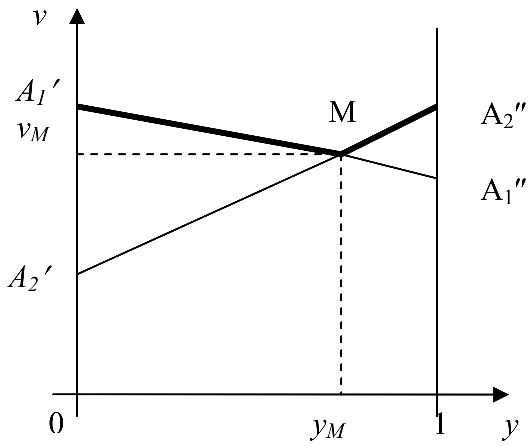


Рис. 9.5

9.7. ЗВЕДЕННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ ДО ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Якщо матрична гра не має **сідлової** точки, то знаходження її розв'язку, особливо за великої кількості стратегій, – доволі складна задача, для розв'язування якої використовують прийом зведення її до задачі лінійного програмування.

Нехай розглядається парна гра зі стратегіями $A_1, A_2, ..., A_m$ для гравця A та стратегіями $B_1, B_2, ..., B_n$ для гравця B і платіжною матрицею $(a_{ij})(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$. Необхідно знайти оптимальні змішані стратегії $X = (x_1,\ x_2,\ \dots\ x_m)$ і $Y = (y_1,\ y_2,\ \dots\ y_n)$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, з метою визначення оптимального значення ціни гри.

Зауважимо, що кожна скінчена гра має принаймні один розв'язок, який можливий в області змішаних стратегій.

Знайдемо спочатку оптимальну стратегію гравця A. За основною теоремою теорії ігор така стратегія має забезпечити гравцеві виграш, не менший за ціну гри (поки що невідому величину) v, за будь-якої поведінки гравця B.

Допустимо, що гравець A застосовує свою оптимальну змішану стратегію, а гравець B – свою «чисту» j – ту стратегію B_j, тоді середній виграш гравця A дорівнюватиме:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{mj}x_m .$$

За цих обставин виграш м ає бути не менший за ціну гри в разі вибору будь-яких стратегій. Отже, для будь-якого значення $j \left(j = \overline{1, n}\right)$ величина $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{mj}x_m$ має бути не меншою, ніж v :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq \upsilon, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + ... + a_{m2}x_m \geq \upsilon, \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq \upsilon. \end{cases}$$

Поділивши всі обмеження на υ, дістанемо:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{12}\dfrac{x_2}{\upsilon} + ... + a_{m1}\dfrac{x_m}{\upsilon} \geq 1, \\ a_{21}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2}{\upsilon} + ... + a_{m2}\dfrac{x_m}{\upsilon} \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2}{\upsilon} + ... + a_{mn}\dfrac{x_m}{\upsilon} \geq 1. \end{cases}$$

Нехай $\frac{x_i}{\upsilon} = t_i$, тоді

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases}$$

Згідно з умовою $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$, звідки $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{\upsilon}$.

Необхідно зробити виграш максимальним. Цього можна досягнути, коли вираз $t_1 + t_2 + ... + t_m = \frac{1}{\upsilon}$ набуватиме мінімального значення. Отже, маємо звичайну задачу лінійного програмування, цільова функція якої набирає такого вигляду:

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{t=1}^{m} t_i .$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + ... + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + ... + a_{m2}t_m \geq 1, \\ .... \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + ... + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases}$$

$$t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right).$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, знайдемо значення $t_i\left(i=\overline{1,m}\right)$, а також $\frac{1}{\upsilon}$ і $x_i=\upsilon t_i$, тобто визначимо змішану оптимальну стратегію $X=\left(x_1,\ \ x_2,\ \ \ldots\ \ x_m\right)$ для гравця A.

Відповідно використання оптимальної змішаної стратегії гравцем ***B*** має за будь-яких стратегій гравця A забезпечувати програш B, що не перевищує ціни гри υ:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le \upsilon \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

$$y_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

За аналогією запишемо задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця B. Нехай

$$u_j=\frac{y_i}{\upsilon} \quad \left(\overline{j,n}\right).$$

Тоді маємо таку лінійну модель:

$$f=\sum_{j=1}^{n} u_j \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}u_1+a_{12}u_2+\ldots+a_{1n}u_n \le 1, \\ a_{21}u_1+a_{22}u_1+\ldots+a_{2n}u_n \le 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1+a_{m2}u_2+\ldots+a_{mn}u_n \le 1, \end{cases}$$

