МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра загальнотехнічних дисциплін

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

Методичні рекомендації
до виконання графічних робіт з теми:
«Поверхні та їх розгортки»
для студентів денної форми навчання напрямів підготовки:
6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва»,
6.100101 «Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі»,
6.090102 «Технологія виробництва та переробки продукції тваринництва».

МИКОЛАЇВ
2015

УДК 514.18 : 004.92
ББК 22.151.34 + 32. 973
Н28

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від “28”травня 2015 року, протокол № 9.

Укладачі:

С. М. Степанов – старший викладач кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет;

Н. А. Горбенко – асистент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

П. М. Полянський– канд. екон. наук, в.о. доцента, в.о. завідувача кафедри загальнотехнічних дисциплін Миколаївського національного аграрного університету;

Г. О. Іванов – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін, Миколаївського національного аграрного університету.

© Миколаївський національний аграрний університет, 2015

ЗМІСТ

Вступ……..……..4
1. Розгортка поверхонь……...……..8
1.1. Побудова розгортки багатогранників……..……8
1.1.1. Побудова розгортки піраміди методом тріангуляції……..…9
1.1.2. Побудова розгортки призми способом нормального перерізу…….10
1.1.3. Спосіб розкатки……11
Завдання 1. Побудова розгортки багатогранника……..……..13
2. Розгортка поверхонь багатогранників при перерізі площиною……15
Завдання 2. Переріз багатогранника площиною і побудова його розгортки…18
3. Розгортка кривих поверхонь……..24
Завдання 3. Переріз поверхні циліндра, конуса і кулі площиною та побудова їх розгортки……..……31
Література……37

ВСТУП

Нарисна геометрія входить до числа дисциплін, що становлять основу інженерної освіти. Методи нарисної геометрії знаходять широке застосування в науці й техніці. Вивчення цієї дисципліни сприяє розвитку просторового уявлення і навичок логічного мислення, необхідних інженеру будь-якої спеціальності.

Нарисна геометрія - це розділ геометрії, в якому просторові фігури вивчаються за допомогою їхніх зображень на площині (креслень).

Між фігурою і її зображенням установлюється жорсткий геометричний зв'язок, що дозволяє судити про форму і розміри фігури за її зображенням.

Розгортка – це перетворення поверхні в плоску фігуру, при якому зберігаються співвідношення, кути, площі і ін. параметри геометричних елементів поверхні.

Розгортки об’ємних поверхонь широко застосовуються в машинобудуванні, легкій, текстильній та інших галузях.

Розроблені методичні рекомендації дають можливість студентам засвоїти матеріал курсу та навчитися застосовувати свої знання на практиці.

В даних методичних рекомендаціях викладено основний теоретичний матеріал, наведено приклади виконання графічних робіт курсу та коло питань для самостійного вивчення.

Також в методичних рекомендаціях надаються завдання, контрольні питання і рекомендації для самостійної роботи студентів по виконанню графічних робіт з курсу нарисної геометрії:

ГРАФІЧНА РОБОТА 1. «ПОБУДОВА РОЗГОРТКИ БАГАТОГРАННИКА»

В ході виконання цієї графічної роботи студент має змогу ознайомитися з наступною навчальною інформацією:

- комплексне креслення об’ємної фігури;
- способи побудови розгорток багатогранників;
- послідовність побудови розгорток багатогранників.

Ця графічна робота включає в себе 1 аркуш формату А3.

ЗАВДАННЯ 2. «ПЕРЕРІЗ БАГАТОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ І ПОБУДОВА ЙОГО РОЗГОРТКИ»

В ході виконання цієї графічної роботи студент має змогу ознайомитися з наступною навчальною інформацією:

- переріз багатогранника площиною загального положення на комплексному кресленні;
- розгортка багатогранника способом перерізу площиною;

Ця графічна робота включає в себе 1 аркуш формату А3.

ЗАВДАННЯ 3. ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА, КОНУСА І КУЛІ ПЛОЩИНОЮ ТА ПОБУДОВА ЇХ РОЗГОРТКИ

В ході виконання цієї графічної роботи студент має змогу ознайомитися з наступною навчальною інформацією:

- переріз кривих поверхонь площиною загального положення на комплексному кресленні;
- розгортка кривої поверхні способом перерізу площиною;

Консультації

Консультації мають за мету надання допомоги студентам у самостійній роботі як над теоретичним матеріалом , так і над індивідуальними графічними завданнями. Консультації організовуються у процесі вивчення курсу дисципліни за розкладом, що затверджений кафедрою. Для студентів, які мають незадовільні оцінки за підсумками атестації, відвідування консультацій обов'язкове.

Самостійна робота студентів

Самостійна робота студентів включає в себе:

1.Вивчення теоретичного курсу за рекомендованою літературою.

2.Ознайомлення з нормативно-технічною документацією, державними та галузевими стандартами.

3.Виконання індивідуальних графічних робіт.

Робота студентів над теоретичним курсом перевіряється за рахунок тестів, опитування при захисту графічних робіт на консультаціях.

Система оцінювання знань студентів по дисципліні

Оцінювання знань студентів здійснюється за рейтинговою системою балів. Для забезпечення конкретної оцінки всіх видів роботи студента максимальна кількість залікових балів за кожний модуль приймається 100 з наступним перерахунком в загальну оцінку через коефіцієнт вагомості модуля. Оцінка виставляється у відповідності із приведеною шкалою.

Шкала оцінок

За шкалою ECTS	**За національною шкалою**	**За шкалою навчального закладу**
A	5 (відмінно)	90-100
BC	4 (добре)	75-89
DE	3 (задовільно)	60-74
FX	2 (незадовільно) з можливістю повторного складання	35-59
	2 (незадовільно) з обов'язковим повторним курсом	1-34

Схема підрахунку балів для рейтингової оцінки знань та вмінь студентів

Подія	**Бали**
Відсутність на практичному занятті	-2
Здача графічної роботи з запізненням	-2
Графічна робота № 1	
Виконання та захист графічної роботи №1	30
Графічна робота № 2	
Виконання та захист графічної роботи №2	30
Графічна робота № 3	
Виконання та захист графічної роботи №3	40
Змістовний модуль - всього	100

За кожну помилку, яку студент допустив в графічному завданні він отримує –2 бали.

1. РОЗГОРТКА ПОВЕРХОНЬ

Розгорткою називається таке перетворення поверхонь, в результаті якого вона суміщається з площиною. Поверхні поділяються на розгортні та нерозгортні. Перші можуть бути сумісними з площиною без складок і розривів, другі – суміщаються з площиною приблизно в результаті деякої деформації або умовної заміни відсіків нерозгортних поверхонь відсіками поверхонь розгортних. Заміна однієї фігури другою більш простішою називається апроксимацією.

Розгортною може бути тільки лінійчата поверхня, при чому саме така, дві суміжні твірні якої перетинаються (у власній або невласній точці).

Плоска фігура, отримана в результаті розгортання поверхні тіла, називається розгорткою, в техніці розгортки використовують при виготовленні конструкцій із листового матеріалу.

Нагадаємо, що до розгортних відносяться усі грані, конічні та циліндричні поверхні та тори.

В залежності від виду поверхні розгортки бувають:

- точні, коли параметри розгортки знаходять аналітичним способом;

- наближені, коли параметри розгортки одержують наближено графічним способом, вводячи певні припущення;

- умовні, з невисокою точністю перетворення та із суттєвими умовностями.

Для виконання розгортки гранної поверхні знаходять дійсні величини її ребер і, за відомими сторонами (ребрами) граней, будують розгортки бокових граней та основи. Лінії згину при цьому завжди позначають штрихпунктирними лініями з двома штрихами.

1.1. ПОБУДОВА РОЗГОРТОК БАГАТОГРАННИКІВ

Розгортка багатогранника являє собою плоску фігуру, отриману при поєднанні всіх його граней з площиною. Отже, побудова розгортки багатогранника зводиться до побудови істинних величин його граней.

Виконання цієї операції пов'язане з визначенням натуральних величин його ребер, які є сторонами багатокутників - граней, а іноді і деяких інших елементів.

Грані багатогранника умовно поділяються на бічні і сторони підстави. Існують три способи побудови розгорток багатогранних поверхонь :

1) спосіб трикутників (тріангуляції) ;

2) спосіб нормального перетину;

3) спосіб розкочування .

1.1.1. Побудова розгортки піраміди методом тріангуляції

Бічні грані будь піраміди є трикутниками. Для побудови розгортки піраміди (рис. 1) необхідно попередньо визначити натуральні величини бічних ребер і сторін основи.

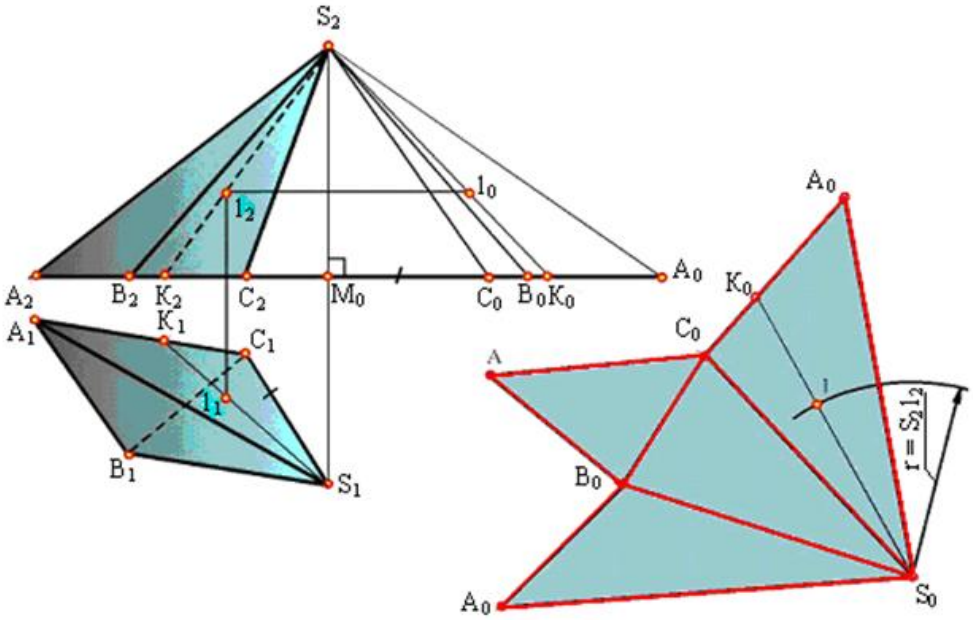


Рис. 1. Побудова розгортки піраміди

У зображеної на малюнку піраміди боку основи є горизонталями і проектуються на площину $П_1$ в справжню величину. Справжні величини бічних ребер визначені способом прямокутних трикутників. $S_2M_0C_0$, $S_2M_0B_0$ і $S_2M_0A_0$, у яких одним катетом є висота піраміди (S_2M_0 - різниця висот точки S і точок A, B, C), а іншим - горизонтальна проекція відповідного ребра.

(/ M_0C_0 / = / S_1C_1 /; / M_0B_0 / = / S_1B_1 /; / M_0A_0 / = / S_1A_1 /; / M_0K_0 / = /S_1K_1 /).

Натуральні величини ребер піраміди можуть бути визначені способом обертання навколо осі, що проходить через вершину S і перпендикулярні площині

$П_1$. Наступна операція полягає в побудові кожної бічної грані як трикутника за трьома сторонами. У результаті виходить розгортка бічної поверхні піраміди у вигляді ряду примикають один до одного трикутників із загальною вершиною S. Приєднавши до отриманої фігурі основу (ABC), отримаємо повну розгортку піраміди. Побудова на розгортці точки 1, що належить поверхні піраміди, зрозуміло з креслення. Такий спосіб побудови розгортки поверхні називається методом тріангуляції .

1.1.2. Побудова розгортки призми способом нормального перерізу

Для побудови розгортки похилої призми, зображеної на рис. 2 необхідно знайти істинні величини бічних ребер і сторін основи призми. Призма розташована так, що її бічні ребра паралельні площини $П_2$ і проектуються на неї у натуральну величину. Сторони основи є горизонталями і проектуються на площину $П_1$ без спотворення. Таким чином, довжини сторін кожної грані відомі, однак цього ще недостатньо для побудови істинної форми бічних граней.

