

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

Методичні рекомендації
для самостійного вивчення та виконання контрольної роботи з дисципліни
«Механіка матеріалів і конструкцій»
для здобувачів вищої освіти заочної форми навчання
напрямів підготовки 6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового
виробництва» і 6.010104 «Професійна освіта (Технологія виробництва і переробка
продуктів сільського господарства)»

Миколаїв
2015

УДК 539.42
ББК 30.1
М 54

Рекомендовано до друку рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 23.12.15 р., протокол №4 .

Укладачі:

Д. В. Бабенко – кандидат технічних наук, професор кафедри загальнотехнічних дисциплін. Миколаївський національний аграрний університет.

Н. А. Доценко – кандидат технічних наук, асистент кафедри загальнотехнічних дисциплін. Миколаївський національний аграрний університету.

Рецензенти:

О. К. Чередніченко – кандидат технічних наук, доцент, заступник директора машинобудівного інституту. Національний університет кораблебудування ім. адмірала Макарова.

В. І. Гавриш – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу. Миколаївський національний аграрний університет.

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Загальні методичні вказівки.....	5
1. Згинання плоских стержнів.....	6
Задача № 1. „Визначення переміщень балок при згинанні”.....	8
2. Статично невизначені системи.....	13
Задача № 2.1. „Розрахунок статично невизначених рам по методу сил”.....	13
Задача №2.2. Розрахунок багатопрольотної нерозрізної балки.....	20
3. Складний опір.....	23
Задача № 3.1 „Розрахунок балки на косе згинання”.....	25
Задача № 3.2 „Розрахунок стержнів на позацентрове стискання-розтягання”	29
4. Стійкість рівноваги деформованих систем	36
Задача № 4 „Стійкість стиснутих стержнів”.....	38
Додаток 1.Варіанти завдань	45
Додаток 2. Таблиця гнучкості.....	53
Додаток 3. Таблиця сортаменту прокатної сталі.....	54
Список використаної літератури.....	64

ВСТУП

Механіка матеріалів і конструкцій є однією із важливих загальнотехнічних дисциплін, які вивчаються на інженерних спеціальностях Вищих навчальних закладів освіти аграрного профілю III і IV рівнів акредитації. Використовуючи методи теоретичної механіки і математичного аналізу, знання з фізики, аналітичної геометрії і вивчивши фізико-механічні властивості матеріалів, механіка матеріалів і конструкцій вирішує питання розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість деталей машин та елементів конструкцій.

Механіка матеріалів і конструкцій дає можливість поєднати вимоги найбільшої міцності з економією матеріалу, надійності в роботі з найменшою вартістю конструкцій, оптимального проектування з високою продуктивністю машин і агрегатів.

Ринкова економіка в сільському господарстві країни поставила перед аграріями конкретні задачі, виконання яких вимагають від інженерних кадрів серйозного і глибокого знання розрахунків на міцність машин і інженерних споруд і накладають на вивчення курсу механіки матеріалів і конструкцій нові підвищенні і відповідальні вимоги.

Створюються нові види і типи машин, споруд, агрегатів. Підвищення робочих швидкостей і навантажень, збільшення рухомих мас, застосування нових високо міцних матеріалів в конструкціях, створення і широке застосування композитних матеріалів, робота механізмів і машин в агресивних середовищах вимагають від інженера глибоких знань в області закономірностей розподілу зусиль в конструкціях і деталях машин, в області опору конструкцій цим зусиллям в області розрахунків на міцність. Розрахунки на міцність дають можливість запобігти виникненню високих напружень, шкідливих вібрацій в деталях, пошкоджень, не допускати втрати стійкості деталей машин і споруд, збільшити їх довговічність, надійність.

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Задача науки механіки матеріалів і конструкцій - це розрахунок елементів конструкцій і деталей машин на міцність, жорсткість і стійкість і забезпечення заданої ступені надійності.

З цією метою в механіці матеріалів і конструкцій:

а) вивчаються механічні властивості матеріалів, визначаються характеристики міцності і закон деформування матеріалів при різних умовах навантаження, температурних режимах і інше;

б) досліджуються закони розподілу напружень від внутрішніх зусиль, що виникають між частинками тіл, на які діють задані зовнішні фактори і температурні поля;

в) на підставі експериментальних даних для простих випадків навантаження встановлюють значення допустимих напружень, що забезпечують необхідний коефіцієнт запасу міцності деталей, якій враховує неоднорідність матеріалів, неточність теорії і експерименту;

г) формулюються так звані теорії міцності, які встановлюють критерії міцності в складних випадках напруженого стану, на основі допустимих напружень;

д) виводяться формули для визначення характерних деформацій елементів конструкцій і складаються умови жорсткості, які обмежують ці деформації допустимими величинами;

е) досліджується стійкість елементів конструкцій під дією заданого навантаження.

За допомогою отриманих умов міцності, жорсткості і стійкості в механіці матеріалів і конструкцій вирішуються три типи задач:

1) визначаються необхідні поперечні розміри деталей при заданих характеристиках матеріалів і величинах навантажень;

2) визначаються визначення допустимої величини навантаження на деталь при заданих розмірах і матеріалі, з якого вона виготовлена;

3) перевірка міцності, жорсткості і стійкості.

Надмірні вимоги міцності або жорсткості елементів конструкцій приводять до її

здороження (економічний аспект задачі). Тому одним із важливих питань механіки матеріалів і конструкцій є правильне встановлення коефіцієнта запасу, який забезпечував би достатньо надійність деталі впродовж визначеного терміну.

Лабораторні заняття є важливим елементом навчання і проводяться під час лабораторно-екзаменаційної сесії. Теми лабораторних робіт указані в кінці методичних вказівок.

При виконанні контрольних робіт необхідно вивчити тему курсу порекомендованих підручниках, відповісти на питання самоперевірки, а лише потім приступити до розв'язання задач цієї теми.

Методичні рекомендації по виконанню контрольної роботи студентами заочної форми навчання складається з п'яти розрахункових задач по темах передбачених робочою програмою дисципліни.

До складу контрольної роботи № 2 входять такі задачі:

- 1.Визначення переміщень балок при згинанні;
- 2.Розрахунок статично невизначених рам по методу сил;
- 3.Розрахунок балки на косе згинання;
- 4.Розрахунок стержнів на позацентрове розтягання-стискання;
5. Стійкість стиснутих стержнів.

Нижче наведені теоретичні відомості необхідні для виконання п'яти необхідних задач, а також приклади розрахунків кожної із задач контрольної роботи з переліком варіантів для самостійного опрацювання студентами матеріалу контрольної роботи.

Крім того після кожного тематичного прикладу наведено перелік контрольних запитань, які студент має опрацювати самостійно по даній темі для закріплення пройденого матеріалу з дисципліни. Необхідний перелік тематичних задач для кращого їх засвоєння дослідно опрацьовується на лабораторних заняттях. Для полегшення розрахунків наприкінці викладеного матеріалу методичних рекомендацій у додатку наведена таблиця сортаменту.

1. ЗГИНАННЯ ПЛОСКИХ СТЕРЖНІВ

Дана тема є однією з найбільш об'ємних і складних у дисципліні механіка матеріалів і конструкцій, її слід вивчати послідовно, звертаючи особливу увагу на розв'язання задач.

Спочатку потрібно чітко засвоїти важливі поняття про момент згинання $M(x)$ і поперечну силу $Q(y)$ і навчитися вільно будувати їх епюри.

Необхідно з'ясувати, що поперечна сила в даному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій всіх сил на площину перерізу, розташованих по один бік від перерізу, що розглядається, а момент згинання в тому перерізі дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил, розташованих тільки з одного боку стержня, відносно центру ваги цього перерізу.

Важливе значення має теорема Журавського, яка встановлює залежність між $M(x)$, $Q(y)$ і $q(x)$, з допомогою якої перевіряють правильність побудови епюр $M(x)$ і $Q(y)$.

При вивченні обчислення нормальних напружень при згинанні, необхідно звернути увагу на нерівномірність розподілу цих напружень по висоті поперечного перерізу і на те, що міцність балки залежить від величини моменту опору W . Необхідно чітко з'ясувати, яким шляхом можливо збільшити момент опору без збільшення витрат матеріалу.

Потім потрібно з'ясувати питання визначення дотичних напружень (формула Журавського) і головних напружень. Рекомендується порівняти між собою епюри σ і τ , побудовані для балки прямокутного поперечного перерізу. Найбільші і найменші нормальні напруження (головні напруження) знаходяться за формулою:

$$\sigma_{1,3} = 1/2(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

Тепер слід перейти до вивчення питання визначення деформацій при згинанні. Аналітичним способом визначення кутів повороту і прогинів здійснюється при допомозі інтегрування диференційного рівняння зігнутої вісі балки. Права частина цього рівняння має вираз моменту згинання в довільному перерві даної ділянки, а не в тому перерізі, для якого знаходиться переміщення(кути повороту прогини). $M(x)$ - величина змінна, і тільки в випадку чистото згинання $M(x) = \text{const}$. Потрібно чітко з'ясувати геометричне тлумачення сталих інтегрування C і D ; розділивши їх величини на EI , отримавши відповідно величини кута повороту і прогину на початку координат.

При наявності декількох ділянок, коли момент згинання від зосереджених моментів виражається різними рівняннями, необхідно виконувати інтегрування без розкриття дужок, поскільки тільки при виконанні цієї вимоги довільні сталі будуть відповідно рівні між собою ($C_1 = C_2 = \dots = C_n = D_1 = D_2 = \dots = D_n = D$).

Здебільшого початок координат поміщують на лівому кінці балки і загальне рівняння кутів повороту і прогинів має вигляд:

$$EI - EI\theta_0 + M_0 \cdot x + Q_0 \cdot \frac{x^2}{2} + \sum M(x - a_m) + \sum P \frac{(x - a_p)^2}{2} + \sum q \frac{(x - a_q)^3}{6} EI = EI V_0 + EI\theta_0 + M_0 \cdot \frac{x^2}{2}$$

де a_m, a_p, a_q - відповідно абсциси крапок прикладання зосередженої пари сил M , сили P , початку дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q ; знаки сум розповсюджуються на всі навантаження, розташовані ліворуч від того перерізу балки, для якого знаходять прогин і кут повороту.

Величини бо позначаються відповідно як прогин, кут повороту, момент згинання і поперечна сила на початку координат називаються початковими параметрами.

В зв'язку з цим метод визначення деформацій балки при допомозі записаних вище рівнянь носить назву методу початкових параметрів.

Невідомі початкові параметри знаходяться із умов на правому краї балки: наприклад, для балки, що вільно лежить на двох опорах, при визначенні потрібно використати ту умову, що прогин на правій опорі дорівнює нулю.

ЗАДАЧА №1, „ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ БАЛОК ПРИ ЗГИНАННІ”

ПРИКЛАД 1.1:

Умова задачі

Визначити прогин вільного кінця балки (будь-яким методом).

Дано: Балку, що зображена на рис. 1.

$\alpha = 0,5$; $l = 3,0$ м; $P = 5$ кН; $\beta = 0,5$.

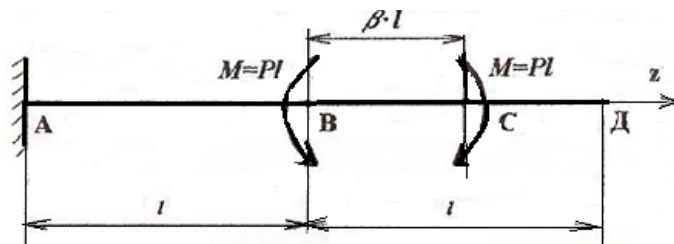


Рис.1.Схема консольно затиснутої балки

1. Визначаємо реакції опор за рівняннями рівноваги:

$$\begin{cases} \sum Z_1 = 0; \\ \sum Y_1 = 0; \\ \sum M_{1A} = 0; \end{cases}$$

За результатами підрахунків реакції опори в точці А приймають нульові значення (рис.2.).

2. Записуємо універсальне рівняння зігнутої осі балки.

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot z \pm \frac{\sum M_1(z-a)^2}{2} \pm \frac{\sum P_1(z-b)^3}{6} \pm \frac{\sum q_1(z-c)^4}{24}$$

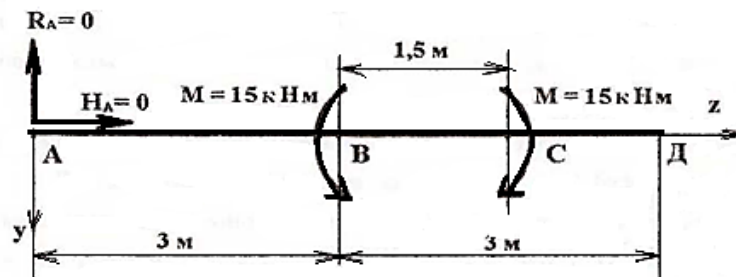


Рис. 2. Розрахункова схема до задачі №1

Вигляд універсального рівняння зігнутої осі балки стосовно умов закріплення балки та прикладеного навантаження:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\theta_0 \cdot z + \frac{M_1(z-3)^2}{2} + \frac{M_1(z-4.5)^2}{2}$$

Оскільки балка має консольне затиснення то початкові параметри лінійного і кутового прогину рівні нулю:

$$V_0=0; \theta_0=0;$$

Знайдемо прогин вісі балки в точці Д (при $z = 6\text{ м}$):

$$EIV(z) = EIV_D = \frac{15(6-3)^2}{2} - \frac{15(6-4.5)^2}{2} = \frac{15}{2}(3^2 - 1.5^2) = 50,6$$

$$EIV(z) = EIV_D = 50,6 \text{ кН}$$

ПРИКЛАД 1.2

Для заданої балки знайти прогини і кути повороту в характерних точках і побудувати їх епюри (рис. 3).

Етапи розрахунку:

1. Визначаємо опорні реакції R_D і R_B (визначення опущено).

$$\text{Контроль: } \sum y=0; R_A + q \frac{l}{2} - R_B = 0;$$

2. Визначаємо величини поперечних сил Q_y та згинаючих моментів M_x і будуємо їх епюри (рис.17.2) (обчислення опущено).

3. Для третьої ділянки балки, коли z знаходиться в межах від l до $5/4 \cdot l$, запишемо універсальне рівняння зігнутої вісі балки:

$$EIV(z) = EIV_0 + EI\varphi_0 z + R_a \frac{z^3}{6} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^4}{24} - q \frac{(z - l)^4}{24} - R_b \frac{(z - l)^3}{6}$$

Вираз для кута повороту має вигляд:

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 + R_a \frac{z^2}{2} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^3}{6} - q \frac{(z - l)^3}{6} - R_b \frac{(z - l)^2}{2}$$

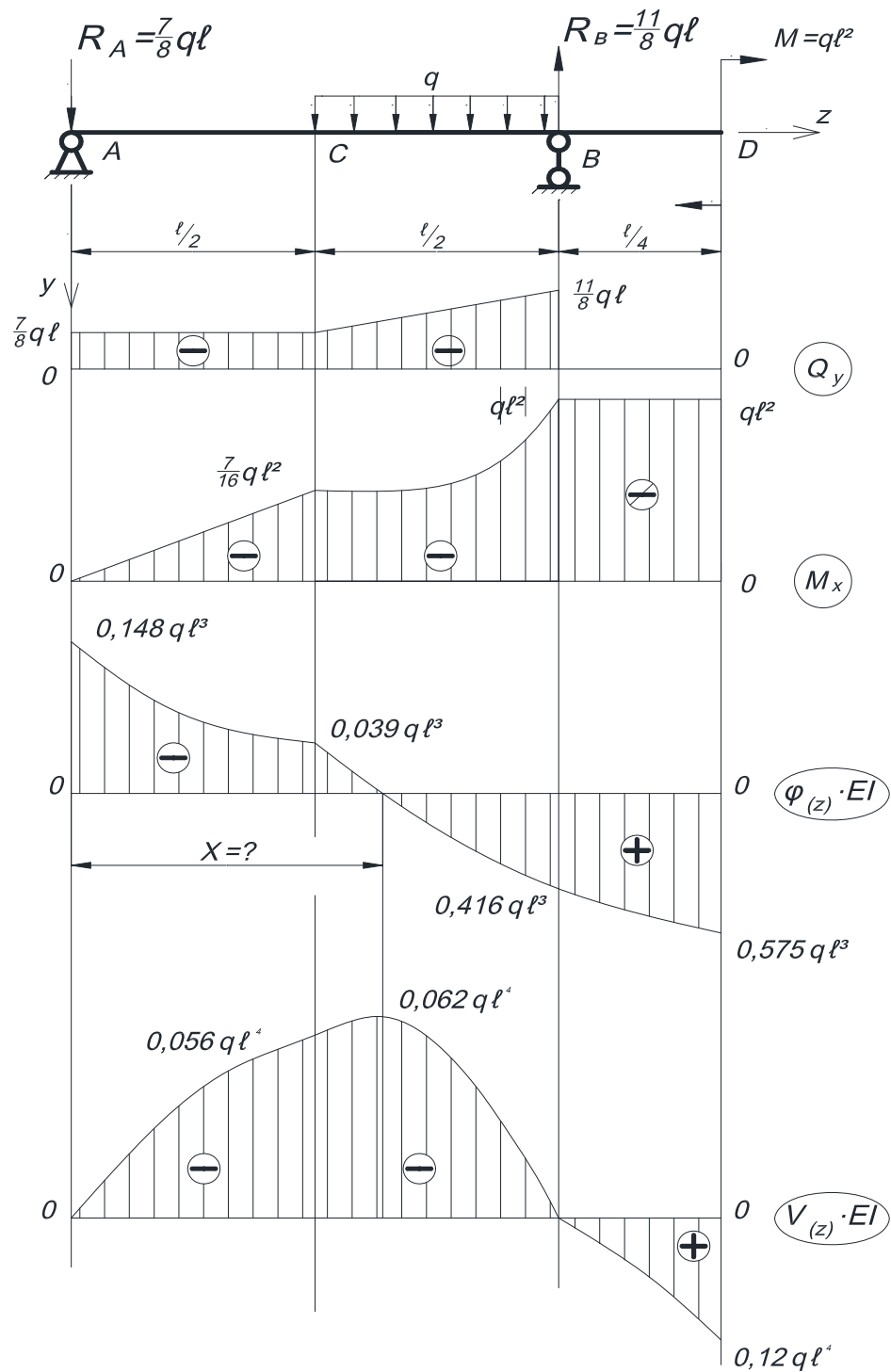


Рис. 3. Схема балки.

