УДК 533.6.013.42

Ю. Н. Кононов[1], д-р физ.- мат. наук, А. А. Лимарь[2]

О КОЛЕБАНИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ИДЕАЛЬНЫЕ ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ С ОДНИМ УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ

Выведено частотное уравнение собственных колебаний упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним жестким, а другим упругим основаниями в виде прямоугольной пластины. Рассмотрены произвольные случаи закрепления контуров пластин и различные случаи вырождения пластин в мембраны, в абсолютно жесткие, отсутствие одной из пластин, отсутствие верхней или нижней жидкости. Исследован случай отсутствия верхнего упругого основания (случай наличия свободной поверхности). Показано, что при глубине заполнения верхней жидкости больше ширины канала, влиянием свободной поверхности на частотный спектр можно пренебрегать. Для этого случая получено условие устойчивости колебаний пластины и жидкости, которое совпало со случаем жесткого верхнего основания.

Ключевые слова: *гидроупругость, прямоугольная пластина, плоские колебания, идеальная несжимаемая жидкость.*

Введение. Задача о колебании прямоугольной пластины, разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, с учетом свободной поверхности у верхней жидкости, по-видимому, впервые была исследована в [1] на основании единого лагранжевого подхода. В [2] эта задача была рассмотрена на основании зйлерова подхода. Наиболее полное исследование свободных колебаний мембраны на свободной поверхности жидкости в прямоугольном канале было проведено в [11]. В [3] эта задача была обобщена на случай двухслойной жидкости с мембранами на свободной и внутренней поверхностях, а в [4] – на случай упругого дна. Колебания мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жестким основаниями, были подробно исследованы в [5], а колебания пластины – в [6, 7]. В [8] рассматривалось влияния свободной поверхности на частотный спектр. В [9] исследованы осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости в круговом цилиндрическом резервуаре с упругим разделителем между слоями, при наличии сил поверхностного натяжения, были рассмотрены в [10].

В данной статье обобщены результаты [6] на случай одного упругого основания в виде прямоугольной пластины. Выведено частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих пластин и жидкости, рассмотрены произвольные случаи закрепления контуров пластин и различные случаи вырождения пластин в мембраны, в абсолютно жесткие, их отсутствие, отсутствие верхней или нижней жидкости, случай невесомости. Подробно рассмотрен случай отсутствия верхнего упругого основания (случай наличия свободной поверхности или случай частичного заполнения верхней жидкости). Для защемленных контуров пластины показана возможность упрощения частотного уравнения и выведены условия устойчивости колебаний пластины и жидкости.

Постановка задачи. Рассмотрим плоские колебания упругой прямоугольной пластины, горизонтально разделяющей идеальные несжимаемые жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале шириной $2a$ с одним упругим основанием в виде прямоугольной пластины. Для определенности будем считать, что это – верхнее основание. Случай упругого нижнего основания будет рассмотрен в конце статьи. Пластины будем считать изотропными с изгибной жесткостью D_i и растягивающими усилиями T_i в срединной поверхности ($i=1,2$). Индекс $i=1$ будет соответствовать верхней пластине, а $i=2$ – внутренней. Контуры пластин могут иметь произвольное закрепление, например, быть защемлены, оперты или свободны. Верхняя жидкость плотности ρ_1 заполняет сосуд до глубин h_1, а нижняя жидкость плотности ρ_2 – до глубины h_2.

Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы плоскость Oxy находилась на невозмущённой срединной поверхности внутренней пластины, ось Oy была направлена вдоль канала, а ось Oz – противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$. Колебания пластин и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластин и жидкости безотрывными, а движения жидкостей потенциальными.

Уравнения плоских колебаний упругих пластин и жидкости имеют вид [5 – 7]:

$$k_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2}+D_i\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4}-T_i\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2}=P_i-P_{i-1} \quad \text{при} \quad z=z_i \;\; (i=1,2); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial z^2}=0, \; (i=1,2); \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial W_1}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=h_1, \quad \frac{\partial W_2}{\partial t}=\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}=\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad \text{при} \quad z=0; \tag{3}$$

$$\left(\mathfrak{L}_{ijp}[W_i]\right)\Big|_{\gamma_j} = 0 \;\; (i, j, p = 1, 2)\,; \qquad (4)$$

$$\int_{-a}^{a} W_i dx = 0\,; \qquad (5)$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right|_{x=\pm a} = 0 \quad (\, i = 1, 2\,); \qquad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \;\; z = -h_2\,. \qquad (7)$$

Здесь $k_{0i} = \rho_{0i} \cdot \delta_{0i}$; $W_i(x,t)$, ρ_{0i} , δ_{0i} – соответственно нормальный прогиб, плотность и толщина i -ой пластины; $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ – потенциал скоростей i -ой жидкости ($i = 1, 2$); $P_i(x,z,t)$ – гидродинамическое давление в i -ой жидкости, а $P_0(x,t)$ – давление над верхним упругим основанием; $z_i = \begin{cases} h_1 \text{ при } i = 1, \\ 0 \;\text{ при } i = 2. \end{cases}$; $\mathfrak{L}_{j1}$ и $\mathfrak{L}_{j2}$ – дифференциальные операторы граничных условий закрепления пластинки по контуру γ_j ($j = 1, 2$). Здесь для удобства записи введено обозначение контуров через γ_j (индекс $j = 1$ соответствует контуру $x = -a$, а $j = 1$ – $x = a$). Так, например, для случая жесткого защемления пластины оператор $\mathfrak{L}_{j1}$ будет единичным, а

$$\mathfrak{L}_{j2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, x}\,.$$

Давление $P_i(x,z,t)$ находится из интеграла Коши – Лагранжа

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + gz + \frac{P_i}{\rho_i} = Q_i\,,$$

где Q_i – произвольная функция времени. Не ограничивая общности эту функцию можно положить равной нулю.

С учетом интеграла Коши – Лагранжа уравнение (1) можно записать следующим образом

$$k_{0i}\frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} + D_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} - T_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + g\Delta\rho_i W_i =$$

$$= \rho_{i-1}\frac{\partial \Phi_{i-1}}{\partial t} - \rho_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad \text{при} \quad z = z_i \quad (\, i = 1, 2\,). \qquad (8)$$

Здесь $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1} \quad \left(\rho_0 = 0\right)$.

