МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з навчальної дисципліни для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» денної форми навчання спеціальності 051 «Економіка»

Миколаїв
2020

УДК 336.51
Ф59

Друкується за рішенням науково-методичною комісією факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 20.02.2020 року протокол № 7.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

А. М. Могильницька – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Стройко Т.В. - д-р. екон. наук, професор, завідувач кафедри економіки та менеджменту, Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Максименко А. Г. - канд. екон. наук, доцент кафедри менеджменту та маркетингу, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Тема 1. Концептуальні засади фінансової математики	5
Тема 2. Правило простих процентів	11
Тема 3. Правило складних процентів	26
Тема 4. Фінансова еквівалентність	43
Тема 5. Фінансові платежі для потоків обчислень	59
Тема 6. Оцінка та планування схем фінансово-кредитних розрахунків	75
Список рекомендованої літератури	105
Додаток 1. ДОВІДКОВІ ФІНАНСОВІ ТАБЛИЦІ	106
Додаток 2. Множники нарощування складних процентів	107
Додаток 3. Множники дисконтування складних процентів	113
Додаток 4. Множники утримання складних процентів	119
Додаток 5. Множники нарощування ануїтету	125
Додаток 6. Множники дисконтування ануїтету	131
Додаток 7. Фінансові функції у MS Excel 2003	137

ВСТУП

Фінанси охоплюють усі стадії відтворювального процесу: виробництво, обмін, розподіл, споживання, а також можуть надавати регулюючу дію на всі його складові. Фінанси володіють потенційною властивістю направляти і регулювати економічні процеси, прискорюючи або уповільнюючи їх.

Сучасні ринкові умови потребують від суб'єктів господарювання вміння оцінювати всі можливі варіанти фінансових наслідків при здійсненні будь-якої комерційної операції та практично використовувати методи фінансово-економічного аналізу при здійсненні кредитних, інвестиційних та інших комерційних операцій. Математичний апарат сучасного фінансово-економічного аналізу складається з методів і моделей фінансової математики, які дозволяють описувати на кількісному та якісному рівнях явища й процеси фінансової сфери економічного життя суспільства.

Основна особливість фінансової математики полягає в тому, що будь-яким обчисленням передує якісний аналіз об'єкта, який полягає в перекладі властивостей об'єкта в числові показники, необхідні для здійснення розрахунків. Самі обчислення також тісно поєднуються з властивостями: розрахунки не мають сенсу, якщо вони не відповідають реальним процесам, які пов'язані з вкладанням коштів. Більш того, якісний аналіз необхідний і надалі, коли потрібно зіставити результати розрахунків і реальний стан об'єктів.

Фінансова математика є базовим компонентом технічного аналізу, який дозволяє виявляти і досліджувати взаємозв'язки між вартісними і часовими характеристиками фінансових операцій, на підставі чого вирішувати фінансові задачі різного типу, що стоять перед інвестором.

Тема 1. Концептуальні засади фінансової математики

1.1. Поняття фінансової математики та сутність фінансових обчислень

Прийняття ефективних фінансово-економічних рішень ґрунтується на значній кількості фінансових обчислень. Потреба в таких обчисленнях виникає майже в будь-якій комерційній угоді чи фінансовій операції, коли її умовами оговорюються конкретні значення трьох параметрів:

Вартісних характеристик (ринкова вартість фінансових та матеріальних активів, розміри витрат та надходжень за інвестиційними проектами, суми боргових зобов'язань та відсотки за кредитними угодами тощо);

Часових характеристик (строки до погашення, дати та строки виплат, тривалість та періодичність надходжень коштів, відстрочки платежів тощо);

Параметрів щодо ризику та дохідності (ринкові оцінки надійності та ліквідності капіталовкладень у певні активи, ринкові оцінки норм рентабельності та дохідності фінансових операцій, надбавки за ризики в ставках дохідності тощо).

Кількісне оцінювання та вивчення математичних залежностей між вищезазначеними параметрами (вартості, часу, дохідності) й становлять сутність *фінансових обчислень*.

Терміни «фінансова математика» та «фінансові обчислення» іноді вживають як синоніми, хоча, поняття фінансової математики є ширшим. Фінансові обчислення це лише методи та інструментарій фінансових розрахунків. Фінансова математика включає також моделі оцінки різних активів, тобто застосовує математичний апарат фінансових обчислень .для розв'язання прикладних економічних задач.

Предметом дисципліни «Фінансова математика» є методологія та інструментарій фінансових розрахунків та кількісного аналізу ефективності фінансових операцій.

Метою дисципліни є задоволення потреб майбутніх фахівців економічних спеціальностей у знаннях в області фінансових обчислень, що виникають при розв'язанні практичних проблем у різних сферах економічної та підприємницької діяльності.

Завдання дисципліни полягає у вивченні та опануванні студентами основних понять, методів та математичного апарату фінансових обчислень, що є підґрунтям для кількісного аналізу інструментів фінансового ринку та інших об'єктів інвестування.

Фінансова математика має суто практичне спрямування, оскільки з її допомогою розв'язують багато задач, які присутні в будь-якій фінансовій операції чи комерційній угоді. До основних задач фінансової математики можна віднести наступні:

оцінку кінцевих фінансових результатів операції (угоди, контракту) для кожного контрагенту;

розробку платіжних схем виконання фінансових операцій (зокрема, планів погашення заборгованостей);

розробку фінансових планів майбутніх капіталовкладень та аналіз ефективності інвестування (зокрема, розрахунок критеріїв оцінки ефективності інвестицій);

аналіз залежності кінцевих результатів операції від її основних параметрів (зокрема, врахування факторів часу та ризику) тощо.

1.2. Концепція вартості грошей у часі та ефект дисконтування

Відомий російськікй економіст Є. М. Четиркін, наголошуючи на важливості врахування чинника часу у фінансових розрахунках, зазначає: «*поза часом грошей не існує». В* оригіналі російською мовою цей вислів звучить як: *«Вне* времени нет денег».

Певна сума грошей сьогодні завжди цінніша від такої самої суми в *майбутньому.* Причому, це твердження залишається справедливим, навіть якщо не брати до уваги інфляцію та ризик неповернення коштів. Меркантильний принцип, який проголошує, що гроші повинні робити гроші, незважаючи на весь його примітивізм, дуже близький до істини.

В економічній теорії вважається, що в будь-який момент часу на ринку існують деякі *альтернативні варіанти інвестування,* які гіпотетично мають забезпечувати інвестору певну дохідність. Отже, вклавши кошти сьогодні, з урахуванням наявних на ринку ставок дохідності, в майбутньому інвестор може отримати вже більшу суму. Якщо ж час для інвестування був втрачений, то кажуть про *невикористані можливості* інвестора, які знаходять своє кількісне відображення у певному знеціненні номінальної суми коштів, що була в нього на початку цього періоду часу.

Теорія економічного ризику стверджує, що ризики, які відчуває інвестор, пов'язані не лише з імовірними втратами або збитками, але й з недоотриманням можливого прибутку. Особа, яка не інвестує кошти, знаходиться під впливом *ризику невикористаних можливостей,* втрачаючи потенційні доходи.

Таким чином, *концепція вартості грошей* у часі ґрунтується на тому, що вартість грошей з плином часу змінюється за рахунок існування на фінансовому ринку певної норми дохідності інвестицій.

Наприклад, існування альтернативної можливості інвестування, котра забезпечує дохід r відсотків за рік, означає, що одна грошова одиниця рівно через рік коштуватиме $1 \cdot (1+r)$. Відповідно одна грошова одиниця, яка буде отримана через рік, станом на сьогодні коштуватиме лише $\frac{1}{1+r}$.

Принцип нерівноцінності однакових за номіналом сум грошей, що належать до різних моментів часу, відомий у фінансових науках як *ефект дисконтування*.

Таким чином, реальна цінність фінансових надходжень завжди залежатиме від моменту часу, в який вони будуть отримані. Наприклад, якщо є можливість вибирати з кількох варіантів інвестування з однаковими за обсягом доходами, то раціонально діючий інвестор завжди обере той варіант, котрий забезпечить найбільш швидке отримання прибутку.

1.3. Теперішня та майбутня вартість грошей

Взагалі порівнюючи вартість грошових коштів у часі, можна знаходити їхню приведену вартість станом на будь-який момент часу. З цією метою у фінансових обчисленнях враховують ефект дисконтування й використовують два основні поняття – теперішня (початкова, приведена) вартість грошей та майбутня (кінцева) вартість грошей.

Майбутня вартість грошей (*Future value,* FV) – це вартість інвестованої у теперішньому часі суми грошей PV, у яку вони перетворяться через певний період часу з урахуванням певної процентної ставки дохідності $FV = PV(1+r)$, де $r -$ ставка нарощування (наявна на ринку норма доходності); $(1+r)-$ множник нарощування вартості.

Отже, майбутню вартість обчислюють через *операцію нарощування* відомої початкової суми за відомою нормою дохідності, яку в цьому разі називають *ставкою нарощування*.

Приклад 1.1

Поклавши сьогодні 10 тис. грн на депозит у надійний банк під 15 % річних, за умови відсутності проміжних надходжень або витрат на цьому депозитному рахунку через рік отримаємо

$$FV = PV \cdot (1+r) = 10 \cdot (1+0{,}15) = 11{,}5 \text{ тис. грн.}$$

Отже, якщо вкласти кошти на один рік, у разі існування річної норми доходності 15%, теперішня сума 10 тис. грн буде еквівалентною майбутній сумі 11,5 тис. грн. Зі збільшенням середньоринкової ставки доходності різниця між теперішньою та майбутньою вартостями однієї суми грошей буде ще більшою.

Теперішня вартість грошей (*Present value*, PV) – це вартість майбутніх грошових надходжень, приведених з урахуванням певної процентної ставки дохідності до теперішнього часу $PV = \dfrac{FV}{1+r}$, де $r -$ ставка дисконтування (наявна на ринку норма доходності); $\dfrac{1}{1+r} -$ множник дисконтування (приведення) вартості.

Отже, величину теперішньої вартості обчислюють через *операцію дисконтування* (приведення) відомої кінцевої суми за відомою нормою дохідності, яку в цьому разі називають *ставкою дисконтування.*

Повертаючись до умов прикладу 1.1, маємо $PV = \frac{FV}{1+r} = \frac{11,5}{1+0,15} = 10$. Отже, 11,5 тис. грн, які будуть отримані через рік за річної ставки дохідності 15 %, станом на теперішній момент часу коштуватимуть 10 тис. грн.

Процес дисконтування — це обернена операція до *процесу нарощування* вартості. Ці два процеси є базисом усіх фінансових обчислень, оскільки вони забезпечують адекватне порівняння вартісних характеристик фінансових угод з урахуванням чинника часу.

Оскільки, зазвичай, усі фінансові потоки приводять до теперішнього часу, то оцінювання ефективності фінансових вкладень полягає в порівнянні витрат та прибутків через операцію математичного дисконтування.

Математичне дисконтування – приведення до одного моменту часу грошових сум, що належать до різних часових періодів, через обчислення їхньої теперішньої вартості.

Саме операція математичного дисконтування лежить в основі методів та моделей оцінки вартості цінних паперів, матеріальних активів та інших об'єктів інвестування.

Альтернативним варіантом розрахунку теперішньої вартості є *операція утримання коштів*. Вона є менш поширеною ніж операція дисконтування, проте іноді застосовується на практиці при розрахунку сум боргових зобов'язань. Операція утримання виконується за допомогою ставки дохідності d, яку називають *обліковою ставкою (темпом зниження).*

Теперішню вартість відомої майбутньої суми грошей при операції утримання коштів розраховують за формулою $PV = FV(1-d)$, де d – ставка утримання (облікова ставка); $(1-d)$ – множник утримання вартості.

Операція утримання має економічний сенс лише коли облікова ставка (темп зниження) d є меншою від 100 % і передбачає, що боржник виплачує кредитору комісійну винагороду (плату за користування кредитом) авансом у момент отримання кредиту.

Приклад 1.2

За облікової ставки $d = 10\%$ по закінченні періоду боржник повинен повернути 1000 грн. Яку суму фактично позичає йому кредитор?

Використовуючи відповідну формулу, маємо

$$PV = FV \cdot (1-d) = 1000 \cdot (1-0,1) = 900 \text{ грн.}$$

Отже, фактично позичальник отримує лише 900 грн, тобто кошти позичаються після утримання комісійної винагороди величиною 100 грн.

Зазначимо, що за операції дисконтування позичальник міг би розраховувати на кращий для себе результат, оскільки за тих самих вихідних умов дає більшу величину теперішньої вартості:

$$PV = \frac{FV}{1+r} = \frac{1000}{1+0,1} = 909,09$$ грн.

Таким чином, при обчисленні теперішньої вартості боргових зобов'язань застосування операції утримання вигідніше кредитору, а операції дисконтування – боржнику. Це пояснюється тим, що за операції утримання кредитор отримує більшу фактичну дохідність, надаючи меншу суму грошей позичальнику ніж за операції дисконтування. З іншого боку, обчислення за ставкою дисконтування порівняно з обліковою ставкою збільшують величину отриманого кредиту (за рівних боргових зобов'язань), тобто, позичальник залучає кошти, сплативши меншу фактичну дохідність.

Для підтвердження цих висновків розглянемо формули розрахунку теперішньої вартості в аспекті ставок дохідності.

Ставка дисконтування (ставка відсотка) r *(англ. – interest rate)* вимірює рівень дохідності відношенням абсолютного приросту доходу за певний проміжок часу до початкової суми капіталовкладень $r = \frac{FV - PV}{PV} = \frac{FV}{PV} - 1$,

Отже, для підвищення дохідності інвестування (чи кредитування) різниця між початковою (теперішньою) та кінцевою (майбутньою) величиною коштів повинна бути максимальною.

Облікова ставка d *(англ. – discount rate)* вимірює рівень доходності відношенням абсолютного приросту доходу за певний проміжок часу не до початкової, а до кінцевої суми капіталовкладень $d = \frac{FV - PV}{FV} = 1 - \frac{PV}{FV}$.

Порівнюючи останні два вирази (для r та d) бачимо, що за інших рівних умов обчислення облікової ставки d завжди даватиме нижчий результат щодо рівня дохідності операції ніж обчислення ставки дисконтування r.

Іноді у фінансовій літературі ставку дисконтування r називають *декурсивною*, а облікову ставку d – *антисипативною.*

Приклад 1.3

Нехай, у прикладі 1.2 відомими величинами є теперішня та майбутня вартості, а необхідно знайти норми дохідності цих операцій.

Тобто, $FV = 1000$ грн., $PV = 900$ грн.

Тоді маємо:

$$r = \frac{FV}{PV} - 1 = \frac{1000}{900} - 1 \approx 0,111 = 11,1\%,$$

$$d = 1 - \frac{PV}{FV} = 1 - \frac{900}{1000} = 0,1 = 10\%.$$

Облікова ставка є меншою за ставку дисконтування, отже, вона недооцінює реальну дохідність фінансової операції.

Для знаходження співвідношення між простою та обліковою ставками дохідності розглянемо співвідношення $PV = \frac{FV}{1+r}$ та $PV = FV\left(1-d\right)$.

Звідси, $\frac{FV}{1+r} = FV\left(1-d\right)$;

$$\frac{1}{1+r} = \left(1-d\right) \Rightarrow d = 1 - \frac{1}{1+r} = \frac{1+r-1}{1+r} = \frac{r}{1+r};$$

$$\frac{1}{1+r} = \left(1-d\right) \Rightarrow 1+r = \frac{1}{1-d} \Rightarrow r = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{1-1+d}{1-d} = \frac{d}{1-d}.$$

Таким чином, справедливі формули $r = \frac{d}{1-d}$, *або* $d = \frac{r}{1+r}$ Надалі, у фінансових розрахунках, якщо не буде обумовлене інше, ми працюватимемо насамперед зі ставкою дисконтування (ставкою відсотка) r, оскільки вона є більш загальноприйнятою та точніше відображає реальну дохідність фінансової операції ніж облікова ставка d.

Тема 2. Правило простих процентів

2.1. Методика обчислень за правилом простих процентів

Правило простих процентів (simple interest) застосовують у *короткострокових* фінансових угодах (строк існування менший від одного року) та у випадках, коли проценти не додають до основної суми боргу, а періодично виплачують. Цей метод не передбачає *реінвестування*, отже — й *капіталізації процентів.*

Сутність методу нарахування за простими процентами полягає в тому, що впродовж усього терміну дії фінансової угоди проценти нарощують лише на початкову суму.

