

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРИСТИК КОНТАКТА ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПЕРВОНАЧАЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ И ТОЧЕЧНЫМ КАСАНИЕМ

Алексей Попов¹, Юрий Кипреев¹, Олег Савенков¹, Дмитрий Марченко²

¹*Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова
Пр. Героев Сталинграда, 9, г. Николаев, Украина. E-mail: savenkov.oleg@gmail.com*

²*Николаевский национальный аграрный университет*

Ул. Парижской коммуны, 9, г. Николаев, Украина. E-mail: marchenko_vod@mail.ru

Alex Popov¹, Yuri Kipreev¹, Oleg Savenkov¹, Dmitry Marchenko²

¹*National University of Shipbuilding named after Admiral Makarov*

Pr. Heroes of Stalingrad, 9, Nikolaev, Ukraine. E-mail: savenkov.oleg@gmail.com

²*Nikolaev National Agrarian University*

St. Paris Commune, 9, Nikolaev, Ukraine. E-mail: marchenko_vod@mail.ru

Аннотация. Дано решение задачи контакта поверхностей в начальной точке касания и линейного контакта зубов. Исследования проводились с использованием теории контакта Герца. Результаты и выводы были сопоставлены с расчетами, основанными на теории контактной прочности А.П. Попова. Было показано, что при значительной нагрузке передач с начальной точкой контакта имеет более высокую нагрузочную способность, чем при первоначальном контакте линейной. Решение было подтверждено во время экспериментальных исследований в статике на моделях и на расчетно-экспериментальных схемах.

Приведены расчет характеристик полного контурного эллипса при первоначальном точечном контакте соприкасающихся поверхностей при помощи схемы контакта с учетом численных значений коэффициентов, определяющих характеристики контакта соприкасающихся тел, расчет предельной нагрузки в контакте коротких поверхностей при полном контурном эллипсе и расчет полного полуэллипсоида деформаций (давлений).

Выполнено определение геометрических характеристик усеченного полуэллипсоида с оценкой эпюры распределения давления на площадке контакта соприкасающихся поверхностей. Было найдено соотношения между нагрузками и деформациями полных и усеченных форм эпюр, установлено соотношения между размерами эпюр распределения давления по площадке контакта, приведено расчет характеристик эпюры распределения давления по неполному контурному эллипсу контакта.

Предложен пример расчета, который выполнялся в пределах диапазона нагрузок, не превышающих предельного значения. Значения параметров усеченного эллипсоида были рассчитаны с учетом результатов при предельной нагрузке. При этом сравнивались эти результаты с данными, полученными при расчете линейчатого контакта цилиндрических поверхностей.

Ключевые слова: точечный контакт, линейный контакт, теория Герца, теория Попова, контактная прочность, напряжено-деформированное состояние.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Бурное развитие современной техники неизбежно ставит перед механикой деформирующего тела новые, более сложные задачи. Механика взаимодействия твердых деформирующих контактирующих тел в настоящее время вызывает большой интерес, который влияет на развитие механики сплошной среды и его исследования. Это объясняется тем, что все узлы, механизмы и конструкции контактно взаимодействуют между собой, при этом распределение контактирующих усилий между этими деталями остается заранее неизвестным и может быть найдено только благодаря решению специфических задач, которые называются контактными задачами. Определение закона изменения контактного давления по области контакта позволяет затем сформулировать граничные условия в напряжениях на поверхностях тел и заняться решением более простых задач по определению напряжено-деформированного состояния (НДС) внутри взаимодействующих тел [1, 2].

Фундаментальные понятия напряжений и деформаций были и остаются объектами, на которых построены теория упругости, пластичности, прочности твердых тел [3]. Перечислим некоторые существенные направления дальнейшего развития теории НДС: решение плоских и пространственных контактных задач теории упругости для областей и тел со сложной конфигурацией (конической формы), при наличии угловых точек и ребер, разрезов, концентраторов напряжений типа седловидных поверхностей большой полной кривизны и т. п.; развитие методов решения пространственных задач при произвольных смешанных граничных условиях; разработка эффективных методов решения задач для классов тел, являющихся промежуточными между пространственными и двумерными или одномерными системами (пластинки и оболочки средней тол-

щины, короткие стержни); развитие асимптотических методов интеграции в различных задачах теории упругости, численных методов решения задач с использованием персональных электронно-вычислительных машин, статистических методов в механике упругого тела; теории устойчивости упругих тел при напряжениях, сопоставимых с величинами модулей упругости; исследовании по теории связанных (взаимодействующих) механо-термоэлектромагнитных полей [4].

Несмотря на значительный прогресс в теории НДС при контактном взаимодействии и исходя из перечисленных направлений развития теории НДС контактирующих тел, а также исследованиями, стоящих в работе, задачей теоретических исследований является разработка и исследование нового эффективного аналитического метода решения контактной задачи. Актуальность задачи теоретических исследований обусловлена важностью технических положений теории контактного взаимодействия, которая находит широкое применение в машиностроении и других сферах человеческой деятельности.