Метод решения. Представим функцию $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям $\psi_n\left(x\right)$

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{in}\left(t\right)\mathrm{e}^{k_n z} + B_{in}\left(t\right)\mathrm{e}^{-k_n z}\right]\psi_n\left(x\right) \quad (i=1,2\ ), \tag{9}$$

где функции

$$\psi_n\left(x\right) = \cos k_n\left(x+a\right) \tag{10}$$

и соответствующие им собственные числа $k_n = \pi n/\left(2a\right)$ описывают колебания идеальной жидкости в прямоугольном канале.

Представление функции $\Phi_i\left(x,z,t\right)$ в виде (9) с учетом (10) позволяет удовлетворить уравнению (2) и граничным условиям (6).

Подставив ряды (9) в (3) и (7) и, воспользовавшись ортогональностью функций $\psi_n\left(x\right)$, получим линейную систему уравнений относительно неизвестных A_{in}, B_{in} и $\dot{W}_n$

$$\begin{aligned} &A_{1n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{1n}} - B_{1n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}} = \frac{1}{k_n}\dot{W}_{1n}, && A_{1n} - B_{1n} = \frac{1}{k_n}\dot{W}_{2n}, \\ &A_{1n} - B_{1n} = A_{2n} - B_{2n}, && A_{2n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{2n}} - B_{2n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{2n}} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Разрешим систему (11) относительно A_{in}, B_{in}

$$A_{1n} = \frac{\dot{W}_{1n} - \dot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}}, \qquad B_{1n} = \frac{\dot{W}_{1n} - \dot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{1n}}}{2k_n \sinh\kappa_{1n}}\ ;$$

$$A_{2n} = \frac{\dot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}}, \qquad B_{2n} = \frac{\dot{W}_{2n}\,\mathrm{e}^{-\kappa_{2n}}}{2k_n \sinh\kappa_{2n}}\ .$$

Здесь

$$W_{in} = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} W_i \psi_n dx\ , \quad \kappa_{in} = h_i k_n\,. \tag{12}$$

С учетом соотношений (9) и (12) уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned} &k_{01}\frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} + D_1\frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} - T_1\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + g\rho_1 W_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\ddot{W}_{2n} - a_{1n}\ddot{W}_{1n}}{k_n}\psi_n, \\ &k_{02}\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + D_2\frac{\partial^4 W_2}{\partial x^4} - T_2\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + g\Delta\rho W_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\ddot{W}_{1n} - a_{2n}\ddot{W}_{2n}}{k_n}\psi_n, \end{aligned} \tag{13}$$

где $b_n = \dfrac{\rho_1}{\sinh \kappa_{1n}}$, $a_{1n} = \rho_1 \coth \kappa_{1n}$, $a_{2n} = a_n = \rho_1 \coth \kappa_{1n} + \rho_2 \coth \kappa_{2n}$, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$.

Таким образом, совместные колебания упругих пластин и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (12), (13), граничных условий (4), условий несжимаемости жидкости (5) и заданных начальных условий.

Собственные совместные колебания упругих пластин и жидкости. Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругих пластин и жидкости положим

$$W_i(x,t) = w_i(x)\mathrm{e}^{i\omega t} \quad (i = 1,2). \tag{14}$$

В равенстве (14) следует различать нижний индекс $i = 1,2$ от мнимой единицы i в показателе степени экспоненты.

Подставив (14) в (13), (12), граничные условия (4) и в условия несжимаемости жидкости (5), получим

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} - p_i \frac{d^2 w_i}{dx^2} + q_i w_i = \frac{\omega^2}{D_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{in} w_{in} - b_n w_{3-i,n}}{k_n} \psi_n \quad (i = 1,2); \tag{15}$$

$$w_{in} = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} w_i \psi_n dx; \tag{16}$$

$$\left(\mathfrak{L}_{ijp}[w_i]\right)\Big|_{\gamma_j} = 0 \quad (i, j, p = 1,2); \tag{17}$$

$$\int_{-a}^{a} w_i dx = 0. \tag{18}$$

Здесь $p_i = \dfrac{T_i}{D_i}$, $q_i = \dfrac{g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2}{D_i}$. Случай $D_i = 0$ будет рассмотрен ниже.

Общее решение уравнения (15) будем искать в виде линейной комбинации четырех решений w_{ik}^0 ($k = \overline{1,4}$) соответствующего однородного уравнения

$$\frac{d^4 w_{ik}^0}{dx^4} - p_i \frac{d^2 w_{ik}^0}{dx^2} + q_i w_{ik}^0 = 0 \tag{19}$$

и частного решения неоднородного уравнения в виде ряда по собственным формам колебаний идеальной жидкости

$$w_i = \sum_{k=1}^{4} A_{ik}^0 w_{ik}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_{in} \psi_n \ . \tag{20}$$

Здесь A_{ik}^0 и $\tilde{C}_{in}$ – неизвестные константы.

Подставив (20) в уравнение (15) и воспользовавшись из (10) соотношениями $\frac{d^2\psi_n}{dx^2} = -k_n^2 \psi_n$ и $\frac{d^4\psi_n}{dy^4} = k_n^4 \psi_n$, найдем $\tilde{C}_{in}$:

$$\tilde{C}_{in} = \omega^2 \frac{a_{in} w_{in} - b_n w_{3-i,n}}{k_n d_{in}} , \tag{21}$$

где $d_{in} = \left(D_i k_n^2 + T_i \right) k_n^2 + g \Delta \rho_i - k_{0i} \omega^2$.

