MOTROL, 2010, 12A, 130-136

ПРО ОБОРОТНІСТЬ МАТРИЧНОЗНАЧНОГО ОПЕРАТОРА В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ H^n ЕЛЕМЕНТАМИ ЯКОГО Є НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ ВІД СІМ'Ї КОМУТУЮЧИХ ОБМЕЖЕНИХ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ.

Yevgeniy Samoilenko

Mykolayiv State Agrarian University, Ukraine
Krylova Street 17, Mykolayiv 54040, Ukraine

Анотація. В роботі досліджено умови оборотності матричнозначного оператора в гільбертовому просторі елементами якого є неперервні функції від сім'ї обмежених самоспряжених комутуючих операторів.

Ключові слова: оператор, обернений оператор, спектр, сумісний спектр.

ВСТУП

Для обмеженого самоспряженого оператора існує спектральна теорема. Нехай $A = A^*$ – обмежений самоспряжений оператор в гільбертовому просторі H. Тоді за спектральною теоремою

$$A = \int_{\sigma(A)} \lambda dE(\lambda),$$

де $E(\lambda)$ – спектральна міра, а $\sigma(A)$ – спектр оператора A. Цю теорему можна записати і в дискретному випадку:

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \varphi_\lambda ,$$

де φ_λ – власний вектор, що відповідає точці спектра λ.

Нехай $f(t)$ – неперервна функція на спектрі оператора A, тобто на компакті $\sigma(A)$. Тоді можна ввести поняття функції від самоспряженого оператора $A = A^* \subset B(H)$.

Функцією від обмеженого самоспряженого оператора $A = A^*$ називається такий оператор

$$f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) dE(\lambda),$$

де: $E(\lambda)$ – спектральна міра, що відповідає оператору A, а $\sigma(A)$ – спектр оператора A. Нагадаємо, що спектр самоспряженого оператора є підмножиною множини дійсних чисел. Наведемо приклади неперервних функцій від самоспряженого обмеженого оператора A. Зокрема

$$\sqrt{A} = \int_{\sigma(A)} \sqrt{\lambda}\, dE(\lambda).$$

Оскільки корінь квадратний можна брати від невід'ємних чисел, то необхідно накладати умову невід'ємності спектра оператора якщо маємо дійсно значну функцію. Якщо ж маємо комплекснозначну функцію, то ніяких обмежено не потрібно. Аналогічно можна знайти таку функцію від самоспряженого оператора:

$$\cos A = \int_{\sigma(A)} \cos \lambda\, dE(\lambda).$$

Як видно з означення знаходження функції від самоспряженого оператора, а також знаходження оберненого оператора пов'язані з проблемою знаходження спектра оператора. Зокрема розв'язання задачі про знаходження оберненого оператора приводить до такої рівності:

$$A^{-1} = \int_{\sigma(A)} \lambda^{-1} dE(\lambda) = \int_{\sigma(A)} \frac{1}{\lambda}\, dE(\lambda).$$

Звичайно, щоб оператор A^{-1} існував необхідно і достатньо, щоб $\lambda \neq 0$, тобто $\{0\} \notin \sigma(A)$.

Функціональне числення від сім'ї обмежених комутуючих операторів є добре дослідженим. Перехід до матричних функцій від сім'ї обмежених комутуючих операторів в цілому є недослідженою областю, хоча в роботах прикладного характеру, зокрема при дослідженні інтегральних операторів виникають матричні символи. Тому доцільним є узагальнення. Також матричні оператори від сім'ї комутуючих обмежених операторів є некомутуючими операторами. Класи некомутуючих операторів досліджені слабко, тобто багато проблем є просто невирішеними. Нехай $\widetilde{A} = \{A_i = A^*\}_{i=\overline{1,m}} \subset B(H)$ – сім'я самоспряжених обмежених комутуючих операторів і $\{E_i\}_{i=\overline{1,m}}$ – сім'я їх спектральних мір. Прямим добутком спектральних мір є міра

$$\widetilde{E}(\alpha_1 \times \alpha_2 \times \ldots \times \alpha_m) = \bigtimes_{i=1}^{m} E_i(\alpha_i) = E_1(\alpha_1) E_2(\alpha_2) \cdots E_m(\alpha_m).$$

Носієм розкладу одиниці E називається $Supp\{\cap \varphi | \varphi = \overline{\varphi} : E(\varphi) = I\}$, тобто перетин усіх замкнених множин повної міри.

Сумісним спектром сім'ї самоспряжених комутуючих операторів називається $S(\widetilde{A}) = S(A_i | i = \overline{1,m}) := Supp\widetilde{E}$, тобто носій добутку спектральних мір. За означенням, має місце наступне включення:

$$S(\widetilde{A}) = Supp\widetilde{E} \subseteq \bigtimes_{i=1}^{m} SuppE_i = \bigtimes_{i=1}^{m} \sigma(A_i),$$

де $\sigma(A_i)$ – спектр оператора A_i, $i = \overline{1,m}$.