Початкові параметри знаходяться із граничних умов:

$$1) z = 0$$

$$EIV_{(z=0)} = EIV_0 = 0.$$

$$2) z = l$$

$$EIV_{(z=l)} = EI\varphi_0 \cdot l + R_a \frac{l^3}{6} + q \frac{(l - \frac{l}{2})^4}{24} = 0,$$

$$EI\varphi_0 = \frac{57}{384} ql^3;$$

З урахуванням вищенаведеного універсальні рівняння запишуться:

$$EIV_{(z)} = -\frac{57}{384} q \cdot l^3 \cdot z + \frac{7}{8} ql \frac{z^3}{6} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^4}{24} - q \frac{(z - l)^4}{24} - \frac{11}{8} ql \frac{(z - l)^3}{6};$$

$$EI\varphi_{(z)} = -\frac{57}{384} ql^3 + \frac{7}{8} ql \frac{z^2}{2} + q \frac{(z - \frac{l}{2})^3}{6} - q \frac{(z - l)^3}{6} - \frac{11}{8} ql \frac{(z - l)^2}{6}.$$

Підставивши у вирази координати характерних перерізів балки, знайдемо прогини і кути повороту в них та побудуємо їх епюри, враховуючи диференційні залежності між q ; Q_y ; M_x ; $\varphi(z)$; $v(z)$:

точка А $z = 0$;

$$EIV_{(z=0)} = 0;$$

$$EI\varphi_{(z=0)} = -\frac{57}{384} ql^3 = -0,148ql^3.$$

точка С $z = \frac{l}{2}$;

$$EIV_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{57}{384} ql^3 \cdot \frac{l}{2} + \frac{7}{8} ql \frac{(l/2)^3}{6} = 0,056ql^3;$$

$$EI\varphi_{(z)} = -\frac{57}{384} ql^3 + \frac{7}{8} ql \frac{l/2}{2} = -0,039ql^3.$$

точка В $z=l$;

$$EIV_{(z=l)} = -\frac{57}{384} ql^4 + \frac{7}{8} ql \frac{l^3}{6} + q \frac{(l - l/2)^4}{24} = 0;$$

$$EI\varphi_{(z=l)} = -\frac{57}{384}ql^3 + \frac{7}{8}ql\frac{l^2}{2} + q\frac{(l-l/2)^3}{6} = 0,416ql^3$$

точка D $z = \frac{5}{4}l$

$$EIV_{(l=5/4l)} = 0,12ql^4;$$

$$EI\varphi_{(l=5/4l)} = 0,575ql^3.$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ТЕМИ

1. Як знаходиться момент згинання в поперечному перерізі балки?
2. В якому випадку момент згинання рахують позитивним?
3. Як знаходиться поперечна сила в довільному перерізі балки?
4. Правила знаків для поперечної сили.
5. Яка залежність між величинами $M(x)$, $Q(y)$ і $q(x)$?
6. Як знаходять максимальний момент згинання?
7. Що таке чисте згинання?
7. По якій кривій згинається балка в випадку чистого згинання?
8. Як змінюється нормальні напруження по висоті балки?
9. Що називають моментом опору при згинанні?
10. Що називають нейтральним шаром і де він знаходиться?
11. Як правильніше покласти балку прямокутного перерізу при роботі на згинання?
12. Який переріз має більший момент опору при однаковій площі: круглий чи квадратний?
13. В яких площинах виникають дотичні напруження при згинанні? Формула Журавського?
14. Як знаходяться головні напруження при згинанні?
15. Які напруження з'являються в балці, якщо площина дії навантаження не проходить через центр згинання?
16. Запишіть загальний вигляд диференційного рівняння зігнутої вісі балки?
17. Як знаходяться сталі інтегрування?
18. Як визначають найбільшу величину прогину?

2. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ

При вивченні цієї теми особливу увагу потрібно звернути на визначення переміщень з допомогою способу Верещагіна. При цьому необхідно розглянути розрахунок статично невизначених рам, який приводиться в одному із рекомендованих підручників, попередньо навчитися будувати епюри внутрішніх зусиль для статично визначених рам.

Основні етапи розрахунку статично невизначуваних систем:

1. Визначити ступінь статичної невизначеності рами.
2. Шляхом відкидання зайвих опор вибрати основну систему.
3. Завантажити основну систему зовнішнім навантаженням і зусиллям відкинутих зв'язків.
4. Для еквівалентної системи записати канонічні рівняння методу сил.

Для полегшення вивчення цієї теми розглянемо розв'язання типової задачі по розрахунку рами, яка викладена в тій послідовності, якої необхідно дотримуватися при виконанні контрольної роботи.

ЗАДАЧА № 2.1 „РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ РАМ ПО МЕТОДУ СИЛ”

ПРИКЛАД 2.1:

Умова задачі: розкрити статичну невизначеність рами.

Дано: раму зображена на рис. 4.

$h = 4 \text{ м}; l = 2 \text{ м}; P = 40 \text{ кН};$

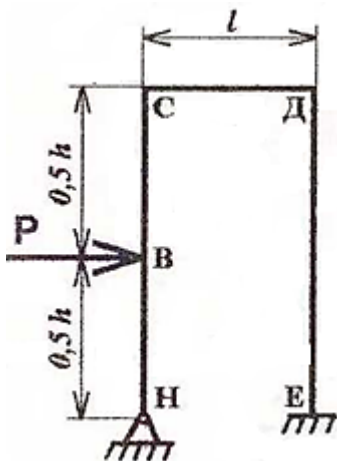


Рис. 4. Схема рами

1. Визначаємо ступінь статичної невизначеності рами, вибираємо основну систему та створюємо еквівалентну.

Ступінь статичної невизначеності рівний двом - дві „зайві” опори. Основна система зображена на рис. 5 а, геометрично не змінна.

Завантажуємо основну систему зовнішнім навантаженням і зусиллями відкинутих зв'язків (створюємо еквівалентну систему) зображено на рис. 5б.

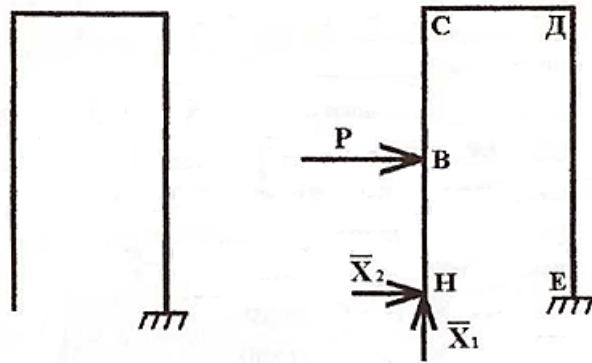


Рис. 5. а - основна система; б - еквівалентна система

2) Складаємо канонічні рівняння методу сил.

$$\begin{cases} \sigma_{11} \cdot X_1 + \sigma_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \sigma_{21} \cdot X_1 + \sigma_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

3) Будуємо для основної системи одиничні (рис. 6 а, б) та вантажну (рис. 6 в) епюри моментів згинання

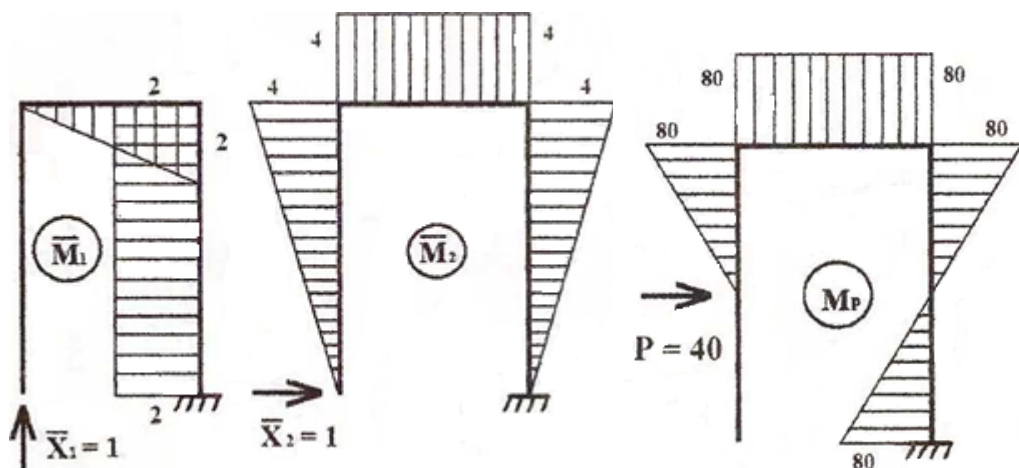


Рис.6. а, б - одиничні епюри; в - вантажна епюра

$$\sigma_{11} = \frac{1}{EI} \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \right) = \frac{56}{3 \cdot EI}$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \frac{1}{EI} \left(-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = -\frac{24}{EI}$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{EI} \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{176}{3 \cdot EI}$$

$$\sigma_{1F} = \frac{1}{EI} \left(-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 - 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = -\frac{160}{EI}$$

$$\sigma_{2F} = \frac{1}{EI} \left(80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 + 80 \cdot 2 \cdot 4 + 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot 4 - 80 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 4 \right) = \frac{3360}{3 \cdot EI}$$

Підставляємо значення коефіцієнтів у систему канонічних рівнянь методу сил.

$$\begin{cases} \frac{56}{3 \cdot EI} \cdot x_1 - \frac{24}{EI} \cdot x_2 = \frac{160}{EI} \\ -\frac{24}{EI} \cdot x_1 + \frac{176}{3 \cdot EI} \cdot x_2 = -\frac{3360}{3 \cdot EI} \end{cases}$$

Отримаємо систему з двох рівнянь з двома невідомими, які можна знайти вирішивши систему:

$$\begin{cases} 56 \cdot x_1 - 72 \cdot x_2 = 480 \\ -72 \cdot x_1 + 176 \cdot x_2 = -3360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4032 \cdot x_1 - 5184 \cdot x_2 = 34560 \\ -4032 \cdot x_1 + 9856 \cdot x_2 = -188160 \end{cases}$$

$$4672 \cdot x_2 = -153600$$

$$x_2 \approx -32,9 \text{ кН}$$

$$x_1 = \frac{-72 \cdot 32,9 + 480}{56} = -33,7 \text{ кН}$$

6) Будуємо епюри моментів згинання (рис. 7), поздовжніх (рис. 8 а) і поперечних (рис. 8б) сил.

Для побудови ешор моментів згинання побудуємо виправлені епюри одиничних станів.

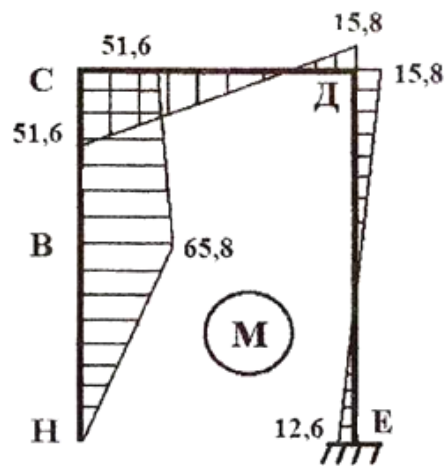


Рис.7. Епюра моментів згинання

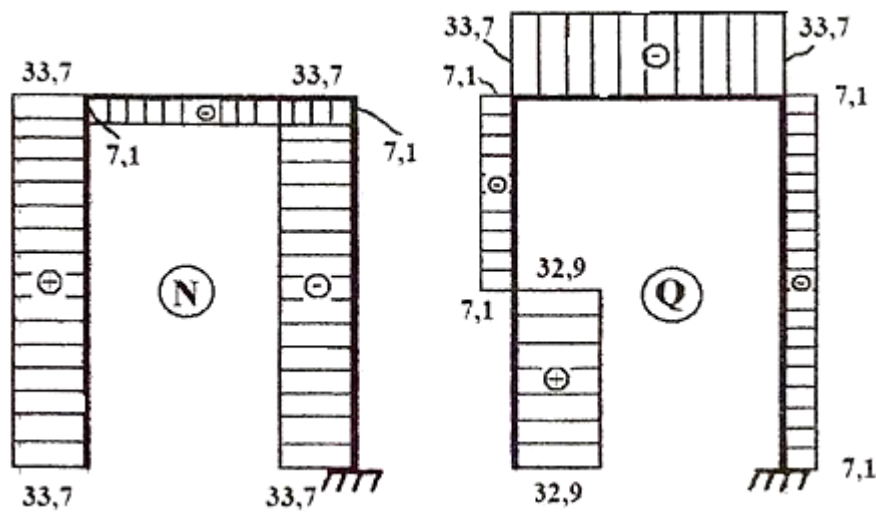


Рис.8.Епюри поздовжньої і поперечної сили

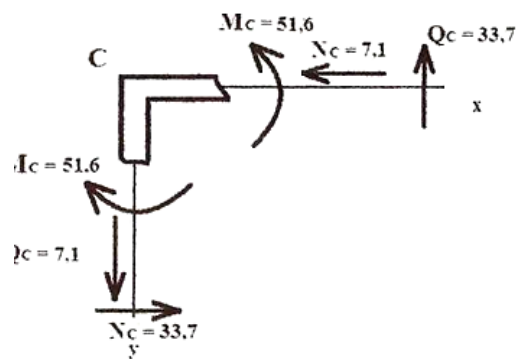


Рис. 9. Графічне зображення вузлового контролю (вузол С)

$$7) \sum M_c = 0 \quad 51,6 - 51,6 = 0$$

$$\sum x_c = 0 \quad -7,1 + 7,1 = 0$$

$$\sum y_c = 0 \quad -31,7 + 31,7 = 0$$

8) Кінематичний контроль перемноження будь-якої одиничної епюри моментів згинання з вантажною та епюрами виправленого одиничного стану, що в

результаті повинно давати нуль.

Наприклад:

$$M_1 \cdot x_1 \cdot M_1 + M_2 \cdot x_2 \cdot M_1 + M_P \cdot M_1 = 0 \quad \text{або}$$

$$M_1 \cdot x_1 \cdot M_2 + M_2 \cdot x_2 \cdot M_2 + M_P \cdot M_2 = 0$$

Розпишемо детальніше:

$$M_1 \cdot x_1 \cdot M_1 + M_2 \cdot x_2 \cdot M_1 + M_P \cdot M_1 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 67,4 - 2 \cdot 4 \cdot 67,4 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 131,6 + 131,6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

Задача вирішена вірно.

ПРИКЛАД 2.2.

Дано раму з геометричними розмірами та зовнішнім навантаженням q (рис. 10.а). Розкрити статичну невизначеність системи, побудувати епюри внутрішніх зусиль та виконати статичний і кінематичний контролі.

Рама статично невизначена двічі. Обираємо основну систему (рис. 10.б), еквівалентну систему (рис. 10. в). Будуємо епюри від зовнішнього силового навантаження (вантажна епюра) (рис. 10.г) та одиничні епюри (рис. 10. д, е).