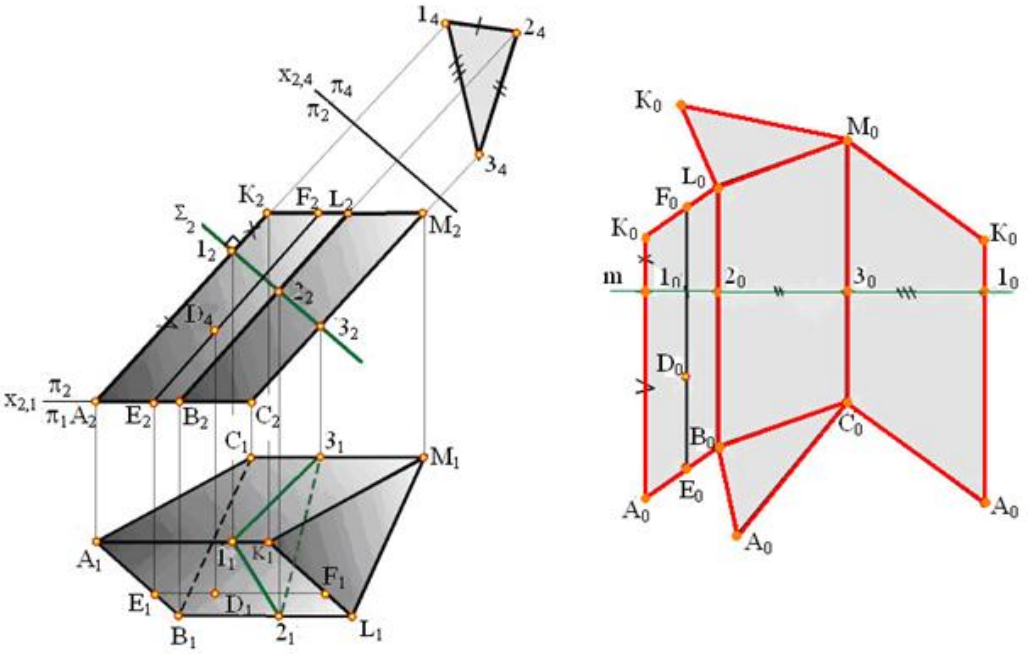


Рис. 2. Побудова розгортки призми

Бічні грані похилої призми є паралелограм, які не можуть бути побудовані по чотирьох сторонах . Для побудови паралелограма необхідно крім довжини сторін знати ще його висоту. Для визначення висот граней перетнемо призму

площиною Σ (Σ_2) , перпендикулярної до ребер (спосіб нормального перетину), і визначимо справжню величину перерізу шляхом заміни площин проекцій . Сторони цього нормального перетину і будуть висотами відповідних граней. Тепер приступаємо до побудови розгортки. На вільному місці креслення проводимо горизонтальну пряму m і відкладаємо на ній відрізки

/ 1 - 2 / = / 1_4 - 2_4 / , / 2 - 3 / = / 2_4 - 3_4 / і / 3 - 1 / = / 3_4 - 1_4 / .

Через точки 1, 2, 3, 1 проводимо перпендикуляри до прямої m і відкладаємо на них величини бічних ребер так, щоб /А1/ = /$А_2 1_2$/ та /1К/ = /$1_2 К_2$/, / В2 / = / $В_2 2_2$ / та / 2L / = / $2_2 L_2$ / і т. п.

З'єднавши кінці побудованих відрізків, отримаємо розгортку бічної поверхні призми. Приєднавши до неї обидва підстави, отримаємо повну розгортку призми. Побудова на розгортці точки 4, що належить поверхні призми, зрозуміло з креслення.

1.1.3. Спосіб розкатки

Розгорткою багатогранника називається плоска фігура, одержана послідовним суміщенням всіх граней багатогранника з однією площиною. Так як всі грані багатогранника зображуються на розгортці в натуральну величину, побудова розгортки зводиться до визначення натуральної величини граней - плоских багатокутників .

Спосіб розкатки використовують для побудови розгортки призми, в тому випадку, коли її підставу паралельно до однієї площини проекції, а бічні ребра відображаються в натуральну величину на іншій площині проекцій.

Побудувати розгортку поверхні похилої тригранної призми ABCDEF, використовуючи спосіб розкатки.

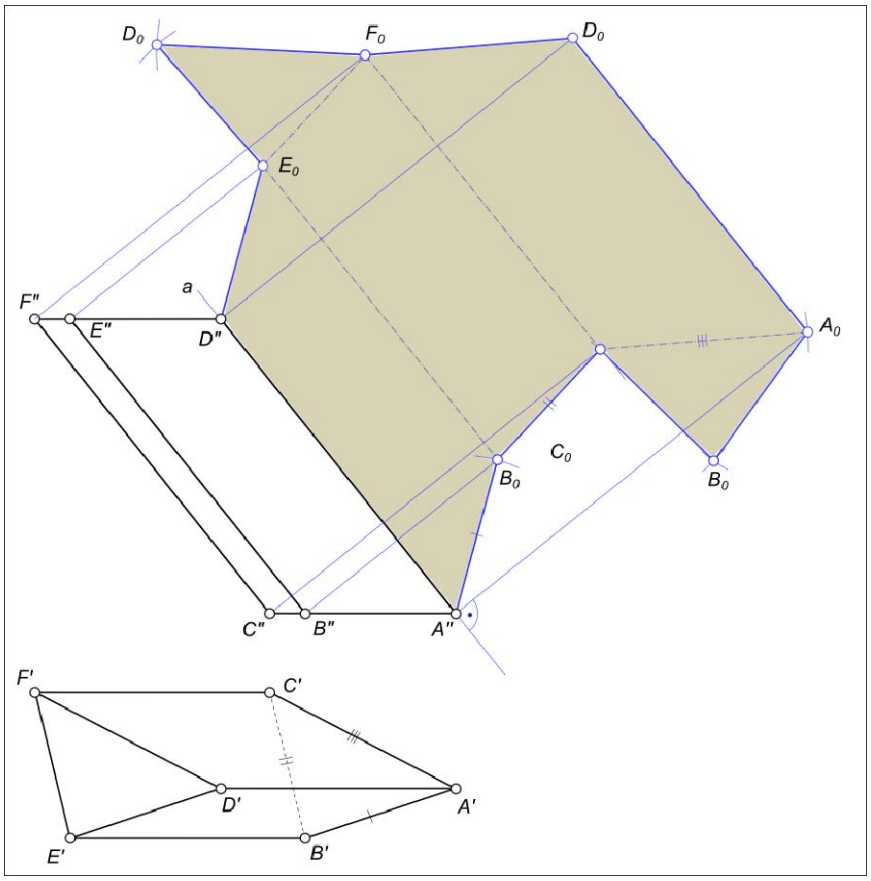


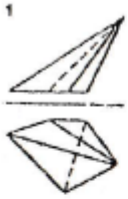
Рис.3. Побудова розгортки похилої призми методом розкатки

За площину розгортки приймемо площину β, що проходить через ребро AD, паралельну фронтальній площині проекцій. Суміщаємо грань ADEB з площиною β. Для цього подумки розріжемо призму по ребру AD, і потім виконаємо поворот грані ADEB навколо ребра AD. Визначення суміщеного з площиною β положення ребра B_0E_0 з точки B" опускаємо промінь, перпендикулярний до A"D" і засікаємо на ньому дугою радіуса A` B` , проведеної з центру A", точку B_0. З точки B_0 проводимо пряму B_0E_0 , паралельну A"D". Суміщене положення ребра B_0E_0 приймаємо за нову вісь і обертаємо навколо неї грань BEFC до суміщення з площиною β. З точки C " опускаємо промінь, перпендикулярний до B"E ", а з точки B_0 - дугу кола радіусом B` C ` засікаємо на ньому положення точки C_0 . З C_0 проводимо C_0F_0 паралельно B_0E_0. Аналогічно визначається положення ребра A_0D_0 . Поєднавши точки A" $B_0C_0A_0$ і D " $E_0F_0D_0$ прямими , одержимо фігуру A" $B_0C_0A_0D_0E_0F_0$D " - розгортку бічної поверхні призми. Повна розгортка призми буде отримана якщо до яких-небудь з ланок ламаних ліній A" $B_0C_0A_0$ і D " $E_0F_0D_0$ прилаштувати трикутники основи $A_0B_0C_0$ і $D_0E_0F_0$.

ЗАВДАННЯ 1. ПОБУДОВА РОЗГОРТКИ БАГАТОГРАННИКА

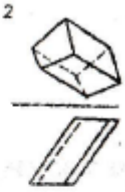
Умова: побудувати проекції багатогранника за координатами, побудувати розгортку багатогранника одним з трьох способів на вибір студента.

1



	X	Y	Z
A	85	25	5
B	50	10	5
C	20	10	5
D	40	60	5
K	5	50	60

2

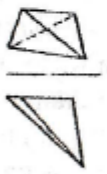


	X	Y	Z
A	45	5	25
B	15	5	40
C	5	5	15
D	35	5	5
K	80	60	60
L	50	60	75
M	40	60	50
N	70	60	40

3

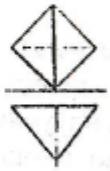
	X	Y	Z
A	90	10	30
B	60	10	75
C	5	10	45
D	25	10	5
K	35	10	45

4



	X	Y	Z
A	70	10	30
B	60	10	60
C	20	10	60
D	10	70	10

5

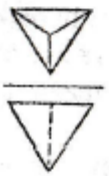


	X	Y	Z
A	45	55	65
B	45	55	5
C	75	10	35
D	15	10	35

6

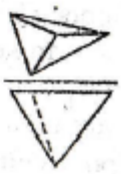
	X	Y	Z
A	75	10	5
B	15	10	5
C	15	70	5
D	45	40	60

7



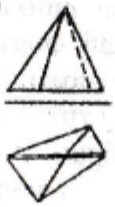
	X	Y	Z
A	80	10	55
B	10	10	55
C	45	10	5
D	45	65	40

8



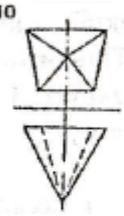
	X	Y	Z
A	65	10	65
B	10	10	40
C	70	10	10
D	55	65	40

9



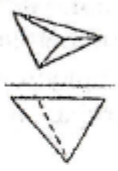
	X	Y	Z
A	80	35	5
B	20	5	5
C	5	35	5
D	50	70	5
K	40	35	65

10



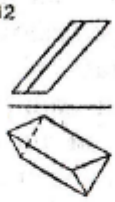
	X	Y	Z
A	80	10	55
B	10	10	55
C	25	10	10
D	65	10	10
K	45	65	35

11



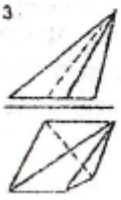
	X	Y	Z
A	85	10	65
B	10	10	40
C	70	10	20
D	45	65	40

12



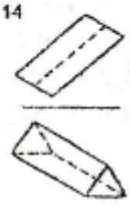
	X	Y	Z
A	80	20	5
B	45	10	5
C	65	45	5
D	40	50	60
K	5	40	60
L	25	75	60

13



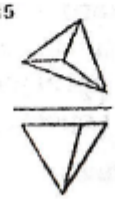
	X	Y	Z
A	85	70	5
B	65	10	5
C	20	55	5
D	40	70	5
K	5	10	65

14



	X	Y	Z
A	80	30	15
B	65	5	10
C	50	30	5
D	35	70	60
K	20	45	55
L	5	70	50

15

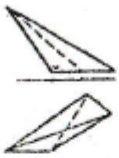


	X	Y	Z
A	75	10	40
B	35	10	70
C	15	10	10
D	45	65	40

16

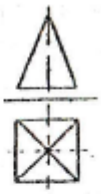
	X	y	Z
A	80	5	10
B	45	5	60
C	10	5	10
D	45	60	25

17



	X	y	Z
A	60	60	5
B	30	10	5
C	10	30	5
D	95	60	70

18



	X	y	Z
A	80	10	5
B	20	10	5
C	20	70	5
D	80	70	5
K	50	40	65

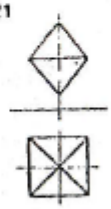
19

	X	y	Z
A	75	5	35
B	60	5	60
C	30	5	60
D	15	5	35
K	30	5	10
L	60	5	10
M	45	70	35

20

	X	y	Z
A	80	10	5
B	20	10	5
C	50	55	5
D	80	10	55

21

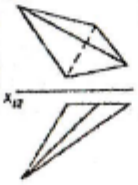


	X	y	Z
A	80	10	40
B	20	10	40
C	20	70	40
D	80	70	40
K	50	40	5
L	50	40	75

22

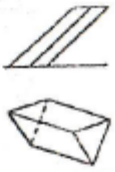
	X	y	Z
A	85	10	5
B	20	50	5
C	60	10	5
D	20	10	70

23



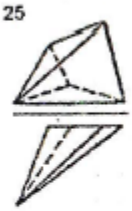
	X	y	Z
A	55	10	10
B	30	10	55
C	15	10	20
D	80	65	55

24



	X	y	Z
A	95	25	5
B	65	10	5
C	80	50	5
D	40	50	55
K	10	35	55
L	25	75	55

25

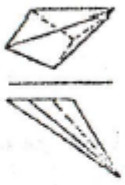


	X	y	Z
A	60	10	45
B	20	10	60
C	10	10	10
D	45	10	20
K	85	65	10

26

	X	y	Z
A	90	5	25
B	65	5	45
C	50	5	10
D	75	5	10
K	45	60	45
L	20	60	65
M	5	60	30
N	30	60	30

27

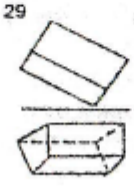


	X	y	Z
A	85	10	25
B	65	10	55
C	40	10	35
D	50	10	10
K	10	65	55

28

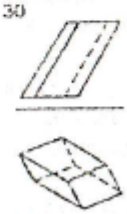
	X	y	Z
A	90	35	5
B	40	5	5
C	20	60	5
D	70	75	5
K	45	35	65

29



	X	y	Z
A	35	25	5
B	10	10	30
C	10	40	30
D	25	55	15
K	90	25	30
L	65	10	55
M	65	40	55
N	80	55	40

30



	X	y	Z
A	95	30	5
B	65	10	5
C	55	30	5
D	85	50	5
K	50	50	65
L	20	30	65
M	10	50	65
N	40	70	65

2. РОЗГОРТКА ПОВЕРХОНЬ БАГАТОГРАННИКІВ ПРИ ПЕРЕРІЗІ ПЛОЩИНОЮ

При виготовленні різних технічних форм із листового матеріалу вимагається заздалегідь побудувати розгортку цих поверхонь. Розгорткою багатогранної поверхні називається плоска фігура, отримана послідовним суміщенням з однієї і тієї же площиною усіх граней.

