Хилько І.І.
Миколаївський національний аграрний університет, м. Миколаїв

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗРАХУНКУ ПРОГИНІВ СТЕРЖНІВ ЗА МЕЖЕЮ ПРУЖНОСТІ ПРИ СКЛАДНОМУ ОПОРІ

При розрахунку стержнів за межею пружності при складному опорі важливими питаннями є додержання вимог міцності та жорсткості [1]. У зв'язку з цим постає задача отримання аналітичних залежностей для практичного знаходження прогинів стержня за межею пружності, які використовуються при розрахунку з врахуванням деформованої схеми або за другим граничним станом.

Для виконання даної задачі на першому етапі було отримано значення прогинів в кожній точці стержня в залежності від прикладеної зосередженої сили для стержнів різної довжини. Розглянемо це більш детально.

Для побудови пружно-пластичної епюри нормальних напруг і отримання величини згинаючого моменту в кожному перерізі стержня допускалися наступні припущення: деформаційна теорія пластичності, гіпотеза плоских перерізів, ідеалізована діаграма Прандтля.

При розрахунку пружно-деформованого стану стержня за межами пружності з врахуванням деформованої схеми використовувався критерій граничного стану: обмеження інтенсивності пластичної деформації [2] граничною величиною $\varepsilon_{ip,lim} = 0,2\%$. Це досягалося за допомогою методу поновлення граничної величини на кожному кроці ітераційного процесу [3], який гарантував збіг і ефективно зменшував кількість необхідних послідовних наближень.

Спираючись на відому методику [4] отримання аналітичних залежностей пружно-деформованого стану при одноосному згині з поздовжньою силою за межами пружності для двотаврових перерізів визначався з рівності $M = \left|\int \sigma_x \cdot y dA\right| + N \cdot h_H$ граничний згинаючий момент M_{lim} в найбільш навантаженому перерізі стержня, для якого величина пластичної деформації приймала граничне значення $\varepsilon_{ip,lim}$.

Потім на першому кроці ітераційного процесу шукана епюра згинаючих моментів за деформованою схемою M_{di} вважалася рівною граничній епюрі моментів M, яка була визначена за недеформованою схемою, при умові, що $M_{max} = M_{lim}$.Визначалися ті перерізи стержня для яких справджувалася нерівність $M_{SN} < M_{di} < M_{lim}$, де M_{SN} – найбільший момент, визначений в межах пружності при дії сили N, і для кожного з цих перерізів будувалася епюра нормальних напруг σ_i [4]. На основі одержаної епюри σ_i в кожному перерізі затронутому текучістю матеріалу визначалися повні кривизни $\chi_i = \dfrac{\varepsilon_{Hi} - \varepsilon_{Bi}}{H}$, де ε_{Hi} і ε_{Bi} – крайові відносні деформації, взяті зі своїми знаками, H – висота стержня. При роботі матеріалу стержня в межах пружності $\chi_i = \dfrac{M_{di}}{E \cdot I}$, де E –модуль пружності, I –момент інерції.

Використовуючи метод Мора визначалися величини повних прогинів $Y_i = \int_0^l \overline{M}_i \chi dl$,де $\overline{M}_i$ –епюра згинаючих моментів від одиничного навантаження, прикладеного в і – му перерізі стержня. Одержаний інтеграл знаходимо наближено за допомогою формули Сімпсона, яка з врахуванням того, що $\overline{M}_{i,0} = \overline{M}_{i,m} = 0$ дає наступний результат

$$Y_i = \frac{2\Delta l}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \overline{M}_{i,2k}\chi_{2k} + 2\sum_{k=1}^{n} \overline{M}_{i,2k-1}\chi_{2k-1}\right),$$

$$\Delta l = \frac{l}{m}(m = 2n), i = 1,2,\dots,m-1; (Y_0 = Y_m = 0).$$

Потім будувалася епюра згинаючих моментів наступної ітерації за деформованою схемою $M_{d,i} = M_{p,i} - M_{N,i}$, де $M_{p,i}$ – епюра згинаючих моментів від прикладеної сили, $M_{N,i}$ – епюра моментів, які виникають від поздовжньої сили внаслідок геометричної нелінійності навантаженого стержня $M_{N,i} = N \cdot Y_i$. Описаний вище процес продовжувався до досягнення необхідної точності прогину стержня і вже на 3-4 ітерації точність досягала 0,1%.