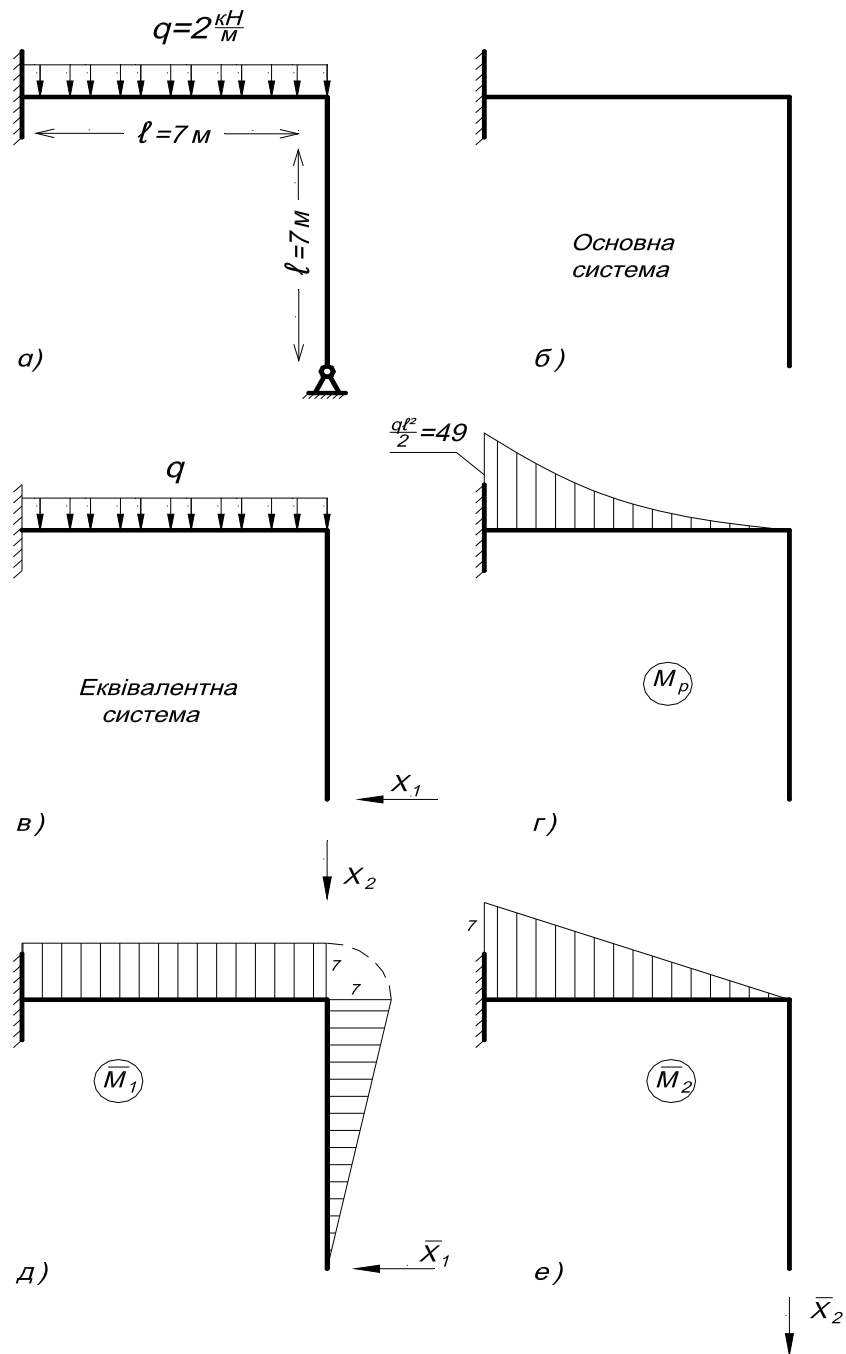


Рис. 10 Статично невизначена рама.

Для розв'язання задачі запишемо канонічні рівняння методу сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot x_1 + \delta_{12} \cdot x_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21} \cdot x_1 + \delta_{22} \cdot x_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Визначаємо коефіцієнти рівняння за допомогою перемноження епюр за способом Верещагіна.

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1 \times \overline{M}_1) = \frac{1}{EI} \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \right) = \frac{4 \cdot 7^3}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\overline{M}_1 \times \overline{M}_2) = \frac{1}{EI} \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \right) = \frac{7^3}{2EI};$$

$$\delta_{22} = (\overline{M}_2 \times \overline{M}_2) = \frac{1}{EI} \left(7 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \right) = \frac{7^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = (\overline{M}_1 \times \overline{M}_P) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 7 \cdot 7 \right) = \frac{7^4}{3EI};$$

$$\Delta_{2P} = (\overline{M}_2 \times \overline{M}_P) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 \right) = \frac{7^4}{4EI}.$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{7^3 \cdot 4}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_1 + \frac{7^3}{2 \cdot E \cdot I} \cdot X_2 + \frac{7^4}{3 \cdot E \cdot I} = 0 \\ 2 \frac{7^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_1 + \frac{7^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot X_2 + \frac{7^4}{4 \cdot E \cdot I} = 0 \end{cases}$$

Система має такі розв'язки:

$$\begin{cases} X_1 = 0,5 \text{ кН} \\ X_2 = -6 \text{ кН} \end{cases}$$

Будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 11. а).

Для епюри Q (рис. 11. б) можна знайти величину зусилля в точках рами:

$$\begin{aligned} Q_B &= -6 = X_2 \\ Q_A &= -X_2 + ql = -6 + 14 = 8 \text{ кН}, \\ z &= \frac{Q}{q} = \frac{6}{2} = 3 \text{ м} \end{aligned}$$

Будуємо виправлені епюри одиничного стану (рис. 11 в, г).

Для епюри M (рис. 11 д) можна знайти величину зусилля в точках рами:

$$\begin{aligned} M_B &= -X_1 \cdot 7 = -0,5 \cdot 7 = -3,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_A &= M_B - \frac{q \cdot l^2}{2} + x_2 \cdot 7 = 3,5 - \frac{2 \cdot 49}{2} + 42 = -3,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \\ M_{\max} &= M_B - \frac{2 \cdot 9}{2} + 6 \cdot 3 = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

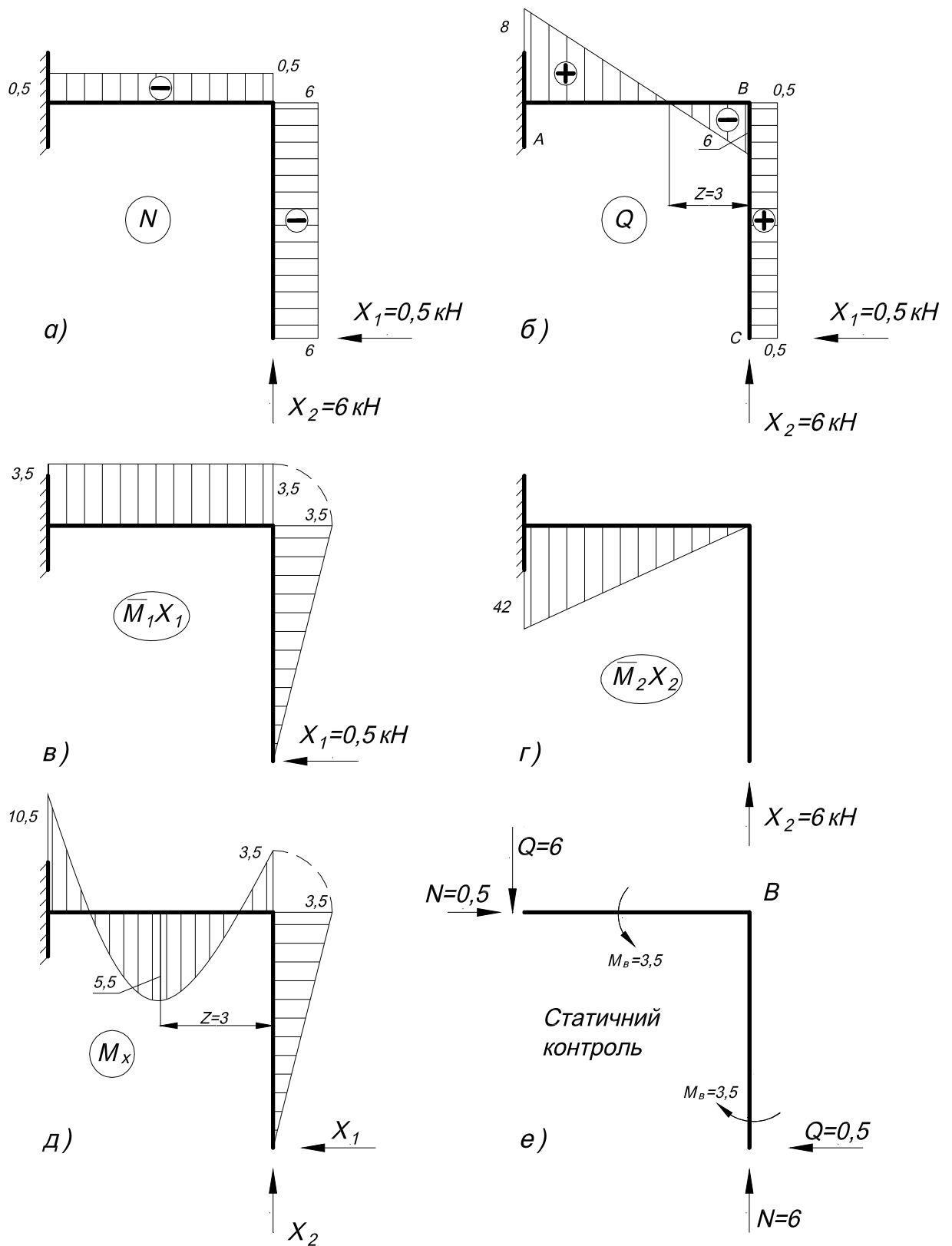


Рис. 11 Епюри внутрішніх зусиль і статичний контроль.

Статичний контроль (рис. 11 е):

$$\begin{cases} \sum Z = 0 : 0,5 - 0,5 = 0; \\ \sum Y = 0 : 6 - 6 = 0; \\ \sum M_B = 0 : -3,5 + 3,5 = 0. \end{cases}$$

Кінематичний контроль:

$$\Delta = M_x \cdot \overline{M_2} = M_p \cdot \overline{M_2} + \overline{M_1} x_1 \cdot \overline{M_2} + \overline{M_2} x_2 \cdot \overline{M_2} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} 49 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 + 3,5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 - \frac{1}{2} 42 \cdot 7 \cdot \frac{2}{3} \cdot 7 \right) = 0$$

ЗАДАЧА 2.2. БАГАТОПРОЛЬОТНІ НЕРОЗРІЗНІ БАЛКИ

Умова: побудувати епюри Q_y та M_x для заданої багатопроегінної балки. Знайти опорні реакції.

ПРИКЛАД 2.3.

Дано багатопроегінну нерозрізну балку з геометричними розмірами та зовнішнім навантаженням q (рис. 12). Розкрити статичну невизначеність системи, побудувати епюри внутрішніх зусиль та виконати статичний і кінематичний контроль.

Балка статично невизначена двічі.

«Врізаємо» шарніри в балку над проміжними опорами і робимо її розрізною, при цьому врівноважуємо її у точках врізаних шарнірів внутрішніми згинальними моментами. Зліва балка має консольне затиснення. Використовуючи прийом фіктивного прогину розкладемо консольне затиснення на шарнірно нерухому і шарнірно рухому опори з прогином між ними, який дорівнює нулю (рис. 12).

У кожному з прогінів будуємо епюри моментів та визначаємо їх площі $\Omega_{1,2,3}$ (рис. 12).

Для першої та другої опор складаємо рівняння трьох моментів, використовуючи залежність:

$$\underline{n=1}$$

$$M_0 \cdot l_1 + 2 \cdot M_1 \cdot (l_1 + l_2) + M_2 \cdot l_2 = -6 \cdot \left(\Omega_1 \cdot \frac{a_1}{l_1} + \Omega_2 \cdot \frac{b_2}{l_2} \right)$$

$$\underline{n=2}$$

$$M_1 \cdot l_2 + 2 \cdot M_2 \cdot (l_2 + l_3) + M_3 \cdot l_3 = -6 \cdot \left(\Omega_2 \cdot \frac{a_2}{l_2} + \Omega_3 \cdot \frac{b_3}{l_3} \right)$$

$$\text{де: } l_1 = 0; \quad \Omega_1 = 0; \quad M_0 = M_3 = 0.$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} 2M_1 l_2 + M_2 l_2 = -6 \Omega_2 \frac{b^2}{l_2} \\ M_1 l_2 + 2M_2 (l_2 + l_3) = -6 \left(\Omega_2 \frac{a_2}{l_2} + \Omega_3 \frac{b_3}{l_3} \right) \end{cases}$$

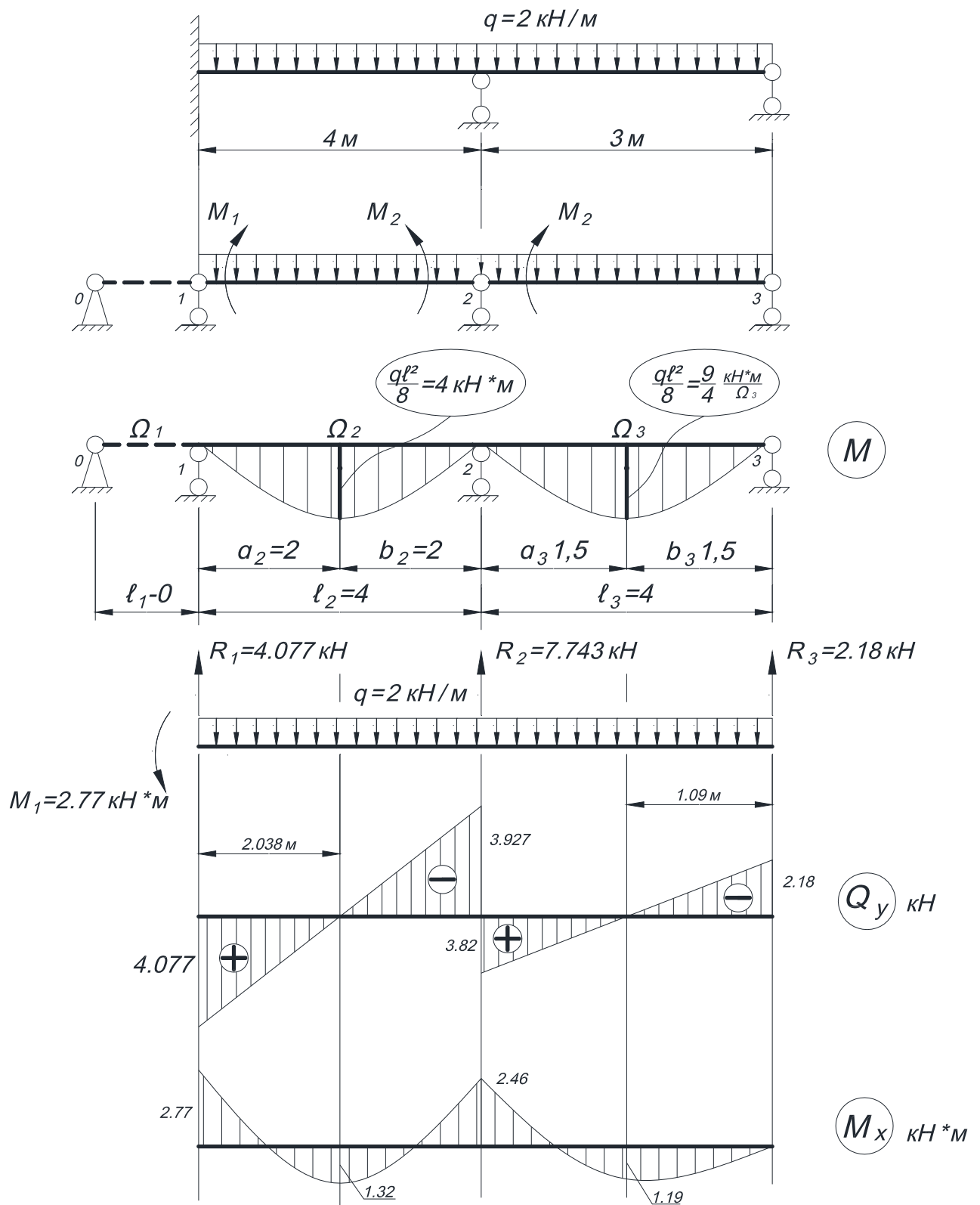


Рис. 12. Схема багатопрогінної балки.