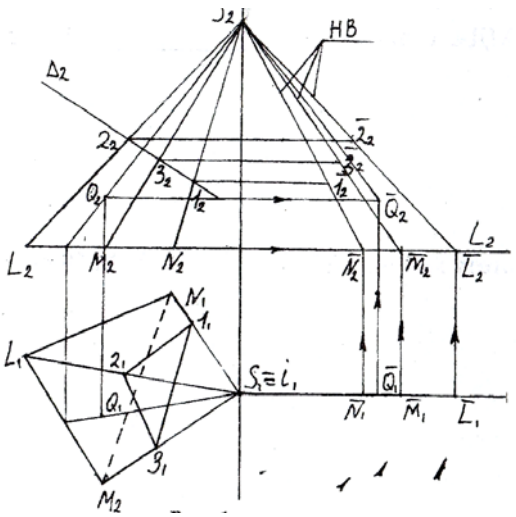


Рис.4а. Похила зрізана піраміда з горизонтальною основою.

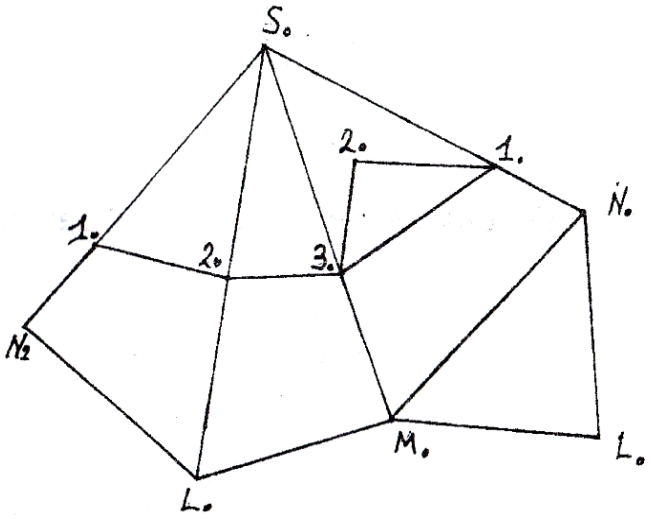


Рис.4б. Розгортка піраміди

Тому побудова розгортки багатогранної поверхні зводиться до знаходження натуральної величини граней. Розміщення та послідовність граней можуть бути різними, але розгортку потрібно робити такою, щоб найвигіднішим чином використовувань площу листового матеріалу, з якого створюється багатогранник.

Розглянемо спочатку процес побудови розгортки піраміди. На (рис.4,а) представлена похила зрізана піраміда з горизонтальною основою.

Спочатку побудуємо розгортку повної піраміди, тобто до відсічення площиною **Δ**. Оскільки натуральні величини ребер піраміди при основі на кресленні зображені (проекції $\mathbf{N_1L_1}$, $\mathbf{N_1M_1}$ **і** $\mathbf{L_1M_1}$), перейдемо до визначення натуральних величин бокових ребер **SN, SL, SM**. Це зручніше виконати обертанням ребер піраміди навколо горизонтально – проектуючої вісі ***i***, яка проходить через вершину **S**, до положення фронталей.

З точки зору економії листового матеріалу лінію розрізу багатогранника краще проводити через найкоротше ребро. Тому розгортку починаємо будувати з ребра **SN**. З допомогою засічок будуємо в вільному полі креслення натуральну величину першої бокової грані – трикутник $\mathbf{S_o\,N_o\,L_o}$. Потім прибудуємо до ребра $\mathbf{S_o\,L_o}$ другу грань $\mathbf{S_o\,L_o\,M_o}$ і третю $\mathbf{S_o\;M_o\,N_o}$.

Розгортка бічної поверхні піраміди отримується у вигляді ряду дотичних один до другого трикутників з загальною вершиною **S**. Для побудови на розгортці лінії відсіку $\mathbf{I_o\,2_o\,3_o\,I_o}$ спочатку необхідно визначити натуральні величини точок **1, 2, 3** від вершини **S**. З цією метою переносимо точки на відповідні натуральні величини бокових ребер і фіксуємо відстані $\mathbf{S_o1_o,\;S_o\,2_o,\;S_o\,3_o}$ на розгортці.

Після побудови розгортки бокової поверхні зрізаної піраміди слідує побудувати до неї трикутники **123** і **NML**, які являються її основами. Натуральні величини сторін цих трикутників є на самій розгортці. Таким чином, отримаємо точну розгортку поверхні зрізаної піраміди.

Для переносу на розгортку довільної точки **Q**, заданої поверхні піраміди, потрібно використовувати допоміжну пряму, проведену в грані через точку **Q** і вершину **S**. Вона також разом з точкою **Q** повинна бути повернута навколо вісі ***i*** до положення фронталі для визначення натуральної величини відстані від точки **Q** до вершини **S**.

Переходимо до розгортання поверхонь призм. Розглянемо найбільш поширений спосіб розгортання – спосіб нормального перерізу.

Нормальним називають переріз, виконаний площиною, перпендикулярною боковим ребрам призми. Нормальним перерізом призми також являється та її проекція, де бокові ребра призми проектуються в точки. На рис. 5,а зображена похила зрізана призма, бокові ребра якої являються прямими загального положення. Перетворимо креслення так, щоб ребра призми стали проектуючими. Це можна виконати способом заміни площин проекцій. Тоді нова допоміжна проекція – чотирикутник $\mathbf{R_5U_5T_5S_5}$ – рівна нормальному перерізу призми.

Тепер необхідно виконати розгортку нормального перерізу, тобто ламаний контур нормального перерізу розгорнути в пряму лінію $\mathbf{R_oR_o}$ (рис. 5,б).

Розриваємо контур в точці R_5, через яку проходить найкоротше ребро призми. Проводимо через точки **U,T,S** прямі, перпендикулярні до розгортки нормального перерізу, і на них по обидві сторони відкладаємо натуральні довжини ребер призми. Базу відліку, тобто площину нормального перерізу, можна вибрати в будь – якому місці призми – в даному випадку це площина **θ**, яка проходить через точку **R**. Після побудови розгортки бокової поверхні призми слідує побудувати до неї чотирикутники **RSTU** і **ABCD**, які являються її основами. Натуральною величиною нижньої основи являється його горизонтальна проекція $\mathbf{R_1S_1T_1U_1}$, а натуральна величина верхньої основи визначена способом плоскопаралельного переміщення (проекція $\mathbf{A_2B_2C_2D_2}$).

Так отримаємо точну розгортку поверхні призми. Для переносу на розгортку любої точки **P**, заданої на поверхні призми, скористуємося допоміжною прямою, проведеною в грані через точку **P** паралельну боковим ребрам. Її разом з точкою необхідно побудувати і на допоміжних проекціях.

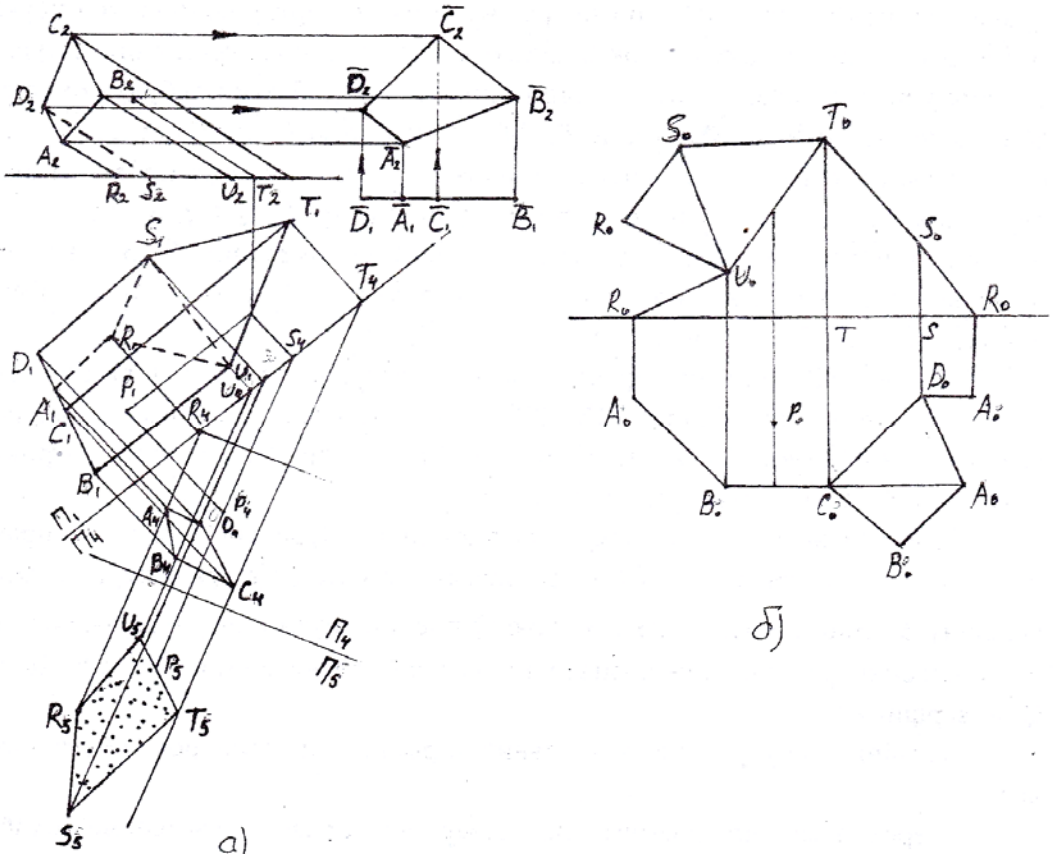


Рис.5. Похила зрізана призма

ЗАВДАННЯ 2. ПЕРЕРІЗ БАГАТОГРАННИКА ПЛОЩИНОЮ І ПОБУДОВА ЙОГО РОЗГОРТКИ

Умова: перерізати даний багатогранник площиною загального положення і побудувати його розгортку з нанесенням лінії перерізу. Визначити натуральну величину фігури перерізу.

Основою для виконання цього завдання є задача на перетин прямої з площиною. Цю задачу можна розв'язати за допомогою січної площини, косокутного допоміжного проектування чи заміни площини проекцій або ж за допомогою проведення "конкуруючих" прямих.

При застосуванні способу перетворення проекцій площину приводять у проектуюче положення, при якому проекція шуканого перерізу збігається з проекцією площини.

Проектуючи січні площини рекомендується проводити через ребра багатогранника. Задача зводиться до визначення точки зустрічі прямої з проектуючою площиною. При побудові плоских перерізів прямих призм доцільно проводити допоміжні площини, що збігаються з гранями призми.

Для розв'язання задач на плоскі перерізи можна також скористатися косокутним допоміжним проектуванням на горизонтальну чи фронтальну площини проекцій або на площину загального положення у напрямі прямої, що належить січній площині. При цьому площина спроектується в пряму лінію, а багатогранник – у нову, допоміжну проекцію. За знайденими допоміжними проекціями точок перетину зворотним проектуванням будують їх фронтальні і горизонтальні проекції. При визначенні перерізу піраміди площиною загального положення можна також скористатися відповідністю, що утворюється між фігурою перерізу і основою піраміди – гомологією. Для цього слід визначити горизонтальний слід січної площини і знайти хоча б одну точку, що належить фігурі перерізу.