Формула нарощення за простими процентами:

$$FV = PV + PV \cdot r \cdot n = PV(1 + rn),$$

де $FV -$ *кінцева сума (майбутня величина);* $PV -$ *початкова сума (теперішня величина);* $r -$ *ставка дохідності;* $n -$ *строк фінансової операції (кількість періодів нарахувань);* $(1 + rn) -$ *множник нарощування простих процентів.*

Для коректних обчислень методом простих процентів величини r та n мають бути взаємоузгодженні (зведені до одних величин часу – років, місяців, днів тощо). Наприклад, коли $r -$ річна ставка доходності, то й величина n має бути в частках року.

Приклад 2.1

Маємо: теперішня вартість $PV = 1000$ грн, ставка дохідності $r = 10\%$.

Тоді за правилом простих процентів $FV = PV + PV \cdot r \cdot n$ майбутня величина відомої теперішньої суми дорівнюватиме:

$FV_1 = 1000 + 100 \cdot 1 = 1100$ грн, якщо $n = 1$;

$FV_2 = 1000 + 100 \cdot 2 = 1200$ грн, якщо $n = 2$;

$FV_3 = 1000 + 100 \cdot 3 = 1300$ грн, якщо $n = 3$ і т.д.

Бачимо, що послідовність нарощених за правилом простих процентів сум є арифметичною прогресією.

З формули простих процентів $FV = PV + PV \cdot rn$ випливає, що кінцева сума FV складається з двох величин – *початкової суми* PV та *нарощеної суми* $IS = PV \cdot rn$, яку називають *величиною простого проценту* і яка за сталої ставки нарощення r, буде зростати відповідно до збільшення строку нарощення n.

Тоді $FV = PV + IS$ і розмір простого проценту – це різниця між номінальними величинами кінцевої та початкової вартості $IS = FV - PV$.

За простими процентами можна виконувати й обернену до нарощування операцію *–операцію дисконтування* $PV = \frac{FV}{1+rn}$, де $\frac{1}{1+rn}$ – множник дисконтування простих процентів.

Розраховуючи за правилом простих процентів необхідно пам'ятати, що строк фінансової операції n зазвичай є меншим від одного року, проте ставку дохідності r як правило вказують у відсотках річних. За річної ставки дохідності, якщо строк нарощення вимірюється в частках року, нарощену суму обчислюють за формулою $IS = PV \cdot rn$. Якщо ж, наприклад, термін угоди вказаний у місяцях, то $IS = PV \cdot r\frac{m}{12}$, де m – кількість місяців тощо.

Приклад 2.2

Вкладник поклав на банківський депозит 1000 грн під 12% річних строком на 6 місяців. Який капітал він матиме по закінченні депозитного договору за правилом простих процентів?

Обчислимо нарощену суму:

$$IS = PV \cdot rn = 1000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{6}{12} = 60 \text{ грн},$$

тоді його кінцевий капітал дорівнюватиме:

$$FV = PV + IS = 1000 + 60 = 1060 \text{ грн.}$$

Або за формулою

$$FV = PV(1+rn) = 1000\left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{6}{12}\right) = 1060 \text{ грн.}$$

Отже, по закінченні депозитного договору вкладник отримає з банківського рахунку 1060 грн.

Якщо б, наприклад, умовами договору передбачалася щомісячна виплата відсотків, то вкладник мав би можливість отримувати щомісячно:

$$IS_1 = PV \cdot r \cdot n = 1000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{1}{12} = 10 \text{ грн},$$

що за півроку склало б 60 грн.

Формули простих процентів пов'язують функціональною залежністю 4 параметри, тому знаючи будь-які три з них, завжди можна знайти четверту, невідому величину.

Наприклад, у практиці фінансових розрахунків досить часто виникає потреба оцінювання норми дохідності фінансової операції, коли відома початкова та кінцева вартість, а також строк угоди:

$$FV = PV + PV \cdot r \cdot n \Rightarrow r = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{IS}{PV \cdot n},$$

тобто дохідність фінансової операції визначають відношенням нарощеної вартості до початкової суми з урахуванням фактору часу.

Утримання коштів за правилом простих процентів

Іноді його застосовують у короткострокових банківських операціях (наприклад, банківський облік векселів), тому *просту облікову ставку* d називають ще *банківським дисконтом (bank rate).*

Теперішню вартість із використанням облікової ставки d обчислюють за формулою $PV = FV \cdot (1 - d \cdot n)$, де $(1 - d \cdot n) -$ *множник утримання* простих процентів; $d -$ показник дохідності (облікова ставка d), отримала назву «*проста ставка дисконту*» або *«проста дисконтна дохідність» (simple discount yield).*

Зазначимо, що вираз $PV = FV \cdot (1 - d \cdot n)$ має економічний сенс лише коли добуток $d \cdot n < 1$.

Проста дисконтна дохідність обчислюється за формулою:

$$PV = FV \cdot (1 - d \cdot n) \Rightarrow \quad d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n}.$$

Зазначимо, що для представлення ставки d у відсотках річних, строк угоди n потрібно вимірювати у частках року.

Приклад 2.3

Банк зробив облік векселя за 70% від його номінальної вартості за півроку до погашення цього зобов'язання. Знайти просту облікову ставку та просту дохідність до погашення цього векселя.

Знижка, яку отримав банк від номінальної вартості векселя, є дисконтом за цим борговим зобов'язанням. Отже, без врахування чинника часу, дисконт за цим борговим зобов'язанням склав $1 - 0{,}7 = 0{,}3$ або 30%.

Враховуючи, що $n = 0{,}5$:

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} = \frac{1 - 0{,}7}{1 \cdot 0{,}5} = 0{,}6$$, або 60% річних.

$$r = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} = \frac{1 - 0{,}7}{0{,}7 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}86\%$$, або 86% річних.

Отже банк, обумовивши за цим борговим зобов'язанням дисконт у 30%, насправді заробляє не 60%, а 86% за річною ставкою дохідності.

З цього прикладу ми бачимо, що ставка дисконтної дохідності суттєво недооцінює фактичну дохідність фінансової угоди, навіть порівняно з простою ставкою дисконтування.

З виразів $PV = \dfrac{FV}{1 + r \cdot n}$ та $PV = FV \cdot \left(1 - d \cdot n\right)$ можна знайти наступне співвідношення між простою ставкою дисконтування r та простою обліковою ставкою d:

$$r = \frac{d}{1 - d \cdot n}, \text{ або } d = \frac{r}{1 + r \cdot n}$$

Надалі, розглядаючи правило простих процентів, працюватимемо насамперед зі загальноприйнятою нормою дохідності – ставною дисконтування r.

2.2. Темп росту коштів за правилом простих процентів

Розглянувши сутність методики нарощування коштів за правилом простих процентів, перейдемо до аналізу ефективності застосування цієї методики. Для порівняння існуючих на ринку альтернативних варіантів інвестування, критерієм відбору часто виступає очікувана норма віддачі від вкладеного капіталу. Швидкість повернення інвестованих коштів та можливість максимізації прибутків залежатиме від темпу росту майбутньої вартості за правилом простих процентів.

Оцінюючи темп росту майбутньої вартості відомої початкової суми коштів, необхідно усвідомлювати, що у формулі простих процентів $FV = PV\left(1 + rn\right)$ параметри часу n та дохідності r є абсолютно рівноправними в межах фінансової угоди. Зростання ставки доходності r або строку n у k разів однаково впливає на майбутню вартість коштів, яка при цьому збільшується у $\dfrac{1 + krn}{1 + rn}$ разів.

Дійсно, якщо у формулі простих процентів ставку доходності r або строк n збільшити в k разів, то нова величина майбутньої вартості дорівнюватиме $FV^* = PV\left(1 + rkn\right)$, тоді, за умови однієї початкової суми:

$$\frac{FV^*}{FV} = \frac{PV \cdot \left(1 + rkn\right)}{PV \cdot \left(1 + rn\right)} = \frac{1 + rkn}{1 + rn}.$$

Отримане співвідношення не залежить від величини початкової вартості.

Приклад 2.4

Маємо: теперішня вартість $PV = 1000$ грн, річна ставка відсотка $r = 10\%,\ n = 3$ роки. Знайдемо майбутню вартість та величину простого процента.

Майбутня вартість через 3 періоди становить:

$$FV = PV\left(1 + rn\right) = 1000 \cdot \left(1 + 0{,}10 \cdot 3\right) = 1300 \text{ грн},$$

а розмір простого проценту, відповідно,

$$IS = PV \cdot rn = 1000 \cdot 0{,}10 \cdot 3 = 300 \text{ грн.}$$

Збільшимо ставку нарощування вдвічі: $r = 20\%$.

Нарощена сума (величина простого проценту) у цьому разі теж збільшиться вдвічі:

$$IS^* = PV \cdot rn = 1000 \cdot 0{,}20 \cdot 3 = 600 \text{ грн,}$$

а нова майбутня вартість дорівнюватиме:

$$FV^* = PV(1 + rn) = 1000 \cdot (1 + 0{,}20 \cdot 3) = 1600 \text{ грн.}$$

Кінцева сума (майбутня вартість) при цьому збільшиться лише у

$$\frac{1600}{1300} = \frac{1 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}1}{1 + 3 \cdot 0{,}1} = 1{,}23 \text{ рази.}$$

До аналогічного результату призвело б і збільшення кількості періодів (строку нарощування) вдвічі за сталої ставки нарощування.

Таким чином, при збільшенні ставки або строку нарощування вдвічі, нарощена сума зросла вдвічі, а кінцева вартість зростала набагато повільніше, причому отриманий результат не залежить від розміру початкової суми коштів.

Тепер розглянемо іншу задачу щодо темпу зростання вартості за правилом простих процентів. Нехай за формулою $FV = PV(1 + rn)$ нам необхідно отримати $N-$кратне перевищення майбутньої вартості над її теперішньою величиною.

Для того, щоб початкова сума зросла в N разів, потрібно виконати умову:

$1 + r \cdot n = N$, звідки $n = \dfrac{N - 1}{r}$.

Аналогічно отримаємо: $r = \dfrac{N - 1}{n}$.

Приклад 2.5

Ставка доходності $r = 8\%$. Через скільки періодів нарахування за правилом простих процентів початкова сума збільшиться вдвічі?

Маємо: $1 + 0{,}08n = 2$. Звідси $n = \dfrac{2 - 1}{0{,}08} = 12{,}5\%$ років.

Іншим варіантом подвоєння початкової суми за правилом простих процентів є нарощення коштів протягом 8 періодів часу за ставкою 12,5 %.

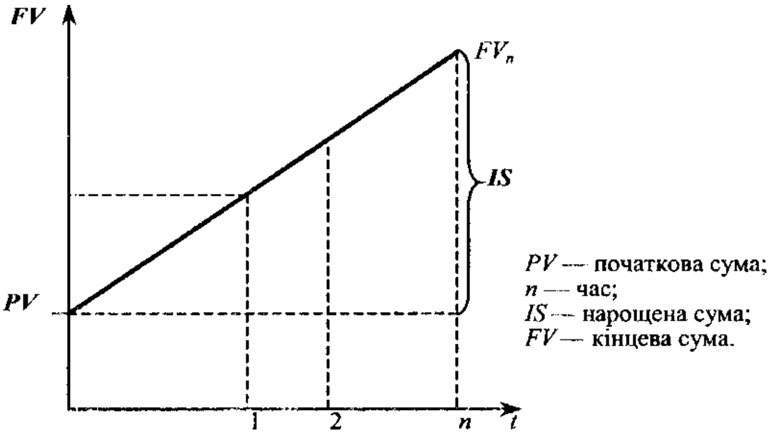


Рис. 2.1. Графік зростання вартості за правилом простих процентів

Темпи росту майбутньої вартості у часі відомої початкової суми ілюструє рис. 2.1. Із графіка видно, що за простими процентами з плином часу майбутня вартість зростає за *лінійним* законом.

Зазначимо, що кут нахилу прямої, що відображає зростання майбутньої вартості, визначається величиною ставки нарощування r. Збільшення цієї ставки дохідності призведе до збільшення темпу росту майбутньої вартості.

Наприклад, за умовами прикладу 2.1, аналітичний вираз, що описує залежність майбутньої вартості від кількості періодів, виглядає наступним чином: $FV = PV + PV \cdot rn = 1000 + 100n$, що відповідає канонічному рівнянню прямої.

2.3. Обчислення за правилом простих процентів **в** умовах змін вихідних параметрів

Розглядаючи методику нарощування коштів за правилом простих процентів, ми вважали, що у формулі $FV = PV(1 + r \cdot n)$ вихідні параметри розрахунків (насамперед, початкова сума та ставка дохідності) є сталими величинами. Проте, в практиці фінансових обчислень можливі випадки, коли умовами угоди обумовлюється *плаваюча ставка* дохідності замість фіксованої, або змінною є *база нарахування* (сума, на яку нарощуються відсотки). Зрозуміло, що у таких випадках методика обчислень дещо ускладнюється.

Розглянемо операцію нарощування коштів за простими процентами у разі плаваючої (змінної) ставки дохідності.

Для коректних обчислень необхідно повний термін дії угоди поділити на проміжки, протягом яких розмір цієї ставки не змінювався. Тоді формулу нарощування простих процентів можна записати так:

$$FV = PV(1 + r_1 n_1 + r_2 n_2 + \dots r_T n_T) = PV\left(1 + \sum_{t=1}^{T} r_t n_t\right),$$

де T – загальна кількість періодів нарощування; r_t – ставка дохідності у періоді t; n_t – тривалість періоду t, у якому ставка дохідності не змінюється.

Приклад 2.6

За фінансовою угодою, укладеною на 1 рік, початкова вартість складає 10 тис. грн. Передбачено такий порядок нараховування простих процентів: перший квартал – 20 % річних, а за кожний наступний квартал до закінчення фінансового року ставка підвищується на 4 % річних.

Знайдемо майбутню вартість, що утвориться по закінченні контракту.

Оскільки прості проценти нараховують один раз за квартал, то потрібно річні проценти перевести у квартальні:

20% річних – 5% квартальних, 4% річних –1% квартальний.

Тоді ставка дохідності за перший квартал $r_1 = 5\%$, за другий квартал $r_2 = 6\%$, за третій – $r_3 = 7\%$ і за четвертий квартал $r_4 = 8\%$. **Відповідно маємо:**

$$FV = PV\left(1 + r_1 n_1 + r_2 n_2 + \ldots r_T n_T\right) =$$
$$= 10 \cdot \left(1 + 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}07 + 0{,}08\right) = 10 \cdot \left(1 + 0{,}26\right) = 12{,}6 \text{ тис. грн.}$$

Зазначимо, що у разі *фіксованої* річної ставки дохідності $r = 20\%$ майбутня вартість теперішніх 10 тис. грн становитиме лише 12 тис. грн:

$$FV = PV\left(1 + rn\right) = 10 \cdot \left(1 + 0{,}20 \cdot 1\right) = 12 \text{ тис. грн.}$$

Зрозуміло, що у випадку застосування плаваючих ставок дохідності нарощування вартості відбувається нерівномірно. Так, у прикладі 2.6 нарощена за рік величина простого проценту розміром 2,6 тис. грн сформована за рахунок отримання 0,5 тис. грн за перший квартал; 0,6 тис. грн — за другий; 0,7 тис. грн — за третій та 0,8 тис. грн — за четвертий квартал.

При аналізі параметрів фінансових угод зі змінною нормою дохідності може виникнути питання оцінювання *середнього темпу приросту вартості* та ***середньої ставки дохідності простих процентів*** за весь термін дії угоди.

Середню ставку простих процентів $\bar{r}$ за повний строк N фінансової операції визначають з рівняння:

$$1 + \bar{r}N = 1 + \sum_{t=1}^{T} r_t n_t ,$$

де права частина – множник нарощування *змінних* простих процентів.

Звідси середня ставки дохідності простих процентів $\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{T} r_t n_t}{N}$ – є *зважена середня арифметична величина.*

Якщо тривалість періоду, протягом якого ставка дохідності не змінюється, є постійною (тобто $n_t = const$), то $\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{T} r_t}{T}$ *–середня арифметична проста величина*.

Розрахуємо середню ставку дохідності за умовами прикладу 2.6.