Маємо: $l_2 = 4 \text{ м}$; $l_3 = 3 \text{ м}$; $a_2 = 2 \text{ м}$; $b_2 = 2 \text{ м}$; $a_3 = b_3 = 1,5 \text{ м}$; $\Omega_2 = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{32}{3}$;

$$\Omega_3 = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}.$$

Підставивши, отримаємо:

$$\begin{cases} 2 \cdot M_1 \cdot 4 + 4 \cdot M_2 = -6 \left(\frac{32}{3} \cdot \frac{2}{4} \right) \\ 4 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 (4 + 3) = -6 \left(\frac{32}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1,5}{3} \right); \end{cases}$$

Розв'язавши систему рівнянь, отримаємо:

$$M_1 = -2,77 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_2 = -2,46 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Знак «мінус» означає, що розтягнутими є верхні волокна балки.

Знайдемо опорні реакції:

$$R_n = R_n^0 - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} - \frac{M_n - M_{n+1}}{l_{n+1}};$$

$$R_1 = R_1^0 - \frac{M_1 - M_0}{l_1} - \frac{M_1 - M_2}{l_2};$$

$$R_1 = 4 - \frac{2,77 - 0}{0} - \frac{-2,77 + 2,46}{4} = 4,077 \text{ кН}$$

$$R_2 = R_2^0 - \frac{M_2 - M_1}{l_2} - \frac{M_2 - M_3}{l_3};$$

$$R_2 = 4 + 3 - \frac{-2,46 + 2,77}{4} - \frac{-2,46}{3} = 7,74 \text{ кН}$$

$$R_3 = R_3^0 - \frac{M_3 - M_2}{l_3} - \frac{M_3 - M_4}{l_4} = 2,18 \text{ кН}.$$

Контролі:

а) *Статичний*:

$$\sum y = 0: -R_1 - R_2 - R_3 + q \cdot z = -4,077 - 7,743 - 2,18 + 2 \cdot 7 = -14 + 14 = 0.$$

б) *Кінематичний*:

Прогин в перерізі $z=4$ м дорівнює нулю (оскільки опора)

$$EIU(z=4) = M_1 \frac{z^2}{2} - R_1 \frac{z^3}{6} + q \frac{z^4}{24} = 2,77 \frac{4^2}{2} - 4,077 \frac{4^3}{6} + 2 \frac{4^4}{24} = 43,49 - 43,49 = 0$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Як визначити ступінь статичної невизначеності системи?
2. Що таке „система” і як вот вибирається?

3. Як розкрити статично невизначену систему з допомогою теореми Кастиль'яно, Мора, Верещагіна?
4. Напишіть формулу для визначення переміщень по методу Мора.
5. Теорема Кастиль'яно.
6. В чому суть методу Верещагіна?
7. Що означають величини δ_{11} і δ_{12} ?
8. Що таке „зв'язки” і як вони визначаються?
9. Яке фізичне тлумачення добутоків $\delta_{11} \cdot x_1$; $\delta_{12} \cdot x_2$
10. Запишіть канонічні рівняння для тричі статично невизначеної системи.

3. СКЛАДНИЙ ОПІР

Вивчення складного опору загалом починають із косого згину. Нейтральна лінія при косому згині вже не перпендикулярна площині зовнішніх сил, а площина прогинів при косому згині не співпадає з площиною зовнішніх сил.

Явище косого згину особливо небезпечне для перерізів із значно відрізняючими один від одного головними моментами інерції (наприклад, для двотавра); балка з таким перерізом добре працює на згин в площині найбільшої жорсткості, але при невеликих кутах нахилу площини зовнішніх сил до площини найбільшої жорсткості в балках виникають значні додаткові напруження і деформації. Для балки круглого поперечного перерізу косий згин неможливий, поскільки всі центральні вісі такого перерізу є головними, і нейтральний шар завжди буде перпендикулярним до площини зовнішніх сил.

Косий згин також неможливий для квадратного перерізу, але для такого перерізу вирішення питання про міцність залежить від положення площини зовнішніх сил, оскільки моменти опору квадратного перерізу неоднакові відносно різних осей (хоча Моменти інерції відносно всіх центральних осей рівні між собою, як і для круглого перерізу). При розташуванні зовнішніх сил в діагональній площині розрахункове напруження в балці квадратного перерізу будуть більшими, чим в випадку, коли площина зовнішніх сил паралельна граням балки.

При визначенні напружень у випадку позацентрового розтягання або стискання необхідно знати положення головних центральних осей перерізу тому, що від цих осей відраховується відстань точки прикладання сил і точки у якій визначається

напруження.

Слід звернути увагу на те, що прикладена ексцентрично стискаюча сила може викликати в поперечному перерізі стержня розтягуючи напруження. В зв'язку з цим, позацентрове стискання є особливо небезпечним для стержнів із крихких матеріалів (чавун, бетон), які чинять незначний опір розтягання.

Потрібно навчитися встановлювати наближене положення нейтральної лінії для прямокутного поперечного перерізу при різних положеннях поздовжньої сили; при цьому важливо пам'ятати основну залежність; - якщо точка прикладання сили знаходиться в ядрі перерізу, то нейтральна лінія проходить поза контурами поперечного перерізу, якщо точка прикладання сили знаходиться поза ядром перерізу, то нейтральна лінія перетинає поперечний переріз стержня.

Необхідно звернути увагу, що при згинанні із стисканням і застосовувати приведені формули можливо лише до коротких (масивних) стержнів великої жорсткості, оскільки у випадку тонкого довгого і(гнучкого) стержня можлива втрата стійкості.

На закінчення слід розглянути загальний випадок складного опору, коли стержень випробовує одночасно розтягання (стискання), згинання у двох площинах і кручення.

Напруження в будь якому поперечному перерізі стержня залежать від M_x , M_y , M_z , Q_y , Q_z , які обчислюються таким чином:

1.момент кручення M_x дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, який розглядається, відносно вісі, перпендикулярної до площини перерізу і яка проходить через його центрваги;

2.момент згинання M_y дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил, що розташовані по один бік від перерізу який розглядається, відносно головної центральної осі у цього перерізу;

3.момент згинання M_z дорівнює алгебраїчній сумі моментів тих же сил відносно головної центральної вісі z цього перерізу;

4.поздовжня сила N дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх сил, розташованих по один бік від перерізу, на перпендикуляр до площини ¹перерізу;

5.поперечна сила Q_y дорівнює сумі проекцій тих же сил на головну центральну вісь у цього перерізу;

6. поперечна сила Q_z дорівнює сумі проєкцій тих же сил на головну центральну вісь Γ цього перерізу.

Після вивчення цієї теми необхідно вирішувати задачі на складний опір, які включені до контрольної роботи.

ЗАДАЧА № 3.1 „РОЗРАХУНОК БАЛКИ НА КОСЕ ЗГИНАННЯ”

ПРИКЛАД 3.1

Умова: підібрати номер двотаврового профілю балки, завантажену силу $P_1=60\text{кН}$ у вертикальній площині і $P_2=10\text{кН}$ – в горизонтальній площині, прийнявши $[\sigma] = 160\text{МПа}$.

Схему завантаження балки наведена на рис. 13

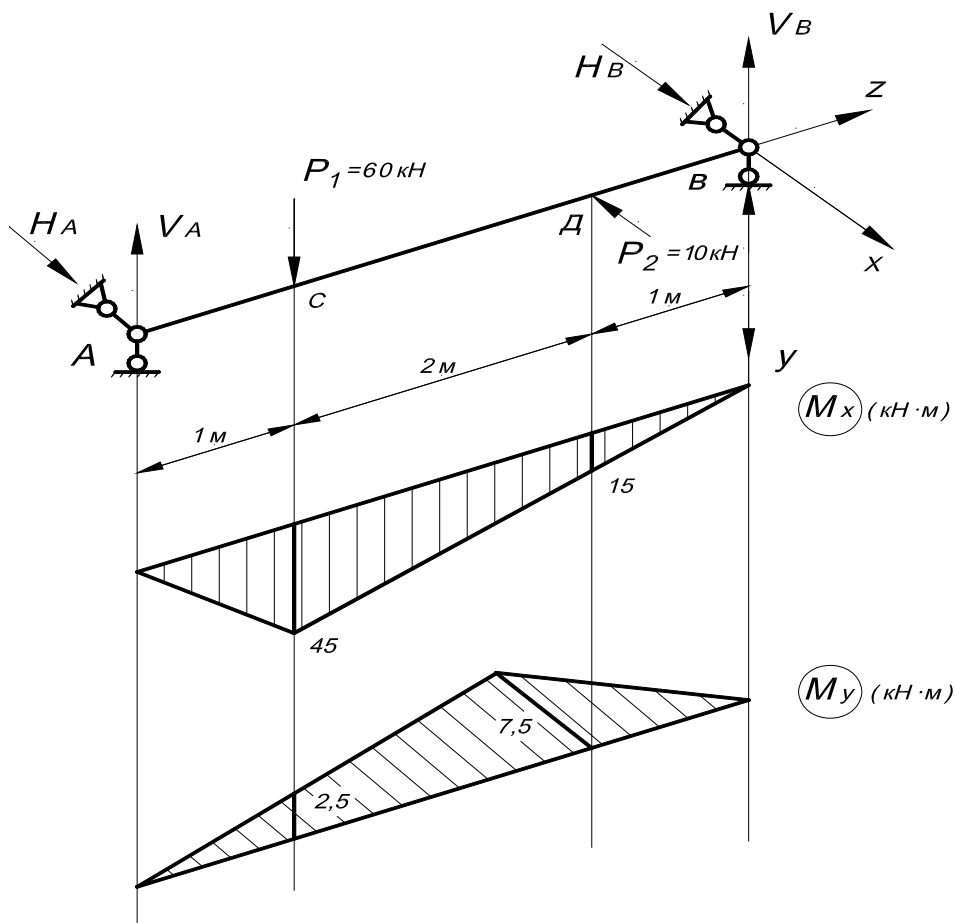


Рис. 13. Схема завантаження балки та епюри згинальних моментів у двох площинах.

1. Визначаємо опорні реакції: $V_A=45\text{кН}$; $H_A=2,5\text{кН}$; $V_B=15\text{кН}$; $H_B=7,5\text{кН}$.
2. Будуємо епюри згинальних моментів у двох площинах: M_x ; M_y (рис. 13).
3. Встановлюємо небезпечний переріз, який може бути в точках С або Д.

Припустимо, що небезпечним є переріз С, в якому:

$$M_x = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_y = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Для перерізу С визначаємо необхідний момент опору, прийнявши орієнтовно $C = \frac{W_x}{W_y} = 8,7$.

$$\text{При цьому: } W_x = \frac{M_x + cM_y}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3 + 8,7 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{160} = 417 \text{ см}^3.$$

За таблицями сортаменту приймаємо ІN30 для $W_x = 472 \text{ см}^3$; $W_y = 45,9 \text{ см}^3$.

5. Перевіряємо умови міцності для цього перерізу:

- точка С. $\max \sigma_c = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{45 \cdot 10^3}{472} + \frac{2,5 \cdot 10^3}{45,9} = 145,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$
- точка Д. $\max \sigma_d = \frac{15 \cdot 10^3}{472} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{45,9} = 182 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$

Тобто умова міцності в перерізі Д не виконується.

6. Підбираємо двотавровий переріз із умов міцності перерізу Д.

$$W_x = \frac{15 \cdot 10^3 + 8,7 \cdot 7,5 \cdot 10^3}{160} = 501 \text{ см}^3.$$

За сортаментом приймаємо ІN30а, для якого $W_x = 518 \text{ см}^3$; $W_y = 60,1 \text{ см}^3$.

7. Перевіряємо умови міцності:

- точка Д. $\max \sigma_d = \frac{15 \cdot 10^3}{518} + \frac{7,5 \cdot 10^3}{60,1} = 154 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$
- точка С. $\max \sigma_c = \frac{45 \cdot 10^3}{518} + \frac{2,5 \cdot 10^3}{60,1} = 128,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$

Кінцево приймаємо ІN30а.

ПРИКЛАД 3.2:

Умова задачі: дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою Р в точці А і горизонтальною силою в точці В (обидві точки розташовані на вісі балки). На опорах балки можуть виникати, як вертикальні, так і горизонтальні реакції, направлені перпендикулярно до площини рисунку.

Необхідно:

- 1) побудувати епюри $M_{\text{верт}}$ і $M_{\text{гор}}$ і встановити положення небезпечного перерізу;
- 2) підібрати розміри поперечного перерізу h і b по допустимих напруженнях;
- 3) визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі балки і побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень в аксонометрії.

Дано: $P = 20 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $h/b = 1,5$; $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$. Схема зображена на рис.14.

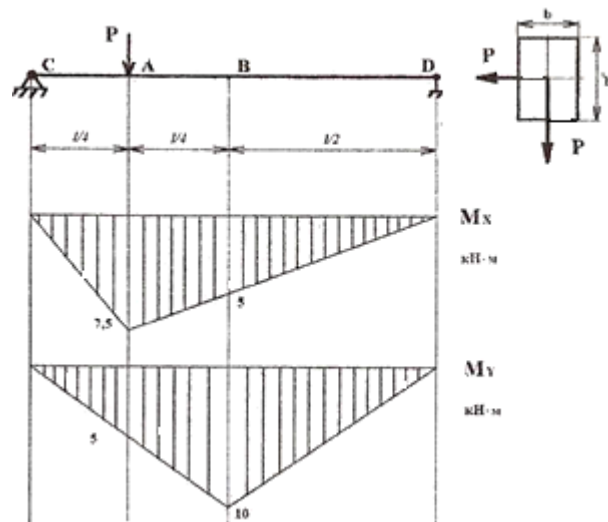


Рис.14. Схема балки з епюрами моментів згинання

- 1) Побудуємо епюри моментів згинання $M_{\text{верт}}$ і $M_{\text{гор}}$ від дії прикладених сил та визначимо положення небезпечного перерізу

$$M = M ; M = M = 0;$$

$$M_A = \frac{P \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}}{1} = \frac{3 \cdot P \cdot 1}{16} = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = \frac{2}{3} \cdot M_A = \frac{2}{3} \cdot 7,5 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = \frac{P \cdot 1}{4} \cdot M_A = \frac{2 \cdot 2}{4} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Небезпечний переріз В-В.

2) Із умов міцності по нормальним напруженням підбираємо розміри прямокутного поперечного перерізу

Необхідний момент опору:

Де – відношення сторін прямокутника поперечного перерізу.

$$W_x = 2000 \text{ см}^3$$

Момент опору для прямокутного поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; \quad b = \frac{h}{1,5}; \quad W_x = \frac{h^3}{6 \cdot 1,5} = \frac{h^3}{9} = 2000 \text{ см}^3$$

$$h = \sqrt[3]{9 \cdot 2000} = \sqrt[3]{18000} = 26,2 \text{ см}; \quad b = \frac{h}{1,5} = \frac{26,2}{1,5} = 17,46 \approx 17,5 \text{ см}$$

Визначаємо положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі:

$$\operatorname{tg} \varphi = \kappa \cdot \frac{M_y}{M_x} = \left(\frac{h}{b}\right)^2 \cdot \frac{M_y}{M_x} = (1,5)^2 \cdot \frac{10000}{5000} = 4,5; \quad \varphi = \operatorname{arctg}(4,5) = 77,5^\circ$$

Знаходимо напруження:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y}{I_x} + \frac{M_y \cdot x}{I_y}$$

де I_x, I_y - моменти інерції поперечного перерізу.

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{17,5 \cdot 26,2^3}{12} = 26228 \text{ см}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{26,2 \cdot 17,5^3}{12} = 11701 \text{ см}^4$$

Точка 1.

$$X = -8,75 \text{ см}$$

$$Y = -13,1 \text{ см}$$

Точка 2.

$$X = -8,75 \text{ см}$$

$$Y = 13,1 \text{ см}$$

Точка 3.

Точка 4.

ЗАДАЧА № 3.2. „РОЗРАХУНОК СТЕРЖНІВ НА ПОЗАЦЕНТРОВЕ РОЗТЯГАННЯ-СТИСКАННЯ”

Для стрижня прямокутного поперечного перерізу з розмірами $a=60\text{см}$, $b=30\text{см}$ завантажено силою $P=90 \text{ кН}$, прикладеною в точці A з координатами $x_p=15\text{см}$, $y_p=10\text{см}$ (рис.14) необхідно: побудувати плоску і просторову епюри нормальних напружень; перевірити умови міцності, прийнявши $[\sigma]_c = 10 \text{ МПа}$, $[\sigma]_p = 2,0 \text{ МПа}$, знайти значення допустимого навантаження із умов міцності на стиск і розтяг; побудувати ядро перерізу.

Розв’язання:

1. Визначаємо відрізки, які відсікає нульова лінія на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_P},$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_P},$$

$$i_y^2 = -\frac{I_y}{F} = -\frac{b \cdot a^3}{12 \cdot b \cdot a} = -\frac{a^2}{12} = 300 \text{ см}^2,$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{F} = \frac{a \cdot b^3}{12 \cdot a \cdot b} = \frac{b^2}{12} = 75 \text{ см}^2,$$

$$a_x = -\frac{300}{15} = -20 \text{ см},$$

$$a_y = -\frac{75}{10} = -7,5 \text{ см}.$$

2. Визначаємо значення нормальних напружень у кутових (контурних) точках і будуємо плоску і просторову епюри нормальних напружень (рис. 15).