Подставив (20) в (16) и, принимая во внимание (21), получим систему уравнений для определения w_{1n} и w_{2n}

$$w_{1n} = \sum_{k=1}^{4} A_{1k}^0 E_{ikn}^0 + \frac{\omega^2}{k_n d_{1n}} \left(a_{1n} w_{1n} - b_n w_{2n} \right);$$

$$w_{2n} = \sum_{k=1}^{4} A_{2k}^0 E_{ikn}^0 + \frac{\omega^2}{k_n d_{2n}} \left(a_{2n} w_{2n} + b_n w_{1n} \right) ,$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} w_{1n} &= \frac{1}{\tilde{\Delta}_n} \left[\left(1 - \omega^2 \frac{a_{2n}}{k_n d_{2n}} \right) \sum_{k=1}^{4} A_{1k}^0 E_{1kn}^0 - \omega^2 \frac{b_n}{k_n d_{1n}} \sum_{k=1}^{4} A_{2k}^0 E_{2kn}^0 \right]; \\ w_{2n} &= \frac{1}{\tilde{\Delta}_n} \left[-\omega^2 \frac{b_n}{k_n d_{2n}} \sum_{k=1}^{4} A_{1k}^0 E_{1kn}^0 + \left(1 - \omega^2 \frac{a_{1n}}{k_n d_{1n}} \right) \sum_{k=1}^{4} A_{2k}^0 E_{2kn}^0 \right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $\tilde{\Delta}_n = \left(1 - \omega^2 \frac{a_{1n}}{k_n d_{1n}} \right) \left(1 - \omega^2 \frac{a_{2n}}{k_n d_{2n}} \right) - \omega^4 \frac{b_n^2}{k_n^2 d_{1n} d_{2n}}$;

$$E_{ikn}^0 = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} w_{ik}^0 \psi_n dx \qquad (k = \overline{1,4}). \tag{23}$$

Окончательное выражение для формы прогиба пластин w_i (формула (20)), с учетом (21) и (22), примет вид

$$w_1 = \sum_{k=1}^{4}\left[\left(w_{1k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^0 \psi_n\right) A_{1k}^0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^0 \psi_n\right) A_{2k}^0\right];$$

(24)

$$w_2 = \sum_{k=1}^{4}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^0 \psi_n\right) A_{1k}^0 + \left(w_{2k}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^0 \psi_n\right) A_{2k}^0\right],$$

где

$$a_{11n} = \frac{\tilde{T}_{2n} a_{1n} + b_n^2}{\Delta_n}; \quad a_{12n} = -\frac{T_{2n} b_n}{\Delta_n}; \quad a_{21n} = -\frac{T_{1n} b_n}{\Delta_n}; \quad a_{22n} = \frac{\tilde{T}_{1n} a_{2n} + b_n^2}{\Delta_n};$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in}; \quad T_{in} = \frac{k_n d_{in}}{\omega^2}; \quad \Delta_n = \tilde{T}_{1n} \tilde{T}_{2n} - b_n^2 .$$

Выражения (24) можно записать более компактно

$$w_i = \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}\left(w_{ik}^0 \delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln} E_{lkn}^0 \psi_n\right) A_{lk}^0 , \tag{25}$$

где δ_{il} – символ Кронекера.

При вырождении i -ой пластинки в мембрану в формуле (25) следует считать $k = 1,2$ и положить $D_i = 0$. В формулу (25) входят восемь неизвестных констант A_{ik}^0. Из граничных условий закрепления пластин (17) имеем восемь линейных уравнения

$$\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}\left(\mathfrak{L}_{ijpk}^0 \delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln} E_{lkn}^0 \mathfrak{L}_{ijpn}\right) A_{lk}^0 = 0 \ (i, j, p = 1,2) . \tag{26}$$

Здесь

$$\mathfrak{L}_{ijpk}^0 = \left(\mathfrak{L}_{ijp}\left[w_{ik}^0 \right]\right)\Big|_{\gamma_j}; \ \mathfrak{L}_{ijpn} = \left(\mathfrak{L}_{ijp}\left[\psi_n\right]\right)\Big|_{\gamma_j} . \tag{27}$$

Из равенства нулю определителя однородной системы (26) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругих пластин и жидкости

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{8} \right| = 0 , \tag{28}$$

где

$$C_{i+j-1,k} = \mathfrak{L}^0_{ij1k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij1n}, C_{i+j-1,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij1n} \;;$$

$$C_{i+j,k} = \mathfrak{L}^0_{ij2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij2n}, C_{i+j,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij2n}$$

$$(i, j = 1,\ k = \overline{1,4}) \;;$$

$$C_{i+j,k} = \mathfrak{L}^0_{ij1k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij1n}, C_{i+j,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij1n} \;;$$

$$C_{i+j+1,k} = \mathfrak{L}^0_{ij2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij2n}, C_{i+j+1,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij2n}$$

$$(i=1,\ j = 2,\ k = \overline{1,4}) \;;$$

$$C_{i+j+2,k} = \mathfrak{L}^0_{ij1k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij1n}, C_{i+j+2,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij1n} \;; \qquad (29)$$

$$C_{i+j+3,k} = \mathfrak{L}^0_{ij2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij2n}, C_{i+j+3,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij2n}$$

$$(i=2,\ j = 1,\ k = \overline{1,4}) \;;$$

$$C_{i+j+3,k} = \mathfrak{L}^0_{ij1k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij1n}, C_{i+j+3,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij1n} \;;$$

$$C_{i+j+4,k} = \mathfrak{L}^0_{ij2k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{i1n} E^0_{1kn} \mathfrak{L}_{ij2n}, C_{i+j+4,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i2n} E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{ij2n}$$

$$(i, j = 2,\ k = \overline{1,4}) \,.$$

Таким образом, рассматриваемая задача, при выполнении условий устойчивости совместных колебаний пластин и жидкости, обладает дискретным спектром собственных значений ω_l^2, являющихся корнями характеристического уравнения (28), а соответствующие им собственные функции w_{il} находятся из линейной системы (26) и соотношений (25) и образуют полную и ортогональную систему функций на отрезке $[-a, a]$.

Вид операторов $\mathfrak{L}_{ijp}$ и значения функций $\mathfrak{L}_{ijpn}$ для защемленного, опертого и свободного края приведены в [7].