Підставляючи дані щодо розміру квартальних ставок у формулу $\bar{r} = \frac{\sum_{t=1}^{T} r_t}{T}$ отримаємо: $\bar{r} = \frac{5\% + 6\% + 7\% + 8\%}{4} = 6{,}5\%$

Таким чином, середня ставка дохідності простих процентів становить 6,5% на квартал або 26% річних.

Аналогічно за умовами прикладу 2.6 можна знайти й середній квартальний приріст вартості. Якщо нарощена вартість за рік дорівнює 2,6 тис. грн, то середній приріст у квартал складатиме: $\frac{2{,}6}{4} = 0{,}65$ тис. грн.

Вираз

$$FV = PV\left(1 + r_1 n_1 + r_2 n_2 + \ldots r_T n_T\right) = PV\left(1 + \sum_{t=1}^{T} r_t n_t\right)$$

відображає загальний випадок фінансових обчислень з плаваючою ставкою дохідності, і передбачає підсумовування величин простих процентів за всі періоди часу протягом дії фінансової угоди. Проте, в деяких випадках, коли методика зміни розміру плаваючої ставки дохідності відома, це рівняння вдається «згорнути».

Якщо тривалість періодів між змінами ставки доходності є *однаковою,* а темп приросту цієї ставки є *постійним,* то можна записати наступне правило зміни ставок: $r_{t+1} = r_t + k$, де k – приріст ставки за один період.

Тоді послідовність плаваючих ставок виглядатиме так:

$$r, r + k, r + 2k, \ldots, r + (T - 1)k,$$

де T – загальна кількість періодів нарощування. Оскільки ця послідовність є арифметичною прогресією, то сума T членів арифметичної прогресії дорівнюватиме:

$$\sum_{t=1}^{T} r_t = \frac{r_1 + r_T}{2} \cdot T = \frac{r + r + (T - 1)k}{2} T = \left(r + \frac{(T - 1)k}{2}\right) T.$$

Тоді,

$$FV = PV\left(1 + \left(r + \frac{(T-1)k}{2}\right)T\right)$$

Отже, на відміну від попередньої формули ($FV = PV\left(1 + \sum_{t=1}^{T} r_t n_t\right)$) не має потреби спочатку розраховувати розміри всіх ставок $r_t, t \in \overline{1,T}$, достатньо знати початкову ставку дохідності, темп приросту, та кількість періодів.

Повертаючись до умов прикладу 2.6, знайдемо майбутню вартість іншим способом :

$$FV = PV\left(1 + \left(r + \frac{(T-1)k}{2}\right)T\right) =$$

$$= 10 \cdot \left(1 + \left(0{,}05 + \frac{3 \cdot 0{,}01}{2} \cdot 4\right)\right) = 10 \cdot (1 + 0{,}26) = 12{,}6$$

тис. грн..

Отже, за постійного темпу приросту плаваючої ставки дохідності, у фінансових розрахунках з великою кількістю періодів, доцільно використовувати формулу $FV = PV\left(1 + \left(r + \frac{(T-1)k}{2}\right)T\right)$.

Розглянемо операцію нарощування коштів за простими процентами у разі плаваючої (змінної) бази нарахування простих процентів (наприклад, сума на поточному рахунку в банку, на яку нараховують проценти, може змінюватись у разі поповнення рахунку або зняття грошей).

У цьому разі розмір простого проценту обчислюють так $IS = \sum_{t=1}^{T} P_t r_t n_t$, де $P_t -$ залишок грошей на рахунку в момент часу t після чергового списання або поповнення коштів; $n_t -$ строк зберігання грошей на рахунку до нової зміни залишку грошей на ньому; $r_t -$ ставка дохідності у періоді t.

Приклад 2.7

Вкладник має в банку два рахунки: розрахунковий та поточний. За умовами договору на залишки, що є на розрахунковому рахунку на кінець місяця, банк кожного місяця нараховує простий процент за ставкою $r = 12\%$ річних та переводить цю нарощену суму на поточний рахунок.

Існують узагальнені дані про рух коштів на розрахунковому рахунку (другий стовпчик табл. 2.1). Необхідно визначити, яка сума акумулюється на поточному рахунку через 4 місяці, якщо протягом цього часу кошти з поточного рахунка не знімалися, та відсотки на суму, що значиться на поточному рахунку, не нараховувалися.

Таблиця 2.1

Період часу, місяці	*Рух коштів, тис. грн*	*Залишок на кінець періоду, тис. грн*	*Простий процент, тис. грн*
1	*50*	*50*	*0,5*
2	*+ 10*	*60*	*0,6*
3	*-20*	*40*	*0,4*
4	*-30*	*10*	*0,1*
Разом за 4 періоди			*1,6*

Отже, у разі нараховування 1 % кожного місяця на величину залишків, через 4 місяці на поточному рахунку буде сума 1600 грн.

2.4. Поняття часової бази розрахунків. Комерційні та точні прості проценти

Розрахунки за методом простих процентів ускладнюються у випадках, коли строк угоди не дорівнює цілому числу періодів нарахування (років, кварталів, місяців тощо).

Прикладом такої фінансової угоди є будь-яке короткострокове боргове зобов'язання зі строком погашення, меншим від одного року, за наявності лише річної ставки дохідності для цього зобов'язання. В такому разі, приведення параметрів фінансової операції до одних одиниць виміру передбачатиме вираження строку фінансової угоди $\boldsymbol{n}$ у частках року $\boldsymbol{n = \frac{t}{B}}$, де $\boldsymbol{t} -$ кількість днів, які залишилися до кінця фінансової операції; $\boldsymbol{B} -$ кількість днів у році (*часова база розрахунків*).

Тоді класичну формулу для нарощування вартості за правилом простих процентів, можна записати так $\boldsymbol{FV = PV\left(1 + r\frac{t}{B}\right)}$.

У фінансових обчисленнях застосовують два варіанти ***часової бази розрахунків:***

1. $\boldsymbol{B = 360}$ днів (тобто вважають, що у році 12 місяців по 30 днів – так званий «*фінансовий рік»*) – ***комерційні проценти.***

2. $\boldsymbol{B = 365}$ *або* $\boldsymbol{B = 366}$ днів (визначають точну кількість днів у році) – ***точні проценти.***

Нарощуванним за *точними процентами* (точне врахування часової бази), за інших рівних умов, завжди зумовлює менше зростання теперішньої вартості, ніж за *комерційними* процентами.

У фінансових обчисленнях завжди обумовлюють методику розрахунку тривалості фінансової угоди, оскільки, при досить великих сумах коштів, навіть похибка в один день може призвести до значних збитків. Крім того, оцінюючи тривалість угоди t, можна розглядати як *точну* кількість днів, так і *приблизну,* припустивши, що в кожному місяці по 30 днів.

Таким чином, мають економічний сенс та застосовуються на практиці три варіанти розрахунків за простими процентами:

1. *Математичний метод:* $\frac{ACT}{ACT}$ *або* $\frac{365}{365}$ *– точні проценти з точною кількістю днів угоди.* Використовують, зокрема, банки Англії та США, тому іноді його ще називають *англійським підходом.*

2. Банківський метод: $\frac{ACT}{360}$ *або* $\frac{365}{360}$ – комерційні проценти з точною кількістю днів угоди. Поширений у Франції, Бельгії, Швейцарії, тому іноді його ще називають французьким підходом.

3. $\frac{360}{360}$ – комерційні проценти з наближеною кількістю днів угоди. Поширений у Німеччині, Швеції, Данії, тому іноді його ще називають німецьким підходом.

Четвертий варіант розрахунку з точними процентами та наближеною кількістю днів угоди не має економічного сенсу і тому його не застосовують.

Оскільки в більшості випадків *точна* кількість днів в угоді більша від *приблизної* (середня річна кількість днів у місяці становить 30,58), то точне врахування кількості днів угоди за інших рівних умов зазвичай збільшує майбутню вартість.

Тобто за *банківським (французьким) методом* нарощування вартості, як правило, відбувається швидше, ніж за *німецьким методом.* Крім того, за *банківським методом* вартість завжди нарощується швидше, ніж за *математичним (англійським) методом.*

Вибір методу обчислень часової бази простих процентів насамперед залежить від цілей цих обчислень. Математичний метод – найточніший, комерційний – найпростіший.

Визначення процентів за точну кількість днів угоди виконують за спеціальною довідковою таблицею, що містить порядкові номери днів у році (додаток 1).

Приклад 2.8

200 тис. грн 2 березня невисокосного року було покладено на банківський депозит строком на півроку (по 1 вересня включно) під 15% річних. Обчислити, на яку суму може розраховувати вкладник по закінченню строку депозитної угоди за різними методиками нарахування простих процентів.

Спочатку знайдемо порядкові номери днів у році за довідковою таблицею. Для невисокосного року 2 березня є 61-им днем, а 1 вересня – 244 днем з початку року (для високосного року, за рахунок появи у лютому ще одного дня, 2.03 є 62 днем, а 1.09, відповідно, 245 днем). Точна кількість днів у невисокосному році $B = 365$ днів. Тоді тривалість депозитної угоди дорівнює $t = (244 - 61) + 1 = 184$ дні.

Тепер оцінимо кінцеву суму, що утвориться на депозитному рахунку за формулою $FV = PV\left(1 + r\dfrac{t}{B}\right)$.

Перший варіант – $\dfrac{ACT}{ACT}$ – точні проценти з точною кількістю днів угоди (математичний метод):

$$FV = 200 \cdot \left(1 + 0{,}15 \cdot \frac{184}{365}\right) \approx 215{,}123$$ тис. грн.

Зазначимо, що для високосного року розрахунки за математичним методом дали б менше значення майбутньої вартості за інших рівних умов:

$$FV = 200 \cdot \left(1 + 0{,}15 \cdot \frac{184}{366}\right) \approx 215{,}082$$ тис. грн.

Другий варіант – $\dfrac{ACT}{360}$ – комерційні проценти з точною кількістю днів угоди:

$$FV = 200 \cdot \left(1 + 0{,}15 \cdot \frac{184}{360}\right) \approx 215{,}333$$ тис. грн.

Третій варіант – $\dfrac{360}{360}$ –комерційні проценти з наближеною кількістю днів угоди:

$$FV = 200 \cdot \left(1 + 0{,}15 \cdot \frac{180}{360}\right) = 215$$ тис. грн.

Третій варіант показує найнижчий результат нарощення (на 123 грн менше ніж перший варіант та на 333 грн менше ніж другий).

Порядкові номери днів у році використовують також для розв'язання ще одного типу задач, що існують у практиці фінансового ринку. При аналізі боргових зобов'язань в аспекті їх надійності, важливим є визначення плану (графіку) погашення заборгованостей. Основою такого плану є два ключових параметри – дати та строки виплат.

Відсутність ***дефолту*** (неплатежу) за борговим зобов'язанням означає, що позичальник розрахувався *своєчасно* та *в повному обсязі.* Отже, навіть за сформованого фонду виплат, проста помилка в даті погашення, з погляду кредитора означає ***технічний дефолт.*** Графіки погашення заборгованостей докладно будуть розглянуті пізніше (у темі 6).

Приклад 2.9

27 вересня невисокосного року підприємство взяло банківський кредит для поповнення обігових коштів на суму 500 тис. грн строком на 120 днів під 24% річних на умовах $\frac{ACT}{ACT}$.

Визначити дату погашення кредиту та річні витрати підприємства на погашення процентів по кредиту.

Згідно додатку 1, дата 27.09 має порядковий номер 270 з початку року. Оскільки $270 + 120 > 365$, то кредитна угода буде відображена в двох роках. До кінця року пройде $(365 - 270) + 1 = 96$ днів.

Після цього, у наступному році до погашення кредиту залишиться ще $120 - 96 = 24$ дні. Отже, дата погашення – 24 січня наступного року.

Величина простого проценту за весь строк дії кредитної угоди згідно формули $FV = PV\left(1 + r\frac{t}{B}\right)$ та методики $\frac{ACT}{ACT}$ дорівнюватиме:

$$FV_{12} = 500 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{120}{365} \approx 39{,}452 \text{ тис.грн.}$$

Величина виплачених процентів за перший рік складатиме:

$$FV_{12} = 500 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{96}{365} \approx 31{,}562 \text{ тис. грн.}$$

А за другий рік, відповідно:

$$FV_2 = 500 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{24}{365} \approx 7{,}890 \text{ тис. грн.}$$

Зрозуміло, що загальна сума процентів по кредиту дорівнюватиме сумі процентних виплат за цих два роки, тобто:

$31{,}562 + 7{,}89 = 39{,}452$ тис. грн.

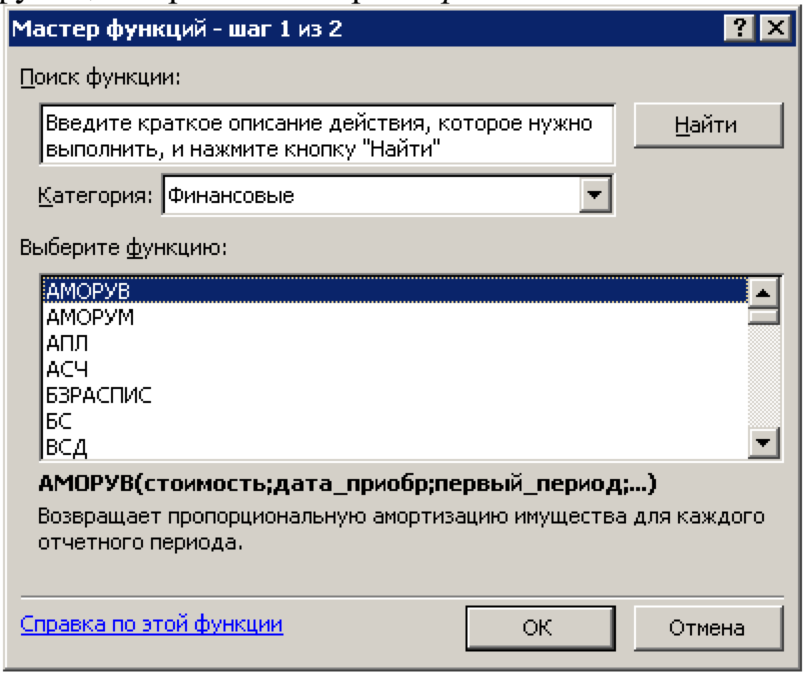
Проте, в багатьох випадках, знання загальної суми процентів по кредиту є недостатнім, оскільки з погляду управлінської та фінансової звітності важливими є фінансові результати, доходи та витрати які розбиті хоча б по роках їх отримання.

2.5. Застосування програмного забезпечення MS Excel *в обчисленнях за правилом простих процентів*

Серед комп'ютерних програм з майже універсальною сферою застосування, яка дозволяє автоматизувати процес фінансових обчислень без прив'язки до конкретної предметної галузі, найпоширенішою та загальнодоступною програмою безумовно є табличний процесор *MS Excel.*

У середовищі *MS Excel,* залежно від версії програмного забезпечення, реалізовано близько 50 фінансових функцій. Для виклику майстра функцій, який допомагає ними користуватися, необхідно в меню програми обрати пункт

Вставка → Функция . Потім у діалоговому вікні, що з'явилося, серед списку категорій функцій обрати категорію «*финансовые»:*



Короткий опис усіх наявних у *MS Excel* фінансових функцій наведено в Додатку 7.

Самостійно розглянути фінансові функції в *MS Excel*, привівши до кожної з них відповідний приклад.

Моделювання росту числової послідовності для простих процентів

Нехай у прикладі 2.1 нам необхідно отримати значення майбутньої вартості хоча б за 10 послідовних періодів. За умовами прикладу початкова вартість $PV = 1000$ грн, ставка дохідності $r = 10\%$. Для знаходження цього числового ряду значень майбутньої вартості використаємо *MS Excel*.

Нагадаємо, що послідовність нарощених за правилом простих процентів сум є арифметичною прогресією. Тому, для обчислення елементів цієї числової послідовності, побудуємо в електронній таблиці *MS Excel* арифметичну прогресію з першим елементом 1000 грн, кроком у 100 грн та з загальною кількістю елементів, що дорівнює 11 шт. (початкова величина, яка належить до теперішнього часу та 10 елементів після початкового періоду). Результати роботи ілюструє рис. 2.2.