АНАЛИЗ ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ПУБЛИКАЦИЙ

Контактная прочность деталей и узлов машин зависит в основном от свойств и состояния материала вблизи поверхности, воспринимающей контактные нагрузки, от шероховатости и формы поверхности, контакта и от условий нагрузки со стороны других деталей, передающих контактные нагрузки [1, 5, 6]. Для характеристики поверхности детали и материала вблизи поверхности нужно знать микро- и макрогеометрии поверхности, структуру и механические свойства субповерхностных слоев материала, а также НДС его в этой области, которая остается после окончательных процессов обработки поверхности.

Все эти факторы тесно связаны с технологическими методами и процессами, которые применяют при обработке данной детали, поэтому анализировать удобнее в связи с видами и комплексами технологических операций, которые формировали поверхность детали и материал вблизи нее.

НДС материала при контактных нагрузках характеризуется прежде всего большими градиентами напряжений, локализацией напряжений этого рода в небольших объемах вблизи поверхности и относительно большими масштабами действующих и допустимых напряжений при двухмерной и трехмерной системах напряжений [1].

Допуская однородность и изотропию материала, отсутствие сил трения на абсолютно гладкой поверхности касания, характер деформаций чисто упругий и размеры пятна контакта малы по сравнению с характерными размерами контактирующих тел, Герц [7, 8, 9] дал первоначальное решение контактной задачи.

Анализ исследований в области износостойкости, контактной прочности и механики трибосопряжений, НДС материала при контактных нагрузках и решением контактных задач отражены в работах Г. Герца, А. Н. Динника, М. М. Беляева, Б. С. Коваль-

ского, С. В. Пинегина, И. В. Крагельского, Е. В. Рыжова, Б. И. Костецкого, С. М. Левиной, Б. И. Бутакова, А. Г. Кузьменка, Н. В. Киндрачука, В. В. Аулина, А. В. Дыхи, Р. В. Сорокатого, А. П. Попова и др. [5, 31].

Развитие эффективных аналитических методов исследования НДС оболочек и материала сложной формы при сосредоточенных действиях и локальных нагрузках в упругой и пластической областях деформаций остается одним из важнейших вопросов в решении контактной задачи [10].

Из всех аналитических и экспериментальных исследований можно сделать вывод, что в подавляющем большинстве случаев упругого контакта деталей с однородным материалом напряженные есть две зоны: зона крайнего поверхностного слоя и зона максимальных касательных напряжений, расположенных на некоторой глубине под поверхностью и по некоторым внешним условиям нагрузки, замыкаются с крайней поверхностной зоной [11, 12].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При отсутствии внешних сжимающих нагрузок местом контакта соприкасающихся поверхностей в зависимости от их геометрических характеристик могут быть точка, линия или поверхность. Точечный или линейчатый контакт под внешним сжатием превращается в пятно контакта. В контактах цилиндрических поверхностей с параллельными осями это пятно является прямоугольной полоской, во всех остальных случаях – поверхностью, ограниченной замкнутым контуром. Наиболее распространенной в расчетах формой такого контура является предложенная Герцем эллипсоидальная [13-16].

В качестве коротких поверхностей будем считать такие, в контакте которых под влиянием внешней нагрузки контурный эллипс контакта выходит за пределы конструктивной длины. Для расчета характеристик контакта подобных поверхностей принимается допущение, что при значительных нагрузках контурный эллипс становится усеченным. Расчет размеров усеченного эллипса выполняется с соблюдением общих положений теории Герца. Рассмотрим последовательно методики расчета полного и усеченного контурных эллипсов [17-21].

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

1. Расчет характеристик полного контурного эллипса при первоначальном точечном контакте соприкасающихся поверхностей.

Расстояние между соответствующими точками A_1 и A_2 (рис. 1) определяется квадратичной зависимостью [1] $A_1A_2 = z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2$, в которой коэффициенты A и B , являющиеся параметрами кривизны, имеют следующие значения:

$$A = \frac{1}{4} [(k_{11} + k_{12}) + (k_{22} + k_{21}) - R],$$

$$B = \frac{1}{4} [(k_{11} + k_{12}) + (k_{22} + k_{21}) + R],$$

где: $R = \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{22} - k_{21})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{22} - k_{21})\cos 2\omega}$; k_{11} и k_{12} – кривизны главных нормальных разрезов

тела 1 в точке контакта O (рис. 1); k_{22} и k_{21} – кривизны главных нормальных разрезов тела 2 в точке контакта O ; ω – угол между плоскостями кривизны k_{11} и k_{22} .

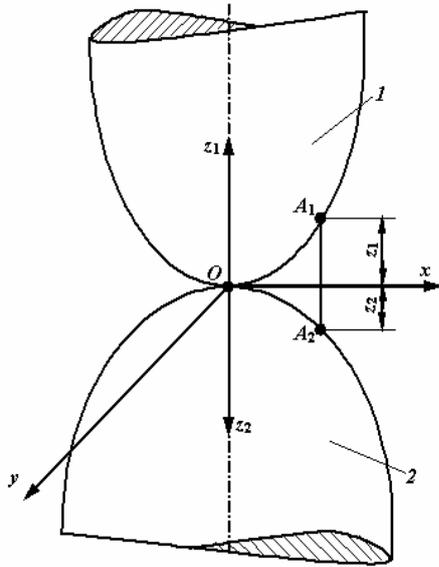


Рис. 1. Схема контакта соприкасающихся поверхности

Fig. 1. The pin contacting surface

Уравнение перемещений контактной задачи далее представляется в следующем виде:

$$Ax^2 + By^2 = \delta - \frac{\eta}{\pi} \int_F \frac{pdF}{r},$$

где: F – площадь контурного эллипса:

$$\eta = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2},$$

где: ν_1 ; ν_2 ; E_1 и E_2 – соответственно, коэффициенты Пуассона и модули упругости контактирующих тел 1 и 2 (рис. 1).