В дальнейшем нас будет интересовать случай защемленных контуров, т.к. на практике он наиболее часто используется. Коэффициенты определителя частотного уравнения (28) в этом случае примут вид:

$$C_{1k} = B_{11k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^{0}; \; C_{1,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^{0}; \; C_{2k} = C_{11k}^{0}; \; C_{2,k+4} = 0;$$

$$C_{3k} = B_{12k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{11n} E_{1kn}^{0} \left(-1\right)^{n}; \; C_{3,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^{0} \left(-1\right)^{n}; \; C_{4k} = C_{12k}^{0};$$

$$C_{5k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^{0}; \; C_{5,k+4} = B_{21k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^{0}; \; C_{6k} = 0; \; C_{6,k+4} = C_{21k}^{0};$$

(30)

$$C_{7k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^{0} \left(-1\right)^{n}; \; C_{7,k+4} = B_{22k} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{22n} E_{2kn}^{0} \left(-1\right)^{n}; C_{8k} = 0; \; C_{8,k+4} = C_{22k}^{0}.$$

Здесь $B_{ijk} = w_{ik}^{0}\Big|_{\gamma_j}$; $C_{ijk}^{0} = \dfrac{\mathrm{d}\, w_{ik}^{0}}{\mathrm{d}\, x}\Bigg|_{\gamma_j}$.

Для упрощения частотного уравнения (28), в случае защемленных контуров, разложим функции w_{ik}^{0} в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций ψ_n, воспользуемся условием $\int_{-a}^{a} \psi_n dx = 0$ и обозначением (23). В этом случае коэффициенты (30) запишутся так:

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E_{1kn}^{0}; \; C_{1,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^{0}; \; C_{2k} = C_{11k}^{0}; \; C_{2,k+4} = 0;$$

$$C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{11n} E_{1kn}^{0} \left(-1\right)^{n}; \; C_{3,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{12n} E_{2kn}^{0} \left(-1\right)^{n}; \; C_{4k} = C_{12k}^{0}; \; C_{2,k+4} = 0; \qquad (31)$$

$$C_{7k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{21n} E_{1kn}^{0} \left(-1\right)^{n} \;\; C_{7,k+4} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{22n} E_{2kn}^{0} \left(-1\right)^{n}; \; C_{8k} = 0; \; C_{8,k+4} = C_{22k}^{0}.$$

Здесь $\tilde{a}_{11n} = 1 + a_{11n} = \dfrac{\tilde{T}_{2n} T_{1n}}{\Delta_n}$; $\tilde{a}_{22n} = 1 + a_{22n} = \dfrac{\tilde{T}_{1n} T_{2n}}{\Delta_n}$.

Если упругим является нижнее основание, то во всех формулах, содержащих g, полагаем $g := -g$ и отсчет введем снизу вверх, т.е. верхнее основание и верхняя жидкость окажутся внизу, а нижнее основание и нижняя жидкость – вверху. Можно сохранить и прежние обозначения, если в параметрах, относящихся к жидкостям, поменять местами индексы, тогда все полученные уравнения и соотношения остаются в силе. Однако, задача для «опрокинутого» канала ($g := -g$) имеет ряд физических особенностей. Для того чтобы не было разрыва сплошности (образования кавитации), давление внутри жидкости должно быть неотрицательно. Для этого внешнее давление на нижнее упругое основание P_0 должно быть больше или равно величины $P_0 \geq g(h_1 + h_2 + k_{01} + k_{02})$. Это неравенство не учитывает величины предварительного натяжения ($T_i = 0$) и изгибной жесткости пластин ($D_i = 0$). Естественно, что за счет увеличения этих величин всегда можно добиться положительности давления внутри жидкости.

Выведенное частотное уравнение (28) является довольно общим и включает в себя ряд частных случаев исходной задачи, а именно: вырождение пластин в мембраны, их отсутствие, отсутствие нижней или верхней жидкости, случай невесомости и др. Как уже было ранее отмечено, в случае вырождения i -ой пластины в мембрану в коэффициентах (29) нужно положить нулю изгибную жесткость $D_i = 0$ и считать $k = 1,2$. В этом случае размерность определителя уравнения (28) будет 6×6, а при вырождении сразу двух пластин в мембраны $- 4 \times 4$. Случай, когда мембрана разделяет жидкости разной плотности в жестком прямоугольном канале, был детально исследован в [5]. Положив плотность нижней жидкости равной нулю ($\rho_2 = 0$) в уравнении (28), получим новую задачу о колебании жидкости в прямоугольном канале с упругими основаниями, а положив плотность верхней жидкости равной нулю ($\rho_2 = 0$) – получим известную задачу, исследованную в [11]. Если упругое верхнее основание становится абсолютно жестким, то в формуле (25) полагаем $A_{1k}^0 \equiv 0$ ($w_1 \equiv 0$) и, переходя к пределу в коэффициенте a_{22n} при $T_1 \to \infty$, получим $a_{22n} = -\omega^2 a_n \Big/ \left(a_n \omega^2 - k_n d_{2n} \right)$. С учетом последнего выражения прогиб w_2 совпадает с прогибом [6]. Случай невесомости следует из уравнения (28), если в коэффициентах (29) считать $g = 0$.

Более подробно рассмотрим случай отсутствия верхнего основания (наличие свободной поверхности у верхней жидкости, или случай неполного заполнения). В этом случае нужно исключить в уравнении (28) условия закрепления верхней пластины, т.е. вычеркнуть из определителя этого уравнения первые четыре строки и первые четыре столбца и положить в коэффициентах (29) $k_{01} = 0,\ T_1 = 0,\ D_1 = 0$. Частотное уравнение (28) примет вид

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|_{q,k=1}^{4} \right| = 0, \tag{32}$$

где

$$C_{pk} = \mathfrak{L}^0_{2jpk} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{2jpn} \quad (j=1,\ p=1,2;\ k=\overline{1,4});$$

$$C_{p+2,k} = \mathfrak{L}^0_{2jpk} - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* E^0_{2kn} \mathfrak{L}_{2jpn} \quad (j=2,\ p=1,2;\ k=\overline{1,4});$$

$$\alpha_n^* = a_{22n} = \frac{a_n^*}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n}; \quad a_n^* = a_n - b_n^*; \quad b_n^* = \frac{2\omega^2 \rho_1}{\left(\omega^2 - \sigma_n^2\right)\sinh 2\kappa_{1n}};$$

$d_n = d_{2n} = \left(D_2 k_n^2 + T_2\right) k_n^2 + g\Delta\rho - k_{02}\omega^2;$, $\sigma_n^2 = g k_n \tanh \kappa_{1n}$ – квадрат частоты колебаний свободной поверхности верхней жидкости в случае жесткого дна, т.е. абсолютно жесткой внутренней пластины.