На рис. 2.2 шукана арифметична прогресія займає комірки $B5 - B15$ електронної таблиці. Для побудови цієї чисельної послідовності у *MS Excel* існує декілька способів, найпростіші з яких – використання функції ***автозаповнення*** або команди ***«Прогрессия».***

Для автозаповнення стовпчика значень майбутньої вартості, достатньо ввести перші два елементи стовпчику, виділити їх, та «протягти» виділену область за допомогою комп'ютерної миші до комірки $B15$. При цьому програма автоматично розраховує різницю між першими двома елементами числової послідовності та використовує її як постійний крок для автоматичного заповнення стовпчика елементами арифметичної прогресії.

Альтернативний спосіб побудови арифметичної прогресії, з використанням команд меню *MS Excel,* наведено на рис. 2.2. Для появи вікна «*прогрессия*» необхідно в меню програми обрати пункти

$$\textit{Правка} \rightarrow \textit{Заполнить} \rightarrow \textit{Прогрессия}.$$

Потім, у вікні, що з'явилось, обрати розташування, тип прогресії та розмір кроку (у нашому прикладі – *расположение – «по столбцам», тип – «арифметическая», шаг – 100).*

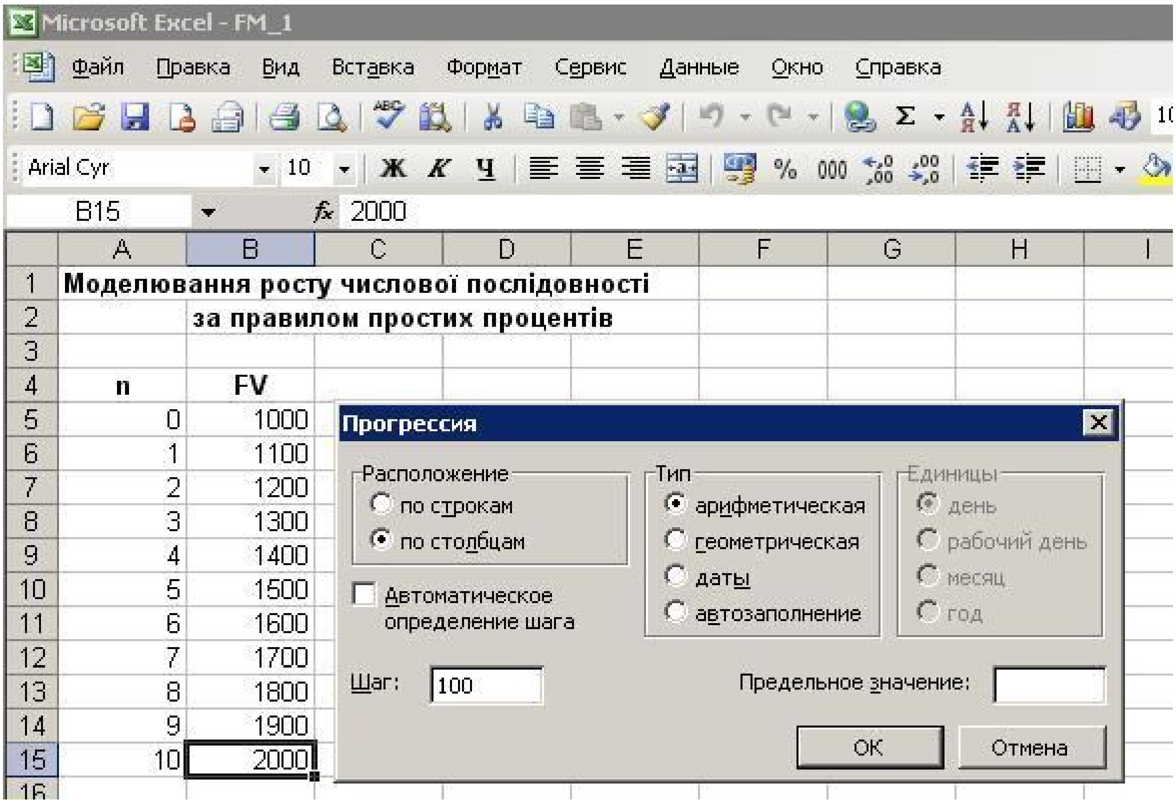


Рис. 2.2. Арифметична прогресія у *MS Excel*

Загальний графік зростання майбутньої вартості відомої початкової величини за правилом простих процентів був наведений на рис. 2.1. Для побудови такого графіку за даними отриманої арифметичної прогресії нам достатньо виділити значення комірок ***B5 – B15*** та активізувати *«мастер диаграмм»*, обравши або відповідну піктограму або пункти ***Вставка → Диаграмма***. У вікні, що з'явилося, необхідно обрати тип діаграми – «*График*» (рис. 2.3).

Рис. 2.3. Графік зростання вартості за правилом простих процентів

Одержаний графік ще раз підтверджує зроблений раніше висновок про те, що за простими процентами вартість зростає за лінійним законом.

Тема 3. Правило складних процентів

3.1. Методика обчислень за правилом складних процентів

Практика сучасних економічних відносин свідчить, що серед існуючих методик нарахування коштів саме обчислення за правилом складних процентів є основою переважної більшості фінансових операцій.

Правило складних процентів (compound interest) зазвичай застосовують у середньо- та довгострокових фінансових угодах (строк існування більший від одного року), та у випадках, коли проценти не виплачують відразу після їх нарахування, а додають до основної суми боргу. Іншими словами, цей метод передбачає *реінвестування* коштів та *капіталізацію* процентів.

Сутність методу нарахування за складними процентами полягає в тому, що наприкінці кожного періоду до основної суми грошей додають нараховані проценти й отримана таким чином сума грошей є вихідною для нарахування процентів у наступному періоді.

Отже, у разі *нарощування* за складними процентами база для нарахування в кожному наступному періоді змінюється, оскільки кожна наступна сума зростає ще й на частку від попередньої.

Тож кінцева сума, яку одержить інвестор наприкінці періоду нарахування за правилом складних процентів, дорівнюватиме:

– після першого періоду нарощування $FV_1 = PV \cdot (1 + r)$;

– після другого

$$FV_2 = PV \cdot (1 + r) + PV \cdot (1 + r)r = PV \cdot (1 + r)^2;$$

– після n періодів

$$FV_n = PV \cdot (1 + r)^n$$

Отже, формула нарощування за складними процентами $FV = PV \cdot (1 + r)^n$, *де* $(1 + r)^n$ – множник нарощування складних процентів.

У цій формулі для коректних обчислень за методом складних процентів величини r та n мають бути взаємоузгоджені (зведені до одних величин часу – років, місяців, днів тощо).

Приклад 3.1

Маємо: теперішня вартість $PV = 1000$ грн, ставка дохідності $r = 10\%$ (приклад 2.1). Знайдемо майбутню вартість за правилом складних процентів.

За правилом складних процентів $FV = PV \cdot (1 + r)^n$ майбутня величина відомої теперішньої суми дорівнюватиме:

$FV_1 = 1000(1 + 0,10)^1 = 1100$ грн, якщо $n = 1$;

$FV_2 = 1000(1 + 0,10)^2 = 1210$ грн, якщо $n = 2$;

$FV_3 = 1000(1 + 0,10)^1 = 1331$ грн, якщо $n = 3$ і т.д.

Послідовність нарощених за правилом складних процентів сум становлять *геометричну прогресію.*

Порівнюючи результати обчислень за простими процентами (приклад 2.1) та за складними процентами (приклад 3.1), бачимо, що за однакових висхідних умов, ідентичний результат досягається лише після одиничного періоду, а потім нарощування за складними процентами дає більшу кінцеву величину. Причому, чим більша кількість періодів нарощування тим більша різниця у результатах розрахунків за цими двома методиками.

У цьому прикладі для отримання ідентичних результатів за правилом простих процентів доведеться кожен раз збільшувати базу для нарощування. Узагальнюючи результати прикладів 2.1 та 3.1, можна зробити важливий висновок:

Нарахування складних процентів рівнозначне нарахуванню простих процентів з реінвестуванням коштів наприкінці кожного періоду.

Коли відома кінцева (майбутня) вартість, за правилом складних процентів можна обчислити приведену (теперішню) вартість, виконавши операцію *дисконтування* за формулою $PV = \dfrac{FV}{(1+r)^n}$, де $\dfrac{1}{(1+r)^n}$ – *множник дисконтування складних процентів.*

Абсолютна різниця між кінцевою та початковою сумами (нарощена величина) за використання правила складних процентів називається *розмір складного проценту:*

$$IC = FV - PV = PV \cdot (1+r)^n - PV = PV \cdot \left((1+r)^n - 1\right).$$

За однакових вихідних умов, коли кількість періодів $n > 1$, величина складного проценту IC перевищуватиме величину простого проценту IS.

Приклад 3.2

Нехай теперішня вартість $PV = 1000$ грн, кількість періодів нарощування $n = 3$, ставка дохідності $r = 10\%$. Розрахуємо розміри простого та складного процентів.

Величина простого проценту

$$IS = PV \cdot rn = 1000 \cdot 0{,}10 \cdot 3 = 300 \text{ грн.}$$

Величина складного проценту

$$IC = PV \cdot \left((1+r)^n - 1\right) = 1000 \cdot \left((1+0{,}10)^3 - 1\right) = 1000 \cdot 0{,}331 = 331 грн$$

Отже, розмір складного проценту перевищує розмір простого проценту на 31 грн.

Розмір складного проценту перевищує розмір простого проценту за рахунок того, що за методикою складних процентів наприкінці кожного періоду відбувається реінвестування коштів. До того ж величина, на яку розмір складного проценту перевищує розмір простого проценту, отримана шляхом нарахування процентів на проценти. Таке нарахування називають *капіталізацією процентів* і визначають:

$$IC_P = IS - IC = PV \cdot \left(\left(1+r\right)^n - \left(1+rn\right)\right).$$

Зазначимо, що коли $n = 1$, то $IC_P = 0$ та $IC = IS$.

Отже, капіталізація процентів можлива лише коли кількість періодів нарощування більша за один.

Формули складних процентів пов'язують функціональною залежністю 4 параметри (майбутня та теперішня вартість, період часу та ставка дохідності), тому знаючи будь-які три з них, завжди можна знайти четверту, невідому величину.

Оцінимо *норму дохідності* за використання правила складних процентів:

$$FV = PV \cdot \left(1+r\right)^n \Rightarrow r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1 = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Повертаючись до прикладу 2.3, зауважимо що з урахуванням реінвестування коштів норма дохідності банку буде ще вищою. Дійсно, за складними процентами, маємо:

$$r = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{0,7}\right)^2 - 1 \approx 1,04\%$$ або 104% річних.

Операцію *утримання коштів* за правилом складних процентів застосовують, зокрема, у фінансових обчисленнях щодо деяких видів боргових зобов'язань зі строком погашення, більшим за один рік.

Теперішня вартість, з врахуванням складної облікової ставки d *, обчислюється за формулою* $PV = FV \cdot \left(1-d\right)^n$*, де* $\left(1-d\right)^n -$ множник утримання складних процентів.

Вираз $PV = FV \cdot \left(1-d\right)^n$ має економічний сенс лише коли складна облікова ставка d є меншою за 100 %.

Відомо, що утримання складних процентів має обмежену сферу застосування, оскільки майже не використовується для кількості проміжків утримання більшої за два-три.

Оцінимо дохідність операції утримання складних процентів:

$$d = 1 - \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} = 1 - \left(\frac{PV}{FV}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Зазначимо, що серед усіх розглянутих ставок дохідності, саме обчислення складної облікової ставки дасть найнижчий результат. Так, розрахувавши за умовами прикладу 2.3 норму дохідності), маємо: $d = 1 - \left(\frac{0,7}{1} \right)^2 \approx 0,51$ або 51% річних.

Отриманий результат є навіть нижчим за просту облікову ставку дохідності та набагато нижчим від простої та складної ставок дисконтування.

З виразів $PV = \frac{FV}{(1+r)^n}$ та $PV = FV \cdot (1-d)^n$ можна знайти наступне співвідношення між складною ставкою дисконтування r та складною обліковою ставкою d: $r = \frac{d}{1-d}$, або $d = \frac{r}{1+r}$.

Отже, взаємозв'язок складних ставок r та d не залежить від кількості періодів нарахування (чи утримання) n.

Надалі, розглядаючи правило складних процентів, працюватимемо насамперед зі загальноприйнятою ставкою дохідності r.

3.2. Темп росту коштів за правилом складних процентів

Аналізуючи залежність $FV = PV \cdot (1+r)^n$, що описує правило нарощення коштів за правилом складних процентів, варто зазначити, що, на відміну від правила простих процентів, зміна параметру часу n та параметру дохідності r по різному впливатиме на темп росту майбутньої вартості.

Так, якщо у виразі $FV = PV \cdot (1+r)^n$ час фінансової угоди збільшити в k разів, то темп росту майбутньої вартості складатиме:

$$\frac{FV^*}{FV} = \frac{(1+r)^{kn}}{(1+r)^n} = (1+r)^{(k-1)n}.$$

Проте, коли ставку дохідності збільшите в k разів, то темп росту майбутньої вартості становитиме:

$$\frac{FV^*}{FV} = \frac{(1+rk)^n}{(1+r)^n} = \left(\frac{1+rk}{1+r} \right)^n$$

Зазначимо, що темп росту майбутньої вартості не залежить від початкової вартості, що підтверджують й отримані вирази.

Приклад 3.3

Початкові параметри фінансової угоди візьмемо з прикладу 2.4. Маємо: теперішня вартість $PV = 1000$ грн, річна ставка відсотка $r = 10\%$, $n = 3$ роки. Знайдемо майбутню вартість та величину складного процента.

Майбутня вартість через 3 періоди становить:

$$FV_3 = PV \cdot (1+r)^n = 1000 \cdot (1+0{,}10)^3 = 1331 \text{ грн},$$

а розмір складного проценту, відповідно,

$$IC = FV - PV = 1331 - 1000 = 331 \text{ грн.}$$

Збільшимо ставку нарощування вдвічі: $r = 20\%$.

Нова майбутня вартість за правилом складних процентів становитиме:

$$FV^* = PV \cdot (1+r)^n = 1000 \cdot (1+0{,}20)^3 = 1728 .$$

Тоді, розмір складного проценту

$$IC = FV - PV = 1728 - 1000 = 728 \text{ грн.}$$

Отже темп росту майбутньої вартості за формулою дорівнюватиме:

$$\frac{FV^*}{FV} = \frac{1728}{1331} = \left(\frac{1{,}2}{1{,}1}\right)^3 \approx 1{,}298 .$$

Причому, при збільшенні ставки нарощування в два рази, нарощена сума (розмір складного проценту) зростає більш ніж у два рази: $\frac{IC^*}{IC} = \frac{728}{331} \approx 2{,}2$..

Порівнюючи отримані кінцеві результати стосовно темпу росту за складними процентами з відповідними результатами нарощування за простими процентами (приклад 2.4), ми бачимо, що, коли кількість періодів нарощування більша одиниці, за однакових змін ставки дохідності, темпи росту за складними процентами будуть вищими ніж за простими.

Приклад 3.4

За початковими умовами прикладу 3.3, знайти темпи росту майбутньої та нарощеної суми коштів, у разі коли строк нарощування збільшився вдвічі.

Маємо: теперішня вартість $PV = 1000$ грн, річна ставка відсотка $r = 10\%$, $n = 3$ роки, $n^* = 6$ років.

Згідно проведених вище обчислень $FV = 1331$, $IC = 331$ грн. За формулою нарощування складних процентів $FV^* \approx 1771{,}56$ грн, отже, відповідно: $IC^* \approx 771{,}56$ грн.

Таким чином, темп росту майбутньої вартості становитиме:

$$\frac{FV^*}{FV} = \frac{1771{,}56}{1331} \approx (1{,}1)^3 = 1{,}331 .$$

Відповідно темп росту розміру складного проценту складатиме:

$$\frac{IC^*}{IC} = \frac{771{,}56}{331} \approx 2{,}331.$$

Порівнюючи отримані кінцеві результати прикладів 3.3 та 3.4, ми бачимо, що при збільшенні строку угоди або ставки дохідності в однакову кількість разів, саме збільшення строку дає найвищі темпи росту майбутньої та нарощеної сум коштів.

Тепер розглянемо іншу задачу щодо темпу зростання вартості за правилом складних процентів. Нехай за формулою $FV = PV \cdot (1+r)^n$ нам необхідно отримати $N-$кратне перевищення майбутньої вартості над її теперішньою величиною.

Для того, щоб початкова сума збільшилась в N разів, потрібно виконати умову $(1+r)^n = N$, звідки $n = \frac{lg\,N}{lg(1+r)}$.