Крім перерізу багатогранника площиною треба побудувати розгортку його поверхні. У варіантах завдання наведено лише правильні призми і піраміди, тому розгортка бічних поверхонь їх являє собою суму однакових прямокутників або

трикутників. Рекомендується бічну поверхню на розгортці показувати однією фігурою з нанесенням лінії її перерізу. Натуральну величину фігури перерізу визначають обертанням цієї фігури навколо горизонталі або фронталі.

У наведеному прикладі до завдання (рис.6) правильну трикутну піраміду розрізано площиною загального положення, заданою трикутною пластинкою (відсіком). Для цього використано дві фронтально-проектуючі площини, за допомогою яких знайдено точку D_1 і лінію N_1M_1, що визначають трикутник перерізу на горизонтальній проекції. Фронтальну проекцію трикутника знайдено за відповідністю. Праворуч на малюнку показано розгортку поверхні піраміди з нанесенням лінії перерізу. Оскільки піраміда правильна, то її розгортка являтиме собою суму однакових рівнобедрених трикутників бічних граней плюс трикутник основи. Ребро SC розміщено фронтально, тому S_2C_2 – його натуральна величина. Кожну грань на розгортці будують за трьома відомими сторонами. Для нанесення лінії перерізу на розгортку треба визначити натуральні величини відрізків кожного ребра від вершини до точки перерізу. Для цього переносимо точки E_2 і F_2 на ребро SC. На розгортці $S_0D_0=S_2D_2$; $S_0E_0=S_2G$ і $S_0F_0=S_2H$. Зліва обертанням навколо горизонталі визначено натуральний вигляд трикутника перерізу.

Запитання для самоконтролю.

1. Яку позиційну задачу покладено в основу побудови плоского перерізу багатогранника?
2. Як визначають на розгортці точки плоского перерізу багатогранника, що належать його ребрам?
3. У чому суть обертання навколо лінії рівня і чим воно відрізняється від обертання навколо проектуючих прямих?

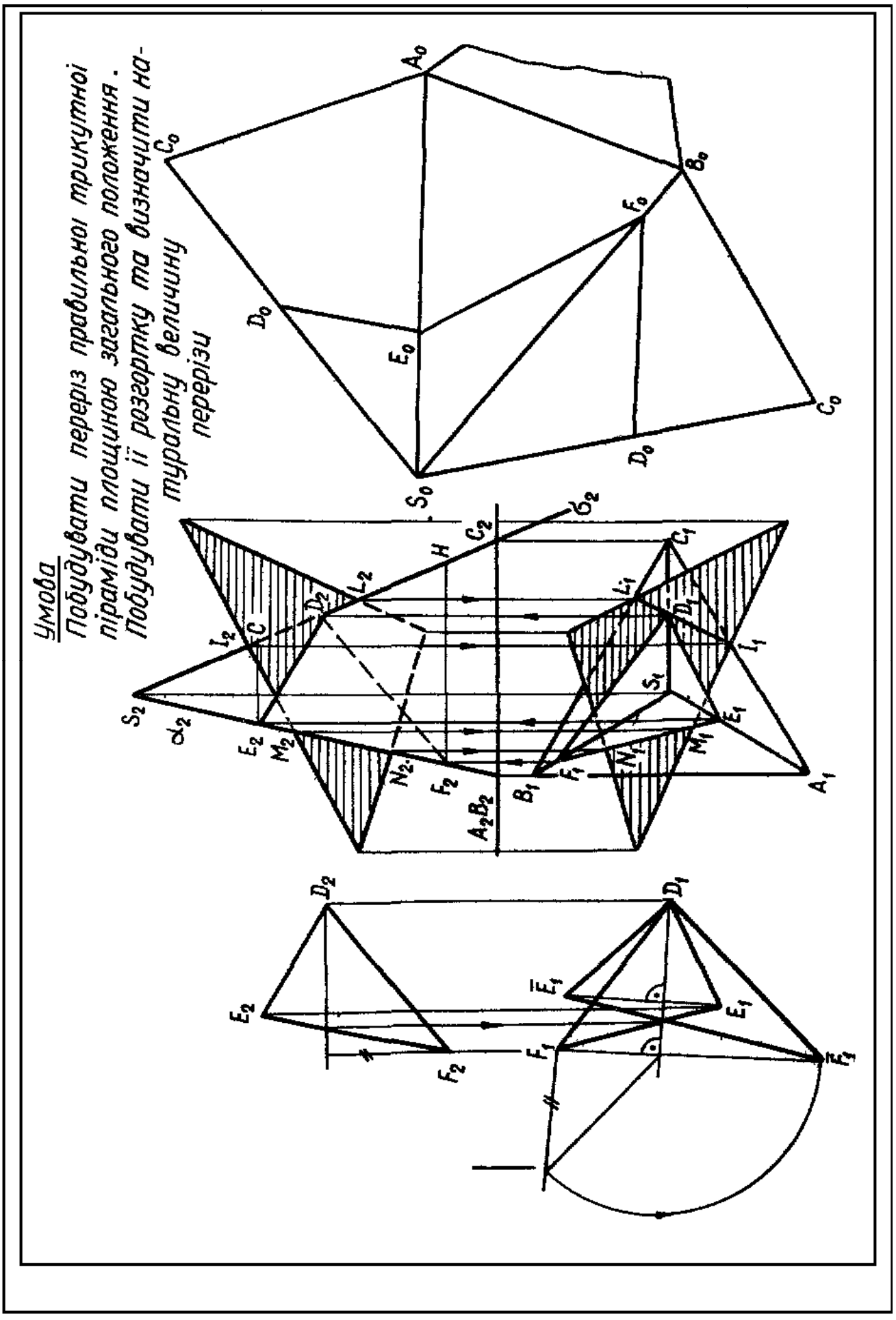
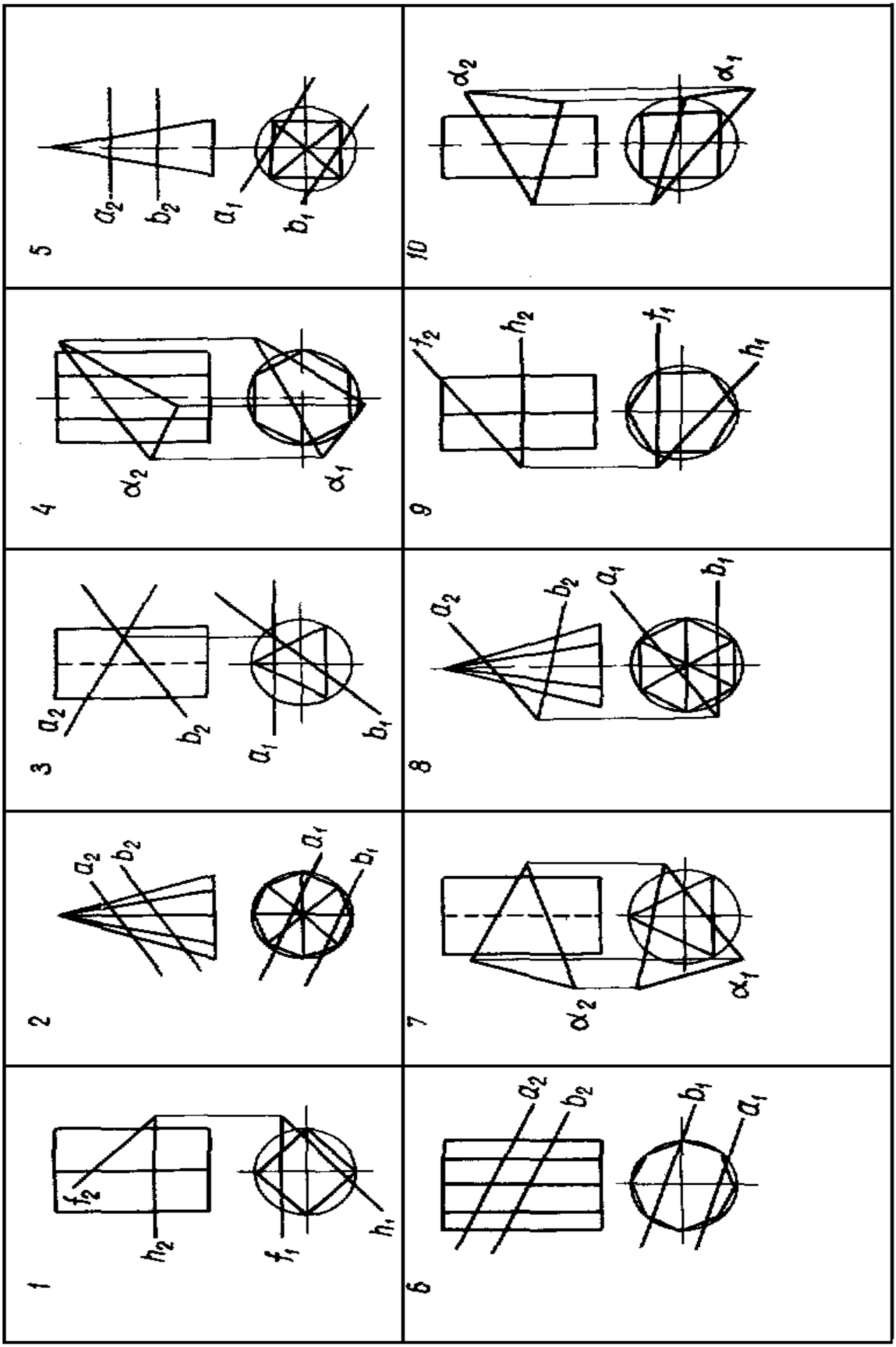
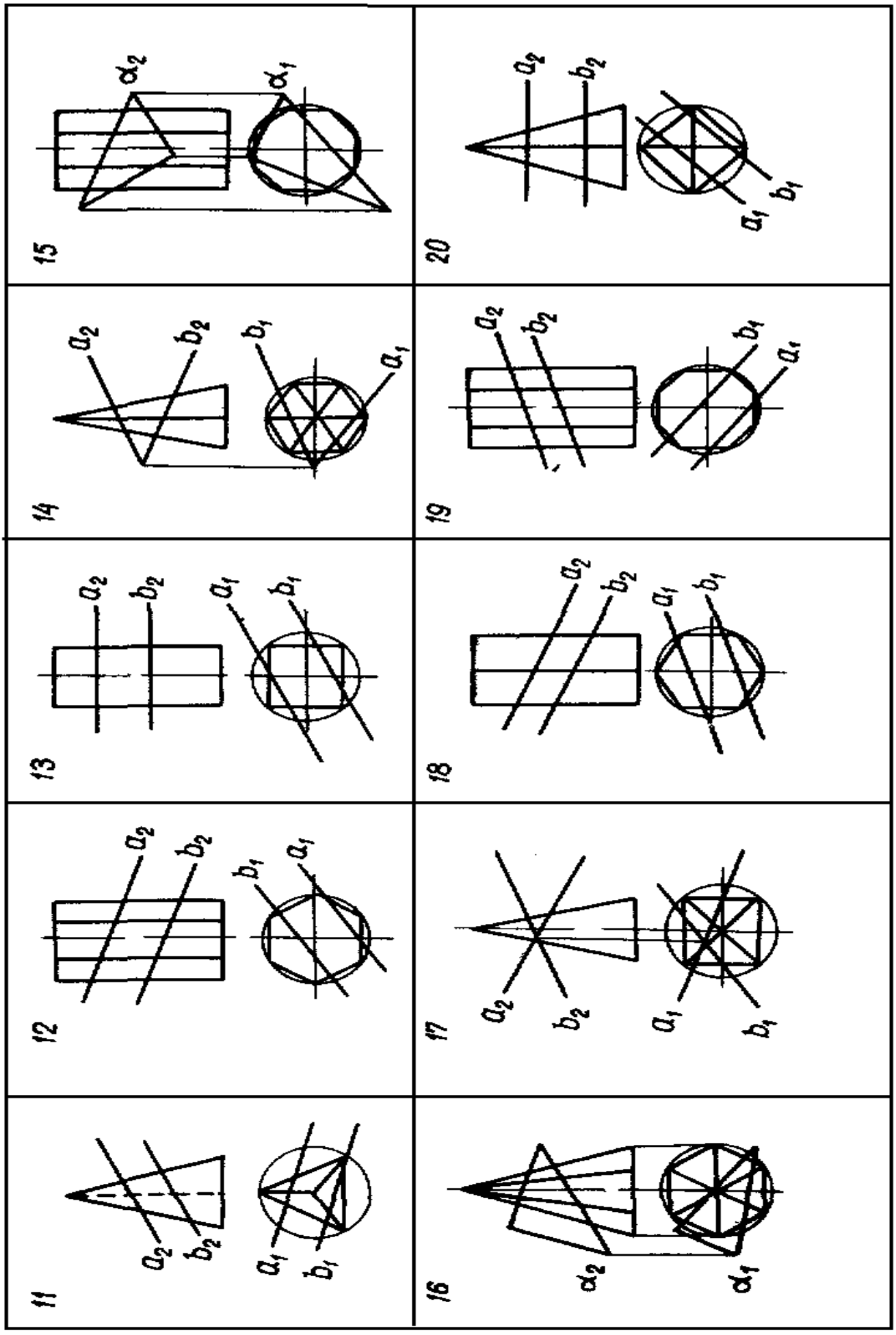
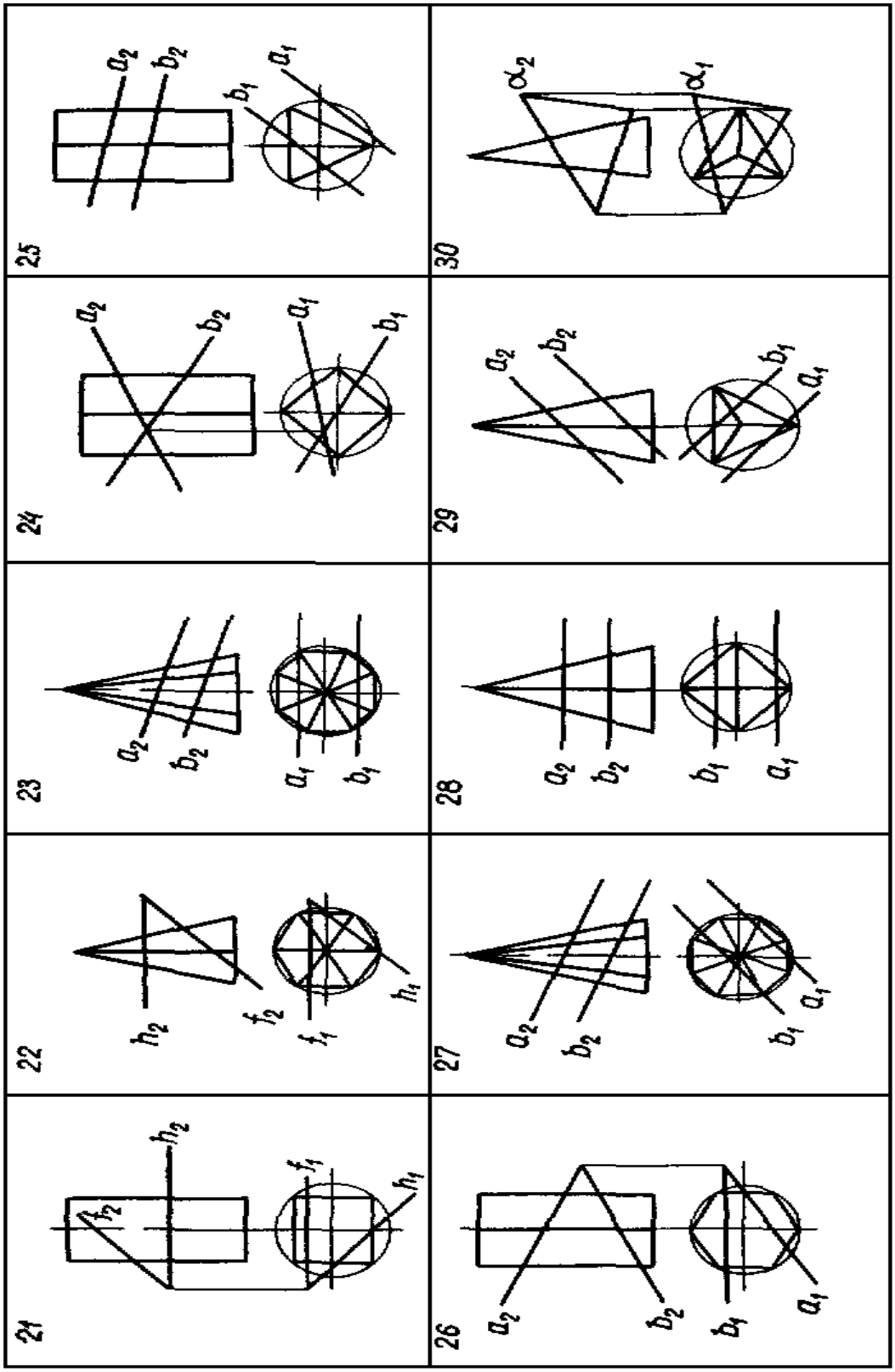