Проведем исследование уравнения (32) для защемленных контуров. С учетом (31) это уравнение запишется так

$$\left| \left\| C_{qk} \right\|^4_{q,k=1} \right| = 0\,. \tag{33}$$

Здесь

$$C_{1k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^* E^0_{2kn},\ \ C_{2k} = C^0_{21k},\ C_{3k} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^* E^0_{2kn} \left(-1\right)^n,\ \ C_{2k} = C^0_{22k} \quad (k=\overline{1,4});$$

$$\beta_n^* = \frac{k_n d_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n}\,. \tag{34}$$

Уравнения (32) и (33) при $a_n^* = a_n$ ($b_n^* = 0$) совпадают с соответствующими уравнениями [6], в которых верхнее основание было жестким. Следовательно, собственные совместные частоты колебания упругой пластины и жидкости в прямоугольном канале с жесткими основаниями, т.е. с «крышкой» на свободной поверхности, следуют из уравнений (32) и (33), если положить $b_n^* = 0$. Это имеет физическое объяснение, т.к. с увеличением глубины заполнения верхней жидкости этот коэффициент стремится к нулю как $\mathrm{e}^{-2\kappa_{1n}}$. Таким образом, при $h_1/(2a) > 1$ влиянием свободной поверхности на частотный спектр можно пренебрегать.

Уравнение (33) по форме совпадает с соответствующим уравнением [6]. Поэтому (33) можно упростить, проведя вычисления и преобразования коэффициентов его определителя, аналогичные [6], и показать, что для защемленных контуров частотное уравнение (33) упрощается и распадается на два уравнения, описывающих несимметричные ($n = 2m-1$) и симметричные ($n = 2m$) частоты. Это уравнение может быть записано в единой форме для этих частот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 a_n^* - k_n d_n} = 0 . \qquad (35)$$

Устойчивость положения равновесия упругой пластины, разделяющей жидкости разной плотности со свободной поверхностью. Запишем уравнение (35) с учетом двух членов ряда

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 , \qquad (36)$$

где

$$x = \omega^2 > 0 ;\ a_0 = k_1 \tilde{a}_2 + k_2 \tilde{a}_1 > 0 ;$$

$$a_1 = \left[\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \right) a_0 + k_{1s} + k_{2s} + k_1 k_2 \left(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \right) \right];$$

$$a_2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 a_0 + \sigma_1^2 k_{1s} + \sigma_2^2 k_{2s} + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \right) k_1 k_2 \left(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \right) ; \qquad (37)$$

$$a_3 = -\sigma_1^2 \sigma_2^2 k_1 k_2 \left(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \right);\ \ k_{1s} = \frac{k_1}{\sinh \kappa_{12}} ;\ \ k_{2s} = \frac{k_2}{\sinh \kappa_{11}} ;$$

$$d_n = \tilde{d}_n - k_{02}\omega^2;\ \tilde{d}_n = \left(D_2 k_n^2 + T_2 \right) k_n^2 + g\Delta\rho.$$

Согласно правилу Декарта о числе положительных корней алгебраического уравнения, все корни уравнения (36) будут положительными, если

$$a_1 < 0,\ \ a_2 > 0,\ \ a_3 < 0 . \qquad (38)$$

Из вида коэффициентов (37) следует, что для выполнения неравенств (38) достаточно потребовать, чтобы $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \geq 0,$ или

$$\left(k_1^4 + k_2^4 \right) D_2 + \left(k_1^2 + k_2^2 \right) T_2 + 2g\Delta\rho \geq 0 . \qquad (39)$$

Неравенство (39), полученное при наличии свободной поверхности у верхней жидкости, полностью совпадает с соответствующим неравенством, полученным в [6] при наличии «крышки» на свободной поверхности.

Для нечетных и четных форм колебаний оно запишется так:

$$41\pi^2 \frac{D_2}{a^2} + 20T_2 > \frac{4g\left(\rho_1 - \rho_2\right)a^2}{\pi^2} \quad (\, n = 1,3\,); \qquad (40)$$

$$17\pi^2 \frac{D_2}{a^2} + 5T_2 > \frac{g\left(\rho_1 - \rho_2\right)a^2}{2\pi^2} \quad (\, n = 2,4\,). \qquad (41)$$

Условия устойчивости (40), (41) не зависят от глубин заполнения жидкостей и массы пластины. Из этих условий видно, что для устойчивости несимметричных колебаний нужны значительно большая изгибная жесткость и величина предварительного натяжения, чем для симметричных. Неравенства (40), (41) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов n-ой степеней, что значительно усложнит аналитические исследования. Из условий (40) и (41) следует, что с учетом принятой точности при естественной стратификации ($\rho_1 \le \rho_2$) частотное уравнение всегда имеет положительные корни и плоская форма равновесия упругой пластины устойчива. Неустойчивость может иметь место только при нарушении естественной стратификации, т.е. при условии $\rho_1 > \rho_2$.

Выводы. В линейной постановке получено и исследовано частотное уравнение собственных колебаний упругой пластины, горизонтально разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с одним жестким, а другим упругим основаниями в виде прямоугольной пластины. Рассмотрены произвольные случаи закрепления контуров пластин и различные случаи вырождения пластин в мембраны, в абсолютно жесткие, их отсутствие, отсутствие верхней или нижней жидкости, случай невесомости. Подробно исследован случай отсутствия верхнего упругого основания (случай наличия свободной поверхности). Показано, что в этом случае, при глубине заполнения верхней жидкости больше ширины канала, влиянием свободной поверхности на частотный спектр можно пренебрегать, а также показано, что для защемленных контуров пластины частотное уравнение можно привести к единой форме, как для симметричных, так и несимметричных совместных колебаний внутренней пластины и жидкости. Для этого случая получено условие устойчивости колебаний пластины и жидкости, которое совпало со случаем жесткого верхнего основания.

Представляет интерес рассмотреть возможность упрощения общего частотного уравнения для случаев защемленного, опертого и свободных контуров и получить для них условия устойчивости.

Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. ***Ильгамов М. А.*** Об устойчивости упругой пластины между жидкостями разной плотности / М. А. Ильгамов, Ж. М. Сахабутдинов // Изб. проблемы прикл. Механики:. сб. статей к шестидесятилетию акад. Н. Челомея − М.: Машиностроение, 1974. – С. 341–346.

2. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания двухслойной жидкости, разделенной упругой пластинкой в прямоугольном канале / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Теор. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 170–176.

3. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания двухслойной жидкости с упругими мембранами на «свободной» и внутренней поверхностях / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Акустичний вісник. - 2003. – Т. 6, №4 . – С. 44–52.

4. ***Кононов Ю. Н.*** Свободные колебания упругих мембран и двухслойной жидкости в прямоугольном канале с упругим дном / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Прикл. гідромеханіка. – 2008. – №1 . – С. 33–38.

5. ***Кононов Ю. Н.*** Колебания прямоугольной мембраны, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А.: Природничі науки.– 2015. – №1–2. – С. 97–108.

6. ***Кононов Ю. Н.*** Об устойчивости колебания прямоугольной пластины, разделяющей идеальные жидкости разной плотности в прямоугольном канале с жесткими основаниями / Ю. Н. Кононов, А. А. Лимарь // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: сб. наук. праць. – Д.: Ліра. – 2016. – Т. 25. – С. 69–84.

7. ***Кононов Ю. М.*** Стійкість коливань пластини, яка розділяє ідеальні рідини різною густини у прямокутному каналі [Електронний ресурс] / Ю. М. Кононов, О. О. Лимар // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2016» – Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf.

8. ***Kononov Yu. M***. Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel / Yu. M. Kononov, A. Lymar // Book of Abstracts 5th Iinternational Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, Kyiv, Ukraine. – Vinnytsa, 2016. – P. 79–80.

9. ***Кононов Ю. Н.*** Осесимметричные колебания упругих оснований и идеальной жидкости в жестком кольцевом цилиндрическом резервуаре / Ю.Н. Кононов, Ю.А. Джуха // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2016. – № 1. – С. 103–115.

10. ***Пожалостин А. А.*** Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Електронний ресурс] / *А. А. Пожалостин*, *Д. А. Гончаров* // Наука и инновации: инженерный журнал. – Электронные данные. – [Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013]. – № 12. – Режим доступа: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html.

11. ***Троценко В. А.*** Свободные колебания жидкости в прямоугольном канале с упругой мембраной на свободной поверхности / В. А. Троценко // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 8 – С.74–80.

УДК 533.6.013.42

Ю. М. Кононов, д-р фіз.-мат. наук, О. О. Лимар

ПРО КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ЯКА ПОДІЛЯЄ ІДЕАЛЬНІ РІДИНИ РІЗНОЇ ЩІЛЬНОСТІ В ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ З ОДНІЄЮ ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ

Виведено частотне рівняння власних коливань пружної пластини, яка горизонтально розділяє ідеальні рідини різної щільності в прямокутному каналі з однією жорсткою, а другою пружною основами у вигляді прямокутної пластини. Розглянуто довільні випадки закріплення контурів пластин і різні випадки виродження пластин в мембрани, в абсолютно жорсткі, їх відсутність, відсутність верхньої або нижньої рідини, випадок невагомості. Досліджено випадок відсутності верхньої пружної основи (випадок наявності вільної поверхні). Показано, що при глибині заповнення верхньої рідини більше ширини каналу, впливом вільної поверхні на частотний спектр можна нехтувати, а також показано, що для затиснених контурів пластини частотне рівняння можна привести до єдиної формі, як для симетричних, так і несиметричних спільних коливань пластини і рідини. Отримано умову стійкості коливань пластини і рідини.

Ключові слова: *гідропружність, прямокутна пластина, плоскі коливання, ідеальна нестислива рідина.*

UDC 533.6.013.42

Yu. N. Kononov, Dr Sci. (Phys.-Math.), A. A. Lymar

ON THE OSCILLATIONS OF RECTANGULAR PLATE THAT SEPARATES THE IDEAL LIQUID OF DIFFERENT DENSITY IN RECTANGULAR CHANNEL WITH ONE ELASTIC BASE

The equation of frequency of natural oscillations of elastic plates, horizontally dividing ideal liquid of varying density in a rectangular channel with one rigid and the other elastic base is obtained. Elastic base represented as a rectangular plate. The arbitrary contours when attached plates and various cases of degeneration of the plates in the membrane in an absolutely rigid, their absence, the absence of the top or bottom of the liquid, in case of weightlessness are cosidered. We studied in detail the case of absence of the upper elastic base (the presence of the free surface case). It is shown that in this case, the depth of fill upper liquid channel width of the free surface effects on the frequency spectrum can be ignored, as well as clamped contours plates frequency equation can be reduced to a single form for both symmetric and asymmetric joint oscillations of the inner plate and the liquid. For this case, we obtained the stability condition of the plate and fluid vibrations, which coincided with the case of a hard upper base.

Keywords: *hydroelasticity, rectangular plate, flat oscillations, ideal incompressible fluid.*

In the linear formulation the oscillations of elastic flat rectangular plate horizontally dividing ideal incompressible fluid density in different rigid rectangular channel with an upper elastic base in the form of a rectangular plate have been investigated.

Free joint oscillations of elastic plates and a two-layer fluid can be found from the following boundary value problem:

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} - p_i \frac{d^2 w_i}{dx^2} + q w_i = \frac{\omega^2}{D_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{in} w_{in} - b_n w_{3-i,n}}{k_n} \psi_n , \tag{1}$$

$$\left(\mathfrak{L}_{ijp}[w_i] \right)\Big|_{\gamma_j} = 0 \quad (i, j, p = 1,2) . \tag{2}$$

Here $p_i = \dfrac{T_i}{D_i} \geq 0$, $q_i = \dfrac{k_{0i}\omega^2 - g\Delta\rho_i}{D_i}$, $b_n = \dfrac{\rho_1}{\sinh \kappa_{1n}}$, $k_n = \dfrac{\pi n}{2a}$, $w_{in} = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a} w_i \psi_n dx$,

$\kappa_{in} = h_i k_n$, $\psi_n(x) = \cos k_n(x+a)$, $a_{in} = \rho_{i-1} \coth \kappa_{i-1,n} + \rho_i \coth \kappa_{in}$, $\Delta\rho_i = \rho_i - \rho_{i-1}$, $(\rho_0 = 0)$, $2a$ – the channel width; h_i and ρ_i – respectively filling depth and density of the i-th liquid; $k_{0i} = \rho_{0i} \cdot \delta_{0i}$; $\rho_{0\mathrm{i}}$, δ_{0i} – respectively i-th density and thickness of the plate; $\mathfrak{L}_{ijp}$ – the differiential operators, describing the plate's loop boundary conditions. The case where $T_1 = \infty,\ D_2 = 0$ and $\mathfrak{L}_{ij1} \equiv 1$, $\mathfrak{L}_{ij2} = 0$ has been studied in [6].