Можна навести приклад. Нехай сім'я обмежених самоспряжених операторів складається з двох операторів: $\widetilde{A}=\left\{A,2A \middle| A=A^{*},\sigma(A)=[0,1]\right\}$. Тоді сумісним спектром буде діагональ прямокутника M_1M_2 на рис. 1.

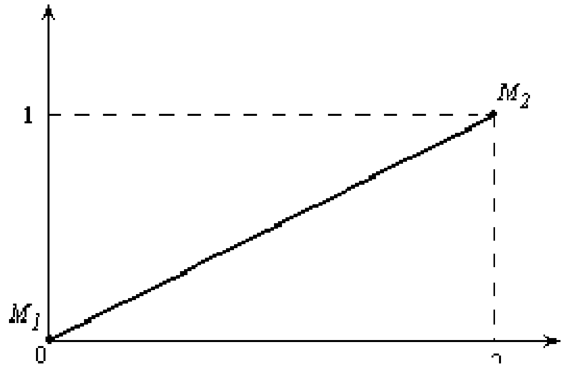

Рис.1. Сумісний спектр сім'ї операторів $\widetilde{A}$

Fig.1. Common spectrum of family operators $\widetilde{A}$

Неперервною функцією від сім'ї самоспряжених операторів $\widetilde{A}$ називається такий оператор:

$$f\left(\widetilde{A}\right)=\int_{S\left(\widetilde{A}\right)} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)d\widetilde{E}(\Lambda),$$

де $\Lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in S\left(\widetilde{A}\right)\subset R^m$, а $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in C\left(R^m,C\right)$ – неперервна функція, що діє з R^m в множину комплексних чисел C.

ОБОРОТНІСТЬ МАТРИЧНОЗНАЧНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай $G=\left\{F_{ij}\left(\widetilde{A}\right)=F_{ij}(A_1,\ldots,A_m) \middle| i,j=\overline{1,n}\right\}$, $G:H^n\to H^n$ – матричнозначна функція від сім'ї обмежених комутуючих операторів. Нехай $F(\Lambda)=\left\{F_{ij}(\Lambda)=F_{ij}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) \middle| i,j=\overline{1,n}\right\}$ – неперервна матричнозначна функція $F(\Lambda):U\left(S\left(\widetilde{A}\right)\right)\to C^{n\times n}$, де U – окіл, що містить сумісний спектр S. Позначимо $\Delta(G):=\det\left(F_{ij}\left(\widetilde{A}\right)\right)$ – функція-визначник, а $\Delta(\Lambda):=\det\left(F_{ij}(\Lambda)\right)$, де $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\in S\left(\widetilde{A}\right)$.

Виникає природне запитання про знаходження розв'язку системи лінійних операторних рівнянь $Gx=y$, де $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)^T$, тобто

$$\begin{cases} F_{11}\left(\widetilde{A}\right)x_1+F_{12}\left(\widetilde{A}\right)x_2+\ldots+F_{1n}\left(\widetilde{A}\right)x_n=y_1, \\ F_{21}\left(\widetilde{A}\right)x_1+F_{22}\left(\widetilde{A}\right)x_2+\ldots+F_{2n}\left(\widetilde{A}\right)x_n=y_2, \\ \\ F_{n1}\left(\widetilde{A}\right)x_1+F_{n2}\left(\widetilde{A}\right)x_2+\ldots+F_{nn}\left(\widetilde{A}\right)x_n=y_n. \end{cases}$$

Якщо існує обернений оператор G^{-1}, тоді розв'язок системи рівнянь знайдемо за формулою $x = G^{-1}y$.

Оператор G оборотний тоді і тільки тоді, коли $\forall \Lambda \in S$ виконується $\Delta(\Lambda) \neq 0$. Справді, нехай $\forall \Lambda \in S$ виконується $\Delta(\Lambda) \neq 0$, тоді можна побудувати алгебраїчно оборотній оператор $B(\Lambda) = (F(\Lambda))^{-1}$, а отже існує оператор $B(\tilde{A})$ такий, що $GB = I$. Нехай $\exists \Lambda \in S : \Delta(\Lambda) = \det(\{\lambda_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}) = 0$, тоді $\exists g$, де g – власний вектор оператора множення $F(\Lambda)$. Скористаємося відомим критерієм з функціонального аналізу. Для цього виберемо послідовність ненульових елемент з гільбертового простору H^n, причому вибиратимемо такий елемент так, щоб його норма дорівнювала одиниці. Іншими словами, виберемо елемент з одиничної кулі в гільбертовому просторі H^n. Позначимо

$$\forall z \geq 1 : 0 \neq g^{(z)} := \tilde{E}\left(\left(\lambda_1 - \frac{1}{z}, \lambda_1 + \frac{1}{z}\right) \times \ldots \times \left(\lambda_m - \frac{1}{z}, \lambda_m + \frac{1}{z}\right)\right) g$$