Рис.6.Побудова розгортки піраміди


1
f_2
h_2
f_1
h_1
2
a_2
b_2
a_1
b_1
3
a_2
b_2
a_1
b_1
4
α_2
α_1
5
a_2
b_2
a_1
b_1
6
a_2
b_2
b_1
a_1
7
α_2
α_1
8
a_2
b_2
a_1
b_1
9
f_2
h_2
f_1
h_1
10
α_2
α_1


11
a_2 b_2 a_1 b_1
12
a_2 b_2 b_1 a_1
13
a_2 b_2 a_1 b_1
14
a_2 b_2 b_1 a_1
15
d_2 d_1
16
d_2 d_1
17
a_2 b_2 a_1 b_1
18
a_2 b_2 a_1 b_1
19
a_2 b_2 b_1 a_1
20
a_2 b_2 a_1 b_1


21
h_2
f_2
f_1
h_1
22
h_2
f_2
f_1
h_1
23
a_2
b_2
a_1
b_1
24
a_2
b_2
a_1
b_1
25
a_2
b_2
b_1
a_1
26
a_2
b_2
b_1
a_1
27
a_2
b_2
b_1
a_1
28
a_2
b_2
b_1
a_1
29
a_2
b_2
b_1
a_1
30
α_2
α_1

3. РОЗГОРТКА КРИВИХ ПОВЕРХОНЬ

Розгортуванням називається таке перетворення, в результаті якого вона з'єднується з площиною. Якщо поверхня при поступовому її деформуванні, наприклад розгинання, можна з'єднати з площиною без розтягання, розривів і складок, таку поверхню називають ***розгортною.*** З кривих поверхонь до розгортних відносяться конічні і циліндричні. Більшість кривих поверхонь – ***нерозгортні.*** Їх розгортають шляхом заміни відрізами розгортних поверхонь. Така заміна одної, геометричної фігури (лінії, поверхні) другою, більш простою, називається ***апроксимацією.*** Наприклад, апроксимація кривої лінії є заміна її ламаною лінією, яка складається з з'єднувальних цю криву хорд.

Плоска фігура, отримана в результаті розгортання поверхні, називається ***розгорткою.*** Розгортки застосовуються в усіх випадках розшиву плоского листового матеріалу для наступного отримання поверхні шляхом згинання і з'єднання (наприклад, зварюванням) отриманих плоских фігур.

Форма і розміри таких фігур визначаються при допомозі розгортки поверхні, побудованої на кресленні цієї поверхні. Розгортки використовуються при конструюванні і виготовлені з листового матеріалу моделей різних конструкцій, форм для металевих відливок, посудів, кожухів, трубопроводів, резервуарів тощо.

Спочатку звернемося до розгортних поверхонь. Наприклад, крива конічна поверхня при її розгортанні заміняється (тобто апроксимуються) вписаною гранной поверхнею – пірамідальною. В цьому випадку крива поверхня покривається плоскими відсіками – трикутниками. Розуміється, чим більше граней у такої вписаної піраміди, тим точніше виходить розгортка. Такий спосіб розгортання кривої поверхні (коли вона апроксимується плоскими трикутниками) називається ***тріангуляцією.***

На рис. 7а, зображена поверхня Δ еліптичного конуса. Впишемо в неї піраміду з достатнім числом граней (не менше 12). Враховуючи симетрію заданої

поверхні, впишемо в коло – основу з правильним дванадцятикутником та ким чином, щоб дві його вершини отримались в площині симетрії ***B***. З'єднавши

точки **1, 2, 3...** з вершиною **S** конуса, отримаємо дванадцятигранну вписану піраміду. А подібну поверхню ми вже розгортали в 1 частині методичних рекомендацій. Задача зводиться до побудови натуральної величини кожної із трикутних граней піраміди.

Одна із сторін цих трикутників, по довжині рівна стороні правильного дванадцятикутника, зображена в горизонтальній проекції в натуральну величину. Залишається визначити натуральні величини сторін, тобто ребер піраміди при вершині **S**. Це можна здійснити поворотом їх навколо вертикальної вісі ***i*** , яка проходить через вершину **S** конічної поверхні Δ до положення фронталей. Точки **1, 2, 3...** при цьому переміщуються в горизонтальній площині рівня Δ.

В якості вісі симетрії розгортки вибираємо найдовшу величину виду відрізка $\mathbf{S_o\ t_o}$ в вільному полі креслення (рис. 7,б). З допомогою засічок будуємо натуральну величину гранні **I – S – 2,** тобто трикутник $\mathbf{I_o\ S_o\ 2_o}$, потім трикутник $\mathbf{2_o\ S_o\ 3_o}$ і т.д. Таким чином засічки із точки $\mathbf{S_o}$ виконуються натуральними довжинами ребер **S – I, S – 2, S – 3...,** а засічки із точок $\mathbf{I_o, 2_o, 3_o,...}$ – довжиною хорди **I – 2** або стороною правильного дванадцятикутника.

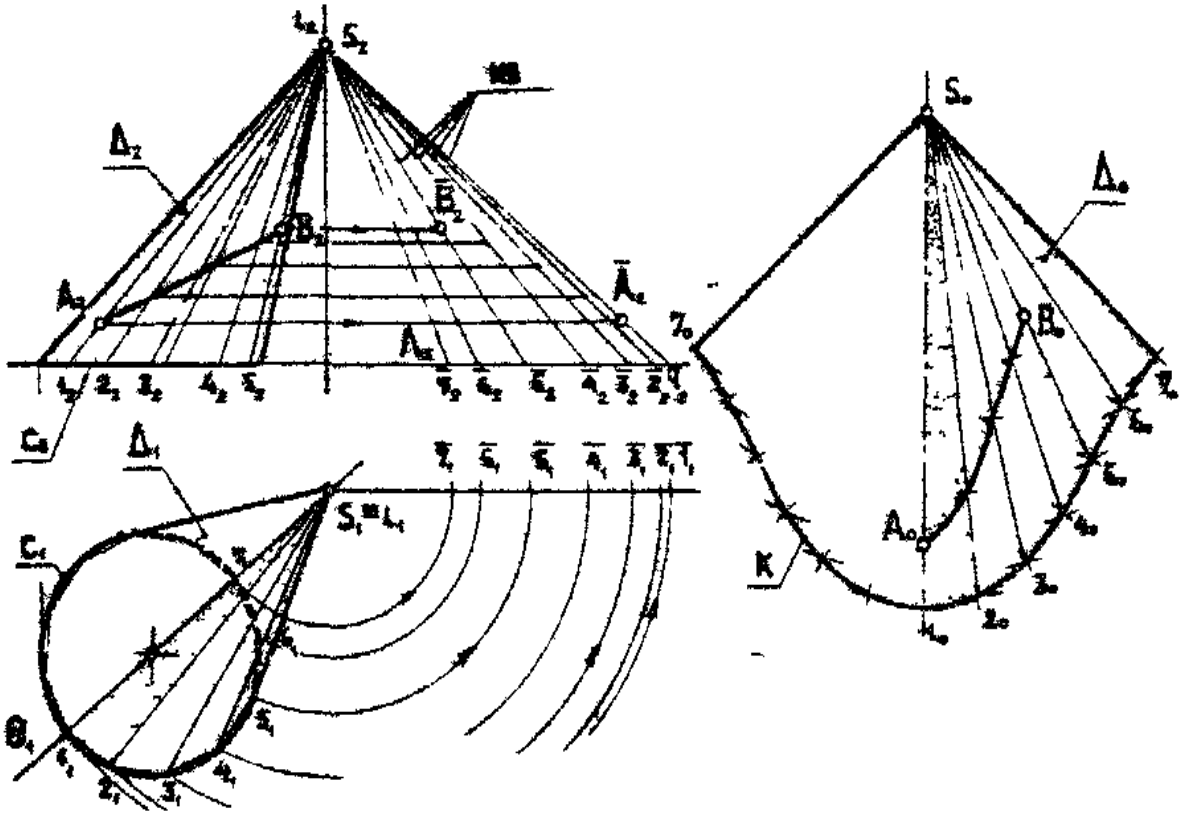


Рис.7. Поверхня та розгортка еліптичного конуса.

Якщо тепер з'єднати побудовані точки $\mathbf{I_o, 2_o, 3_o,...}$ відрізками прямих ліній, отримаємо точну розгортку вписаної пірамідальної поверхні

Але наша кінцева мета – розгортка конічної поверхні, тому з'єднуємо за допомогою лекала вказані точки плавною кривою лінією. Отримана плоска фігура $\mathbf{S_o\ 7_o\ 6_o...}$ являється наближеною (з недоліком) розгорткою заданої поверхні **Δ** еліптичного конуса.