Згідно з запропонованою методикою було розроблено відповідну програму на мові TYRBO CI з врахуванням геометричних розмірів стержня, розрахункових опорів матеріалу стінки R_W та полок R_F, величини поздовжньої сили N та схеми навантаження. Використовуючи програму було проведено розрахунки прогинів симетричних моносталевих стержнів довжиною $l =$ 6м, 9м, 12м, 15м, 18м, 21м при навантажені їх зосередженою поперечною силою P в сполученні з поздовжньою силою N, де $N = n \cdot N_{lim}$, n приймає значення -0,9; -0,8; ...;0; …. ; 0,8; 0,9і $N_{lim} = (A_1 + A_3) \cdot R_F + A_2 \cdot R_W$, що викликали досягнення граничної пластичної деформації $\varepsilon_{ip,lim} = 0{,}2\%$ у найбільш навантаженому перерізі.

В результаті було накопичено достатню кількість необхідних даних для стержнів різної довжини при різних значеннях поздовжньої сили при переміщенні зосередженої сили вздовж стержня з кроком рівним 0,05 довжини стержня, що дало можливість для подальшої їх систематизації і як результат отримання відповідних математичних моделей[5, 6, 7].

На наступному етапі при побудові апроксимуючих ліній використовувався метод найменших квадратів, суть якого полягала в тому, щоб теоретична лінія апроксимуючої кривої $\overline{Y}_i$ проходила б максимально близько до фактичного значення Y_i, тобто щоб виконувалася умова $\sum \left(Y_i - \overline{Y}_i \right)^2 = min$.

Нехай X_p – відстань від лівого кінця стержня до точки прикладення зосередженої сили, X_m – відстань від лівого кінця стержня до точки, в якій досягнуто максимальний прогин стержня, l – довжина стержня.

Досліджувалася залежність розміщення відносної точки $X_{max} = \frac{X_m}{l}$ в якій досягнуто максимальний прогин стержня в області обмежених пластичних деформацій від трьох наступних параметрів: $X = \frac{X_p}{l}$ – відносної точки прикладення зосередженої сили, $Y = \frac{N}{N_{lim}}$ – відносної величини поздовжньої сили, $Z = \frac{l}{l_0}$ – відносної довжини стержня, l_0 = 6 м, тобто залежність виду $X_{max} = F(X, Y, Z)$.

Для побудови апроксимуючих ліній розглядалися поліноми 1-го, 2-го та 3-го ступеня. В якості критерію порівнювалася величина $\delta = \sum \left(X_{max} - \overline{X}_{max} \right)^2 = min$, де X_{max} – точне значення, $\overline{X}_{max}$ – наближене значення. В результаті статистичної обробки даних і аналізу факторів, що найменше впливають на процес було отримано наступну математичну модель

$$\overline{X}_{max} = 0{,}436779 + 0{,}820793X^2 - 0{,}0346Y^2 - 0{,}272245X + \\ + 0{,}03261XY - 0{,}0007695YZ,$$

яка з достатнім ступенем точності апроксимації описує задану залежність. Для неї величина $\delta = 0{,}06196$, а найбільше значення різниці між точним X_{max} і наближеним числом $\overline{X}_{max}$ не перевищує 0,03173, або 6,78% при *X = 0,5; Y = 0,9; Z = 3,5.* Аналіз одержаної математичної моделі дає можливість зробити висновок, що максимальний прогин стержня знаходиться в межах від 0,44***l*** до $0{,}5l$. При цьому найбільший вплив на значення X_{max} має відносна точка прикладення зосередженої сили X і відносне значення поздовжньої сили Y. Про це свідчить найбільше значення коефіцієнтів при цих факторах в рівнянні регресії. І відповідно найменший вплив має відносна довжина стержня Z . Проведені дослідження показали, що момент інерції стержня не впливає на значення X_{max}.

Наступною досліджувалася залежність коригуючого коефіцієнта $k = \frac{Y_{plast}}{Y}$, де Y_{plast} – прогин в точці, обчислений за ітераційним алгоритмом за умови досягнення пластичної деформації $\varepsilon_{ip,lim} = 0{,}2\%$, Y_{ypr} – прогин в точці, досягнений за умови необмежено пружної роботи стержня, від X – відносної точки прикладення сили, Y – відносної величини поздовжньої сили, Z – відносної довжини стержня, тобто залежність виду $k = F(X; Y; Z)$.