Аналогічно отримаємо $r = \sqrt[n]{N} - 1$

Приклад 3.5

Річна ставка доходності $r = 8\%$. Через скільки років нарощування за правилом складних процентів початкова сума збільшиться вдвічі?

Із виразу $n = \frac{lg\,N}{lg(1+r)}$ маємо: $n = \frac{lg\,2}{lg(1+0{,}08)} = 9$ років.

Раніше, в прикладі 2.5 для простих процентів за тих же початкових умов, що і в прикладі 3.5 для складних процентів сума подвоїлась за 12,5 року.

Таким чином, оскільки зростання вартості за правилом складних процентів відбувається швидше, то для отримання визначеної кінцевої суми за правилом складних процентів знадобиться менше часу, ніж за правилом простих процентів.

Правило 72-х: *Подвоєння капіталу за ставкою* a *(до 10 %) за складними процентами відбувається приблизно за* $\frac{72}{a}$ *років.*

Зауважимо, що застосування цього правила для розв'язання прикладу 3.5 дає достовірний результат: 72 / 8 = 9 років.

Приклад 3.6

Кількість періодів нарощування $n = 8$. За якої ставки нарощування за правилом складних процентів початкова сума збільшиться вдвічі?

Із виразу $r = \sqrt[n]{N} - 1$ маємо: $r = \sqrt[8]{2} - 1 \approx 9\%$.

Порівнюючи результати прикладів 3.5 та 3.6, ми бачимо, що зростання значень функцій, що описуються рівняннями $n = \frac{lg\,N}{lg(1+r)}$ та $r = \sqrt[n]{N} - 1$, за невеликих значень параметру N відбувається подібними темпами.

Також варто зазначити, що в прикладі 2.5 за простими процентами для подвоєння суми за 8 періодів ставка дохідності склала 12,5 %, а за складними процентами (приклад 3.6) за тих же початкових умов достатньо ставки $r = 9\%$. Це ще раз підкреслює, що при кількості періодів $n > 1$, темп зростання вартості за складними процентами є вищим ніж за простими.

Графічну інтерпретацію нарощування коштів за правилом складних процентів показано на рис. 3.1.

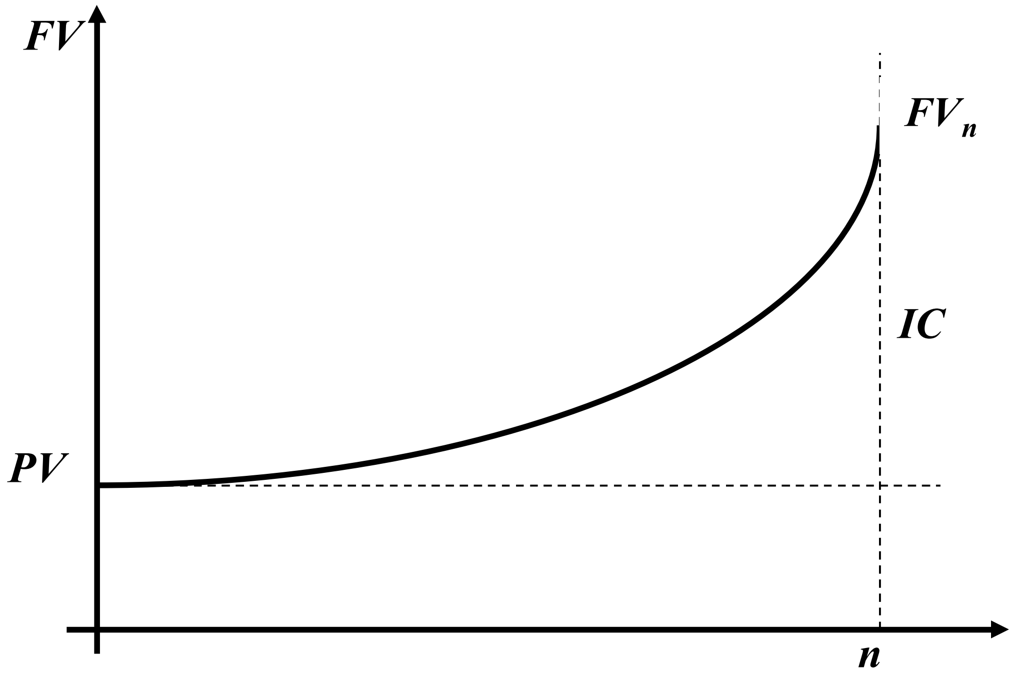


Рис. 3.1. Графік зростання вартості за правилом складних процентів

Із наведеного графіка видно, що нарощування вартості в часі за складними процентами є *показниковою* функцією.

За умовами прикладу 3.1, аналітичний вираз, що описує залежність майбутньої вартості від кількості періодів, виглядає наступним чином: $FV = PV \cdot (1 + r)^n = 1000 \cdot 1{,}1^n$, що відповідає рівнянню показникової функції.

3.3. Обчислення за правилом складних процентів в умовах змін вихідних параметрів

За правилом складних процентів вартісні характеристики фінансової угоди (кінцева та початкова вартість коштів) безпосередньо залежатимуть від строку (кількості періодів) та норми дохідності фінансової операції. Проаналізуємо чутливість вартісних характеристик угоди до змін параметрів часу та дохідності.

Класична формула нарощування складних процентів $FV = PV \cdot (1+r)^n$ передбачає, що протягом усіх періодів *n* ставка дохідності r є сталою величиною.

Однак в реальних економічних умовах, ринкові ставки дохідності весь час змінюються, отже, у довгострокових фінансових угодах фіксувати ставку нарощування (або дисконтування) на весь термін угоди на визначеному початковому рівні не завжди доцільно. У разі плаваючих (змінних) ставок дохідності, зазвичай весь строк угоди розбивають на періоди, протягом яких ставка є незмінною.

Таким чином, коли впродовж терміну угоди ставки дохідності змінюються в часі, але в певні терміни, то нарощену за складними процентами суму визначають за формулою:

$$FV_n = PV \cdot (1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+r_T)^{n_T} = PV \cdot \prod_{t=1}^{T}(1+r_t)^{n_t},$$

де $T -$ загальна кількість періодів нарощування; $r_t -$ ставка дохідності у періоді t; $n_t -$ тривалість t періоду, у якому ставка дохідності не змінюється.

Для визначення ***середньої ставки дохідності складних процентів*** $\bar{r}$ за повний строк дії фінансової угоди N необхідно розв'язати відносно $\bar{r}$ таке рівняння:

$$(1+\bar{r})^N = (1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+r_T)^{n_T}.$$

Звідси:

$$\bar{r} = \sqrt[N]{(1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (1+r_T)^{n_T}} - 1 = \sqrt[N]{\prod_{t=1}^{T}(1+r_t)^{n_t}} - 1.$$

Отже, множник нарощування за середньою ставкою складних процентів $(1+\bar{r})^N$ визначають за формулою *зваженої середньої геометричної величини.*

Окрім плаваючої ставки дохідності, іншим змінним вихідним параметром фінансової операції є загальна кількість періодів нарощування чи дисконтування. У практиці фінансових розрахунків часто трапляються ситуації, коли за фіксованого загального строку n змінюється кількість періодів нарахувань коштів. Наприклад, за банківським депозитом вказується *річна* ставка складних процентів r, а нарахування здійснюють щомісяця чи щокварталу тощо. Отже, у деяких фінансових угодах капіталізація (нарахування) процентів відбувається m разів однаковими частками через однакові проміжки часу протягом кожного періоду часу $t\ (t = \overline{1,n})$.

В такому разі класична формула для обчислення майбутньої вартості за правилом складних процентів, набуде вигляду $FV_n = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$, де $n -$ загальний строк угоди (кількість років чи інших періодів часу); $m -$ кількість нарахувань процентів протягом одного періоду часу.

Приклад 3.7

Вкладник поклав на депозит у банк 1 тис. грн під 16% річних. Умовами угоди передбачено, що на цю суму банк нараховує складні проценти щокварталу. Треба знайти суму, що акумулюється на депозитному рахунку через рік.

За формулою $FV_n = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$ маємо:

$$FV_1 = 1 \cdot \left(1 + \frac{0{,}16}{4}\right)^{1 \cdot 4} \approx 1{,}17$$ тис. грн.

Тобто, фактична річна дохідність банківського депозиту, завдяки щоквартальному нарахуванню коштів, становить близько 17%. Якщо б нарахування за річною ставкою в 16 % відбулося лише один раз на рік, то на депозитному рахунку була б менша сума – 1,16 тис. грн:

$$FV_1 = 1 \cdot (1 + 0{,}16)^{1 \cdot} = 1{,}16$$ тис. грн.

Таким чином, коли виплати здійснюють за правилом складних процентів кілька разів на рік, то фактична річна дохідність фінансової угоди більша від задекларованої річної дохідності за рахунок *реінвестування коштів.*

Зазначимо, що за правилом простих процентів фактична дохідність угоди завжди співпадатиме з задекларованою дохідністю, оскільки проценти нараховують лише на початкову суму (не реінвестуються), отже нарощена величина не залежатиме від кількості нарахувань протягом одного періоду часу.

3.4. Номінальна та ефективна ставка складних процентів. Поняття неперервного складного проценту та сили росту

У фінансових обчисленнях за правилом складних процентів, для врахування *ефекту реінвестування,* у випадках, коли протягом одного періоду часу відбувається декілька нарахувань процентів, вводять поняття *ефективної* та *номінальної* ставки дохідності.

Ставку складних процентів r, що входить у рівняння

$FV = PV \cdot (1 + r)^n$ та $FV_n = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$ називають ***номінальною***

ставкою. Так у прикладі 3.7 задекларована ставка 16 % є номінальною ставкою, а отримана фактична дохідність 17% є ефективною ставкою.

Ефективна ставка r_e визначає, яку річну ставку складних процентів належить встановити, щоб отримати такий самий фінансовий результат, як і за $m-$разового нарахування процентів за рік за ставкою $\frac{r}{m}$.

Отже, за однакових початкових та кінцевих сум, для визначення залежностей між номінальною та ефективною ставками складних процентів, прирівнявши відповідні множники нарощування, можна записати такий вираз

$$(1+r_e)^n = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m},$$

звідси ефективна ставка складних процентів $r_e = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$

Зауважимо, що коли $m > 1$, то ефективна ставка більша за номінальну, причому чим більша величина m (чим частіше нараховують проценти) тим вищою є ефективна ставка дохідності, отже й тим швидше відбувається процес нарощування.

Зрозуміло, що граничним випадком є ситуація, коли період нарахування складного процента вважають *нескінченно малим.*

Якщо при нарощуванні коштів за формулою $FV_n = PV\cdot\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n\cdot m}$ часовий інтервал між виплатами процентів наближається до нуля, тобто проценти виплачують та реінвестують *неперервно,* то можна обчислити граничне значення ефективної ставки дохідності за відомої номінальної ставки дохідності. З метою таких обчислень вводять поняття *неперервного складного проценту.*

Неперервна складна ставка дохідності –це така ефективна ставка дохідності, за якою проценти виплачують та реінвестують *неперервно,* тобто кількість періодів нарахувань процентів прямує до нескінченості.

У деяких виданнях з фінансової математики в разі неперервного. нарощування процентів застосовують інший термін для опису неперервних складних ставок дохідності – ***силу росту (force of interest).***

Сила росту характеризує відносний приріст нарощеної суми за нескінченно малий проміжок часу. Вона може бути постійною або змінюватись в часі.

Аналізуючи граничний випадок рівняння $FV_n = PV \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$ за умови, що кількість нарахувань m прямує до нескінченності, можна записати такий вираз стосовно множника нарощування складних процентів

$$\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} = e^{r},$$

де $e = 2{,}718282\ldots -$ *експонента,* основа натурального логарифма.

Врахувавши отриманий вираз, запишемо граничне значення складної неперервної ставки дохідності $\lim_{m \to \infty} r_e = \lim_{m \to \infty} \left(\left(1+\frac{r}{m-1}\right)^{m} - 1 \right) = e^{r} - 1$.

Таким чином, ефективна ставка дохідності складних процентів ніколи не перевищує величину $\left(e^{r} - 1\right)$.

Зазначимо також, що з урахуванням $\lim_{m \to \infty} \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} = e^{r}$, для неперервних складних процентів формула $FV_n = PV \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$ набуде вигляду $FV = PV \cdot e^{r \cdot n}$.

Отже, незалежно від тривалості фінансової угоди n*,* частоти нарахувань процентів m та номінальної ставки дохідності r, множник нарощування складних процентів ніколи не перевищуватиме величину $e^{r \cdot n}$. Причому, у разі неперервного способу нарахування складних процентів рівняння оцінки майбутньої вартості є **експоненціальною** функцією, а величина майбутньої вартості не залежить від частоти нарахувань m.

Оскільки у практиці фінансових розрахунків тривалість угод доволі часто не співпадає з цілим числом періодів (років, кварталів, місяців тощо), то задача визначення реальних (ефективних) ставок дохідності за відомих задекларованих (номінальних) ставок є одним з ключових питань фінансової математики. Проте, більшість сучасних фінансових угод передбачає дискретне нарахування процентів, тому неперервні ставки дохідності поки що мають дуже обмежене коло застосування.

Реінвестування процентів раз на місяць, квартал, рік – це, насамперед, питання традицій фінансових розрахунків та легкості їх сприйняття фінансовими фахівцями. Всі розуміють, що 3% на місяць – це приблизно 0,1 % на день. Куди більш абстрактного образу мислення потребує той факт, що це становить приблизно 0,0042% на годину або 0,000069% на хвилину. Хоча з математичної точки зору, це лише запис одного й того самого числа у різних одиницях виміру. Сучасні методи та засоби обчислень легко дозволяють визначати величини відсоткових ставок й за нескінченно малий проміжок часу. Тому, у майбутньому оцінювання реальної дохідності фінансової операції можливо передбачатиме визначення не лише дискретних, але й неперервних ефективних ставок складних процентів.

3.5. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS Excel *в обчисленнях за правилом складних процентів*

Для полегшення досить трудомістких розрахунків за правилом складних процентів за відсутності засобів комп'ютерної техніки використовують спеціальні ***довідкові фінансові таблиці*** мультиплікативних, дисконтувальних та дисконтних множників. Значення множників протабульовані за двома параметрами – величина ставки дохідності r та кількість періодів часу n.

Мультиплікативний множник, довідкові значення якого застосовують для полегшення процесу *нарощування* за складними процентами, показує у скільки разів збільшиться за n періодів початкова сума за ставкою відсотка r *:* $M(n;r)=(1+r)^n$.

Мультиплікативний множник – це по суті **множник нарощування складних процентів,** що входить до складу класичної формули $FV = PV \cdot (1+r)^n$. В іноземній літературі цей множник зазвичай називають процентним фактором майбутньої вартості (*Future Value Interest Factor*) та позначають абревіатурою $FVIF(n;r)$. Фінансові таблиці, які містять довідкові значення множників нарощування (мультиплікативних множників) складних процентів, наведено в додатку 2.

Дисконтувальний множник, довідкові значення якого застосовують для полегшення процесу *дисконтування* за складними процентами, показує частку, яку становитиме початкова сума від нарощеної за n періодів суми за ставкою дисконтування r *:* $D(n;r)=\dfrac{1}{M(n;r)}=\dfrac{1}{(1+r)^n}$.

Дисконтувальний множник – це по суті **множник дисконтування складних процентів** що входить до формули $PV=\dfrac{FV}{(1+r)^n}$. В іноземній літературі цей множник зазвичай називають процентним фактором теперішньої вартості *(Present Value Interest Factor)* та позначають абревіатурою $PVIR(n;r)$.

Фінансові таблиці, які містять довідкові значення множників дисконтування (дисконтувальних множників) складних процентів, наведено в додатку 3.

Дисконтний множник *(не плутати з дисконтувальним!),* довідкові значення якого застосовують для полегшення процесу *утримання* за складними процентами, показує, на яку частину зменшиться сума у разі угримання з неї складних процентів за ставкою d за n п періодів: $Dis(n;r) = (1-d)^n$.

Дисконтний множник – це по суті **множник утримання складних процентів,** що входить до формули $PV = FV \cdot (1-d)^n$. Фінансові таблиці, які містять довідкові значення множників утримання (дисконтних множників) складних процентів, наведено в додатку 4.