С использованием предположения об эллипсоидальном распределении давления по площадке контакта интегральное уравнение совместности деформаций после интегрирования принимает вид:

$$\delta - Ax^2 + By^2 = \eta \frac{p_0}{a} \left[abK - \frac{b}{a} Dx^2 - \frac{a}{b} (K - D)y^2 \right].$$

Это уравнение, выраженное через функции эллиптических интегралов, используется для расчета размеров δ , a и b полуэллипсоида деформаций, построенного на контурном эллипсе поверхности контакта.

Методика расчета размеров площадки контакта и амплитуды p_0 полуэллипсоида распределения давления (или амплитуды сближения δ_0) контактирующих тел общеизвестна, представлена в многочисленных трудах, например [1-3, 22-26] и подробно здесь не приводится. Воспользуемся для дальнейшего рассмотрения методикой, изложенной В.М. Макушиным и Н.Г. Савельевым в главах 13 и 14 справочника [1] и приведенными там окончательными зависимостями.

По этим зависимостям рассчитываются:

– большая полуось контурного эллипса площадки контакта:

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\eta P}{\sum k}}, \quad (1)$$

где:

$$n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{B}{A}\right) D}, \quad (2)$$

– малая полуось контурного эллипса:

$$b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\eta P}{\sum k}}, \quad (3)$$

где:

$$n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B}\right) (K - D) \sqrt{1 - e^2}}, \quad (4)$$

– наибольшая интенсивность давления p_0 между сжимаемыми телами

$$p_0 = \frac{n_p}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta}\right)^2 P}, \quad (5)$$

где:

$$n_p = \frac{1}{n_a n_b}, \quad (6)$$

– сближение δ_0 соприкасающихся тел:

$$\delta_0 = \frac{n_\delta}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 P^2 \sum k}, \quad (7)$$

где:

$$n_\delta = K \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} \frac{1}{D}}. \quad (8)$$

В перечисленные зависимости входят величины:

– упругой характеристики материалов контактирующих тел:

$$\eta = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (9)$$

– относительного эксцентриситета контурного эллипса:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (10)$$

Относительный эксцентриситет является параметром полных эллиптических интегралов:

– первого рода $K(e) = \int_0^{0,5\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (11)$

– второго рода $L(e) = \int_0^{0,5\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad (12)$

– и сочетания интегралов $D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)]. \quad (13)$

Значения эллиптических интегралов в табличном виде приведены в различных математических и научных справочниках. Но подробные сведения об их величинах для параметра e в диапазоне

$0,999 < e^2 < 1,0$ отсутствуют. Однако шаг табуляции в них очень велик и не позволяет выполнить точных расчетов параметров контактных деформаций и напряжений.

Это потребовало выполнения расчетов полных эллиптических интегралов (11) – (13) при значениях относительного эксцентриситета контурного эллипса e , соответствующих диапазону величин: $0,999 < e^2 < 1,0$. Однако именно подробные данные необходимы для решения контактной задачи при отношениях $\frac{A}{B}$, близких к нулю. В табл. 1 приведены значения коэффициентов, дополняющие аналогичную таблицу справочника [1].

Таблица 1. Численные значения коэффициентов, определяющих характеристики контакта соприкасающихся тел

Table 1. The numerical values of the coefficients, determine the characteristics of the contact contacting bodies

e^2	$\frac{A}{B}$	Ω	n_a	n_b	n_p	n_δ
0,9994	0,00246	0,99509	10,20413	0,24995	0,39208	0,31794
0,99945	0,00228	0,99545	10,50406	0,24634	0,38646	0,31150
0,9995	0,00210	0,99582	10,84275	0,24245	0,38040	0,30456
0,99955	0,00191	0,99619	11,22992	0,23822	0,37380	0,29705
0,9996	0,00172	0,99656	11,67918	0,23358	0,36656	0,28883
0,99965	0,00153	0,99695	12,21033	0,22843	0,35852	0,27974
0,9997	0,00133	0,99734	12,85366	0,22263	0,34945	0,26956
0,99975	0,00113	0,99773	13,65854	0,21596	0,33902	0,25792
0,9998	0,00093	0,99814	14,71266	0,20807	0,32667	0,24427
0,99985	0,00072	0,99856	16,19274	0,19832	0,31140	0,22759
0,9999	0,00050	0,99900	18,53531	0,18535	0,29107	0,220579
0,99995	0,00027	0,99947	23,35202	0,16512	0,25934	0,17279
0,99999	0,00006	0,99988	39,92990	0,12627	0,19834	0,11388
0,999991	0,000056	0,999888	41,3571	0,1241	0,19489	0,11076
0,999992	0,000050	0,99990	43,0130	0,12166	0,19110	0,10737
0,999993	0,000044	0,999912	44,9708	0,11898	0,18689	0,10364
0,999994	0,000038	0,999923	47,3419	0,11596	0,18215	0,09949
0,999995	0,000032	0,999935	50,3083	0,11249	0,1767	0,09477
0,999996	0,000026	0,999947	54,1929	0,10839	0,17025	0,08929
0,999997	0,00002	0,99996	59,6469	0,10331	0,16229	0,08266
0,999998	0,000014	0,999972	68,2786	0,09656	0,15169	0,0741
0,999999	0,0000073	0,999985	86,0255	0,08602	0,13513	0,0614
1,0	0	1,0	∞	0	0	0