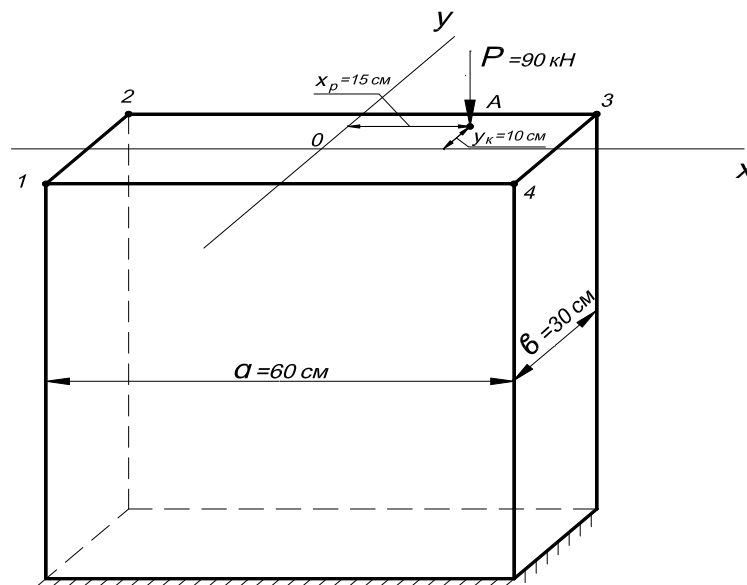
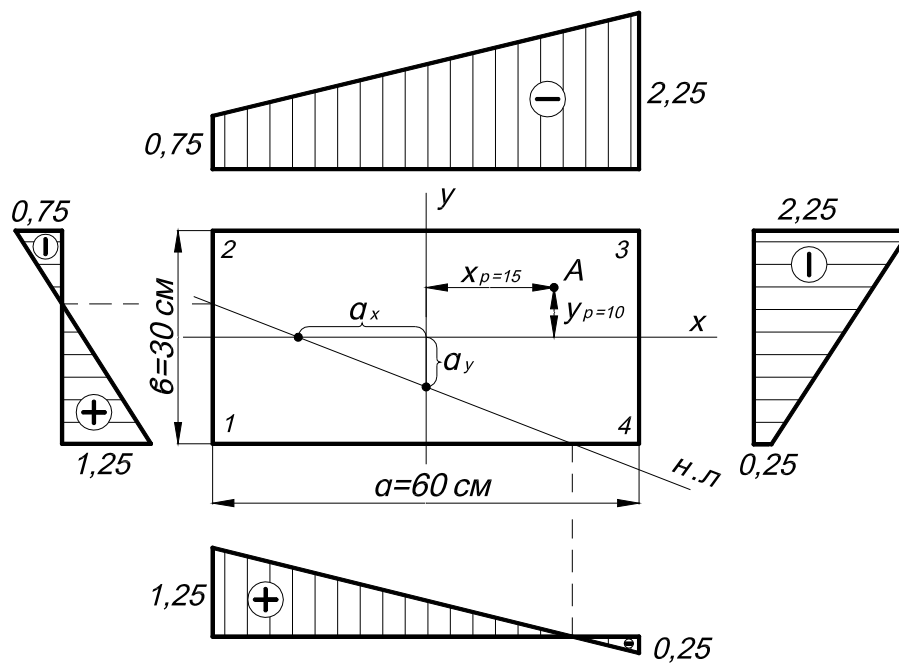
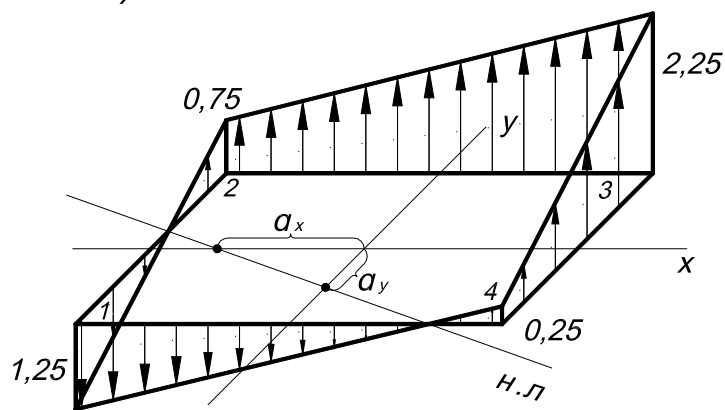


Рис. 14. Схема завантаження стрижня при позацентровому стиску.



а)



б)

Рис. 15. Епюри нормальних напружень:

а – плоска; б – просторова.

Нормальні напруження визначаються за формулою :

$$\sigma = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} \right)$$

точка 1

$$y = -15 \text{ см};$$

$$x = -30 \text{ см}.$$

$$\sigma_{(1)} = -\frac{90}{60 \cdot 30} \cdot \left(1 + \frac{10 \cdot (-15)}{75} + \frac{15 \cdot (-30)}{300} \right) = 1,25 \text{ МПа};$$

точка 2

$$y = 15 \text{ см};$$

$$x = -30 \text{ см}.$$

$$\sigma = -\frac{90}{60 \cdot 30} \left(1 + \frac{10 \cdot 15}{75} + \frac{15 \cdot (-30)}{300} \right) = 0,75 \text{ МПа};$$

точка 3

$$y = 15 \text{ см};$$

$$x = 30 \text{ см}.$$

$$\sigma = -\frac{90}{60 \cdot 30} \left(1 + \frac{10 \cdot 15}{75} + \frac{15 \cdot 30}{300} \right) = -2,25 \text{ МПа}$$

точка 4

$$y = -15 \text{ см};$$

$$x = 30 \text{ см}.$$

$$\sigma = -\frac{90}{60 \cdot 30} \left(\frac{10 \cdot (-15)}{75} + \frac{15 \cdot 30}{300} \right) = -0,25 \text{ МПа}.$$

3. Перевіряємо умови міцності:

На розтяг (точка 1):

$$\sigma_{(1)} = 1,25 \text{ МПа} < [\sigma]_p = 2,0 \text{ МПа}$$

На стиск (точка 3):

$$\sigma_{(3)} = 2,25 \text{ МПа} < [\sigma]_c = 10,0 \text{ МПа}$$

Умови на стиск і розтяг виконуються.

4. Визначаємо величину допустимого навантаження стрижня із умов міцності:

На стиск (точка 3):

$$\sigma = -\frac{P}{F} \cdot \left(1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2} \right)$$

$$[P]_c = \frac{[\sigma]_c \cdot F}{1 + \frac{y_p \cdot y_3}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_3}{i_y^2}} = \frac{-10,0 \cdot 60 \cdot 30}{1 + \frac{10 \cdot 15}{75} + \frac{15 \cdot 30}{300}} = -400 \text{ кН}$$

Перевіряємо умови міцності на розтяг точки 1:

$$\sigma_{(1)} = \frac{400}{60 \cdot 30} \left(1 + \frac{10 \cdot (-15)}{75} + \frac{10 \cdot (-30)}{300} \right) = 3,8 \text{ МПа} > [\sigma] = 2,0 \text{ МПа}$$

Відбудеться руйнування в точці 1.

Визначаємо величину допустимого навантаження із умов міцності на розтяг (точка 1):

$$[P]_p = - \frac{[\sigma]_p \cdot F}{1 + \frac{y_p \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x}{i_y^2}} = \frac{2,0 \cdot 30 \cdot 60}{1 + \frac{10(-15)}{75} + \frac{15(-30)}{300}} = -144 \text{ кН}$$

Визначаємо величину напружень в точці 3:

$$\sigma_{(3)} = - \frac{144}{60 \cdot 30} \left(1 + \frac{10 \cdot 15}{75} + \frac{15 \cdot 30}{300} \right) = -3,6 \text{ МПа} < [\sigma]_c = -10,0 \text{ МПа}$$

Умова міцності виконується. Таким чином, приймаємо величину допустимого навантаження із умов міцності на розтяг, яке дорівнює 144 кН.

Будуємо епюру нормальних напружень від допустимого значення навантаження (рис. 16).

5. Побудуємо ядро перерізу (рис. 17).

Для цього використовуємо метод, коли нульовою лінією «обходимо» контур поперечного перерізу, а полюс прикладеної сили викреслює ядро.

$$x_p = - \frac{i_y^2}{a_x} ; \quad y_p = - \frac{i_x^2}{a_y} .$$

Положення нульової лінії I-I

$$I - I : a_x = \infty ;$$

$$a_y = \frac{b}{2} = 15 \text{ см} .$$

$$x_p = - \frac{300}{\infty} = 0$$

$$y_p = - \frac{75}{15} = -5 \text{ см}$$

На (рис.16) – точка 1.

Положення нульової лінії II-II

$$a_y = \infty ; a_x = 30 \text{ см} ; y_p = - \frac{75}{\infty} = 0 ; x_p = - \frac{300}{30} = -10 \text{ см} .$$

Положення нульової лінії III-III

$$a_y = 15 \text{ см}; a_x = 0; y_p = -\frac{75}{15} = 5 \text{ см}; x_p = -\frac{300}{\infty} = 0.$$

Положення нульової лінії IV-IV

$$a_y = \infty \text{ см}; a_x = -30 \text{ см}; y_p = -\frac{75}{\infty} = 0; x_p = -\frac{300}{-30} = 10 \text{ см}.$$

З'єднуючи точки 1,2,3,4, отримуємо ядро перерізу (рис.17), яке має форму ромба.

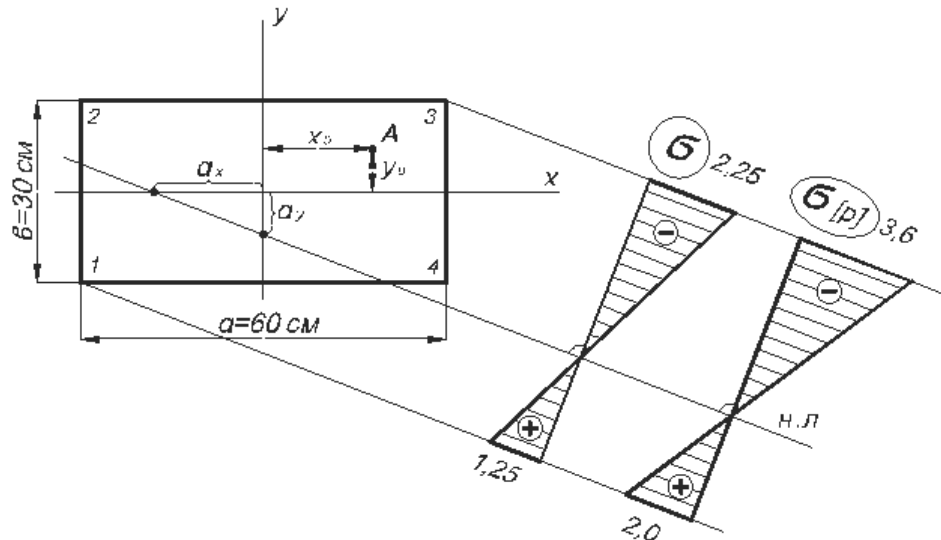


Рис. 16. Плошка еюра нормальних напружень від допустимого значення навантаження із умов міцності на розтяг.

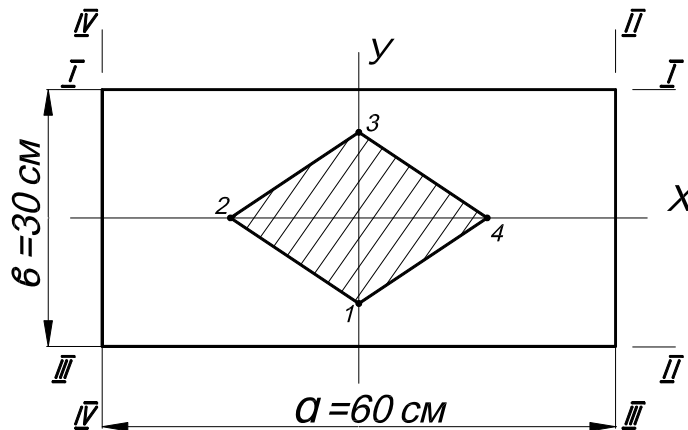


Рис. 17. Побудова ядра перерізу.

ПРИКЛАД 3.4:

Умова задачі: Чавунний короткий стержень, стискається поздовжньою силою Р прикладеного в точці А. Необхідно:

- 1) обчислити найбільше напруження розтягання і стискання в поперечному перерізі, виразивши значення цих напружень через Р і розміри перерізу.

2) знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуну на стискання [σ]_{ст} і розтягання [σ]_р.

Дано: a = 5 см; b = 5 см; [σ]_{ст} = 150 МПа; [σ]_р = 25 МПа. Схема завантаження колони зображена на рис. 18.

1) Визначаємо положення головних центральних осей інерції перерізу прийнявши за початок відліку центр ваги першу (нижню) фігуру:

$$Z_c = 0 \quad Y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{0 + 5 \cdot 10 \cdot 7,5}{10 \cdot 5 + 10 \cdot 5} = 3 \text{ см}$$

2) Визначаємо величини головних центральних моментів інерції і радіусів інерції:

$$I_y = \frac{10 \cdot 5^3}{12} + \frac{5 \cdot 15^3}{12} = 1510,42 \text{ см}^4$$

$$i^2_y = \frac{I_y}{F} = \frac{1510,42}{125} = 12,08 \text{ см}^2$$

$$I_z = \frac{5 \cdot 10^3}{12} + (4,5)^2 \cdot 10 \cdot 5 + \frac{15 \cdot 5^3}{12} + (-3)^2 \cdot 15 \cdot 5 = 2260,42 \text{ см}^4$$

$$i^2_z = \frac{I_z}{F} = \frac{2260,42}{125} = 18,08 \text{ см}^2$$

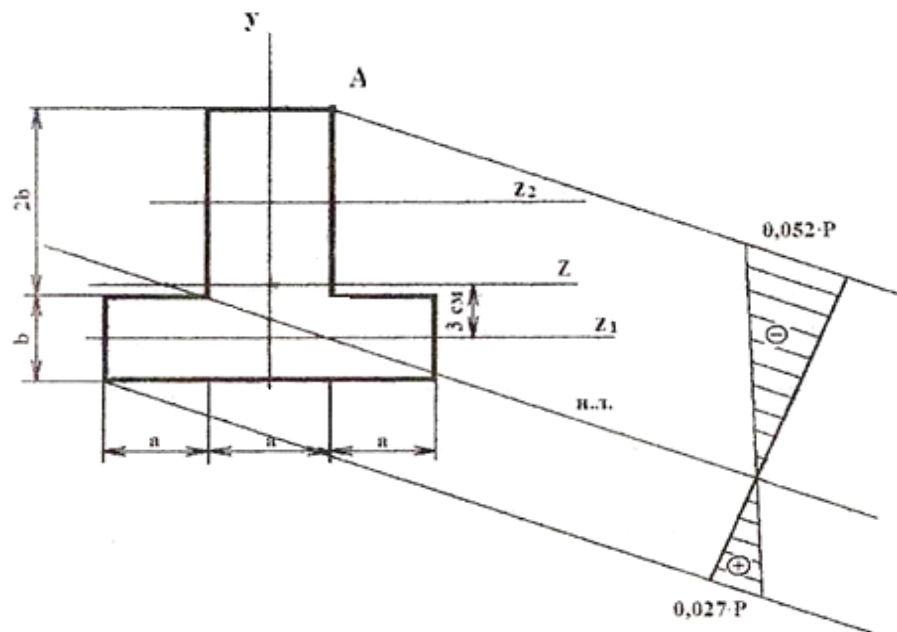


Рис.18. Схема до задачі із побудовою епюри нормальних напружень

3) Визначаємо положення нульової лінії (н.л.) для знайденої точки прикладання сили P:

$$a_z = -\frac{i^2_y}{Z_p} = -\frac{12,08}{2,5} = -4,83 \text{ см}$$

$$a_y = -\frac{i^2_z}{Y_p} = -\frac{18,08}{9,5} = -1,98 \text{ см}$$

4) Визначаємо напруження в найбільш напружених точках прикладання сили

P:

$$\sigma_A = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{Y_p \cdot y_A}{I_z} + \frac{Z_p \cdot z_A}{I_y} \right) = -\frac{P}{125} \left(1 - \frac{9,5 \cdot 9,5}{18,08} + \frac{2,5 \cdot 2,5}{12,08} \right) = -0,052 \cdot P$$

$$\sigma_B = -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{Y_p \cdot y_B}{I_z} + \frac{Z_p \cdot z_B}{I_y} \right) = -\frac{P}{125} \left(1 - \frac{9,5 \cdot (-5,5)}{18,08} + \frac{2,5 \cdot (-7,5)}{12,08} \right) = 0,027 \cdot P$$

5) Визначаємо допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях:

т.А

т.В

Приймаємо [P]=91 кН тобто із умови міцності на розтягання при цьому:

$$\sigma_A = -\frac{91 \cdot 10^3}{0,0125} (1 + 4,99 + 0,55) = 47288640 \text{ Па} \approx 47,2 \text{ МПа}$$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Який випадок згинання називають косим згинанням?
2. Чи можливе косе згинання при чистому згинанні?
3. В яких точках поперечного перерізу виникають найбільші напруження при косому згинанні?
4. Як знаходиться положення нейтральної лінії при косому згинанні?
5. Як пройде нейтральна лінія, якщо площина дії сил проходить по діагоналі балки прямокутного перерізу?
6. Як визначаються деформації при косому згинанні?
7. Чи може балка круглого поперечного перерізу випробувати косе згинання?
8. Як знаходяться напруження в довільній точці поперечного перерізу при поза центровому стисканні чи розтяганні?
9. Чому дорівнює напруження в центрі ваги поперечного перерізу при поза центровому розтяганні чи стисканні?
10. Яке положення займає нейтральна лінія, коли поздовжня сила прикладена в вершині ядра перерізу?
11. Які напруження виникають в поперечному перерізі стержня при згинанні закрученням?
12. Як знаходяться небезпечні перерізи стержня при згинанні з крученням?