Для побудови на розгортці лінії **AB**, заданої на розгортці конічної поверхні, використовуються ті ж самі її твірні (або ребра вписаної піраміди).

Розгортка поверхні конуса обертання має форму сектора кола з радіусом, рівним довжині твірної конуса, а довжина дуги сектора дорівнює довжині кола основи конуса. Вирішити цю задачу на комплексному кресленні рекомендується самостійно.

Перейдемо до розгортування циліндричної поверхні. Тут також крива поверхні апроксимується граною поверхнею – вписаної призми. Тільки крива поверхня покривається не трикутними плоскими відсіками, а чотирикутниками (в основному паралелограмами).

Сам спосіб розгортання циліндричної поверхні називається способом нормального перерізу (див. §1).

На рис. 8, а задана поверхня ***P*** еліптичного циліндра. Впишемо в неї призму з достатнім числом граней – **12**. З врахуванням симетрії поверхні впишемо в коло - основу **d** правильний дванадцятикутник так, щоб дві його вершини знаходились в площині симетрії **Σ**.

Розділивши таким же чином нижню основу циліндра і з'єднавши однойменні вершини багатокутників, отримаємо вписану в циліндричну поверхню дванадцятигранну призму.

Нормальний переріз поверхні можна отримати перерізом її площиною, перпендикулярну твірним циліндра (або ребрам вписаної призми). Але ми також знаємо, що нормальним перерізом являється та проекція, де поверхня проектується в лінію. В нашому випадку це буде нова додаткова проекція на площину $\boldsymbol{\Pi_5}$. Поверхня **P** еліптичного циліндра тут зображується у вигляді еліпса

P_5 , а вписана призма – замкнутою ломаною, яка складається із хорд стягуючих криву лінію в точках **1, 2, 3…**

В вільному полі креслення розгортуємо в пряму лінію контур нормального перерізу (рис.8,б). Отримаємо пряму **I – 2 – 3 – 4 - ... – I.**

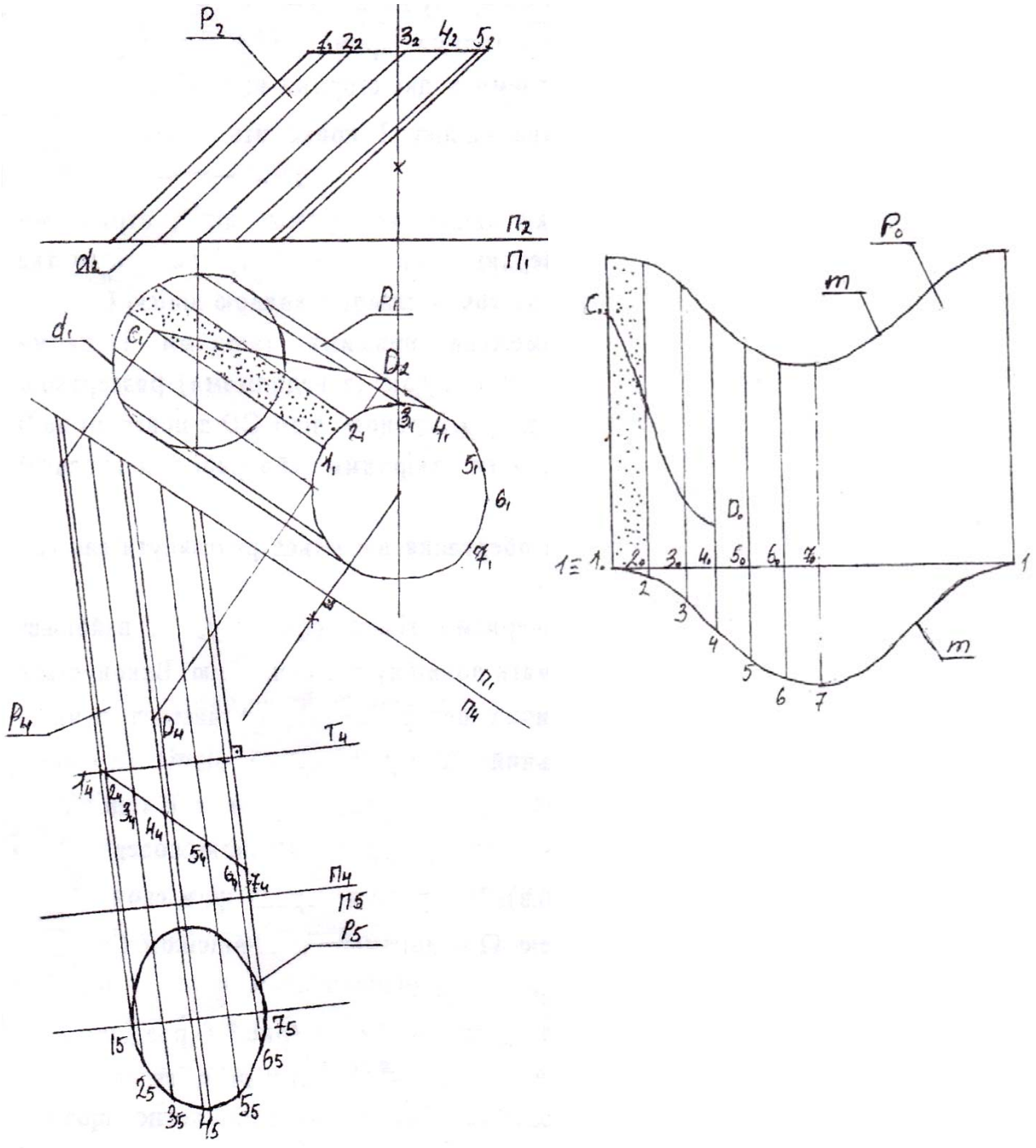


Рис. 8. Поверхня та розгортка еліптичного циліндра.

Потім через точки **I, 2, 3...** проводимо прямі, перпендикулярні лінії нормального перерізу, і на них відкладаємо в дві сторони відповідні довжини ребер вписаної призми.

Нехай площина відліку **I** проходить через точку ***i***. Отримаємо точки $\mathbf{I_o}$, $\mathbf{2_o}$, $\mathbf{3_o}$,...

Якщо з'єднати побудовані точки відрізками прямих ліній, отримаємо точну розгортку призматичної поверхні. Але нам потрібна розгортка циліндричної поверхні, і тому з'єднаємо ці точки плавною кривою лінією ***l***.

Отримана плоска фігура, обмежена прямими твірними і двома однаковими кривими ***l*** і ***m***, являється наближеною (з недоліками) розгорткою заданої поверхні **P** еліптичного циліндра. Для переносу лінії **CD** з поверхні на її розгортку можна скористуватися існуючими твірними (або ребрами вписаної призми).

Із нерозгортних поверхонь розвернемо тільки сферичну, як найбільш часто використовуємо. Тут ми будемо мати подвійну апроксимацію. Виконується це слідуючим шляхом (рис. 9).

Сферична поверхня **Ф** розтинається пучком площин, які проходять через вертикальний діаметр, на вузькі, рівні між собою відрізки (рис. 9,а).

Потім кожний такий нерозгортуємий сферичний відрізок **Ф** (рис. 9,б) апроксимується, тобто заміняється, розкреслювальною поверхнею – описаним циліндричним відсіком (рис.9,в).

Ця крива поверхня **ψ**, в свою чергу, заміняється вписаною граною поверхнею **Ω** – призматичним відсіком (рис.9,г), який потім і розгортається на площину (рис. 9,д).

Для пояснення прикладу розгортання сфери (рис.10) розділимо її вертикальними площинами на рівні частини.

Число частин визначається практичними цілями – чим їх більше, тим точніша розгортка. Нехай їх буде десять.

Виберемо лівий сферичну частину, яка знаходиться між площинами Δ і Г (рис. 10,а). Обертаємо її циліндричною поверхнею θ, тобто заміняємо описаний циліндр. Тепер нас цікавить відрізок цього циліндра, розміщений між

площинами Δ і Г. Для його розгортки впишемо в нього призматичну поверхню, ребра якої проектуються в точки $\mathbf{I_2, 2_2, 3_2 ...}$, а грані – в хорди $\mathbf{S_2 – I_2, I_2 – 2_2 ...}$

Потім нормальний переріз призматичної поверхні – ламану лінію $\mathbf{S_2\ I_2\ 2_2\ 3_2}$ розгортаємо в вертикальну пряму $\mathbf{S_o\ I_o\ 2_o\ 3_o ...}$

Твірні **AB, CD, EF...** циліндричної частини (або ребра призматичного), які проходять через точки **I, 2, 3...,** являються фронтально – проектуючими прямими і в горизонтальній проекції зображуються в натуральну величину. На розгортці ці твірні пройдуть через точки $\mathbf{I_o\ 2_o\ 3_o ...}$ перпендикулярно лінії симетрії $\mathbf{S_o\ I_o\ 2_o\ 3_o ... R_o}$.

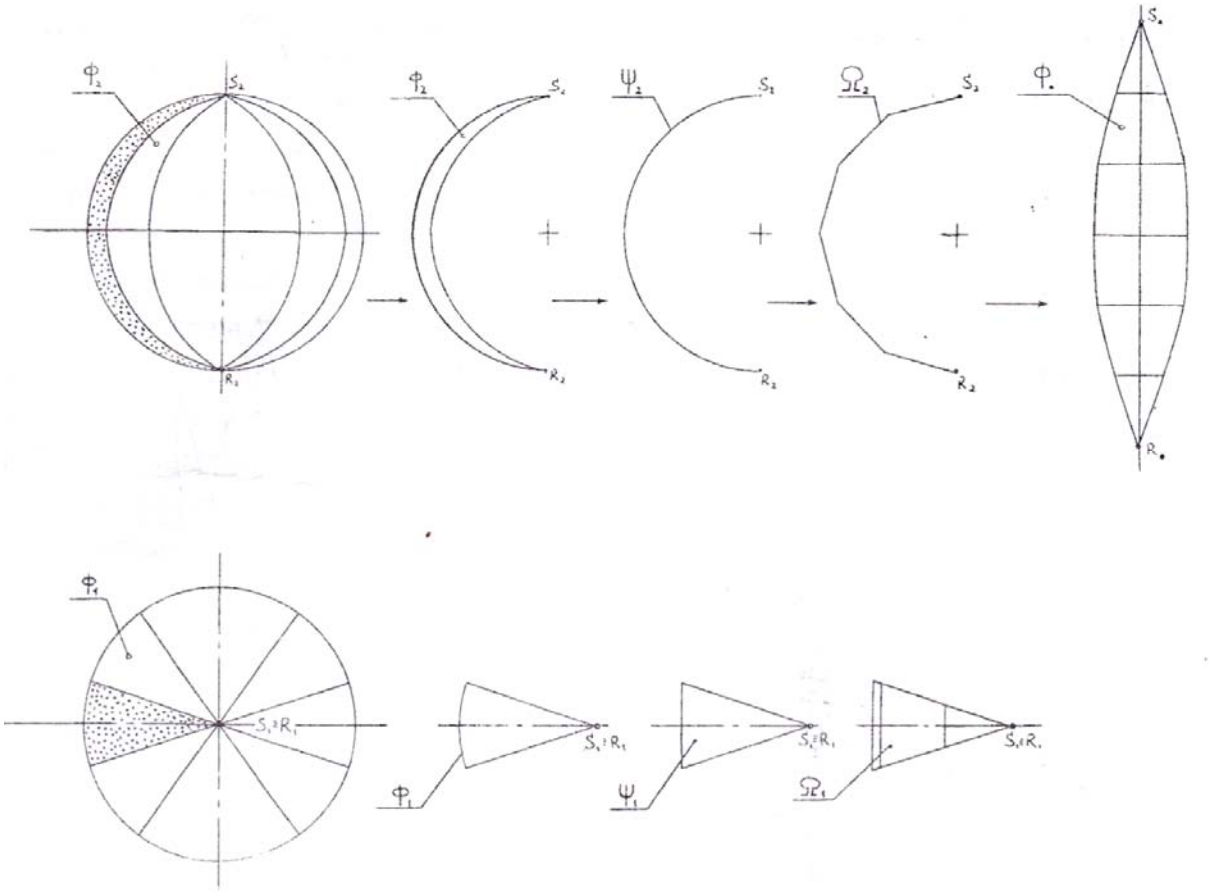


Рис.9. Приклад розгортання сфери

З’єднавши кінці цих твірних плавними кривими лініями **q** і **r**, отримаємо наближену (з надлишком) розгортку одної із десяти частин сферичної поверхні **Σ** (рис. 10,б).