При малых значениях отношения $\frac{A}{B}$ длина большой оси контурного эллипса может превышать конструктивную длину линии контакта. Если использовать для расчета в этих случаях гипотезу Герца об эллипсоидальном распределении интенсивности давления по контурному эллипсу контакта, то необходимо согласиться с тем, что полуэллипсоид в этих случаях будет неполным, т.е. усеченным полуэллипсоидом [27].

2. Расчет предельной нагрузки в контакте коротких поверхностей при полном контурном эллипсе.

Для того, чтобы определить форму контурного эллипса, необходимо рассчитать предельную нагрузку, разграничивающую полный и усеченный контурные эллипсы. Предельная длина полного эллипса равна конструктивной длине контактной линии l . Обозначим нагрузку, при которой достигается такой размер большой оси эллипса, предельной величиной P_l . Её расчет можно выполнить в следующей последовательности.

- По исходным данным определяются размеры радиусов кривизны поверхностей.
- Рассчитываются главные кривизны нормальных сечений в первоначальной точке контакта O : k_{11}, k_{12}, k_{22} и k_{21} .
- Определяется угол ω между плоскостями кривизны.
- Рассчитываются коэффициенты (параметры кривизны) A и B .
- Рассчитывается отношение коэффициентов $\frac{A}{B}$.

По рассчитанному отношению в табл. 1 находятся остальные параметры расчетных выражений. При необходимости для точного расчета применяется метод интерполяции [27, 28].

– Рассчитываются: упругая характеристика контактирующих тел:

$$\eta = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \text{ сумма кривизн } \sum k = 2(A+B).$$

– Согласно зависимости (1), приравняв длину большой полуоси половине конструктивного размера, $a = 0,5l$ рассчитаем предельную нагрузку:

$$P_l = \left(\frac{l}{2n_a}\right)^3 \frac{2}{3} \frac{\sum k}{\eta} = \left(\frac{l}{n_a}\right)^3 \frac{\sum k}{12\eta}. \quad (14)$$

3. Расчет полного полуэллипсоида деформаций (давлений)

Если нагрузка на зону контакта не превышает предельной величины, рассчитанной по формуле (14), тогда расчет эпюры выполняется по стандартной схеме.

Для его выполнения используются ранее приведенные зависимости (1) – (10).

4. Определение геометрических характеристик усеченного полуэллипсоида

Для дальнейшего применения гипотезы Герца необходимо вначале рассмотреть вопрос об определении объема усеченного полуэллипсоида давлений (рис. 2).

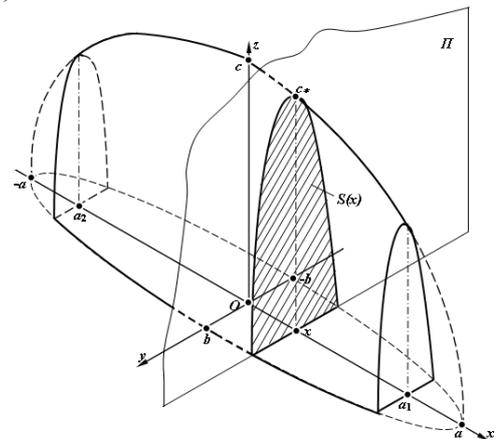


Рис. 2. Эпюра распределения давления на площадке контакта соприкасающихся поверхностей

Fig. 2. Plot the pressure distribution on the contact area of contact surfaces

Вертикальная координата полуэллипсоида z пропорциональна давлению p на площадке контакта.

Сечение эллипсоида плоскостью Π , параллельной плоскости zOy ($x = \text{const}$), является половиной вертикального эллипса, описываемого уравнением:

$$\left(\frac{y}{b_*}\right)^2 + \left(\frac{x}{a_*}\right)^2 = 1 \text{ с полуосями: } b_* = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \text{ и } c_* = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Площадь половины эллипса можно определить интегрированием, перейдя к параметрическим зависимостям $y = b_* \cos t$ и $z = c_* \sin t$, в которых переменная находится в диапазоне $t = 0 \dots \pi$.