13. В яких точках круглого поперечного перерізу виникають найбільші напруження при згині з крученням?
14. Чому здебільшого не враховують дотичні напруження від згинання при сумісній дії згинання з крученням?
15. Який вигляд мають умови міцності стержня по всіх чотирьох теоріях, якщо відомі нормальні і дотичні напруження?
16. Як знаходять величину розрахункового моменту при згинанні з крученням стержня круглого поперечного перерізу?
17. По якій теорії міцності (третьої чи четвертій) буде більша величина

розрахункового моменту при заданих величинах

?

4. СТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ ДЕФОРМОВАНИХ СИСТЕМ

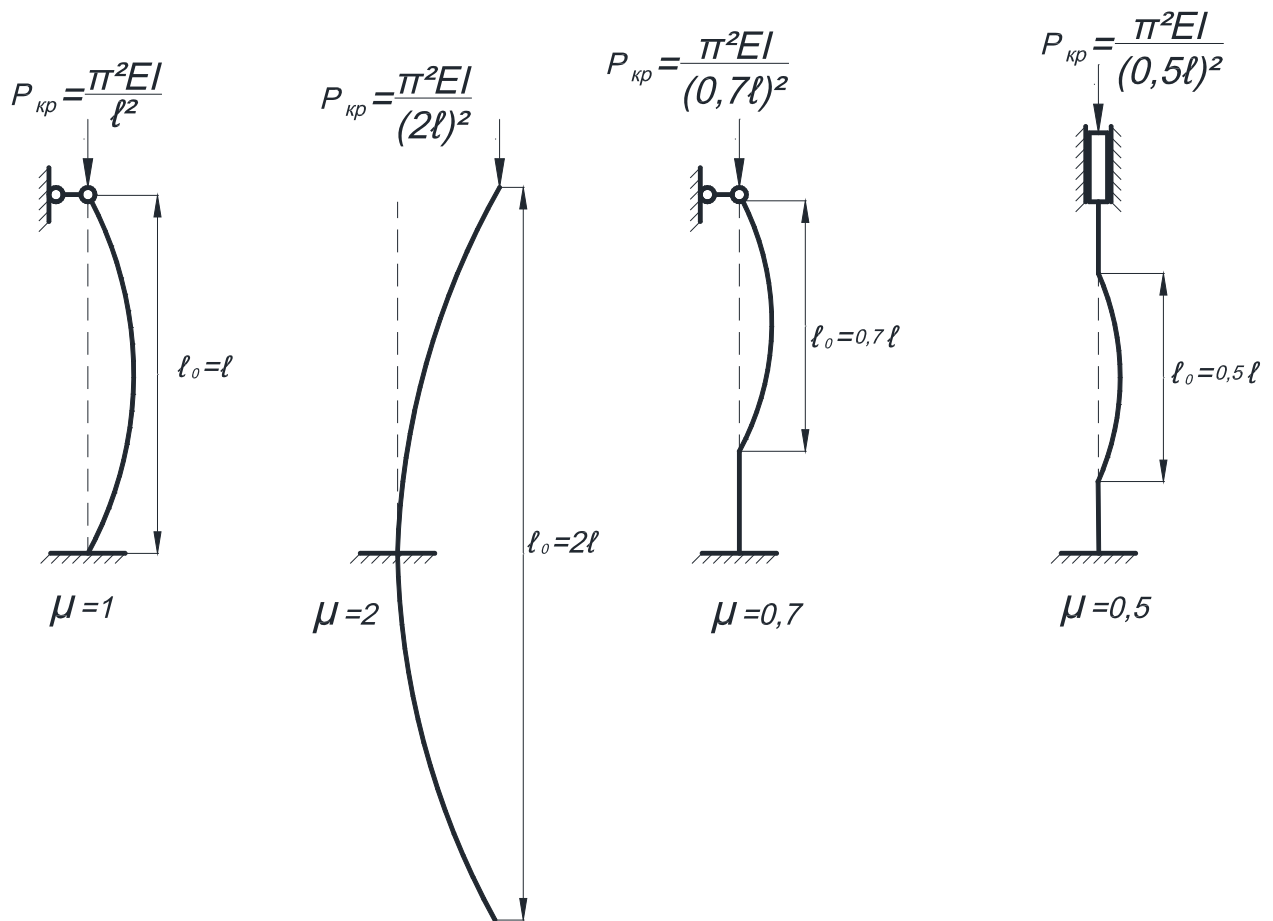
До цих пір поперечині розміри стержнів визначались із умови міцності жорсткості. Але руйнування може відбутися тому, що стержень не зберігає свою початкову форму рівноваги. В цій темі викладено розрахунок на стійкість. Небезпечність явища втрати стійкості в тому, що вона може наступити при напруженні, значно меншому границі міцності матеріалу (те напруження називають критичним). Для стержнів великої гнучкості його визначають за формулою Ейлера. Дослідження професора Ф.С. Ясинського дали можливість встановити величину критичного напруження для стержнів малої і середньої гнучкості, для яких формулу Ейлера застосувати неможна

Допустиме напруження при розрахунку на стійкість повинно бути знижене порівняно з допустимим напруженням при звичайному стисканні. Величина Φ , яка враховує це зниження (коефіцієнт поздовжнього згинання), для стержнів різної гнучкості і для різних матеріалів приводиться в таблиці довідникової літератури.

Слід мати на увазі, що при підборі перерізу приходиться декілька разів виконувати обчислення, застосовуючи метод послідовних наближень.

Після вивчення цієї теми потрібно розв'язати задачу на стійкість при стисканні, яка є складовою контрольної роботи.

В інженерній практиці можливі такі умови закріплення кінців центрально стиснутого стрижня (рис. 19):



Р

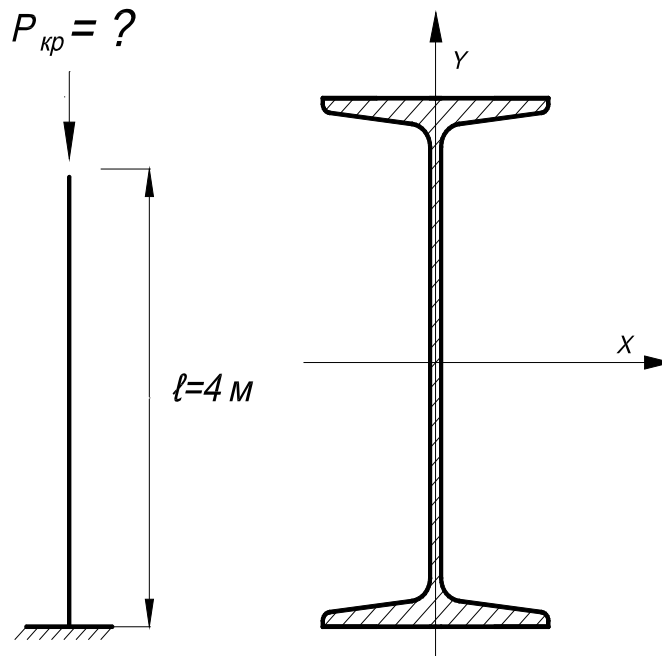
ис. 19. Можливі варіанти закріплення кінців стрижня.

Для кожного випадку закріплення стрижня необхідно виконати розрахунок, аналогічний Ейлеровому. Результати підтвердили, що ці розрахунки можна відтворити у єдиній узагальнюючій формулі:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

де: $\mu l = l_0$ – приведена довжина до шарнірно закріпленого стрижня, а μ – коефіцієнт приведення довжини, який залежить від умов закріплення стрижня.

Розглянемо приклад обчислення критичної сили для стрижня двотаврового перерізу, затиснутого нижнім кінцем (рис. 20):



$$\mu=2$$

Рис. 20. Схема завантаження двотаврового стрижня.

ЗАДАЧА №4 „СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ”

ПРИКЛАД 4.1

Дано: І№22: $I_x = 2560 \text{ см}^4$, $I_y = 157 \text{ см}^4$, $F = 30,6 \text{ см}^2$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Стрижень втратить стійкість у площині меншої жорсткості, тому необхідно прийняти $I_{\min} = I_y = 157 \text{ см}^4$

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 157}{(2 \cdot 400)^2} = 507,9 \text{ кН},$$

Критичне напруження:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{507,9}{30,6} = 16,6 \text{ МПа}, \quad [\sigma] = 210,0 \text{ МПа}.$$

Оскільки величина допустимого напруження $[\sigma] = 210,0 \text{ МПа}$, а у нас напруження $\sigma_{кр} = 16,6 \text{ МПа}$, то очевидна актуальність проблеми розрахунку стрижня на стійкість.

При цьому дійсне напруження повинно бути меншим за критичне.

ПРИКЛАД 4.2

Підібрати двотавровий поперечний переріз центрально стиснутого стрижня, затиснутого нижнім кінцем і завантаженого силою $P=1200\text{кН}$. Довжина стрижня $l=2,6$ м. (рис. 21).

$$[\sigma] = 210,0 \text{ МПа}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$$

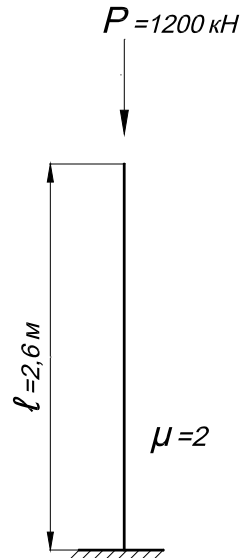


Рис. 21. Схема завантаження стрижня.

У першому наближенні вважаємо $\varphi_0 = 0,5$

$$F = \frac{1200}{0,5 \cdot 210} = 114 \text{ см}^2$$

За таблицями сортаменту вважаємо:

I №55

для якого

$$F = 114 \text{ см}^2$$

$$i_{\min} = 3,44 \text{ см}$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i} = \frac{2 \cdot 260}{3,44} = 151$$

Для такої гнучкості за таблицею знаходимо :

$$\varphi_{(151)} = 0,3$$

Визначаємо напруження:

$$\sigma_p = \frac{1200}{0,32 \cdot 114} = 329,8 \text{ МПа} > [\sigma] = 210 \text{ МПа} - \text{перевантаження.}$$

У другому наближенні вважаємо:

I №60

$$F = 132 \text{ см}^2$$

$$i_{\min} = 3,6 \text{ см}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 260}{3,6} = 144$$

$$\varphi_{(144)} = 0,34, \text{ при } \lambda = 144$$

Підставивши у вираз, отримуємо:

$$\sigma_p = \frac{1200}{0,34 \cdot 132} = 267,4 \text{ МПа} > [\sigma] = 210 \text{ МПа}, \text{ що складає перевантаження більше } 5\%.$$

У подальшому приймаємо:

I №65

$$F = 153 \text{ см}^2$$

$$i_{\min} = 3,77 \text{ см}$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 260}{3,77} = 138$$

$$\text{За ттаблице знаходимо } \varphi_{(138)} = 0,7$$

Розрахункове навантаження становить :

$$\sigma_p = \frac{1200}{0,7 \cdot 153} = 212 \text{ МПа} > [\sigma] = 210 \text{ МПа}$$

Перевантаження становить:

$$\frac{212 - 210}{212} \cdot 100\% = 0,94\%, \text{ що менше } 5\%.$$

Знайдемо величину критичної сили:

$$P_{кр} = \sigma_{кр} \cdot F = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot F = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{138^2} \cdot 153 = 1663 \text{ кН}.$$

Знайдемо коефіцієнт запасу стійкості:

$$k_{ст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1663}{1200} = 1,39 \text{ р} - \text{ коефіцієнт запасу стійкості, який знаходиться у межах}$$

нормативного значення.

Наприкінці вважаємо двутавр № 65.

ПРИКЛАД 4.3.

Умова задачі:

Для стержня з заданою довжиною, опорними закріпленнями і типом поперечного перерізу необхідно:

- 1) із умови стійкості стержня підібрати номер прокатного профілю, прийнявши для Ст 3 допустиме напруження $[\sigma] = 160$ МПа;
- 2) із умови стійкості окремих гілок стержня визначити відстані між планками для з'єднання профілів.

Дано: $P = 620$ кН; $l = 6$ м. Схема завантаженням стержня зображена на рис.22

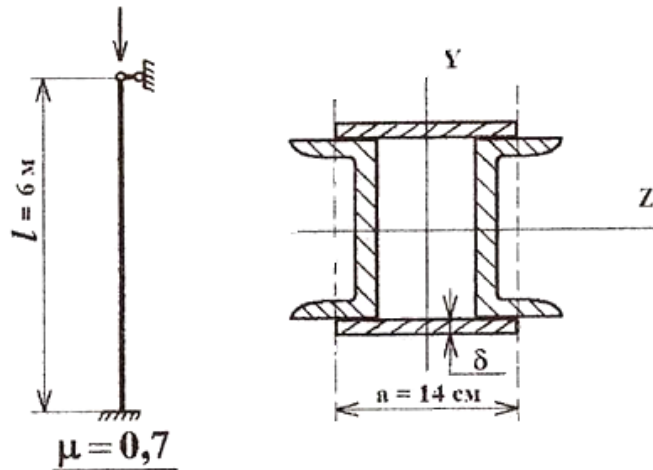


Рис.22. Схема завантаження до задачі

Приймаємо 2 швелера із №30

Із сортаменту для швелера маємо: $F = 40,5$ см²; $i_z = 12,0$ см

$$\lambda_z = \frac{M_z \cdot l}{i_z} = \frac{0,7 \cdot 600}{12} = 35$$

Знаходимо за таблицею значення поздовжнього згинання φ_1

Усереднюємо значення коефіцієнту

$$\varphi_1 = 0,935 \quad \varphi_{\text{сер}} = \frac{0,5 + 0,935}{2} = 0,717$$

Робимо друге наближення.