Знаючи значення відповідних множників нарощування, дисконтування та утримання, набагато простіше визначити результати фінансових угод за формулами:

$$FV = PV \cdot (1+r)^n = PV \cdot M(n;r) = PV \cdot FVIF(n;r);$$

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} = FV \cdot D(n;r) = FV \cdot PVIF(n;r);$$

$$PV = FV \cdot (1-d)^n = FV \cdot Dis(n;r).$$

Приклад 3.8

Необхідно розрахувати за правилом складних процентів майбутню вартість від суми 1000 грн через 5 періодів за ставкою $r = 10\%$.

Підставивши відомі величини, маємо:

$$FV = PV \cdot (1+r)^n = 1000 \cdot (1+0,1)^5.$$

Підносити 1,1 до п'ятого степеня без спеціальних засобів не дуже зручно, тому скористаємось таблицею множників нарощування (додаток 2) $M(5;10\%) = 1,61051$.

Тоді шукана майбутня вартість дорівнюватиме:

$$FV = 1000 \cdot M(5;10\%) = 1610,51 \text{ грн.}$$

Аналогічно здійснюють розрахунки й за допомогою інших довідкових таблиць (відповідно Додатки 3-4).

Тепер розглянемо інший спосіб здійснення фінансових обчислень, який передбачає наявність комп'ютера з встановленим програмним забезпеченням *MS Excel.*

Моделювання росту числової послідовності для складних процентів

Нехай у прикладі 3.1 нам необхідно отримати значення майбутньої вартості хоча б за 10 послідовних періодів. За умовами прикладу початкова вартість $PV = 1000$ грн, ставка дохідності $r = 10\%$. Для знаходження цього числового ряду значень майбутньої вартості використаємо *MS Excel*.

Нагадаємо, що послідовність нарощених за правилом складних процентів сум є *геометричною прогресією.* Для знаходження елементів цієї числової послідовності, побудуємо в електронній таблиці *MS Excel* геометричну прогресію з першим елементом 1000 грн, загальною кількістю елементів 11 (початкова величина, яка належить до теперішнього часу та 10 елементів після початкового періоду) та темпом приросту значень у 10 %.

Для розв'язання цієї задачі, обираємо в меню програми пункти ***Правка → Заполнить → Прогрессия*** та у вікні, що з'явилося, визначаємо тип прогресії «*геометрическая*».

Результати роботи табличного процесору *MS Excel* ілюструє рис. 3.2.

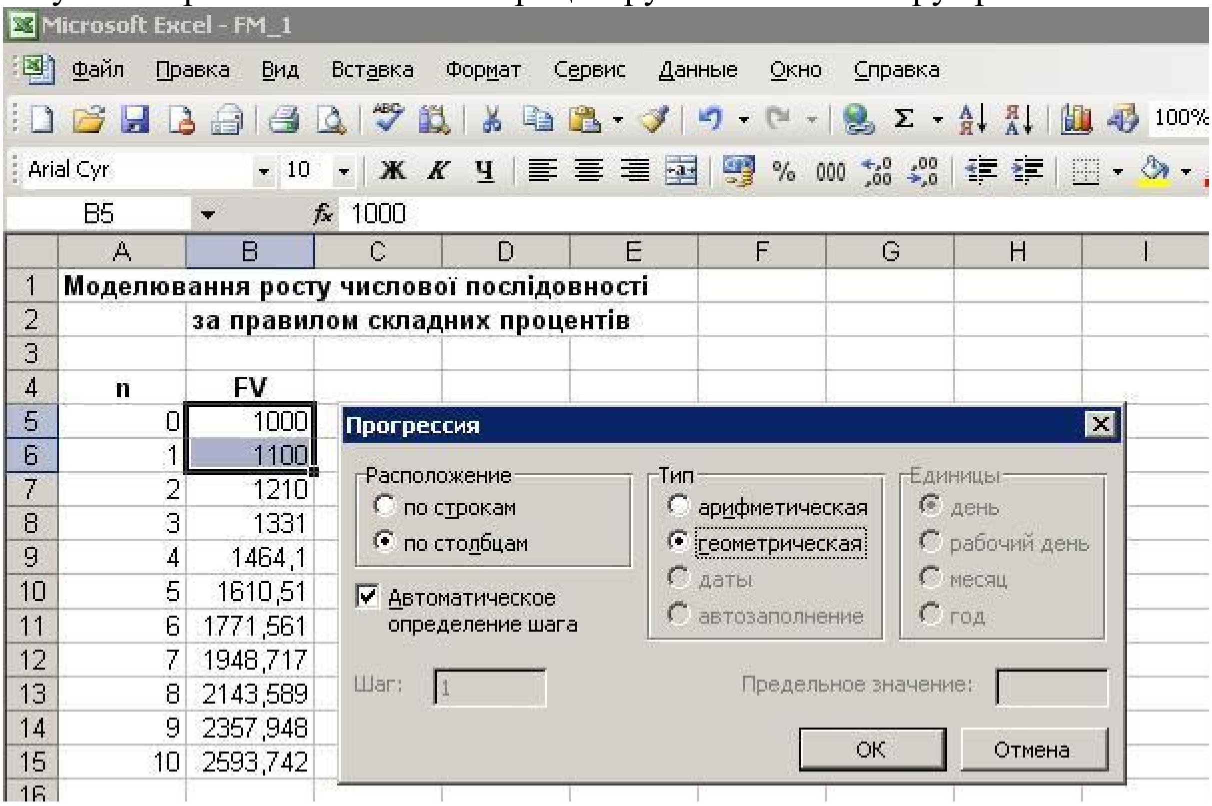


Рис. 3.2. Геометрична прогресія у *MS Excel*

Тепер повернемось до прикладу 3.8. Як видно з рис. 3.2, після 5-го періоду значення майбутньої вартості становитиме 1610,51 грн. Отже, як і передбачалося, використання довідкових таблиць мультиплікативних множників та команди *MS Excel «Геометрическая прогрессия»* дало однаковий результат.

Для графічного відображення темпу росту вартості за складними процентами виділимо числовий ряд у комірках $B5 - B15$ та активізуємо «*мастер диаграмм*». Результат роботи майстра діаграм ілюструє рис. 3.3.

Приклад, наведений на рис. 3.3, є чисельним прикладом до канонічного рівняння $FV = PV \cdot (1 + r)^n$, яке в загальному вигляді відображено на рис.

3.1. Одержаний графік зростання вартості у часі за правилом складних процентів відповідає показниковій функції.

Основним методом оптимізації обчислень за складними процентами є використання спеціальних фінансових функцій табличного процесора *MS Excel.* Повний перелік відповідних фінансових функцій наведено у Додатку 8, а зараз розглянемо основні функції, застосовні безпосередньо до правила складних процентів.

Нагадаємо, що канонічна формула складних процентів
$FV = PV \cdot (1 + r)^n$ пов'язує функціональною залежністю 4 параметри:

– майбутню (кінцеву) вартість PV;
– теперішню (приведену, початкову) вартість PV;
– період часу (строк угоди) n;
– ставку дохідності r.

Для оцінки кожного з цих параметрів у середовищі *MS Excel* існують спеціальні фінансові функції, які дозволяють, знаючи будь-які три з чотирьох величин, знайти четверту — невідому.

Рис. 3.3. Графік зростання вартості за правилом складних процентів

Короткий опис цих функцій надано у таблиці 3.1.

З табл. 3.1 видно, що більшість наведених функцій мають однакові базові аргументи:

– ***БС*** – майбутня вартість FV;
– ***ПС*** – теперішня вартість PV;
– ***СТАВКА*** – ставка дохідності r;
– ***КПЕР*** – строк (кількість періодів) n;
– ***ПЛТ*** – величина одиничного періодичного платежу у потоці платежів;

$-\boldsymbol{ТИП}-$ тип нарахування процентів (1 – на початку періоду, **0** або **нічого** – наприкінці періоду), необов'язковий аргумент.

Таблиця 3.1

ФУНКЦІЇ *MS EXCEL* ДЛЯ ОБЧИСЛЕНЬ ЗА СКЛАДНИМИ ПРОЦЕНТАМИ

Невідомий параметр	Наша функції	Форма і функції
$\boldsymbol{FV}$	**БС**	$\boldsymbol{БС(СТАВКА;КПЕР;ПЛТ;ПС;ТИП)}$
$\boldsymbol{PV}$	**ПС**	$\boldsymbol{ПС(СТАВКА;КПЕР;ПЛТ;БС;ТИП)}$
$\boldsymbol{r}$	**СТАВКА**	$\boldsymbol{СТАВКА(КПЕР;ПЛТ;ПС;БС;ТИП)}$
$\boldsymbol{n}$	**КПЕР**	$\boldsymbol{КПЕР(СТАВКА;ПЛТ;ПС;БС;ТИП)}$

Підкреслимо, що хоча формат кожної з наведених функцій передбачає п'ять аргументів, фактично будь-яка з них задається трьома параметрами, оскільки аргументи $\boldsymbol{ПЛТ}$ та $\boldsymbol{ТИП}$ в даному випадку не потрібні (потік платежів складено з одного платежу, проценти на який нараховують наприкінці періоду).

Зазначимо також, що всі ці функції є програмною реалізацією рівняння $\boldsymbol{FV = PV \cdot (1+r)^n}$. Якщо ж нарахування процентів відбувається $\boldsymbol{m}$ разів протягом одного періоду, то аргументи $\boldsymbol{СТАВКА}$ і $\boldsymbol{КПЕР}$ необхідно відкоригувати так:

$$\boldsymbol{СТАВКА = \frac{r}{m}} \text{ та } \boldsymbol{КПЕР = n \cdot m}.$$

Причому, аргумент $\boldsymbol{СТАВКА}$ потрібно або задавати у частках (наприклад 10% записують як 0,1), або для комірки *MS Excel,* що містить значення ставки дохідності, обирати процентний формат.

Крім того, необхідно пам'ятати, що для коректної роботи цих функцій аргументи $\boldsymbol{БС}$ і $\boldsymbol{ПС}$ мають бути з протилежними знаками. Дана вимога *MS Excel* випливає з економічного змісту фінансових операцій. Наприклад, для інвестора вкладання коштів сьогодні є витратами, а повернення коштів у майбутньому – доходами.

Приклад 3.9

Розглянемо роботу функцій $\boldsymbol{БС(\ )}$, $\boldsymbol{ПС(\ )}$, $\boldsymbol{СТАВКА(\ )}$, $\boldsymbol{КПЕР(\ )}$ на умовах прикладу 3.8. Відповідно до введених раніше позначень маємо: $\boldsymbol{FV = 1610{,}51;\ PV = 1000;\ n = 5;\ r = 10\%}$.

Внесемо всі ці дані в таблицю *MS Excel* (комірки $\boldsymbol{B2-B5}$ на рис. 3.4).

Наприклад, для визначення майбутньої вартості $\boldsymbol{FV}$, викличемо функцію $\boldsymbol{БС(\ )}$. Потім, користуючись посиланнями на відповідні комірки електронної таблиці, у вікно, що з'явилося введемо відомі значення аргументів: $СТАВКА = 0{,}1;\ КПЕР = 5;\ ПС = -1000$ (рис. 3.4).

В електронній таблиці *MS Excel,* яка наведена на рис. 3.4, результат роботи функції $БС(\ )$ відображено у комірці $C2$. Після натиснення клавіші $"OK"$ у цій комірці має з'явитися значення $FV = 1610{,}51$.

Аналогічно у *MS Excel* можна розрахувати й усі інші параметри. На рис. 3.4 результати роботи функцій $СТАВКА(\ );КПЕР(\ );ПС(\ )$ можна побачити у комірках $C3 - C5$.

Варто зазначити про існування у *MS Excel й* інших фінансових функцій, які суттєво спрощують розрахунки за правилом складних процентів.

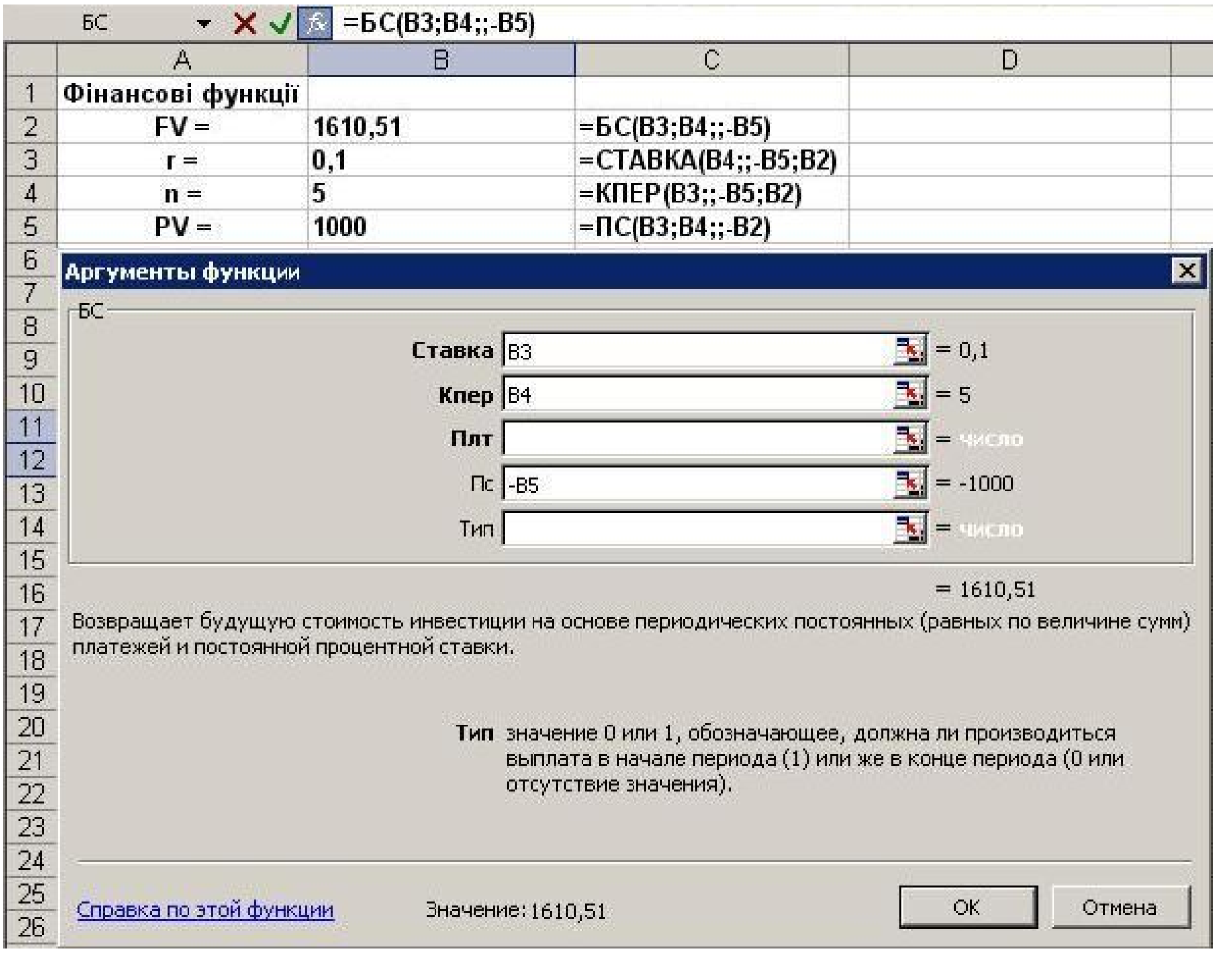


Рис. 3.4. Обчислення майбутньої вартості у *MS Excel*

Наприклад, співвідношення між ефективними та номінальними ставками складних процентів теж знайшло своє відображення у *MS Excel.* Так, для переведення номінальних ставок у ефективні існує функція $ЭФФЕКТ(\ )$, та навпаки, для знаходження номінальної ставки за відомої ефективної – функція $НОМИНАЛ(\ )$.

Не залишилося без уваги й питання оцінювання майбутньої вартості суми, вкладеної на умовах плаваючих процентних ставок. Якщо значення ставки дохідності змінюється через рівні проміжки часу, то *MS Excel* дозволяє визначити майбутню вартість за допомогою функції ***БЗРАСПИС( )***.

Тема 4 Фінансова еквівалентність

4.1. Поняття фінансової еквівалентності

У практиці фінансових операцій нерідко виникають ситуації, коли необхідно певні боргові зобов'язання замінити на інші з більш віддаленим строком платежу (процеси пролонгації, реструктуризації боргу та ін.); чи поєднати декілька платежів (процеси консолідації та ін.), або навпаки, один платіж поділити на декілька часток (процеси дроблення, «спліт» цінних паперів та ін.). Тому виникає питання коректного порівняння вартісних та часових характеристик таких фінансових угод.