Текущее значение площади сечения $S(x)$ находится интегрированием по формуле справочника [15]:

$$S(x) = 0,5 \int_0^\pi (yz' - zy') dt. \quad (15)$$

Подинтегральная функция после подстановки параметрических зависимостей приводится к следующему виду:

$$yz' - zy' = b_* \cos t \cdot c_* \cos t + c_* \sin t \cdot b_* \sin t = b_* \cdot c_*. \quad (16)$$

После подстановки этого выражения в интегральную зависимость (15) получим, с учетом расчетных зависимостей (16) для определения полуосей сечения, текущее значение площади сечения:

$$S(x) = 0,5 \int_0^\pi b_* c_* dt = 0,5 \pi b_* c_* = 0,5 \pi bc \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]. \quad (17)$$

Усеченный полуэллипсоид, в зависимости от геометрических характеристик, может как симметричным, так и асимметричным. Поэтому будем определять объем усеченного полуэллипсоида для общего случая асимметричного варианта:

$$V_{\text{зп}}(a_1) = \int_{a_2}^{a_1} S(x) dx = \frac{\pi bc}{2} \int_{a_2}^{a_1} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right] dx = \frac{\pi bc}{2} \left[(a_1 - a_2) - \frac{a_1^3 - a_2^3}{3a^2} \right]. \quad (18)$$

Для варианта симметричного усеченного полуэллипсоида $a_2 = -a_1 = -a_0$, тогда из выражения (3) следует, что:

$$V_y(a_0) = \pi abc \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right), \quad (19)$$

где: $\alpha = \frac{a_1}{a}$.

Нетрудно заметить, что при значении $\alpha = 1$ по формуле (19) рассчитывается объем полного полуэллипсоида $V(a) = V = \frac{2}{3} \pi abc$. Отношение объема усеченной эпюры к объему полной выражается зависимостью:

$$v = \frac{V_y(a_0)}{V} = \frac{3}{2} \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right). \quad (20)$$

Для дальнейшего рассмотрения контактной задачи следует найти соотношения между нагрузками и деформациями полных и усеченных форм эпюр [29].

5. Соотношения между размерами эпюр распределения давления по площадке контакта.

Переходной эпюрой называется эпюра распределения давления, для которой длина контурного эллипса $2a_0$ равна конструктивной длине контакта l . Контурный эллипс и соответствующая эпюра распределения давления на ней показаны на рис. 3 пунктирными линиями.

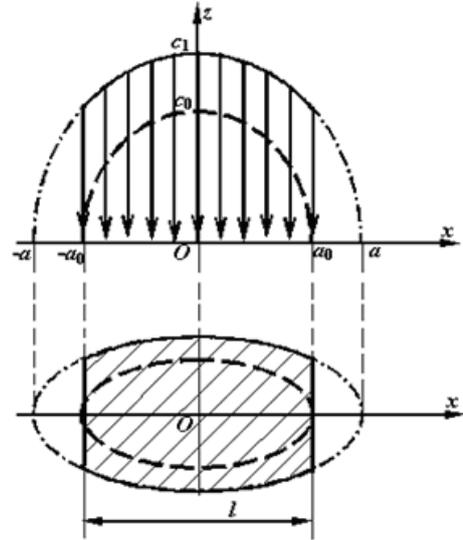


Рис. 3. Расчету характеристик эпюры распределения давления по неполному контурному эллипсу контакта

Fig. 3. Calculation of the characteristics diagram of the pressure distribution on the incomplete contour ellipse contact

Выполним сравнение эпюр при симметричном усеченном контурном эллипсе. Объем переходной эпюры пропорционален нагрузке P_0 , с превышением которой контурный эллипс становится неполным (рис. 3).

Заштрихованная часть соответствует усеченному эллипсоиду. Объем переходного эллипсоида с длиной большой оси $2a_0 = l$ равен:

$$V_0 = V(a_0) = \frac{2}{3} \pi a_0 b_0 c_0 = \frac{\pi}{3} l b_0 c_0. \quad (21)$$

Усеченная эпюра распределения давления является частью полного полуэллипсоида с длиной большой полуоси: $a = \frac{0,5l}{\alpha} = \frac{a_0}{\alpha}$.

Отношение α является масштабным коэффициентом между подобными полу эллипсоидами с длинами полуосей a и a_0 . Учитывая это подобие, выразим отношение объемов эллипсоидов

$$\frac{V(a_0)}{V(a)} = \alpha^3. \quad (22)$$

Объем усеченной эпюры пропорционален заданной нагрузке, $V_y(a_0) \sim P$, а объем переходной эпюры – переходной нагрузке, $V(a_0) \sim P_l$. выразим их отношение безразмерным коэффициентом:

$$\frac{P}{P_l} = \frac{V_y(a_0)}{V_0(a_0)} = k_y. \quad (23)$$

Усеченная эпюра является частью полной с длиной оси, равной a , которая рассчитывается при помощи зависимости (19). Преобразуем зависимость (20) с учетом (20) и (23):

$$\frac{V(a_0)}{V(a)} = \frac{V_0(a_0)\nu}{V_y(a_0)} = \frac{\nu}{k_y} = \alpha^3. \quad (24)$$

Используя значение функции (20), определим величину относительного коэффициента:

$k_y = \frac{3}{2\alpha^2} - 0,5$. С помощью этого выражения находим отношение:

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2k_y + 1}}. \quad (25)$$

Амплитудное значение переходной эпюры давления определим, используя зависимость (5):

$$p_0 = \frac{n_p}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\sum k \right)^2} P_0 = \frac{n_p}{\pi} \frac{a_0}{n_a} \frac{\sum k}{\eta} = \frac{n_b l}{2\pi} \frac{\sum k}{\eta}. \quad (26)$$

Амплитуда усеченной эпюры находится с учетом масштабного коэффициента, рассчитанного по формуле (25):

$$p_{0\max} = \frac{p_0}{\alpha}. \quad (27)$$

Пример расчета.