Приймаємо 2 швелера №22.

$$F = 26,7 \text{ см}^2 \quad i_z = 8,89 \text{ см}$$

Визначаємо величину гнучкості

$$\lambda_z = \frac{0,7 \cdot 600}{8,89} = 47,2 \quad \varphi_z = 0,899$$

Приймаємо 2 швелера №20

$$F = 23,4 \text{ см}^2 i_z = 8,07 \text{ см}$$

$$\lambda_z = \frac{0,7 \cdot 600}{8,07} = 52,04; \quad \varphi_z = 0,884$$

$$\varphi[\delta] = 0,884 \cdot 160 = 141,44 \text{ МПа}$$

Перевантаження $\Delta = \frac{141,44 - 132,5}{141,44} \cdot 100\% = 6,32\%$

Приймаємо 2 швелера №18 а

$$F = 22,2 \text{ см}^2 i_z = 7,32 \text{ см}$$

$$\lambda_z = \frac{0,7 \cdot 600}{7,32} = 52,04; \quad \varphi_z = 0,872$$

$$\varphi[\delta] = 0,872 \cdot 160 = 139,5 \text{ МПа}$$

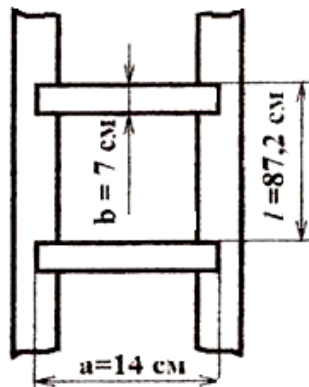


Рис.23. Геометричні розміри з'єднання профілів

Перевантаження $\Delta = \frac{139,6 - 139,5}{139,6} \cdot 100\% = 0,08\%$

За кінцевим рішенням приймаємо кінцево 2 швелера №18а $I_{\max} = I_z = 7,32 \text{ см}$

$$I_{\min} = I_y = 2,18 \text{ см} \quad t = 0,51 \text{ см.}$$

Визначаємо відстань „а” – відстань між швелерами:

Визначаємо решту відстаней (зображено на рис. 23).

$$B = 0,5 \cdot a = 0,5 \cdot 14 = 7 \text{ см}$$

$$\delta = 0,7 \cdot t = 0,7 \cdot 0,51 = 0,36 \text{ см}$$

із умови стійкості визначаємо відстані між пластинами:

$$l = 40 \cdot i_{\min} = 40 \cdot 2,18 = 87,2 \text{ см}$$

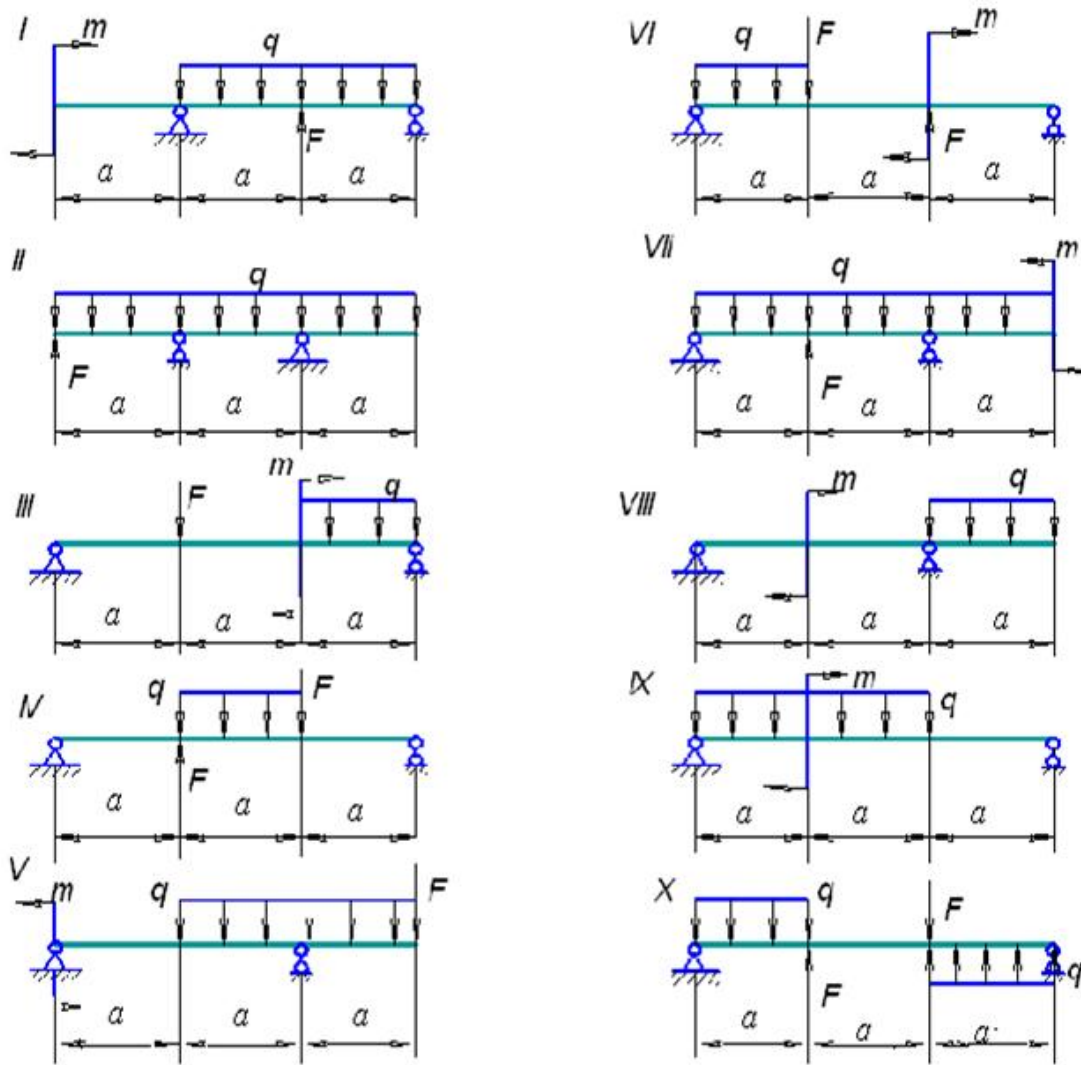
КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ ДО ТЕМИ

1. В чому суть явища втрати стійкості стиснутого стержня?
2. Яку силу називають критичною?
3. По якій формулі знаходиться величина критичної сили?
4. Як зміниться величина критичної сили для стержня круглого поперечного перерізу при зменшенні діаметра в два рази?
5. Як зміниться величина критичної сили при зменшенні довжини стержня в два рази?
6. В яких межах застосовується формула Ейлера?
7. Що називають гнучкістю стержня?
8. Як впливає на величину критичної сили спосіб закріплення кінців стержня?
9. Чому дорівнює коефіцієнт приведення довжини для різних умов закріплення кінців стержня?
10. Як знаходиться критичне напруження для стержня малої і середньої гнучкості?
11. Який вигляд має графік критичних напружень?
12. Яка залежність між гнучкістю λ і коефіцієнтом поздовжнього згину φ ?
13. Як підбирається переріз стержня при розрахунку на стійкість?

ЗАВДАННЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ**ЗАДАЧА 1.**

Визначити прогин вільного кінця балки будь-яким методом

№	F, КН	q, КН/м	M, КН·м	a, м
1	10	5	7	2
2	20	10	8	1
3	30	2	12	3
4	40	3	14	2
5	15	4	10	5
6	25	7	9	4
7	35	8	13	3
8	5	12	14	4
9	45	4	17	2
10	10	7	9	1

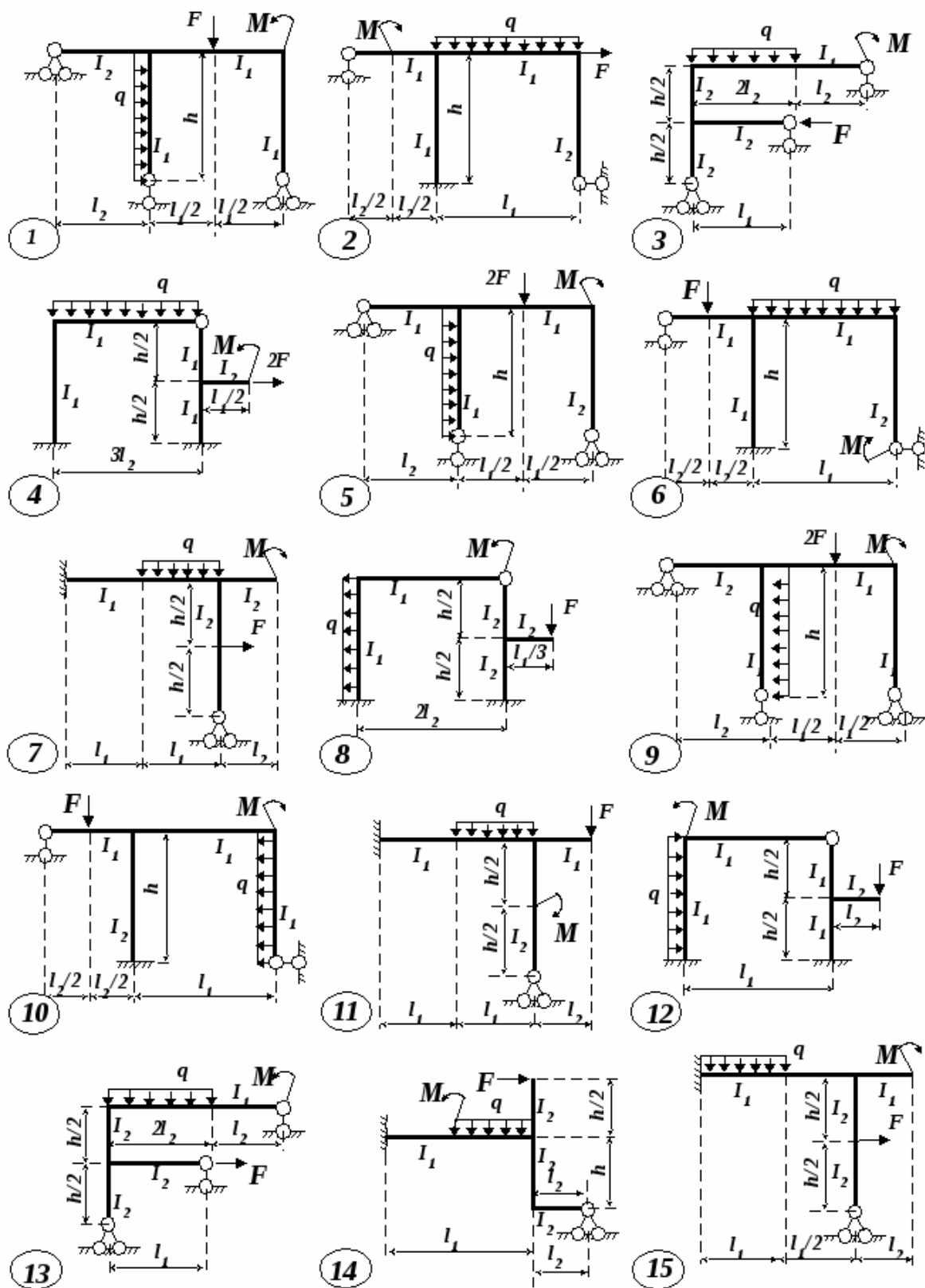


ЗАДАЧА 2.1

Для зображеної на рисунку рами необхідно:

1. вибрати основну систему методу сил;
2. скласти канонічні рівняння; побудувати для основної системи одиничні і вантажні епюри моментів згинання;
3. визначити одиничні і вантажні переміщення;
4. знайти „зайві” невідомі;
5. побудувати епюри моментів згинання, поперечних і поздовжніх сил для статично невизначеної рами

Номер варианта	F , кН	q , кН/м	M , кН·м	h , м	l_1 м	l_2 м	l_1 / l_2
1	12	3	15	8	6	3	1,5
2	16	4	12	7	7	4	2,0
3	18	5	16	6	5	5	2,5
4	20	6	18	5	8	3	2,0
5	10	7	20	4	6	5	1,5
6	12	8	14	5	5	7	2,0
7	20	9	24	6	5	4	2,5
8	22	10	18	7	6	3	2,0
9	24	8	10	3	8	4	1,5
10	26	7	12	4	5	5	2,0
11	28	9	15	5	6	3	2,5
12	14	6	16	6	6	5	2,0
13	16	4	20	7	7	4	1,5
14	20	5	25	4	8	3	2,0
15	15	3	15	6	5	4	2,5



ЗАДАЧА 2.2

Для даної багато прольотної балки визначити:

- ступінь статичної невизначеності;
- побудувати епюри M_x і Q_y ;
- знайти опорні реакції

Номер варіанта	F , кН	q , кН/м	M , кН·м	L_1 , м	L_2 , м	L_3 , м
1	22	3	18	6	8	4
2	16	4	27	7	9	6
3	18	5	30	8	12	9
4	20	6	15	6	9	6
5	20	7	24	8	9	7
6	22	8	25	7	10	8
7	30	9	16	5	9	7
8	26	10	40	6	8	5
9	24	8	30	6	9	7
10	28	7	14	8	12	6
11	18	9	18	6	9	8
12	24	6	16	10	15	12
13	26	4	27	8	12	6
14	20	5	40	9	15	10
15	25	7	20	6	10	8

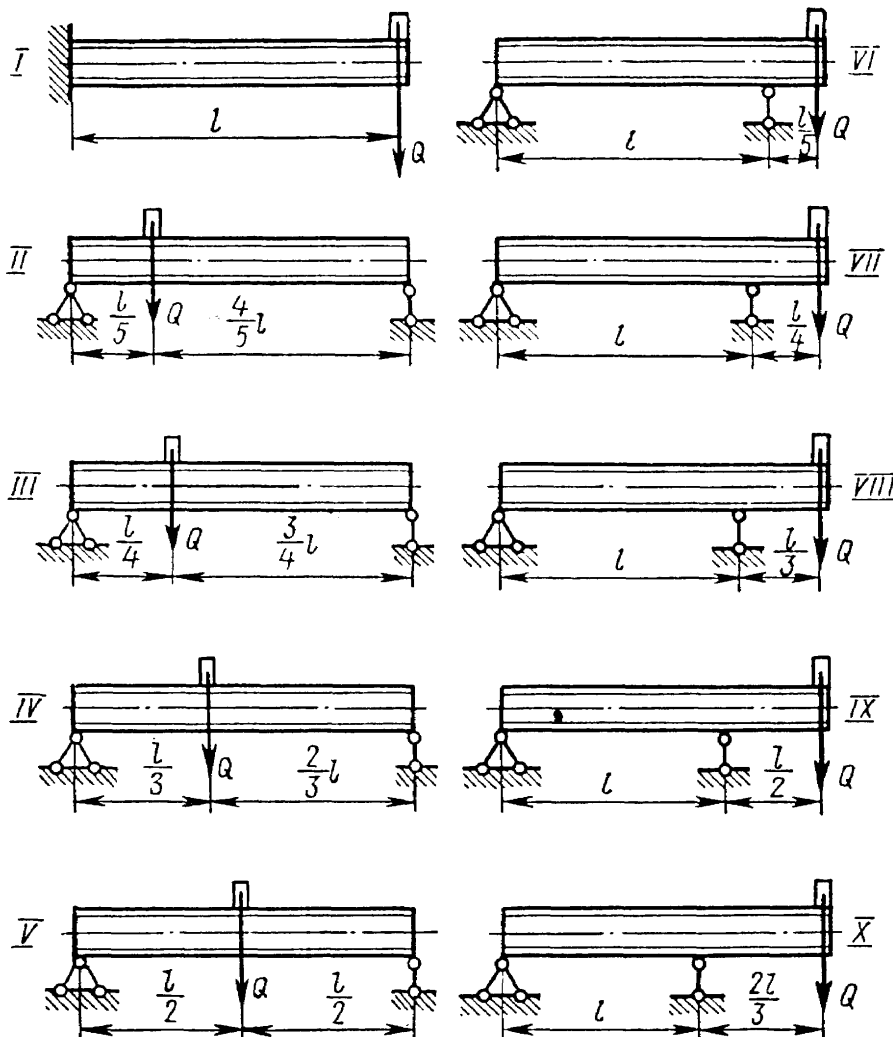
ЗАДАЧА 3.1

Дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу навантажена вертикальною силою P в точці A і горизонтальною силою в точці B (обидві точки розташовані на вісі балки). На опорах балки можуть виникати, як вертикальні, так і горизонтальні реакції, направленні перпендикулярно до площини рисунку.

Необхідно:

1. побудувати епюри $M_{\text{верт}}$ і $M_{\text{гор}}$ і встановити положення небезпечного перерізу;
2. підібрати розміри поперечного перерізу h і b по допустимим напруженням;
3. визначити положення нейтральної лінії в небезпечному перерізі балки і побудувати для цього перерізу епюру нормальних напружень в аксонометрії.