$$u_j \ge 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця B є двоїстою до задачі гравця A, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає оптимальний розв'язок спряженої.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Імітаційне моделювання.
2. Ком’ютерне моделювання.
3. Інформаційне моделювання.
4. Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування.
5. Виробнича функція та її властивості
6. Принципи побудови критеріїв оптимальності.
7. Багатокритеріальні задачі та основні підходи до їх розв’язання.
8. Двохетапна транспортна задача.
9. Міжгалузева балансова модель.
10. Задача комівояжера.
11. Задача про оптимальний план випуску продукції.
12. Задача про раціон.
13. Задача про призначення.
14. Глобальний екстремум.
15. Опукле програмування.
16. Теорма Куна-Таккера.
17. Градієнтний метод.
18. Динамічне програмування.
19. Стохастичне програмування.

Питання до іспиту

1. Поняття «модель» та «моделювання».
2. Етапи математичного моделювання.
3. Основні види та властивості моделей.
4. Принципи моделювання.
5. Засоби математичного моделювання.
6. Методи обґрунтування та оптимізації машинно-тракторного парку.
7. Коротка класифікація моделей математичного програмування.
8. Математичне моделювання технологічних процесів.
9. Основні системні поняття
10. Класифікація систем
11. Системні властивості
12. Ознаки системи
13. Динаміка системи
14. Структура систем
15. Вхідні та вихідні величини
16. Стійкість системи
17. Аграрна система
18. Загальна математична модель лінійного програмування.
19. Форми запису задач лінійного програмування.
20. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.
21. Двоїстість у задачах лінійного програмування. Правила побудови двоїстих задач.
22. Математична постановка транспортної задачі.

23. Методи побудови початкового опорного плану транспортної задачі.
24. Метод потенціалів
25. Визначення оптимального складу машино-тракторного парку.
26. Постановка задачі дробово-лінійного програмування
27. Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом
28. Постановка задачі цілочислового програмування
29. Метод Гоморі
30. Метод «віток і меж»
31. Постановка задачі нелінійного програмування.
32. Методи розв'язування задач нелінійного програмування.
33. Метод Лагранжа розв'язування задач нелінійного програмування.
34. Основні поняття теорії ігор.
35. Класифікація ігор.
36. Матричні ігри двох осіб.
37. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловини точками.
38. Мішані стратегії в матричних іграх.
39. Геометрична інтерпретація гри теорії гри.
40. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барвінський А. Ф. Математичне програмування: навч. посіб. / [А. Ф. Барвінський, І. Я. Олексів, З. І. Крупка та ін.] – Львів : Львівська політехніка , 2004. – 448 с.
2. Бугір М. К. Математика для економістів : Лінійна алгебра, лінійні моделі: посіб. [Текст] / М. К. Бугір. - К. : Академія , 1998. - 272 с.
3. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посіб. / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2001. – 248 с.
4. Гатаулин А. М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / [А. М. Гатаулин, Г. В. Гаврилов, Т. М. Сорокина и др.] – М.: Агропромиздат, 1990. - 432с.
5. Зацеркляний М. М. Основи економічної кібернетики: навч. посіб. / М. М. Зацеркляний, О. Ф. Мельников – Чернівці: ТОВ Наші книги, 2008 . – 392 с.
6. Катренко А. В. Дослідження операцій : підруч / А. В. Катренко – Львів : Магнолія Плюс , 2004. – 549 с.
7. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень [Текст] : навч. посіб. / [Р. Н. Квєтний, І. В. Богач, О. Р. Бойко та ін.] ; Вінниця : ВНТУ, 2013. – 365 с.
8. Лященко М. Я. Чисельні методи: підруч. / М. Я. Лященко, М. С. Головань. – Київ . : Либідь, 1996. – 288 с.
9. Мельник І. І. Інженерний менеджмент : навч. посіб. / За ред. І. І. Мельника. – Вінниця : Нова книга, 2007. –536 с
10. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2005. – 452 с.
11. Нефьодов Ю. М. Методи оптимізації в прикладах і задачах : навч. посіб. / Ю. М. Нефьодов. – К. : Кондор, 2011. – 324 с.
12. Оптимізаційні методи в аграрному виробництві : метод. рекоменд. / Полтавська державна аграрна академія. - К., 2004. – 69 с.
13. Плескач В. Л. Інформаційні технології та системи : підруч. / В. Л. Плескач, Ю. В. Рогушина, Н. П. Кустова– К. : Книга , 2004. – 520 с.

Навчальне видання

Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ

КУРС ЛЕКЦІЙ

Автори:
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Жорова Алла Мколаївна
Хилько Іван Іванович та ін.

Підписано до друку ………. Формат А4.
Папір офсет. №1. Ум. друк. арк. 3.
Тираж … пр.. Зам. № ___

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54029, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.