В качестве примера воспользуемся данными опытной установки по определению параметров эллиптической площадки контакта [7, 30, 31].

В качестве сжимаемых тел используются круговой цилиндр 5 с хвостовиками 6 и бочкообразный цилиндр 7 с хвостовиками 8. При этом: $r_1 = 40$ мм; $r_2 = 60$ мм; $l = b_w = 100$ мм и $\Delta S = 0,03$ мм. При параллельных осях контактирующих поверхностей угол между осями $\omega = 0^\circ$.

Вначале рассчитаем радиус «бочки»:

$$R_1 \approx \frac{l^2}{8\Delta S} = \frac{0,1^2}{8 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} = \frac{10^3}{24} \approx 41,67 \text{ м.}$$

Кривизны поверхностей имеют следующие значения:

$$k_{11} = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ м}^{-1}; \quad k_{12} = \frac{1}{R_1} = 0,024 \text{ м}^{-1},$$

$$k_{22} = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{0,06} \approx 16,67 \text{ м}^{-1}; \quad k_{21} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ м}^{-1}.$$

Для дальнейшего расчета используются приведенные выше зависимости. Параметр кривизны:

$$R = \sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{22} - k_{21})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{22} - k_{21})\cos 2\omega}$$

при $\omega = 0^\circ$ рассчитывается по формуле

$$R = (k_{11} - k_{12}) + (k_{22} - k_{21}) = 25 + 0,024 + 16,67 = 41,67 \text{ м}^{-1}.$$

Соответственно, параметры:

$$A = \frac{k_{12} + k_{21}}{2} = 0,5k_{12} = 0,012 \text{ м}^{-1};$$

$$B = \frac{k_{11} + k_{22}}{2} = 0,5(26 + 16,67) = 20,83 \text{ м}^{-1}.$$

$$\text{Отношение параметров: } \frac{A}{B} = \frac{0,012}{20,83} = 0,000576.$$

Используя табл. 1, путем аппроксимации рассчитываются характеристики, входящие в зависимости (1) – (13): $n_a = 17,72$, $n_b = 0,19$, $n_p = 0,297$, $n_\delta = 0,223$, $e = 0,99994$. Упругая характеристика материалов контактирующих тел рассчитывается при $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3$ и $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^{11}$ Па:

$$\eta = 2 \frac{1 - \nu^2}{E} = 2 \frac{1 - 0,09}{2 \cdot 10^{11}} = 0,91 \cdot 10^{-11} \text{ Па}^{-1}.$$

Величину предельной нагрузки рассчитаем по формуле (14):

$$P_l = \left(\frac{l}{n_a} \right)^3 \frac{\sum k}{12\eta} = \left(\frac{0,1}{17,72} \right)^3 \frac{41,694}{12 \cdot 0,91 \cdot 10^{-11}} = 68,62 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Результаты последующих расчетов, выполненные с применением приведенных зависимостей, внесены в табл. 2. Эти расчеты выполнялись в пределах диапазона нагрузок, не превышающих предельного значения. Значения параметров усеченного эллипсоида могут быть рассчитаны с учетом результатов при предельной нагрузке по формулам (23) – (25).

Таблица 2. Характеристики в контакте поверхностей с расчетами теории Герца

Table 2. Characteristics in contact with top-of-Hertz theory calculations

Характеристики в контакте цилиндрической и бочкообразной поверхностей								
P , кН	20	30	40	50	68,62	70	80	100
$2a$, мм	66,2	75,8	83,4	90	100	100	100	100
$2b$, мм	0,673	0,771	0,848	0,914	1,015	1,12	1,33	1,61
$10^3 \delta$, мм	1,62	2,12	2,57	2,99	3,69	4,12	5,16	7,09
p_0 , МПа	743	821	928	950	1000	1016	1070	115
Характеристики эллипсоида нагрузки в контакте цилиндрических поверхностей								
$2b$, мм	0,431	0,527	0,609	0,681	0,797	0,806	0,861	0,963
p_0 , МПа	540	661	784	854	987	1010	1080	1207
Δp_0 , МПа	173	160	144	106	13	6	-10	-50

Сравним эти результаты с данными, полученными при расчете линейчатого контакта цилиндрических поверхностей. Воспользуемся для их расчета известными зависимостями справочника [1]. Ширина полоски контакта определяется по формуле:

$$b = \sqrt{\frac{4\eta}{\pi} \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2) b_w}} \sqrt{P}, \text{ а максимальное давлe-}$$

$$\text{ние: } p_0 = \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)}{\pi \eta r_1 r_2 b_w}} \sqrt{P}.$$

При исходных данных $r_1 = 40$ мм; $r_2 = 60$ мм; $l = b_w = 100$ мм получим результаты, приведенные в табл. 2

ВЫВОДЫ

1. Разработанная Герцем теория контакта была дополнена методикой расчета характеристик контакта поверхностей для эпюры распределения давления по неполному контурному эллипсу контакта.