№	$[\sigma]$, МПа	Q , КН	L , м	H/b
1	12	8	1,2	1,2
2	10	9	1,5	1,5
3	11	5	1,8	1,8
4	9	3	1,3	1,3
5	9	5	1,4	1,4
6	8	2	1,9	1,9
7	12	1	1,0	1,0
8	11	8	1,1	1,1
9	8	9	1,5	15
10	8	5	1,3	1,3



ЗАДАЧА 3.2

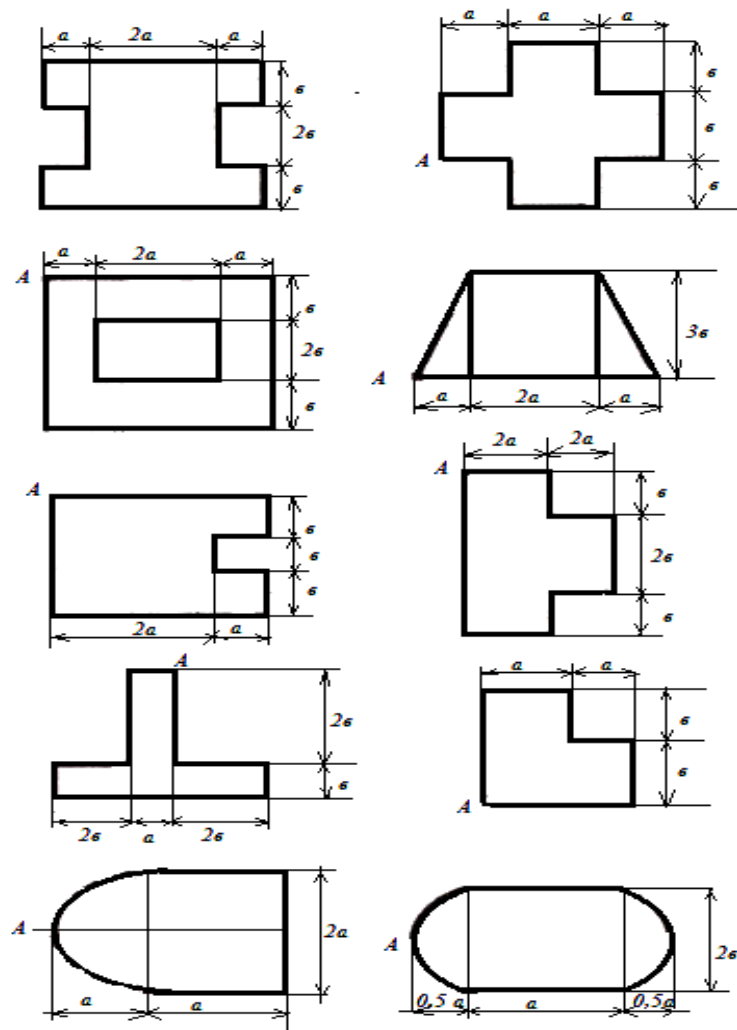
Чавунний короткий стержень, стискається поздовжньою силою P прикладеного в точці А.

Необхідно:

3) обчислити найбільше напруження розтягання і стискання в поперечному перерізі, виразивши значення цих напружень через P і розміри перерізу.

4) знайти допустиме навантаження при заданих розмірах перерізу і допустимих напруженнях для чавуну на стискання $[\sigma]_{\text{ст}}$ і розтягання $[\sigma]_{\text{р}}$.

№	а, см	в, см	$[\sigma]_{\text{ст}}$	$[\sigma]_{\text{р}}$
1	5	6	120	30
2	3	5	130	45
3	5	7	100	22
4	7	8	160	27
5	8	8	60	23
6	5	9	90	25
7	7	6	80	28
8	6	4	100	30
9	5	8	70	46
10	9	4	100	23

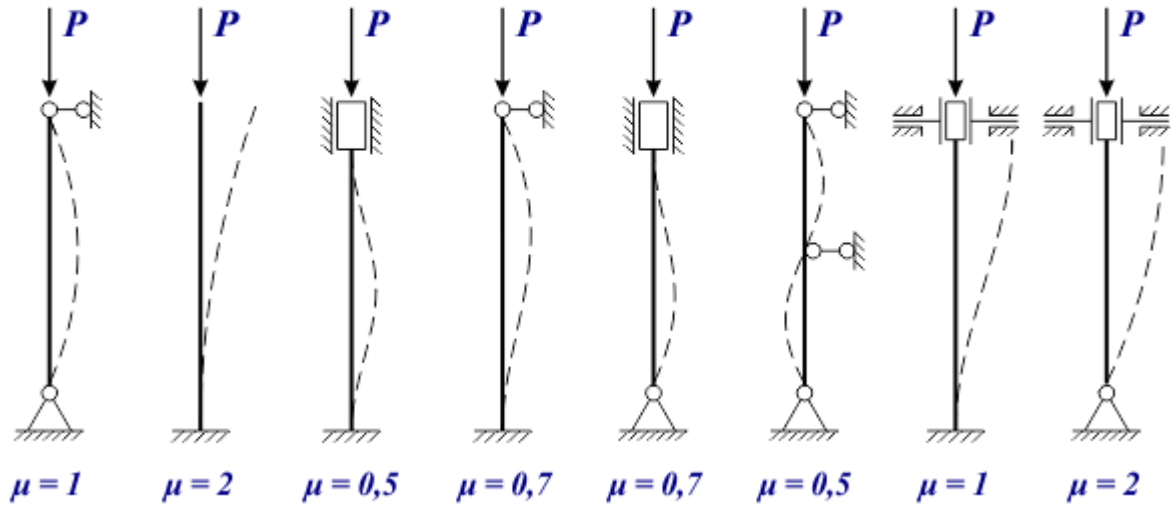


ЗАДАЧА 4

Для стержня з заданою довжиною, опорними закріпленнями і типом поперечного перерізу необхідно:

1. із умови стійкості стержня підібрати номер прокатного профілю, прийнявши для Ст 3 допустиме напруження $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$;
2. із умови стійкості окремих гілок стержня визначити відстані між планками для з'єднання профілів.

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$



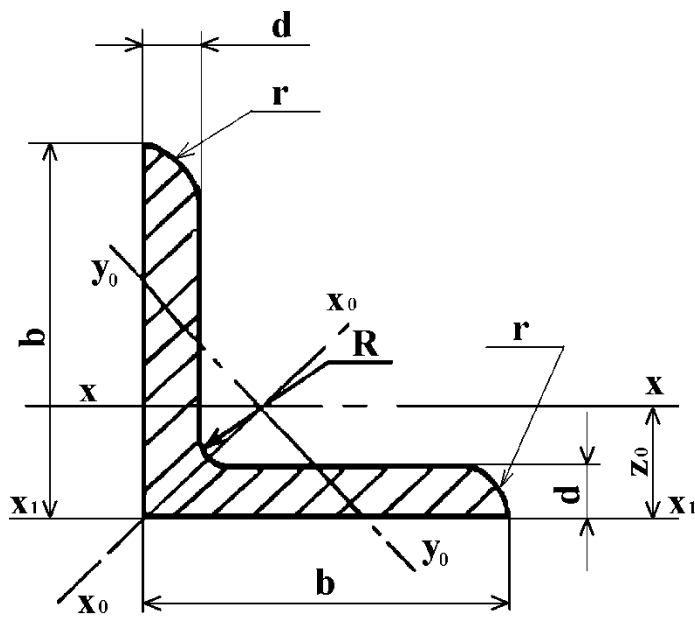
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P, КН	700	300	400	560	670	450	600	340	590	650
L, м	9	8	10	6	7	8	5	4	7	9

Таблиця гнучкості різних матеріалів

Гибкость λ	Сталь			Чугун		Алюминиевый сплав				Дерево
	Ст1 Ст2 Ст3 Ст4	Ст5	10Г2С 14Г2 15ГС 15ХСНД	СЧ10 СЧ12 СЧ15 СЧ18 СЧ21	СЧ24 СЧ25 СЧ28 СЧ30 СЧ35	АМг	АМг6	АВТ1	Д16Т	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,973	0,973	0,996	0,999	0,99
20	0,97	0,96	0,95	0,91	0,87	0,945	0,946	0,992	0,998	0,97
30	0,95	0,93	0,92	0,81	0,75	0,917	0,890	0,900	0,835	0,93
40	0,92	0,90	0,89	0,69	0,60	0,870	0,770	0,780	0,700	0,87
50	0,89	0,85	0,84	0,57	0,43	0,770	0,640	0,660	0,568	0,80
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,685	0,542	0,557	0,455	0,71
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,603	0,458	0,463	0,353	0,61
80	0,75	0,67	0,63	0,26	0,18	0,530	0,387	0,387	0,269	0,49
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,465	0,322	0,312	0,212	0,38
100	0,60	0,50	0,46	0,16	0,12	0,415	0,280	0,252	0,172	0,31
110	0,52	0,43	0,39	–	–	0,365	0,243	0,210	0,142	0,25
120	0,45	0,37	0,33	–	–	0,327	0,213	0,175	0,119	0,22
130	0,40	0,32	0,29	–	–	0,296	0,183	0,150	0,101	0,18
140	0,36	0,28	0,25	–	–	0,265	0,162	0,129	0,087	0,16
150	0,32	0,25	0,23	–	–	0,235	0,148	0,113	0,076	0,14
160	0,29	0,23	0,21	–	–	–	–	–	–	0,12
170	0,26	0,21	0,19	–	–	–	–	–	–	0,11
180	0,23	0,19	0,17	–	–	–	–	–	–	0,10
190	0,21	0,17	0,15	–	–	–	–	–	–	0,09
200	0,19	0,15	0,13	–	–	–	–	–	–	0,08
210	0,17	0,14	–	–	–	–	–	–	–	–
220	0,16	0,13	–	–	–	–	–	–	–	–

Сортамент прокатної сталі

Кутники рівносторонні (за ГОСТ 8509-86)



Позначення:

b - ширина полиці;

d - товщина полиці;

J – момент інерції;

i - радіус інерції;

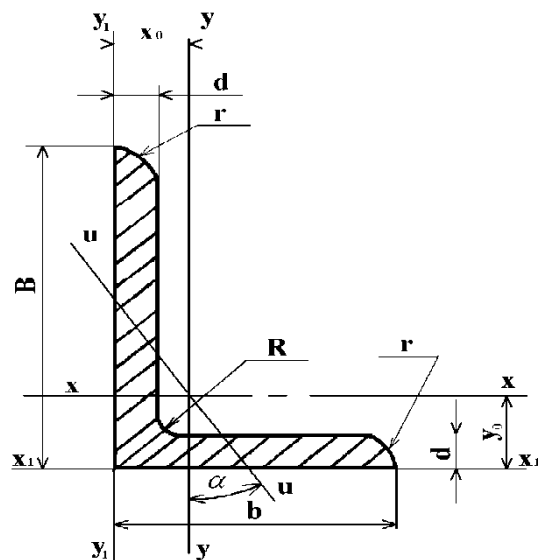
Z₀ - відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F, см ²	J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x_0 \max}$ см ⁴	$i_{x_0 \max}$ см	$J_{y_0 \min}$ см ⁴	$i_{y_0 \min}$ см	J_{x1} см	Z ₀ , см	Маса 1м, кг
	b	d										
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78	5,72
6,5	65	6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83	5,91
			9,84	38,13	1,97	60,42	1,27	15,58	2,48	28,29	1,90	7,73

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу $F, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{Xo \max}, \text{см}^4$	$i_{Xo \max}, \text{см}$	$J_{Yo \min}, \text{см}^4$	$i_{Yo \min}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}$	$Z_0, \text{см}$	Маса 1м, кг
	b	d										
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,96	48,6	1,77	219	2,55	12,2

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу	J_x , см ⁴	i_x , см	$J_{x_{o\max}}$ см ⁴	$i_{x_{o\max}}$ см	$J_{y_{o\min}}$ см ⁴	$i_{y_{o\min}}$ см	J_{x1} см	Z_0 , см	Маса 1м, кг
	b	d										
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	23,3
11	110	7	15,7	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
12,5	125	8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
14	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу $F, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x0 \max}, \text{см}^4$	$i_{x0 \max}, \text{см}$	$J_{y0 \min}, \text{см}^4$	$i_{y0 \min}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}$	$Z_0, \text{см}$	Маса $l_m, \text{кг}$
	b	d										
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
25	250	16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4



Кутники нерівнобокі (за ГОСТ 8510-86)

Позначення:

B— ширина більшої полиці;

b— ширина меншої полиці;

d— товщина полиці;

J— момент інерції;

i— радіус інерції;

x_0, y_0 - відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць

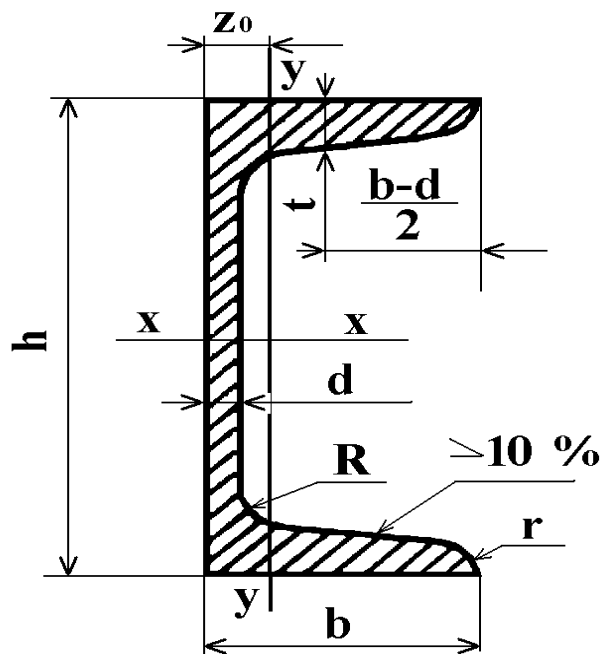
Номер профілю	Розміри, мм			Площа F, $см^2$	J_x , $см^4$	i_x , $см$	J_y , $см^4$	i_y , $см$	$J_{U \min}$, $см^4$	$i_{u \min}$, $см$	Кут нахилу осі $u, tg \alpha$	J_{x_1} , $см^4$	J_{y_1} , $см^4$	x_0 , $см$	y_0 , $см$	Маса 1м, кг
	B	b	d													
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	4,98	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	5,90	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43

Номер про- філю	Розміри, мм			Площа F, $см^2$	J_x , $см^4$	i_x , $см$	J_y , $см^4$	i_y , $см$	$J_{U\min}$, $см^4$	$i_{u\min}$, $см$	Кут нахилу осі $u, tg\alpha$	J_{X_1} , $см^4$	J_{Y_1} , $см^4$	x_0 , $см$	y_0 , $см$	Маса 1м, кг
	B	b	d													
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,70
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,1
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	285	74,3	1,58	3,55	8,98
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
12,5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
			8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
16/10	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3

Номер про- філю	Розміри, мм			Площа F, $см^2$	J_x , $см^4$	i_x , $см$	J_y , $см^4$	i_y , $см$	$J_{U\min}$ $см^4$	$i_{u\min}$ $см$	Кут нахилу осі $u, tg\alpha$	J_{X_1} , $см^4$	J_{Y_1} , $см^4$	x_0 $см$	y_0 $см$	Маса 1м, кг
	B	b	d													
18/11	180	110	10	18,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2342	537	2,52	5,97	26,4
20/ 12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,59	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7

Номер профілю	Розміри, мм				Площа F, см^2	J_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	J_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t									
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22 ^a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24 ^a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27 ^a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30 ^a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Швелери (за ГОСТ 8420-89)



Позначення:

h – висота балки

b – ширина полиці

d – товщина стінки

t – середня товщина полиці

J – момент інерції

W – момент опору

i – радіус інерції

S – статичний момент площі

Z_0 – відстань від осі y до зовнішньої грані стінки

Номер профілю	Розміри, мм				Площа $F, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$	$Z_0, \text{см}$	Маса 1м, кг
	h	b	d	t										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3

Номер профілю	Розміри, мм				Площа F, см^2	J_x , см^4	W_x , см^3	i_x , см	S_x , см^3	J_y , см^4	W_y , см^3	i_y , см	Z_0 , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t										
14 ^a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16 ^a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18 ^a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20 ^a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22 ^a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24 ^a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Цурпал І. А. Механіка матеріалів і конструкцій / Цурпал І. А. К. – : Вища школа, 2005. – 367 с.
2. Ройзман В. П. Прикладна механіка. Опір матеріалів: навчальний посібник / В. П. Ройзман. – К. : Центр навчальної літератури, 2004. – 124 с.
3. Агамиров Л. В. Сопротивление материалов: Краткий курс для студентов вузов / Агамиров Л. В. – М.: ООО «Издательство АСТ»: 2003. – 256 с.
4. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко – К. : Вища школа, 1993. – 259 с.
5. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. – К. : «Наукова думка». 1975. – 370 с.
6. Цурпал І. А. Краткий курс сопротивления материалов / И. А. Цурпал. – К.: Вища школа, 1989.– 331 с.
7. Королев П. Г. Сборник задач по сопротивлению материалов / П. Г. Королев – К. : Вища школа, 1997. – 288 с.
8. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. / С. П. Тимошенко – М.: Наука, 1965. –122 с.
9. Бабенко Д. В. Механіка матеріалів і конструкцій: навчальне видання. / Д. В. Бабенко – Миколаїв.: МДАУ, 2011. –148 с.

Навчальне видання

Методичні рекомендації

*для самостійного вивчення та виконання контрольної роботи з дисципліни
«Механіка матеріалів і конструкцій»*

Укладачі: **Бабенко** Дмитро Володимирович
Доценко Наталія Андріївна

Відповідальний за випуск: Д. В. Бабенко

Редактори: Д. В. Бабенко

Н. А. Доценко

Комп'ютерний набір: Н. А. Доценко

Дизайн і верстка: Н. А. Доценко

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 4

Тираж 30 прим. Зам. №_

Надруковано у видавничому відділі

Миколаївського національного аграрного університету.

54020, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК№4490 від 20.02.2013р.