Пролонгация (фр. *prolongation*, от лат. *prolongare* — удлинять) — продление срока действия чего-либо, какого-либо процесса.

Пролонгация депозита - это продление действия договора вклада после завершения срока его действия. Пролонгация договора вклада осуществляется на тот же срок, с процентной ставкой по данному вкладу, действующей на момент пролонгации вклада. Основное преимущество пролонгируемого депозита для клиента - экономия времени. Как правило, пролонгация осуществляется банком автоматически и не требует присутствия клиента. Не все депозитные счета можно пролонгировать, эта возможность заранее оговаривается в договоре при открытии депозита.

Порівняльний аналіз та узгодження умов фінансових операцій ґрунтується на принципі ***фінансової еквівалентності.***

Фінансова еквівалентність – паритет (рівність) різних за номіналом вартісних величин та / або норм дохідностей фінансових угод, які належать до різних моментів часу. Вони залежать від наступних ***базових параметрів:***

- розміру середньоринкової ставки дохідності;
- методики нарахування процентів;
- строку та періодичності нарахування коштів;
- початкової та / або кінцевої суми коштів.

У разі необхідності зміни (коригування) будь-якого з базових параметрів фінансової угоди, виникає питання визначення **еквівалентних** грошових сум та / або ставок (норм) дохідності, котрі відповідають новим умовам фінансової угоди.

Еквівалентні вартісні величини – це суми коштів, які у разі зведення до одного моменту часу стають однаковими.

Еквівалентні норми дохідності — це ставки дохідності, які, не дивлячись на різні способи та / або строки нарахування чи утримання коштів, у разі зведення до однакових часових одиниць виміру (зазвичай говорять про ***річну*** дохідність) стають однаковими.

Приклад 4.1

Треба порівняти, що більше за ставкою складних процентів $r = 7\% -$ 1000 грн сьогодні, чи 2000 грн через 8 років.

Розв'язання

Для коректного порівняння грошових сум, що належать до різних часових інтервалів, необхідно звести ці вартісні величини до одного моменту часу.

Перший спосіб – визначення теперішньої вартості від номінальної суми 2000 грн, тобто дисконтування 2000 грн.

З використанням таблиці множників дисконтування складних процентів (Додаток 3), маємо:

$$PV_{8;7\%}(2000) = 2000 \cdot D(8;7\%) = 2000 \cdot 0{,}5820081 \approx 1164 грн.$$

Отже, за цією ставкою дохідності, 2000 грн, які будуть отримані через 8 років, на сьогодні є більшими за 1000 грн.

Другій спосіб – знаходження майбутньої вартості через 8 років від номінальної суми 1000 грн, тобто нарощування 1000 грн. За допомогою таблиці множників нарощування складних процентів (Додаток 2), отримаємо:

$$FV_{8;7\%}(1000) = 1000 \cdot M(8;7\%) = 1000 \cdot 1{,}7181862 \approx 1718 грн$$

Отже, за цією ставкою дохідності, інвестовані сьогодні 1000 грн через 8 років є меншими за 2000 грн.

Таким чином, порівнюючи ці дві вартісні величини як на початковому, так і на кінцевому (через 8 років) етапі, можна зробити висновки, що за цих вихідних умов доцільніше обирати 2000 грн через 8 років.

Приклад 4.2

Збільшимо в прикладі 4.1 річну ставку нарощування до 9%. Тоді теперішня сума 1000 грн через 8 років дорівнюватиме:

$$FV_{8;9\%}(1000) = 1000 \cdot M(8;9\%) = 1000 \cdot 1{,}9925626 \approx 1992{,}6 грн.$$

Отже, майбутня вартість $FV_{8;9\%}(1000)$ є трохи меншою за 2000 грн.

Проте, якщо ставка $r = 9{,}5\%$ то $FV_{8;9,5\%}(1000) \approx 2067\%$.

Отже, майбутня вартість $FV_{8;9,5\%}(1000)$ є трохи більшою за 2000 грн.

Таким чином, у інтервалі $(9;9{,}5)$ існує одне значення річної ставки дохідності, за якої 1000 грн сьогодні та 2000 грн через 8 років є еквівалентними величинами.

Для знаходження цього значення ставки дохідності скористаємось функцією $СТАВКА(\ )$табличного процесора MS Excel (рис. 4.1)

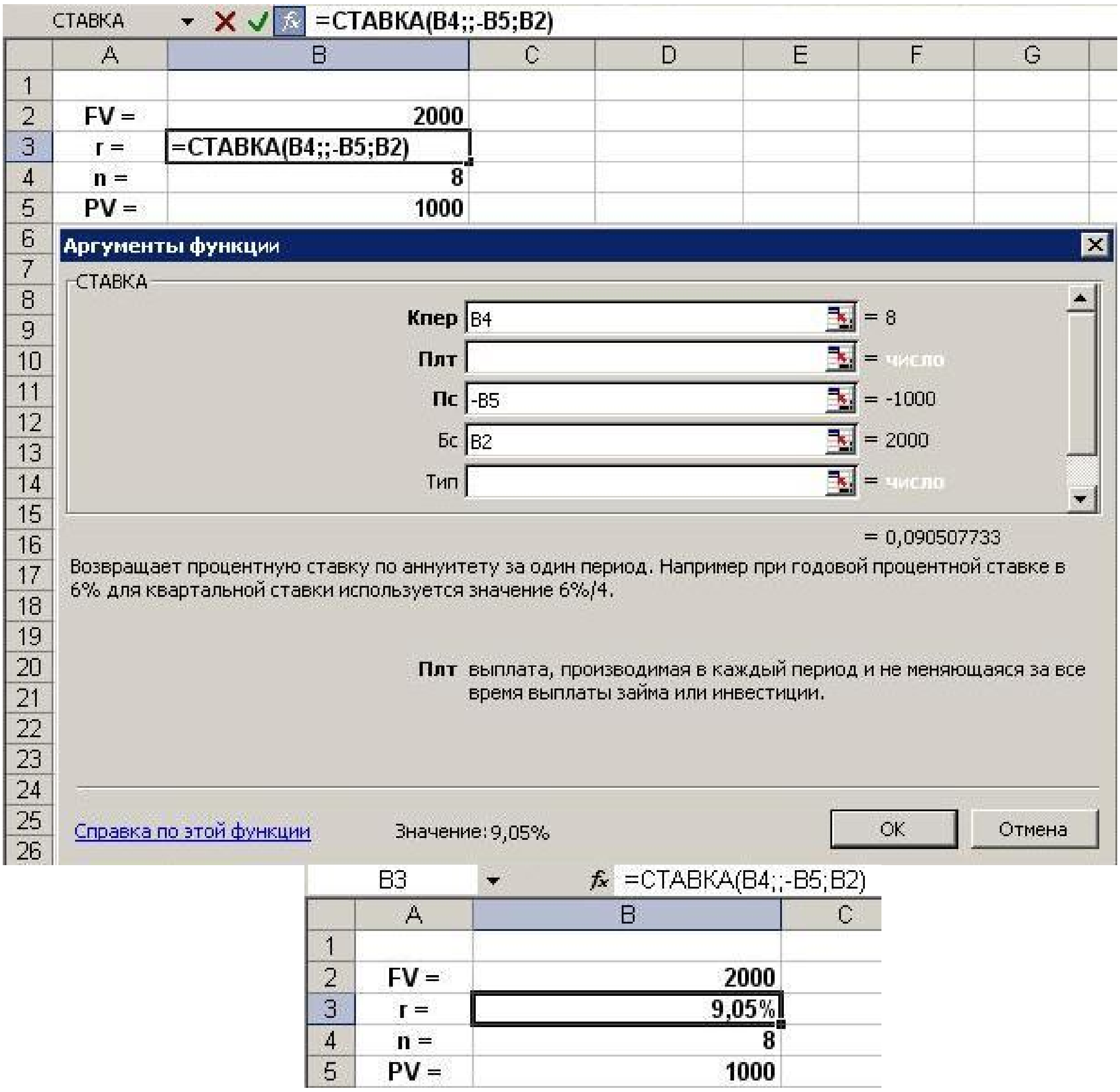


Рис. 4.1. Визначення норми дохідності за допомогою MS Excel

В клітинці ***B3*** виберемо процентний формат з двома десятковими знаками, отримаємо шукану норму дохідності r:

$$= СТАВКА(8;;-1000;2000) = 9{,}05\%.$$

Таким чином, за річною ставкою доходності у 9,05%, грошові суми 1000 грн сьогодні та 2000 грн через 8 років є еквівалентними величинами.

Зазначимо, що ставку дохідності, із застосуванням якої вартісні величини, що належать до різних часових періодів, стають еквівалентними, називають ***бар'єрною ставкою.***

4.2. Основні рівняння еквівалентності

Основоположним постулатом майже всіх сучасних економічних теорій є твердження, що головною ціллю будь-якої комерційної діяльності є отримання прибутку.

У фінансовій математиці, аналізуючи ефективність підприємницької діяльності, зазвичай говорять про норму (ставку) дохідності тієї чи іншої фінансової операції.

Завдяки відмінностям у методиках фінансових обчислень розрізняють такі основні види ставок доходності:

– залежно від правила нарахування процентів — *проста* та *складна* ставки;

– залежно від операції (нарощування чи дисконтування процентів) — ставки *відсотка (нарощування)* та *дисконтування (приведення);*

– залежно від операції (дисконтування чи утримання процентів) — ставки *дисконтування (декурсивна)* та *облікова (антисипативна);*

– залежно від способу врахування часової бази розрахунків — *комерційна* та *точна* ставки;

– залежно від способу врахування ринкової дохідності — *фіксована* та *плаваюча (змінна)* ставки;

– залежно від кількості нарахувань протягом одного періоду часу за правилом складних процентів — *номінальна* та *ефективна* складні ставки;

– залежно від частоти нарахувань за правилом складних процентів — *дискретна* та *неперервна* складні ставки;

– з урахуванням або без урахування темпу інфляції — *реальна* та *номінальна* ставки;

– з урахуванням або без урахування ризику неплатежу — *очікувана* та *обіцяна* ставки дохідності.

Таким чином, зміна методики обчислення ставки дохідності може призвести до суттєвих змін вартісних та / або часових характеристик фінансових угод. З метою збереження необхідної норми дохідності фінансової операції, незалежно від методики та тривалості нарахувань процентів, використовують *рівняння еквівалентності* щодо множників нарощування, дисконтування, утримання.

4.2.1. Еквівалентність множників нарощування простих та складних процентів

Формула нарощення за простими процентами:

$$\boldsymbol{FV = PV\left(1 + r \cdot n\right)},$$

де $\boldsymbol{\left(1 + r \cdot n\right)} -$ множник нарощування простих процентів.

Формула нарощування за складними процентами:

$$\boldsymbol{FV = PV \cdot \left(1 + r\right)^n},$$

де $\boldsymbol{\left(1 + r\right)^n} -$ множник нарощування складних процентів.

Позначимо ставку дохідності за простими процентами $\boldsymbol{r_{is}}$, за складними процентами – $\boldsymbol{r_{ic}}$, термін часу $\boldsymbol{n_{ic} = n_{is} = n}$.

Тоді, умову еквівалентності простих та складних множників нарощування процентів можна записати у вигляді:

$$(1+r_{ic})^n = (1+r_{is}\cdot n).$$

Звідси, проста ставка за відомої складної ставки дохідності:

$$r_{is} = \frac{(1+r_{ic})^n - 1}{n}.$$

Складна ставка за відомої простої ставки дохідності:

$$r_{is} = \sqrt[n]{1+r_{is}\cdot n} - 1 = (1+r_{is}\cdot n)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Аналогічно дані формули можна отримати за умови рівності відповідних множників дисконтування простих та складних процентів.

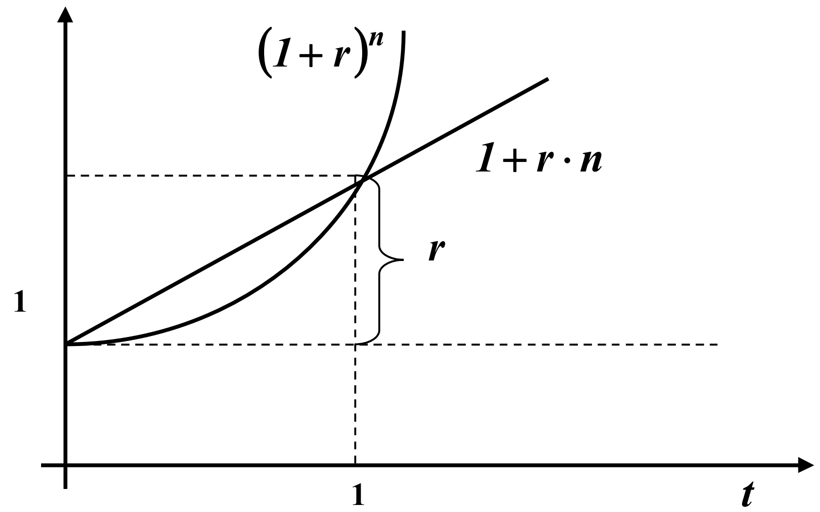


Рис. 4.2. Графік множників нарощування вартості за правилами простих та складних процентів

Порівняємо *темпи зростання вартості* при застосуванні правил простих та складних процентів. Об'єднавши графіки зростання вартості за правилом простих процентів (рис. 2.1) і за правилом складних процентів (рис. 3.1), для одиниці вартості отримаємо графічну ілюстрацію співвідношення множників нарощування (рис. 4.2).

Зазначимо, що кут нахилу функцій, зображених на рис. 4.2, залежить від величини ставки дохідності r. Чим більша ця ставка, тим швидше зростає вартість у часі, і тим крутіший нахил відповідної функції.

З рис. 4.2 бачимо, що на проміжку $t \in (0;1)$ більшими є значення функції множника нарощування простих процентів, а на проміжку $t \in (1;n)$, навпаки – значення функції, що відповідає правилу складних процентів. Графіки функцій множників нарощування перетинаються лише один раз при $t = 1$. Тобто, еквівалентність множників нарощування простих та складних процентів, за умови однакових параметрів r та n, досягається лише за одноразового нарощування коштів. Дійсно, за умов $r_{ic} = r_{is} = r$ та $t = 1$:

$$\left(1+r_{ic}\right)^{n}=\left(1+r_{is}\cdot n\right)=1+r\,,$$

що відповідає множнику нарощування у формулі для одноразового нарощування коштів.

Приклад 4.3.

За початкових умов: теперішня вартість $PV = 1000$ грн, ставка дохідності $r = 10\%$, обчислити значення майбутньої вартості на наступні 10 періодів за правилами простих та складних процентів. Порівняти отримані результати.

Розв'язання

Визначення майбутньої вартості за правилом простих процентів за послідовні 10 періодів шляхом побудови арифметичної прогресії ілюструє рис. 2.3. Відповідно, побудову геометричної прогресії для правила складних процентів відображено на рис. 3.3. Об'єднаємо ці дві числові послідовності і побудуємо графіки (рис. 4.3).

	A	B	C
1			
2		**Правило процентів**	
3	**Період**	**прості**	**складні**
4	**n**	**FV**	**FV**
5	0	1000	1000
6	1	1100	1100
7	2	1200	1210
8	3	1300	1331
9	4	1400	1464,1
10	5	1500	1610,51
11	6	1600	1771,561
12	7	1700	1948,7171
13	8	1800	2143,5888
14	9	1900	2357,9477
15	10	2000	2593,7425
16			
17		**Ставка r=**	10%
18			
19			

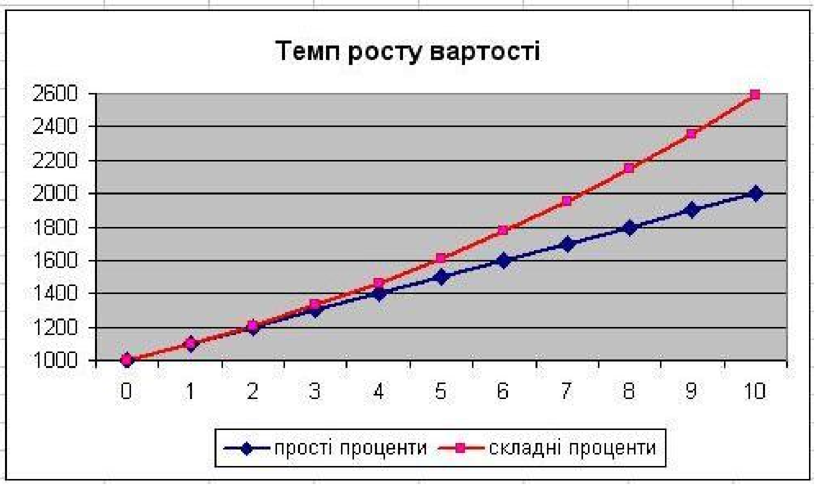


Рис. 4.3. Графік зростання вартості за правилами простих та складних процентів

З рис. 4.3 бачимо, що за однакових вихідних умов, рівність вартісних величин досягається лише після першого періоду $\left(t=1; FV=1100\right)$, а потім, при $t>1$, вартість швидше зростає за правилом складних процентів.