(відмітимо, що E – проектор). Вибраний таким чином елемент $g^{(z)}$ не є елементом з одиничною нормою. Але цей елемент можна нормувати, адже він ненульовий. Позначимо нормований елемент таким чином: $y^{(z)} := \dfrac{g^{(z)}}{\left\| g^{(z)} \right\|}$, а отже $\left\| y^{(z)} \right\| = 1$, $\forall z \geq 1$. В математичному аналізі є прийом, коли додаємо і одночасно віднімаємо один і той же член, при цьому отриманий вираз легко піддається аналізу. Маємо: $Gy^{(z)} = \left(\{F_{ij}(\Lambda) - \lambda_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}\right) y^{(z)} + \Delta(\Lambda) y^{(z)}$. Рівність $\Delta(\Lambda) y^{(z)} = 0$ очевидна. Таким чином:

$$\left\| \left(F_{ij}(\tilde{A}) - \lambda_{ij}\right) y_j^{(z)} \right\|^2 = \int_R \left|\alpha_{ij} - \lambda_{ij}\right|^2 d\left(\tilde{E}(\alpha_{ij}) y^z, y^z\right) \to 0,\ z \to 0.$$

За відомим критерієм оборотності $\left\| Gy^{(z)} \right\| \to 0$, при $z \to \infty$ та $\left\| y^{(z)} \right\| = 1$ Звідки випливає, що оператор G не є оборотним. А це і означає, що оператор G оборотній тоді і тільки тоді, коли відповідний визначник не приймає нульових значень.

Нехай $A = A^* \subset B(H)$ – обмежений самоспряжений оператор. Нехай сім'я самоспряжених обмежених операторів задана $\tilde{A} = \{f_1(A), \ldots, f_m(A)\}$, де $\{f_i | i = \overline{1,m}\} \subset C(U(\sigma(A)), R)$, де U – окіл, що містить $\sigma(A)$, тоді

$$S(\{f_1(A), \ldots, f_m(A)\}) = \{(f_1(A), \ldots, f_m(A)) | \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Дійсно, нехай маємо

$$E_i(\alpha) = \int_{\sigma(A)} \chi_\alpha(f_i(\lambda)) dE(\lambda),$$

де $\chi(A)$ – характеристична функція, $i=\overline{1,m}$. Тоді запишемо розклад добутку спектрів операторів на дві множини, що не перетинаються:

$$\bigtimes_{i=1}^{m}\sigma_i = Supp\widetilde{E}\cup\Omega,$$

де сумісна міра будь-якої відкритої множини з Ω дорівнює нулю, якщо ж будь-яка відкрита множина містить точки з $Supp\widetilde{E}$ не дорівнює нулю. Враховуючи, що

$$\widetilde{E}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)=\int\limits_R \chi_{\alpha_1}(\lambda)\cdot\ldots\cdot\chi_{\alpha_m}(\lambda)dE=0 \text{ та } f(\sigma(A))=\sigma(f(A)),$$

отримуємо шукану рівність. Ці міркування можна графічно проілюструвати на такому прикладі. Розглянемо сім'ю обмежених самоспряжених операторів, що складається з двох операторів $\widetilde{A}=\left\{A,\sqrt{A}\,\middle|\,A=A^*,\sigma(A)=[0,1]\right\}$.

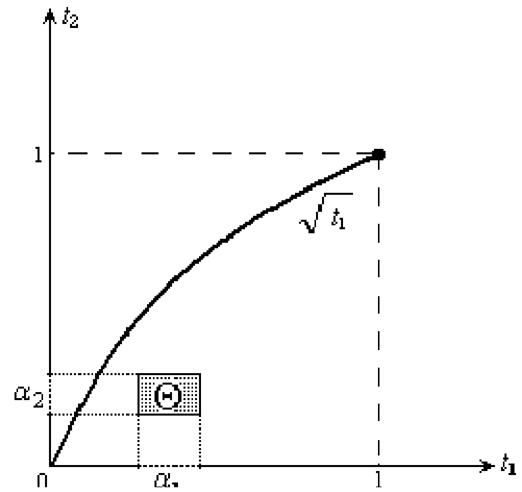

Рис.2. Сумісний спектр сім'ї операторів $\widetilde{A}$

Fig.2. Common spectrum of family operators $\widetilde{A}$

Як видно з рис. 2, якщо Θ не перетинає функцію $\sqrt{t_1}$, то сумісна міра дорівнює нулю, а якщо перетинає, тоді сумісна міра від Θ ненульова. Це випливає з рівності

$$\widetilde{E}(\alpha_1\times\alpha_2)=E_1(\alpha_1)E_2(\alpha_2).$$

Наведемо приклад оператора, котрий підтвердить безпомилковість умови оборотності для матричної функції від сім'ї самоспряжених обмежених операторів. Найпростішим прикладом матричного оператора є матричний оператор множення. Нехай маємо гільбертовий простір $H=L_2([0,1],dt)$ і чотири неперервні функції на одиничному відрізку $f_1,f_2,f_3,f_4\in C([0,1])$. Сім'ю самоспряжених операторів задамо таким чином:

$$\widetilde{A}=\left\{(A_i x)(t)=f_i(t)x(t)\,\middle|\,i=\overline{1,4}\right\}.$$