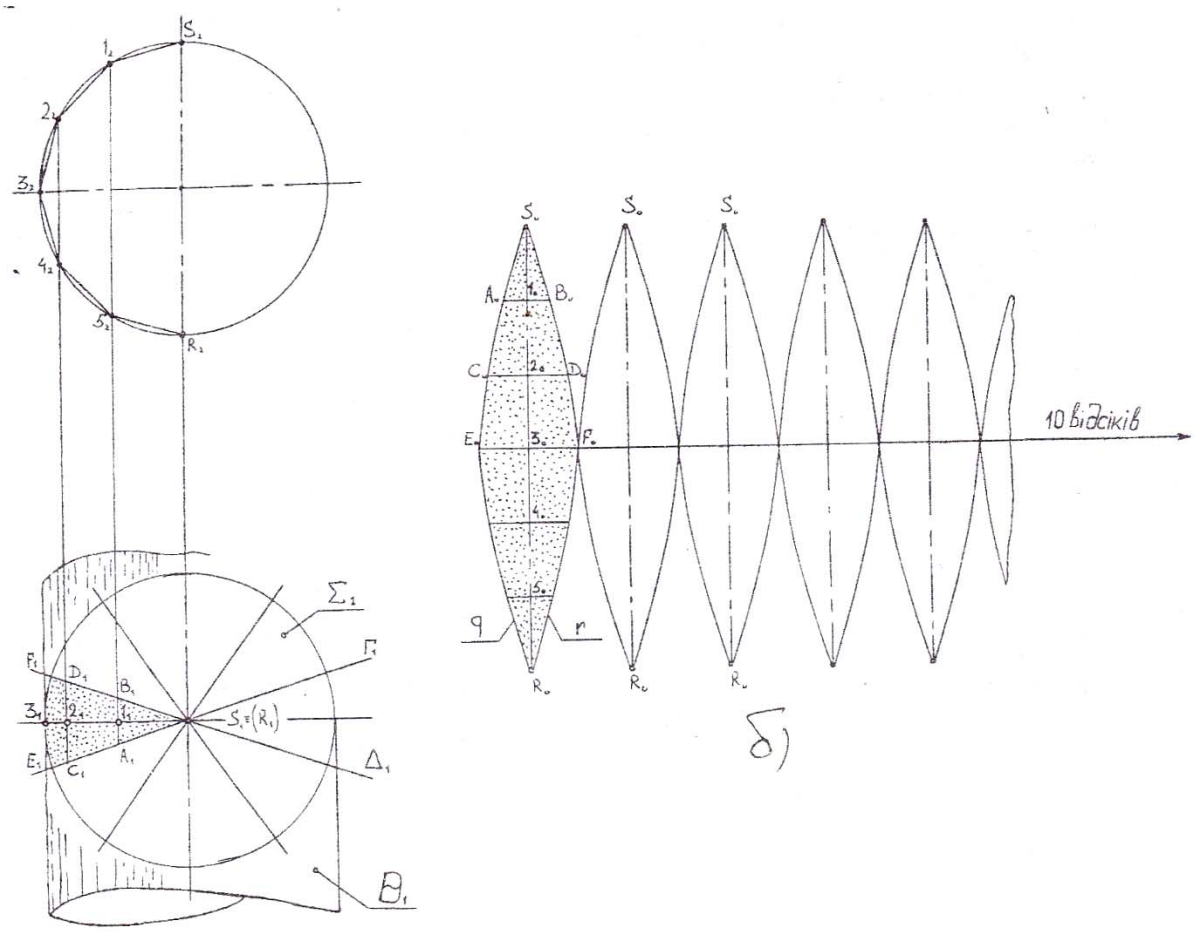


Рис.10. Наближена розгортка одної із десяти частин сферичної поверхні

ЗАВДАННЯ 3. ПЕРЕРІЗ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА, КОНУСА І КУЛІ ПЛОЩИНОЮ ТА ПОБУДОВА ЇХ РОЗГОРТКИ

Умова: побудувати переріз даної кривої поверхні площиною загального положення та її розгортку.

В основі побудови плоских перерізів циліндра і конуса лежить задача на побудову точки перетину прямої (твірної) з площиною, як і при побудові плоских перерізів призми та піраміди.

Спільність прийомів розв'язання випливає із спільності організації призм, пірамід, циліндрів і конусів. Якщо нескінченно збільшувати кількість граней піраміди, то в граничному положенні матимемо конус, а якщо нескінченно збільшувати кількість граней призми, то в граничному положенні матимемо циліндр. Для розв'язування цих задач можна використати як спосіб проектуючих січних площин, так і способи перетворення проекцій. В результаті перерізу циліндра площиною загального положення у наведених задачах матимемо еліпс, для визначення якого треба знайти характерні точки: найвищу, найнижчу, точки на контурних твірних, тощо. При перерізі конуса площиною загального положення матимемо один з конічних перерізів (еліпс, параболу або гіперболу), для побудови також треба визначити характерні точки кривої перерізу. При перерізі сфери площиною загального положення дістанемо коло, проекціями якого будуть еліпси.

Щоб визначити точки плоского перерізу циліндра, вигідно скористатися серією паралельних площин (горизонтальних або фронтальних), що перетинають

циліндр по твірних. При визначенні плоских перерізів конуса доцільно застосовувати косокутне допоміжне проектування на площину основи конуса у напрямку прямої, що належить площині.

Визначаючи переріз кулі площиною загального положення, зручно скористатися способом заміни площини проекцій, вибравши нову площину перпендикулярно до січної площини. На новій проекції шуканий переріз спроектується у відрізок прямої, рівний діаметру цього перерізу. За проекцією

цього діаметра і перпендикулярного до нього будують фронтальну або горизонтальну проекції перерізу.

При побудові фігури перерізу циліндра і конуса можна скористатися проективною відповідністю (спорідненою відповідністю чи гомологією) між основою тіла і його перерізом. При побудові перерізу кулі проективна відповідність (гомологія) виникає між фігурою перерізу та обрисом кулі.

Якщо поверхні циліндра і конуса розгортаються на площину, то сферу можна розгорнути тільки наближено. Щоб побудувати розгортку похилого циліндра або конуса, в них вписують многогранник (призму або піраміду), побудову розгортки якого було виконано в попередньому завданні.

У наведеному прикладі (рис. 11) показано побудову перерізу похилого еліптичного конуса площиною, заданою двома прямими, що перетинаються. Площина і конус спроектовані на горизонтальну площину проекцій у напрямі однієї з прямих, які визначають площину. При цьому площина спроектувалася прямою $A_1^{'}, C_1^{'}, B_1^{'}$, а конус – фігурою, обмеженою дотичними, проведеними з точки $S_1^{'}$ до його основи. Допоміжні проекції твірних, перетинаючись з допоміжною проекцією площини, дають допоміжні проекції точок перерізу $E_1^{'}, D_1^{'}$ та ін. Відновленням визначаємо точки на твірних.

На цьому самому рисунку показано розгортку поверхні конуса, на яку нанесено лінію перерізу. Розгортку побудовано способом тріангуляції, у конус вписано піраміду на восьмикутній основі, гранями якої є трикутники. Визначаючи натуральні величини сторін цих трикутників, будуємо за сторонами вісім трикутників, що становлять розгортку бічної поверхні.

Одержану на розгортці піраміди ламану заміняють кривою, дістаючи наближену розгортку бічної поверхні конуса. При нанесенні лінії перерізу спочатку визначають точки перерізу на окремих твірних натуральної величини.