The solution of equation (1) is the sum of the general solution of the homogeneous equation $\dfrac{d^4 w_{ik}^0}{dx^4} - p_i \dfrac{d^2 w_{ik}^0}{dx^2} + q_i w_{ik}^0 = 0$ and a particular solution of the inhomogeneous.

The flexture form of plates w_i will look like

$$w_i = \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}\left(w_{ik}^0 \delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln} E_{lkn}^0 \psi_n \right) A_{lk}^0 ,$$

where $\delta_{il}-$ is the Kronecker's symbol,

$$a_{11n} = \frac{\tilde{T}_{2n} a_{1n} + b_n^2}{\Delta_n},\ a_{12n} = -\frac{T_{2n} b_n}{\Delta_n},\ a_{21n} = -\frac{T_{1n} b_n}{\Delta_n},\ a_{22n} = \frac{\tilde{T}_{1n} a_{2n} + b_n^2}{\Delta_n};$$

$$\tilde{T}_{in} = T_{in} - a_{in},\ T_{in} = \frac{k_n d_{in}}{\omega^2},\ \Delta_n = \tilde{T}_{1n}\tilde{T}_{2n} - b_n^2,\ E_{ikn}^0 = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} w_{ik}^0 \psi_n dx ,$$

$$d_{in} = \left(D_i k_n^2 + T_i \right) k_n^2 + g\Delta\rho_i - k_{0i}\omega^2 .$$

From the boundary conditions fixing plates (2) we have eight linear equations

$$\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}\left(\mathfrak{L}_{ijpk}^0 \delta_{il} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{iln} E_{lkn}^0 \mathfrak{L}_{ijpn} \right) A_{lk}^0 = 0 \quad (i,j,p = 1,2) . \tag{3}$$

Here $\mathfrak{L}_{ijpk}^0 = \left(\mathfrak{L}_{ijp}\left[w_{ik}^0 \right] \right)\Big|_{\gamma_j}$, $\mathfrak{L}_{ijpn} = \left(\mathfrak{L}_{ijp}\left[\psi_n \right] \right)\Big|_{\gamma_j}$.

From equality to zero the determinant of the homogeneous system (3) frequency equation own joint oscillations of elastic plates and liquid is

$$\left| \left\| C_{qr} \right\|_{q,r=1}^{8} \right| = 0 . \tag{4}$$

It is shown that in case of absence ($k_{01} = 0, T_1 = 0, D_1 = 0$) the upper base (the case of partial filling channel) and for plate clamped around the contours ($\mathfrak{L}_{2j1} \equiv 1, \mathfrak{L}_{2j2} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\,x$) frequency equation (4) into odd ($n = 2m-1$) and even ($n = 2m$) frequencies and it can be written in a single form for these frequencies.

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n / \left(\omega^2 a_n^* - k_n d_n \right) = 0 . \tag{5}$$

Here $a_n^* = a_n - b_n^*$, $d_n = \tilde{d}_n - k_{02}\omega^2$, $\tilde{d}_n = \left(D_2 k_n^2 + T_2 \right) k_n^2 + g\Delta\rho$,

$\sigma_n^2 = g k_n \tanh \kappa_{1n}$, $b_n^* = 2\omega^2 \rho_1 / \left(\left(\omega^2 - \sigma_n^2 \right) \sinh 2\kappa_{1n} \right)$ – square of the frequency of the free surface of the upper liquid oscillations in case of a hard bottom, that is absolutely rigid inner plate.

Equation (5) when $b_n^* = 0$ coincides with the corresponding equation [6] in which the upper base is rigid. Therefore, their own joint frequency oscillations of elastic plates and liquid in a rectangular duct with a rigid base, i.e., with a «cap» on the free surface follow from equation (5), if we set $b_n^* = 0$. It has a physical explanation, as with increasing depth of the fluid filling the top this ratio tends to zero like $\mathrm{e}^{-2\kappa_{1n}}$. Thus, it can be neglected the influence of the free surface in the frequency spectrum when $h_1/(2a) > 1$.

To study the stability of elastic plates equilibrium position it is suffice to retain in (5) two members

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0\,, \tag{6}$$

where $x = \omega^2 > 0$; $a_0 = k_1 \tilde{a}_2 + k_2 \tilde{a}_1 > 0$;

$$a_1 = \left[\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) a_0 + k_{1s} + k_{2s} + k_1 k_2 \left(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2\right)\right];$$

$$a_2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 a_0 + \sigma_1^2 k_{1s} + \sigma_2^2 k_{2s} + \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right) k_1 k_2 \left(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2\right);$$

$$a_3 = -\sigma_1^2 \sigma_2^2 k_1 k_2 \left(\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2\right); \quad k_{1s} = k_1 / \left(\sinh \kappa_{12}\right); \quad k_{2s} = k_2 / \left(\sinh \kappa_{11}\right).$$

According to the rule of Descartes of the number of positive roots of an algebraic equation all the roots of equation (6) will be positive, if

$$a_1 < 0, \;\; a_2 > 0, \;\; a_3 < 0\,. \tag{7}$$

For the inequalities (7) it suffices to require that $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \ge 0$ or

$$\left(k_1^4 + k_2^4\right) D_2 + \left(k_1^2 + k_2^2\right) T_2 + 2g\Delta\rho \ge 0\,. \tag{8}$$

Inequality (8) obtained in the presence of a free liquid surface at the upper, is identical with the corresponding inequality obtained in [7] in the presence of «cover» on the free surface. For odd and even modes of vibration, it can be written as

$$41\pi^2 D_2 / a^2 + 20T_2 > 4g\left(\rho_1 - \rho_2\right) a^2 / \pi^2 \quad (n = 1,3); \tag{9}$$

$$17\pi^2 D_2 / a^2 + 5T_2 > g\left(\rho_1 - \rho_2\right) a^2 / \left(2\pi^2\right) \quad (n = 2,4). \tag{10}$$

The stability conditions (9) and (10) do not depend on the depth of filling liquid and the mass of the plate. From these conditions it can be seen, for example, that the stability of asymmetric membrane vibrations ($D_2 = 0$) need twice as membrane tension, than for symmetric. From these conditions it follows that, in view of highest accuracy, with the natural stratification

$\rho_1 \le \rho_2$ frequency equation always has a positive roots and flat shape of the elastic plate equilibrium is stable. The instability may occur only when a violation of the natural stratification, i.e., with condition $\rho_1 > \rho_2$.