2. Установлено, что при длине большей оси контурного эллипса меньше длины зуба линейный контакт цилиндрических поверхностей имеет несущую способность выше точечного контакта.

3. При нагрузках, превышающих предельные значения, контурный эллипс становится усеченным. С увеличением внешней нагрузки напряжения и поперечные размеры контурного эллипса и полосы контакта сближаются. При определенном значении специального масштабного коэффициента максимальные давления эпюр сравниваются, а при дальнейшем его увеличении конструкция с первоначальным точечным контактом становится менее напряженной, чем линейный контакт цилиндрических поверхностей.

4. С увеличением радиусов бочкообразности напряжения и поперечные размеры контурного эллипса и полосы контакта сближаются. При определенном значении масштабного коэффициента максимальные давления эпюр сравниваются, а при дальнейшем его увеличении конструкция с первоначальным точечным контактом становится менее напряженной контакта цилиндрических поверхностей.

5. Конструкции с первоначальным точечным контактом менее чувствительны к перекосам осей и в этих условиях обладают повышенной несущей способностью по сравнению с конструкциями с первоначальным линейным контактом.

6. Аналогичные выводы были получены в процессе анализа по более простой в реализации теории А.П. Попова [4, 5, 7]. В отличие от теории Герца, эта теория не требует громоздких выкладок [1, 2] с применением специальных таблиц эллиптических функций.

7. По результатам теоретических и экспериментальных исследований был сделан общий вывод о преимуществе передач с первоначальным точечным контактом зубьев по сравнению с традиционным зацеплением линейным контактом зубьев. Это подтверждается впервые выполненными теоретическими и экспериментальными исследованиями точечного контакта зубьев в статике на опытных образцах (рис. 2) и при сравнительных испытаниях зубчатых колес в рабочих условиях в составе экспериментального редуктора [8].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Бюргер И.А., Пановко Я.Г. 1968.** Прочность, устойчивость, колебания. М.: Машиностроение. Том 2, 464.
2. **Ковалев М.П., Народецкий М.З. 1975.** Расчет высокоточных шарикоподшипников. М.: Машиностроение, 280.
3. **Серенсен С.В., Ачеркан И.С. 1951.** Справочник машиностроителя. М.: Главное изд-во

научн.-техн. машиностроительной литературы. Том III, 1098.

4. **Попов А.П., Кипреев Ю.Н., Медведовский А.М. 2008.** Нагрузочная способность новых зубчатых передач. Труды первой международной конференции: Теория и практика рационального проектирования, изготовления и эксплуатации машиностроительных конструкций. Львов: КИПАТРИ ЛТД. 184-186. (Украина).
5. **Попов А.П. 2008.** Контактная прочность зубчатых механизмов. Николаев.: изд-во НУК, 580.
6. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. 1986.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 544.
7. **Попов А.П., Кипреев Ю.Н., Медведовский А.М., Савенков О.И. 2009.** Передачи редукторов с пространственной точечной системой зацепления зубьев. Международный сборник научных трудов. Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Донецк: ДонНТУ. Вып. 38, 189-197.
8. **Попов А.П., Кипреев Ю.Н., Мироненко А.И. 2011.** Повышение эффективности современных зубчатых передач. Международный сборник научных трудов. Прогрессивные технологии и системы машиностроения. Донецк: ДонНТУ. Вып. 42, 245-251.
9. **Попов А.П., Мозговой М.Г., Савенков О.И. 2010.** Основы методологии теоретических исследований контактной прочности упруго сжатых тел. Сборник научных трудов. Николаев: Издательство НУК. №4(433), 108–117. (Украина).
10. **Попов А.П., Мозговой М.Г., Савенков О.И. 2010.** Контактная прочность упруго сжатых цилиндров конечной длины. Сборник научных трудов. Николаев: Издательство НУК. 2010. №6(435), 96–104.
11. **Попов А.П., Кипреев Ю.Н., Савенков О.И. 2013.** Влияние нелинейной зависимости между деформациями и напряжениями на контактную прочность зубчатых передач. Вестник Национального технического университета «ХПИ». Сборник научных трудов: проблемы механического привода. Харьков: НТУ «ХПИ». №40(1013), 101–108. (Украина).
12. **Роров А. 2010.** Новая теория контактной прочности упруго сжатых тел. Motrol. Lublin (Poland). 223 - 231.
13. **Попов А.П., Мироненко А.И. 2011.** Разработка высокоэффективных зубчатых передач на основе новой теории контактной прочности. Специализированный информационно – аналитический журнал «Газотурбинные технологии». М. №4(95), 32 - 37.
14. **Попов А.П. 2010.** Зубчатые механизмы с точечным контактом зубьев. Николаев: Атолл. 774.
15. **Роров А., Butakov V., Marchenko D. 2011.** Определение напряженно-деформированного состояния тел при их контактном взаимодействии. Контактная задача. Motrol. Lublin (Poland). Том 13А, 13 – 24.