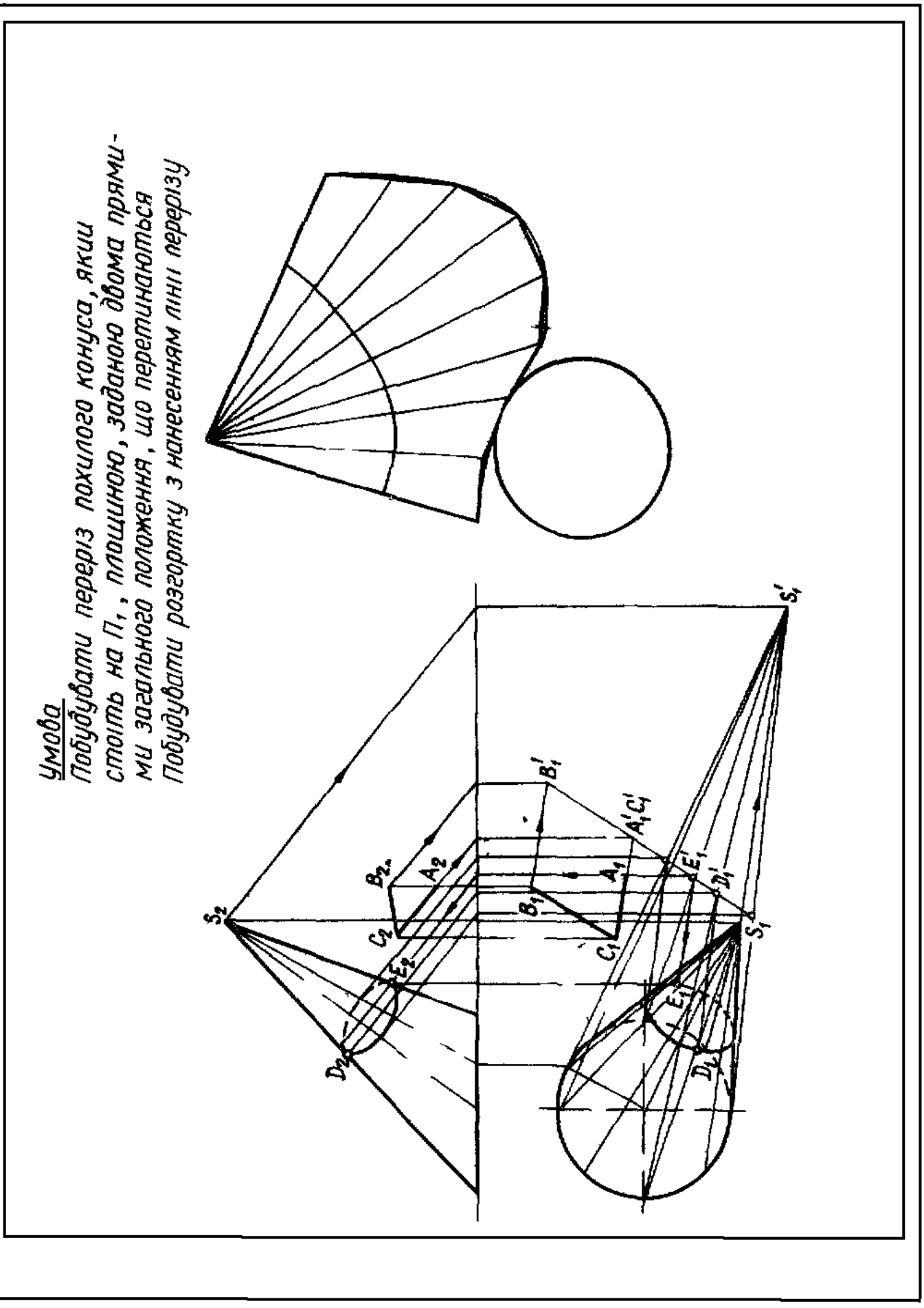
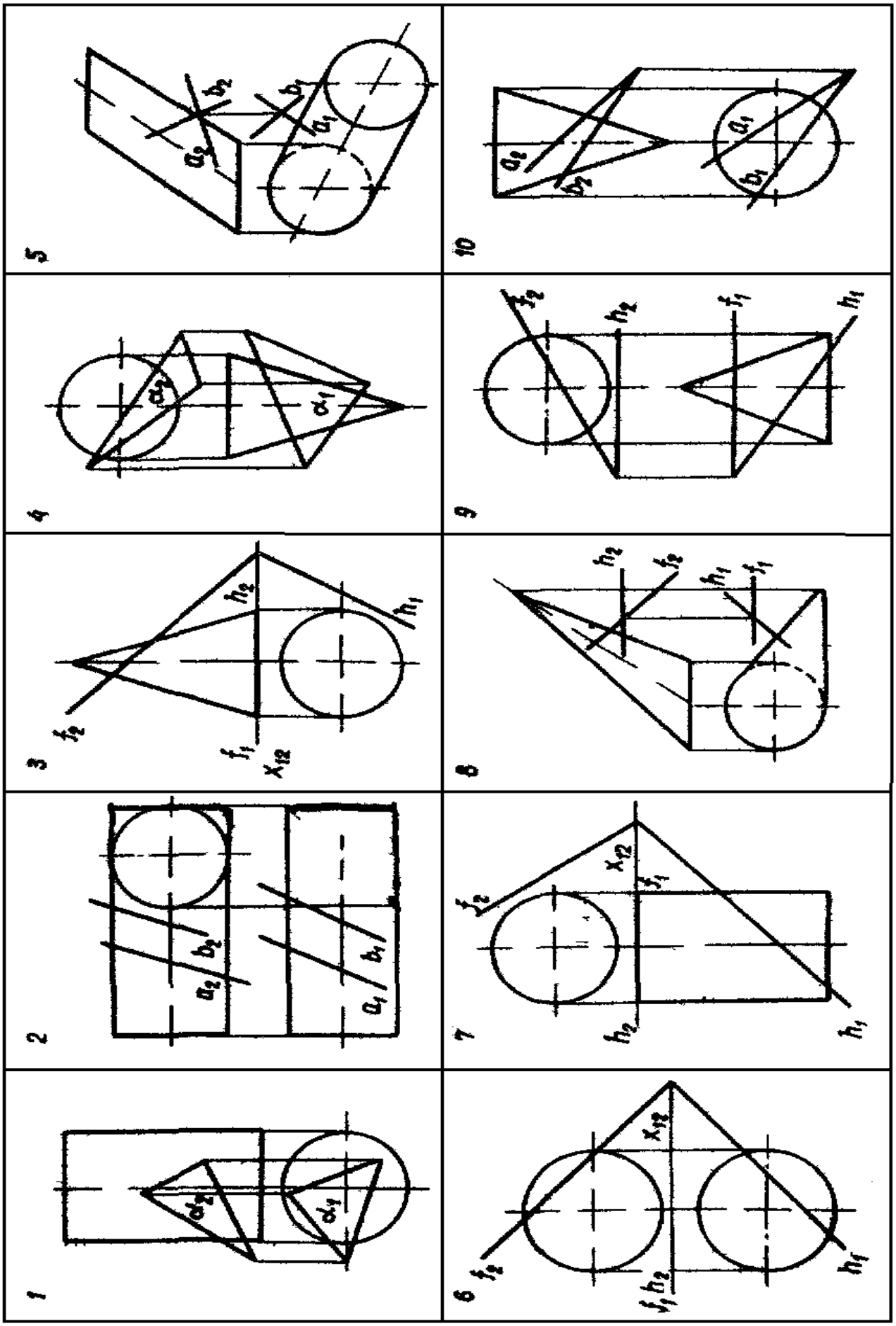
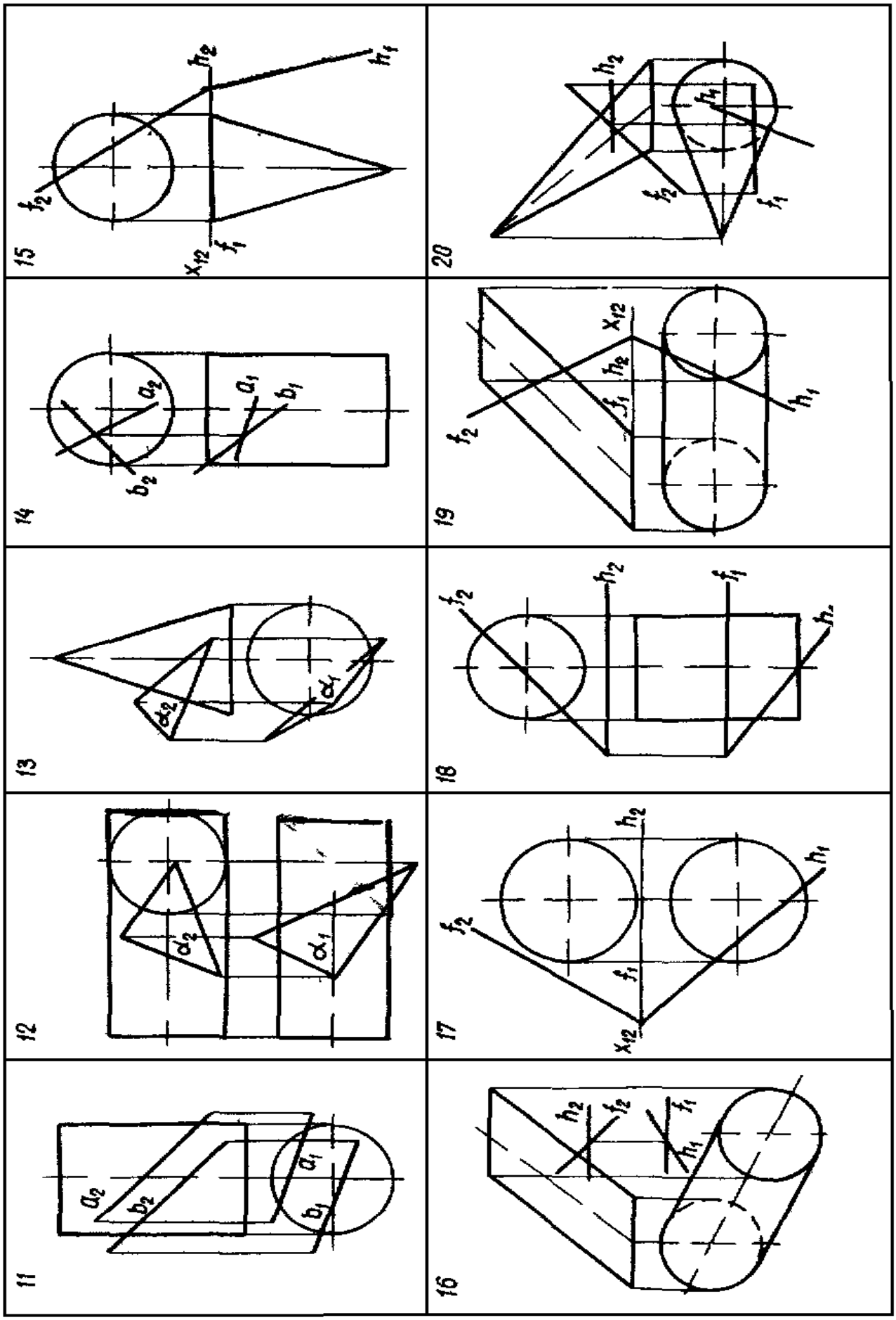
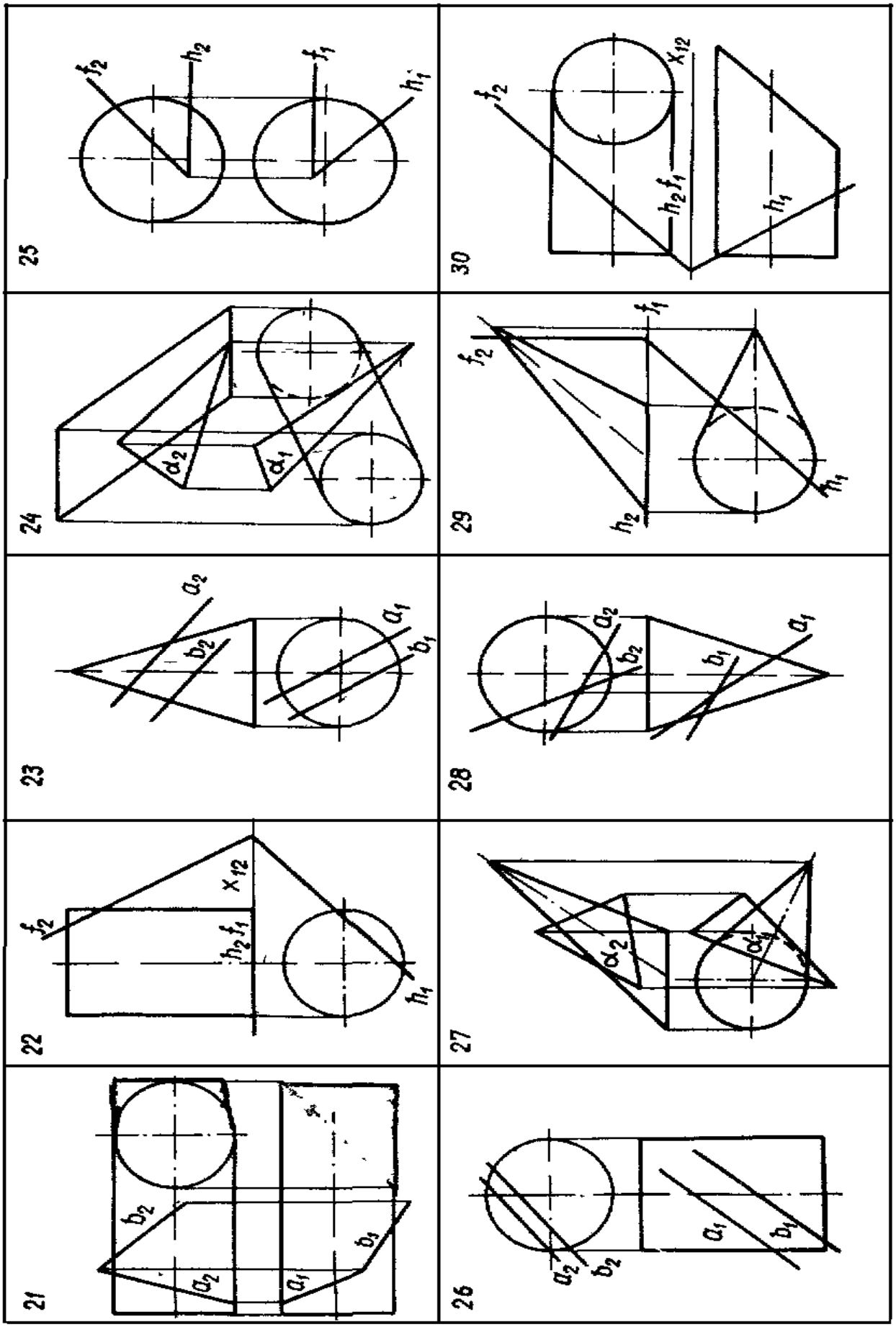


Рис.11. Побудова перерізу похилого еліптичного конуса площиною


1
d_2
d_1
2
a_2
b_2
a_1
b_1
3
h_2
h_1
f_2
f_1
x_{12}
4
d_2
d_1
5
b_2
b_1
a_2
a_1
6
f_2
x_{12}
$f_1 h_2$
h_1
7
f_2
x_{12}
f_1
h_2
h_1
8
h_2
f_2
h_1
f_1
9
f_2
h_2
f_1
h_1
10
d_2
b_2
d_1
b_1


11
a_2
b_2
a_1
b_1
12
d_2
d_1
13
d_2
d_1
14
a_2
b_2
a_1
b_1
15
h_2
h_1
f_2
x_{12}
f_1
16
h_2
f_2
f_1
h_1
17
h_2
h_1
f_2
f_1
x_{12}
18
f_2
h_2
f_1
h_1
19
x_{12}
h_2
f_1
h_1
f_2
20
h_2
h_1
f_2
f_1


21
22
23
24
25
26
27
28
29
30

ЛІТЕРАТУРА

1. Хаскин А. М. Черчение / А. М. Хаскин. — К. : Вища школа, 1985. – 440 с.

2. Годік Є. І. Технічне креслення / Є. І. Годік., В. М. Лисянський, А. С. Михайленко. — К. : Вища школа, 1985 . – 370 с.

3. Анурьев В. П. Справочник конструктора-машиностроителя / В. П. Анурьев. — М. : Высшая школа, 1989. – 256 с.

4. Годік Є. І. Технічне креслення / Є. І. Годік. — К. : Вища школа, 1978. – 325 с.

5. Михайленко В. Є. Інженерна графіка / В. Є. Михайленко, А. М. Пономарев. — К. : Вища школа, 1990. – 220 с.

6. Бубенников А. В. Начертательная геометрия / А. В. Бубенников, М. Я. Громов. — М. : «Высшая школа», 1985. –178 с.

7. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон. — М. : «Наука», 1988. – 200 с.

8. Иерусалимский А. М. Начертательная геометрия/ А. М. Иерусалимский.– М. : Росвузиздат, 1973. –154 с.

9. Колотов С. М. Нарисна геометрія / С. М. Колотов. — К. : Вид, 1967. – 122 с.

10. Четверухин Н. Ф. Начертательная геометрия / Н. Ф. Четвертухин. — М. : «Высшая школа», 1970. –170 с.

11. Каміновська А. Г. Нарисна геометрія / А. Г. Каміновська. — К. : НМКВО, 1990. –115 с.

Навчальне видання

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ, ІНЖЕНЕРНА ТА КОМП'ЮТЕРНА ГРАФІКА

Укладачі: Степанов Сергій Миколайович
Горбенко Наталія Андріївна

Відповідальний за випуск: Д. В. Бабенко

Редактори: С. М.Степанов

Н. А. Горбенко

О. М. Кушнарьова

Комп'ютерний набір: Н. А.Горбенко

Дизайн і верстка: Н.А. Горбенко

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 2.5

Тираж 50 прим. Зам. №_

Надруковано у видавничому відділі

Миколаївського національного аграрного університету.

54020, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9