REFERENCES

1. ***Il'gamov M. A.*** On the stability of elastic plates between liquids of different density / M. A. Il'gamov, J. M. Sahabutdinov // Selected Problems of Applied Mechanics. Collection of articles on his sixtieth Acad. Chelomei – Moskow : Mashinostroenie, 1974. – P. 341–346 (in Russian).
2. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of a two-layer fluid divided elastic plate in a rectangular channel / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Teoret. i prikladnaya mekhanika – 2002. – No 36. – P. 170–176 (in Russian).
3. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of a two-layer fluid with elastic membranes on the «free» and the inner surfaces / Yu.N. Kononov, C.A. Tatarenko // Akustichesky vestnik. – 2003 – Vol. 6, No 4. – P. 44–52 (in Russian).
4. ***Kononov Yu. N.*** Free oscillations of elastic membranes and two-layer liquid in a rectangular channel c elastic bottom / Yu. N. Kononov, C. A. Tatarenko // Prikladnaya gidromehanika – 2008. – No 1. – P. 33–38 (in Russian).
5. ***Kononov Yu. N.*** Oscillations of a rectangular membrane separating the ideal fluid of different density in a rectangular channel with rigid bases / Yu. N. Kononov, A. A. *Lymar* // Visnuk Donetskogo natsionalnogo universitetu. Ser. A.: Prirodnichi nauki.– 2015.– No 1–2. – P. 97–108 (in Russian).
6. ***Kononov Yu. N.*** On the stability of oscillations of a rectangular plate that separates the ideal liquid of different density in a rectangular channel with rigid bases / Yu. N. Kononov, A. A. *Lymar* // Problemu obchislyuvalnoi mehaniki i mitsnosti konstruktsiy. – 2016. –Vol. 25. – P. 69–84. (in Russian)
7. ***Kononov Yu. M.*** Stability oscillation plate that separates the ideal fluid varying density in a rectangular channel / Yu. M. Kononov, O. O. Lymar // Conference of Young Scientists Pidstryhachivski chitannia – 2016. – Access mode: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Lymar.pdf (in Ukraine).
8. ***Kononov Yu.*** **M**. Stability of elastic plate, dividing the two-layer ideal liquid in the rectangular channel / Yu. M. Kononov, A. Lymar // Book of Abstracts 5th Iinternational Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, Kyiv, Ukraine. – Vinnytsa, 2016. – P. 79-80.
9. ***Kononov Yu. N.*** Axisymmetric oscillations of elastic bases and an ideal fluid in a rigid circular cylindrical tank / Yu. N. Kononov, Yu. A. Dzhukha // Visnuk Zaporizkogo natsionalnogo universiteta. Ser.: Phiz. –math. nauk. – 2016. – No 1. – P. 103–115 (in Russian).
10. ***Pozhalostin A .A.*** Free axisymmetrical oscillations of a two-layer fluid with an elastic separator between the layers in the presence of surface tension forces / A. A. Pozhalostin, D. Goncharov // Science and Innovation: Engineering magazine. – Electronic data. – [Moscow: MSTU. N.E. Bauman 2013]. – No 12. – Access mode: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html (in Russian).
11. ***Trotsenko V. A.*** Free oscillations fluid in a rectangular channel with an elastic membrane on the free surface / V. A. Trotsenko // Prikladnaya mekhanika. – 1995. – Vol. 31. №8 – P. 74–80 (in Russian).

[1]Донецкий национальный университет им. Василя Стуса, Винница, Украина,

[2]Николаевский аграрный университет, Николаев, Украина

Поступила в редколлегию 30.01.2017

УДК 539.3

В. В. Королевич

РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОРТОТРОПНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЕ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСНОВАНИЯМИ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Методом малого параметра приводится решение стационарной задачи теплопроводности для ортотропной кольцевой пластины постоянной толщины с теплоизолированными основаниями. Учитывается зависимость теплофизических характеристик композиционного материала пластины от температуры. С точностью до 3-го порядка малости параметра ε найдено аналитическое решение стационарной задачи теплопроводности для ортотропной кольцевой пластины. Распределение температур в ортотропной кольцевой пластине является неосесимметричным при заданных постоянных значениях температур на её контурах.

Ключевые слова: *температура, ортотропная кольцевая пластина, стационарное уравнение теплопроводности, малый параметр.*

Введение. В различных современных машиностроительных и авиационных конструкциях, в аппаратах для пищевой и химической промышленности широко применяются кольцевые пластины из анизотропных материалов. Часто они могут находиться в неоднородных тепловых полях. Это приведет к дополнительным, так называемым температурным напряжениям в анизотропных кольцевых пластинах, которые необходимо учитывать при эксплуатации конструкции.

В имеющейся литературе [1 – 5] по термоупругости пластинок приводятся решения задач стационарной и нестационарной теплопроводности для бесконечных, полубесконечных и односвязных (круг, прямоугольник) анизотропных пластин и отсутствуют решения таких задач для многосвязных анизотропных пластин. Данная работа посвящена решению задачи стационарной теплопроводности для двухсвязной анизотропной пластины.

Цель работы. Исследуется распределение температуры в ортотропной кольцевой пластине постоянной толщины с теплоизолированными основаниями и теплофизическими характеристиками материала, линейно зависящими от температуры, используя метод малого параметра.

Основные уравнения и их решения. Рассмотрим кольцевую пластину постоянной толщины h_0, вырезанную из ортогонально армированной композитной плиты. Пусть на внутреннем контуре (при $r = r_0$) поддерживается постоянная температура T_0^*, а на внешнем контуре (при $r = R$) – T_1^* $\left(T_1^* > T_0^*\right)$. Основания кольцевой пластины при $z = \pm h_0/2$ теплоизо-