Для отримання необхідної аналітичної залежності розглядалися різноманітні рівняння 1-го та 2-го ступеня. Критерієм відбору була величина $\delta = \sum(k-\bar{k})^2 = min$, де k – точне значення, $\bar{k}$ - наближене значення. В результаті відповідної статистичної обробки числових даних і аналізу факторів, що найменше впливають на значення коригуючого коефіцієнта було одержано наступну математичну модель

$$k = 1{,}077357 + 0{,}001255\frac{1}{X^2} + 0{,}433184Y^2 + 0{,}005836\frac{1}{X} +$$
$$+0{,}162033Y + 0{,}008929Z - 0{,}157373YZ,$$

яка з достатнім ступенем точності апроксимації описує задану залежність. Для даної моделі величина $\delta =$ 5,623, а максимальне відхилення наближеного значення $\bar{k}$ від точного k не перевищує 10% для поздовжньої сили Y в межах від –0,8 до 0,8, і тільки при X = 0,45, Y = -0,9, Z = 3,5 дане відхилення досягає 45%.Аналіз одержаної залежності говорить про те, що найбільший вплив на значення коригуючого коефіцієнта мають відносна точка прикладення сили X і відносна величина поздовжньої сили Y, а найменший вплив – відносна довжина стержня Z.

Наступним завданням нашого дослідження була побудова такої аналітичної залежності, яка б дала можливість знайти значення прогину стержня Y в кожній його точці X при переміщенні зосередженої сили вздовж стержня, тобто залежності виду $Y = f(X)$..

Використовуючи метод найменших квадратів для побудови апроксимуючих ліній, розглядалися різні форми кривих. Було виявлено, що найбільш точку математичну модель стержня дає крива, яка включає в своє аналітичне відображення тригонометричні функції, а саме

$$Y = \begin{cases} Y_{max}\sin\dfrac{\pi X}{2X_m}, \text{якщо } X \le X_m \\ Y_{max}\sin\dfrac{\pi(l-X)}{2(l-X_m)}, \text{ якщо } X > X_m \end{cases}$$

де Y_{max} – максимальне значення прогину стержня, X_m – відстань від лівого кінця стержня до точки, в якій досягнуто максимальний прогин; l – довжина стержня.

Література.

1. Рекомендации по расчету стальних конструкций по критерию ограниченных пластических деформаций. – М., 1985, С. 3-4.

2. Чернов Н.Л. Расчеты стальних конструкций на прочность по критерию ограниченных пластических деформацій [Текст] / Н.Л.Чернов, Н.Н.Стрелецкий, Б.И.Любаров // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1984, № 7. –С. 1-9.

3. Чернов Н.Л. Расчет прочности статически неопределимых систем при ограниченных пластических деформаціях [Текст] / Н.Л.Чернов, В.С.Шебанин // Известия вузов. Машиностроение. – 1986, № 4. – С. 3-6.

4. Шебанин В.С. Прочность изгибаемых стальних стержневих конструкций при учете физической и геометрической нелинейности в области ограниченных пластических деформаций. Докторская диссертация. – Одесса, 1993.

5. Шебанін В. С. Математична модель розрахунку прогинів стержнів в області обмежених пластичних деформацій при складному опорі [Текст] / В.С. Шебанін, В. Г. Богза, І. І. Хилько // Металеві конструкції. – 2000. - Т. 1, № 1 – С. 45-48.

6. Хилько І.І. Дослідження міцності металевих конструкцій в області обмежених пластичних деформацій з врахуванням умов першого та другого граничних станів / І. І. Хилько// Сборник научных трудов SWorld. – Иваново : МАРКОВА АД, 2014. – Вып. 1. Том 19. – С. 95-100.

7. Хилько И.И. Расчет прочности бистальных стержнем изгибаемых стержневих конструкций методом возобновления ограниченных пластических деформащй / И. И. Хилько // Мир науки и инноваций. – Иваново : Научный мир, 2015. – Вып. 2 (2). Том 8. – С. 93-97.