Тоді сумісний спектр можна задати явно за такою формулою:

$$S(A_1, A_2, A_3, A_4) = \{f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t) | t \in [0,1]\}.$$

Нехай матричний оператор матиме такий вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}(\tilde{A}) & F_{12}(\tilde{A}) \\ F_{21}(\tilde{A}) & F_{22}(\tilde{A}) \end{pmatrix},$$

де $F_{11}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1$, $F_{12}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_2$, $F_{21}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_3$, $F_{22}(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_4$ – неперервні функції які "поважають" лише одну змінну з чотирьох відповідно, тобто є тотожними функціями лише за однією змінною, а за іншими змінними є константами. Застосуємо результат про оборотність отриманих у цій роботі. За умовою оборотності матричного оператора, для матричного оператора множення, якщо оператор оборотній, то буде виконуватись така рівність.

$$f_1(t) f_4(t) - f_2(t) f_3(t) \neq 0, \ \forall t \in [0,1].$$

Результат, отриманий у цьому прикладі, підтверджує безпомилковість теоретичних досліджень, хоча на перший погляд може виглядати і очевидним. Як продовження, можна для цього ж прикладу знайти спектр оператора. Спектром оператора G називається така підмножина чисел λ множини комплексних чисел, для яких не існує оберненого оператора $G - \lambda I$, тобто

$$\sigma(G) = \left\{ \lambda \in C \middle| \exists t \in [0,1] : \det \begin{pmatrix} f_1(t) - \lambda & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) - \lambda \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Розв'язавши це рівняння отримаємо:

$$\sigma(G) = \left\{ \frac{f_1(t) + f_4(t) \pm \sqrt{(f_1(t) + f_4(t))^2 + 4(f_2(t) f_3(t) - f_1(t) f_4(t))}}{2} \middle| t \in [0,1] \right\}.$$

ВИСНОВОК

Матрична функція від сім'ї самоспряжених обмежених комутуючих операторів є оператором некомутуючим. А для некомутуючих операторів сьогодні не існує спектральної теорії. І хоча функція від сім'ї самоспряжених обмежених комутуючих операторів є оператором некомутуючим, отримані результати стали можливими завдяки тому, що в генезисі цього оператора лежить добре вивчений клас комутуючих самоспряжених операторів. Умови оборотності матричнозначного оператора в гільбертовому просторі елементами якого є неперервні функції від сім'ї обмежених самоспряжених комутуючих операторів необхідні для розв'язання систем операторних рівнянь. Це дає змогу будувати моделі для описання складних процесів у різних областях науки в яких виникають самоспряжені оператори. Результат, отриманий у останньому прикладі, підтверджує безпомилковість теоретичних досліджень, хоча на перший погляд може виглядати і очевидним.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самойленко Ю.С., Спектральна теорія сім'ї самоспряжених операторів, Київ, Наукова Думка, 1984.
2. Бірман М.Ш., Соломяк М.З., Спектральна теорія самоспряжених операторів в гільбертовому просторі, Ленінградський державний університет, 1980.
3. Berezanskii Yu.M., Self-adjoint operators in spases of functions of finitely many variables, Providence, AMS, 1986.
4. Berezanskii Yu.M., Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators, Providence, AMS, 1968.
5. Antonyevich A. and Krupnik N., On trivial and non-trivial n-homogeneous C^*-algebras, Integr. Equ. Oper. Theory, 2000, V.38, 172-189.
6. Samoilenko Ye.Ye., On Spectrum of Matrix-Valued Continuous Functions of a Family of Commuting Operators.// Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2004, Vol. 50, Part 3, 1192–1194.

ON INVERTEBILITIES OF MATRIX-VALUED CONTINUOUS FUNCTIONS OF A FAMILY OF COMMUTING OPERATORS IN A HILBERT SPASE H^n

Summary. Invertebilities of matrix-valued continuous functions of a family of self-adjoint commuting bounded operators on a Hilbert space H^n is investigated.

1. **Key words:** operator, inverse operator, spectrum, common spectrum.

Rewiver: Vyacheslav Shebanin Prof. Sc. D. Eng.