16. **Hertz H. 1881.** Über die Berührung fester elastischer Körper. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. Bd. 92, 156-171.
17. **Попова О.П. 2005.** Д.п. № 11441 на корисну модель. Україна. Зубчаста передача з точковою системою зацеплення евольвентних зубів. u200506846. Заявл. 11.07.05. Опубл. 15.12.05. Бюл. № 12.
18. **Попова О.П. 2005.** Д.п. № 11952 на корисну модель. Україна. Евольвентна зубчаста передача Попова О.П. з точковою системою зацеплення поздовжньо модифікованих зубів. u200506970. Заявл. 14.07.05. Опубл. 16.01.06. Бюл. № 1.
19. **Попова О.П. 2005.** Д.п. № 16280 на корисну модель. Україна. Зубчасте зацеплення Попова О.П. з точковим контактом зубів. u200511587. Заявл. 05.12.05. Опубл. 15.08.06. Бюл. № 8.
20. **Попов А.П., Каиров А.С. 2007.** Контактная прочность зубчатых передач с точечной системой зацепления эвольвентных зубьев. Міжнар. збірник наук. праць «Прогресивні технології і системи машинобудування». Донецьк: ДВНЗ ДНТУ, 208–216.
21. **Попова О.П. 2005.** Патент № 81008 на винахід. Україна. Зубчаста передача Попова О.П. з точковою і двопарною системою зацеплення евольвентних зубів. a200507850. Заявл. 08.08.05. Опубл. 26.11.07. Бюл. № 19.
22. **Спицын В.Е., Попов А.П., Мироненко А.И., Ванцовский В.Г., Филоненко А.А. 2010.** Экспериментальная проверка эффективности точечного зацепления. Вісник національного технічного університету «ХПІ». Харків. №26, 141-146.
23. **Попов А.П., Мироненко А.И. 2012.** Зубчаста передача с точечным зацеплением зубьев. Вісник національного технічного університету «ХПІ». Харків. №27, 133-141.
24. **Попов А.П. 2010.** О классической и новой теории контактной прочности упруго сжатых тел. Зб. наук. праць НУК. Николаев. № 3 (432), 127 – 135.
25. **Спицын В.Е., Попов А.П., Мироненко А.И., Дзятко С.А. 2011.** Результаты первых испытаний зубчатых передач с первоначальным точечным контактом зубьев. Харків: Вісник національного університету «ХПІ». Вып. 24, 76-83.
26. **Попов А.П. 2012.** Теория контактной прочности применительно к зубчатым передачам. Вісник Національного університету кораблебудування. Миколаїв: НУК. 269-277.
27. **Попов А.П., Мозговой М.Г. 2013.** Контактная прочность зубчатых передач с точным зацеплением зубьев. Вестник НТУ(ХПИ). Харьков: Сборник научных трудов. №40, 108–116.
28. **Попов А.П., Медведевский А.М., Попова Л.А., Савенков О.И. 2014.** Изгибная прочность зубчатых передач с точечным зацеплением зубьев. Вестник НТУ(ХПИ). Харьков: Сборник научных трудов. №29(1072), 127–132.
29. **Попов А., Nerubenko G. 2015.** The Role of Novel 3D Point Contact Transmission in Ship Noise Pollution Reduction. Journal of Water Resources and Ocean Science. Vol. 4, No. 2, 11 – 19.
30. **Попов А.П., Бутаков Б.И., Марченко Д.Д. 2011.** Контактная задача напряженно-деформированного состояния тел при работе стального канатного блока и троса. Проблеми трибології. Хмельницький. № 1, 29-36.
31. **Бутаков Б.И., Марченко Д.Д. 2008.** Разработка способа обкатывания роликами стальных деталей с целью повышения их контактной прочности. Motrol. Lublin (Poland). Том 10В, 15–28.

ANALYSIS OF THE CHARACTERISTICS OF THE CONTACT SURFACE INITIALLY, LINEAR AND POINT TOUCH

Summary. The solution of the problem of contact surfaces at the initial point of contact and line contact of teeth. Studies were conducted using the Hertz contact theory. The results and findings were compared with calculations based on the theory of contact strength A.P. Popov. It has been shown that for large load transmission with an initial contact point has a higher load carrying capacity than at the initial contact line. The decision was confirmed during experimental studies of static models and computational experimental schemes.

The calculation of the characteristics of the full contour of the ellipse at the initial point contact mating surfaces when in contact with the power scheme, taking into account the numerical values of the coefficients that determine the characteristics of the contact bodies in contact, the calculation of the limit load in short contact surfaces with the full contour ellipse and calculation of the total semi-ellipsoid deformations (pressures).

Perform certain geometric characteristics of a truncated semi-ellipsoid with an estimate of the distribution diagram of pressure on the contact area of the contacting surfaces. We found correlation between the loads and strains of complete and truncated forms of diagrams, set the ratio between the size of diagrams of the pressure distribution on the contact area, calculates the performance diagrams shows the pressure distribution on the contact ellipse contour incomplete.

We propose an example of calculation, which is performed within the range of loads do not exceed the limit. The parameters of the truncated ellipsoid were calculated based on the results at full load. Thus, these results were compared with data obtained by the calculation of the line of contact of the cylindrical surfaces.

Key words: point contact, line contact, Hertz theory, the theory Popov, contact strength, tense-deformed state.