Порівнюючи *множники нарощування* простих та складних процентів можна зробити висновки.

Якщо взяти однакові за величиною, але різні за правилом нарощування процентів *річні* ставки нарощування, то:

– для строку *меншого* за один рік вартість нарощується швидше за правилом простих процентів, тобто

$$\left(1+r_{ic}\right)^{n}<\left(1+r_{is}\cdot n\right);$$

– для строку *більшого* ніж один рік вартість нарощується швидше за правилом складних процентів, тобто

$$\left(1+r_{ic}\right)^{n} > \left(1+r_{is}\cdot n\right);$$

– для строку $t = 1$ рік множники нарощування дорівнюють один одному, тобто

$$\left(1+r_{ic}\right)^{n} = \left(1+r_{is}\cdot n\right).$$

Оскільки у комерційних розрахунках тип множників нарощування зазвичай вибирають відповідно з принципами максимізації прибутку, то існує правило – у короткострокових фінансових угодах (строк менший за 1 рік) нарощування краще здійснювати за простими процентами, а у довгострокових – за складними процентами.

4.2.2. Еквівалентність множників утримання простих та складних процентів

Формула утримання за простими процентами:

$$PV = FV\cdot\left(1-d\cdot n\right).$$

де $\left(1-d\cdot n\right)-$ множник утримання простих процентів.

Формула утримання за складними процентами:

$$PV = FV\cdot\left(1-d\right)^{n},$$

де $\left(1-d\right)^{n}-$ множник нарощування складних процентів.

Позначимо облікову ставку дохідності (ставку утримання) за простими процентами d_{is}, за складними процентами – d_{ic}, термін часу $n_{ic} = n_{is} = n$.

Тоді, умову еквівалентності простих та складних множників утримання процентів можна записати у вигляді:

$$\left(1-d_{ic}\right)^{n} = \left(1-d_{is}\cdot n\right).$$

Звідси, проста облікова ставка за відомої складної ставки утримання:

$$d_{is} = \frac{1-\left(1-d_{ic}\right)^{n}}{n}.$$

Складна облікова ставка за відомої простої ставки утримання:

$$d_{is} = 1-\sqrt[n]{1-d_{is}\cdot n}-1 = 1-\left(1-d_{is}\cdot n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Зауважимо, що отримані вирази мають економічний сенс лише коли облікові ставки дохідності d_{is} і, та d_{ic} менші від 100%.

Порівняємо *темпи зменшення (утримання) вартості* при застосуванні правил простих та складних процентів.

Графічну ілюстрацію співвідношення множників утримання для одиниці вартості наведено на рис. 4.4.

Зазначимо, що хоча обидві функції, зображені на рис. 4.4, є спадними, їхня область існування обмежена проміжком $[0;1]$, що в свою чергу накладає певні обмеження на допустимі значення параметрів d та n. Кут нахилу цих функцій залежить від величини ставки утримання d. Чим більша ця ставка, тим швидше зменшується вартість у часі, і тим крутіший нахил відповідної функції.

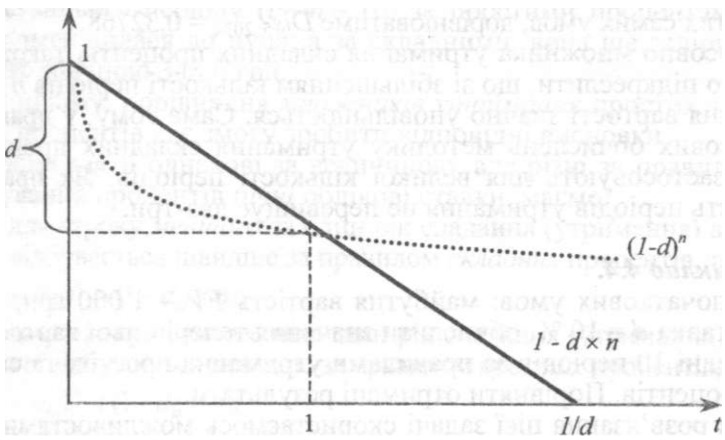


Рис. 4.4. Графік множників утримання вартості за правилами простих та складних процентів

З рис. 4.4 бачимо, що на проміжку $t \in (0;1)$ більшими є значення функції множника утримання простих процентів, а на проміжку $t \in (1;n)$, навпаки – значення функції множника утримання складних процентів. Графіки функцій множників утримання перетинаються лише один раз при $t = 1$. Тобто, еквівалентність множників утримання простих та складних процентів, за умови однакових параметрів r та n, досягається лише за одноразового утримання коштів.

Дійсно, за умов $d_{ic} = d_{is} = d$ та $t = 1$: $(1 - d_{ic})^n = (1 - d_{is} \cdot n) = 1 - d$, що відповідає множнику утримання у формулі для одноразового утримання (зменшення) вартості.

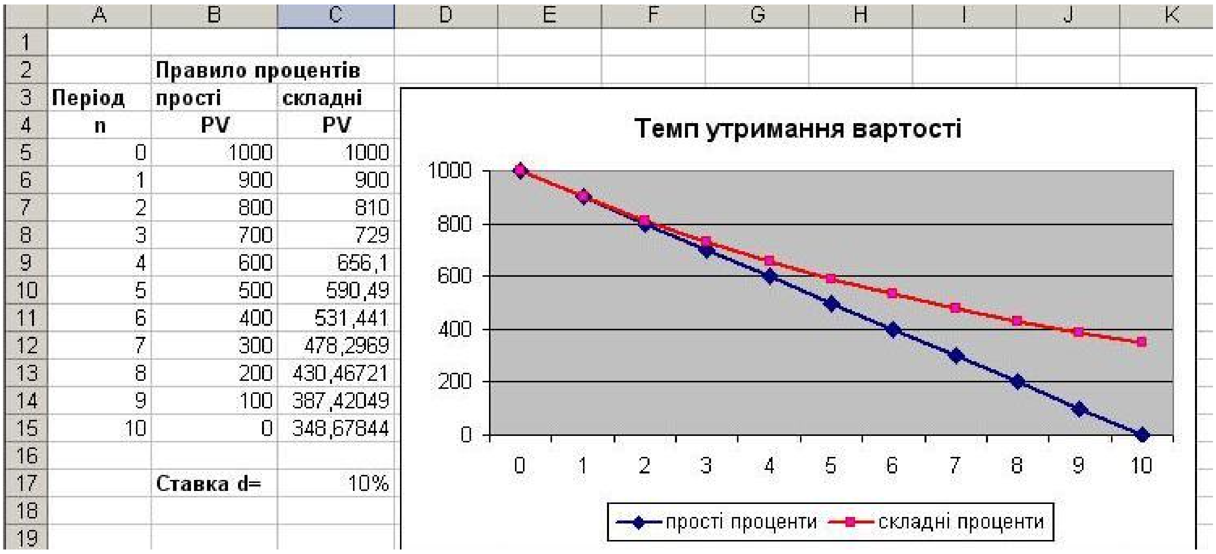
Зазначимо, що при строку $t > 1$, темп зменшення вартості за правилом простих процентів набагато швидший. Так, за правилом утримання простих процентів вартість зменшується до нуля в кінцевому періоді часу $n = \dfrac{1}{d_{is}}$. Наприклад, за ставки $d_{is} = 20\%$, множник утримання простих процентів, а отже, й кінцева вартість дорівнюватимуть нулю вже через 5 періодів часу, а множник утримання складних процентів дорівнюватиме $Dis_{5;20\%} = 0,32768$.

Для множника утримання складних процентів зі збільшенням кількості періодів n темп спадання вартості значно уповільнюється. Тому, у практиці фінансових обчислень методику утримання складних процентів рідко застосовують для великої кількості періодів. Як правило кількість періодів утримання не перевищує два-три.

Приклад 4.4

За початкових умов: майбутня вартість $FV = 1000$ грн, облікова ставка $d = 10\%$, обчислити значення теперішньої вартості за попередні 10 періодів за правилами утримання простих та складних процентів. Порівняти отримані результати.

Розв'язання



Період	Правило процентів	
	прості	складні
n	PV	PV
0	1000	1000
1	900	900
2	800	810
3	700	729
4	600	656,1
5	500	590,49
6	400	531,441
7	300	478,2969
8	200	430,46721
9	100	387,42049
10	0	348,67844
	Ставка d=	10%

Рис. 4.5. Графік утримання (спадання) вартості

З рис. 4.5 ми бачимо, що за однакових висхідних умов, рівність вартісних величин досягається лише після першого періоду $(t = 1; PV = 900)$, а потім, при $t > 1$, вартість швидше спадає за правилом простих процентів. Причому, за цих вихідних умов, після останнього періоду $(t = n = 10)$ за простими процентами вартість зменшилася до нуля, а за складними, вона ще залишається досить значною 348,6 грн.

Порівняння *множників утримання* простих та складних процентів дає змогу зробити висновки.

Якщо взяти однакові за величиною, але різні за правилом нарощування процентів *річні* облікові ставки, маємо:

– для строку *меншого* за один рік спадання (утримання) вартості відбувається швидше за правилом *складних* процентів, тобто

$$(1 - d_{ic})^n > (1 - d_{is} \cdot n);$$

– для строку *більшого* ніж один рік спадання (утримання) вартості відбувається швидше за правилом *простих* процентів, тобто;

$$(1 - d_{ic})^n < (1 - d_{is} \cdot n);$$

– для строку $t = 1$ рік множники утримання дорівнюють один одному, тобто

$$\left(1-d_{ic}\right)^n=\left(1-d_{is}\cdot n\right).$$

Операція *утримання* процентів має обмежену сферу застосування, тобто *облікові ставки* d не так поширені, як *ставки дисконтування* r. Проте, якщо комерційні розрахунки передбачають застосування облікових ставок, то, відповідно принципам максимізації прибутку, рекомендовано дотримуватися правила – у короткострокових фінансових угодах (строк менший за 1 рік) утримання здійснювати за складними процентами, а у довгострокових – за простими процентами.

4.2.3. Еквівалентність множників утримання та дисконтування для простих процентів

Формула дисконтування за простими процентами:

$$PV=\frac{FV}{1+rn},$$

де $\frac{1}{1+r\cdot n}$ – множник дисконтування простих процентів.

Формула утримання за простими процентами:

$$PV=FV\cdot\left(1-d\cdot n\right),$$

де $\left(1-d\cdot n\right)$ – множник утримання простих процентів.

Тоді, умову еквівалентності множників дисконтування та утримання для простих процентів можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{1+r\cdot n}=1-d\cdot n$$

Звідси,

$$r=\frac{d}{1-d\cdot n}, \text{ або } d=\frac{r}{1+r\cdot n}$$

З одержаних виразів випливає, що за правилом простих процентів для дотримання умови рівності множників дисконтування та утримання, а отже й умови еквівалентності величин теперішньої вартості, облікова ставка d має бути більшою за ставку дисконтування r.

4.2.4. Еквівалентність множників утримання та дисконтування для складних процентів

Формула дисконтування за складними процентами:

$$PV=\frac{FV}{\left(1+r\right)^n},$$

де $\frac{1}{(1+r)^n}$ – множник дисконтування складних процентів.

Формула утримання за складними процентами:

$$PV = FV \cdot (1-d)^n,$$

де $(1-d)^n$ – множник утримання складних процентів.

Тоді, рівняння еквівалентності множників утримання та дисконтування складних процентів матиме вигляд:

$$\frac{1}{(1+r)^n} = (1-d)^n.$$

Звідси,

$$r = \frac{d}{1-d}, \text{ або } d = \frac{r}{1+r}$$

Із співвідношень можна побачити, що взаємозв'язок складних ставок r та d не залежить від кількості періодів п.

Також з них випливає, що за правилом складних процентів для дотримання умови рівності множників дисконтування та утримання, а отже й умови еквівалентності величин теперішньої вартості, облікова ставка d має бути більшою за ставку дисконтування r.

4.2.5. Еквівалентність множників нарощування складних процентів за номінальними та ефективними ставками дохідності

Нарощення вартості за правилом складних процентів може відбуватися двома способами:

– за канонічною формулою $FV = PV \cdot (1+r)^n$, у разі, коли загальна кількість нарахувань процентів співпадає з кількістю періодів існування угоди (тривалістю угоди), тобто, $m = n$;

– за формулою $FV_n = PV \cdot \left(1+\frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}$, у разі, коли загальна кількість нарахувань процентів є більшою за кількість періодів, тобто, $m > n$.

У разі, коли для двох фінансових угод множники нарощування за річними *ефективними* ставками складних процентів є еквівалентними, можна записати рівняння:

$$(1+r_{e_1})^{n_1} = (1+r_{e_2})^{n_2}.$$

Тоді, враховуючи вираз для ефективної ставки складних процентів $r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$, для номінальних ставок дохідності можна записати рівняння:

$$\left(1 + \frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1 \cdot n_1} = \left(1 + \frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2 \cdot n_2}.$$

Отриманий вираз є загальним випадком рівняння еквівалентності множників нарощування складних процентів.

У разі, коли визначення еквівалентних множників здійснюють в межах однієї фінансової угоди, тобто $n_1 = n_2 = n$, вираз спрощується до:

$$\left(1 + \frac{r_1}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{r_2}{m_2}\right)^{m_2}.$$

Зазначимо, що саме це рівняння еквівалентності досить часто розглядається на практиці при вирішенні інвестиційної дилеми «час-дохідність».

4.3. Визначення еквівалентної ставки дохідності фінансової операції при утриманні комісійних

У реальних фінансових угодах, наприклад, у споживчому кредитуванні досить часто вказують лише певну «рекламну» ставку дохідності, але за наявності різноманітних «прихованих» платежів реальна (повна) ставка дохідності для кінцевого споживача кредиту є набагато вищою.

Визначення повної дохідності фінансової операції для кредитора у вигляді річної складної (ефективної) ставки процентів у ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності.

Нехай позика в розмірі C надається на строк n під складну річну процентну ставку r. При наданні позики утримуються комісійні у розмірі A, що збільшує дохідність операції для кредитора. В результаті боржник отримує суму, яка дорівнює $(C - A)$.

Для визначення повної дохідності фінансової операції припускають, що нарощення величини $(C - A)$ за ставкою y дасть той самий результат, що і нарощення величини C за ставкою r. Отже, відповідно до введених раніше позначень, рівняння еквівалентності матиме вигляд:

$$(C - A) \cdot (1 + y)^n = C \cdot (1 + r)^n.$$

Звідси рівняння можна записати у вигляді пропорції;

$$\frac{1+y}{1+r}=\left(\frac{C}{C-A}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Одержаний вираз унаочнює той факт, що приріст дохідності кредитора за наявності початкових комісійних виплат залежить лише від співвідношення між повною та реально виданою сумами боргу та строку, на який надано кредит.

Розв'язавши це рівняння відносно річної ставки дохідності y, отримаємо:

$$y=(1+r)\cdot\left(\frac{C}{C-A}\right)^{\frac{1}{n}}-1$$

Звідси бачимо, що реальна ставка дохідності y прямо залежить від величини початкової комісії A Зрозуміло, що за нульової комісії з рівняння ми отримаємо, що $y=r$.

Приклад 4.5

Комерційний банк пропонує видати кредит на наступних умовах:

– обсяг кредиту 5 тис. грн;

– строк кредитування 5 років;

– кредитна ставка складних процентів 14% річних;

– кредит погашається одним платежем у кінці строку;

– у момент видачі кредиту банк утримує комісію за оформлення кредитного договору в розмір 5% від суми кредиту.

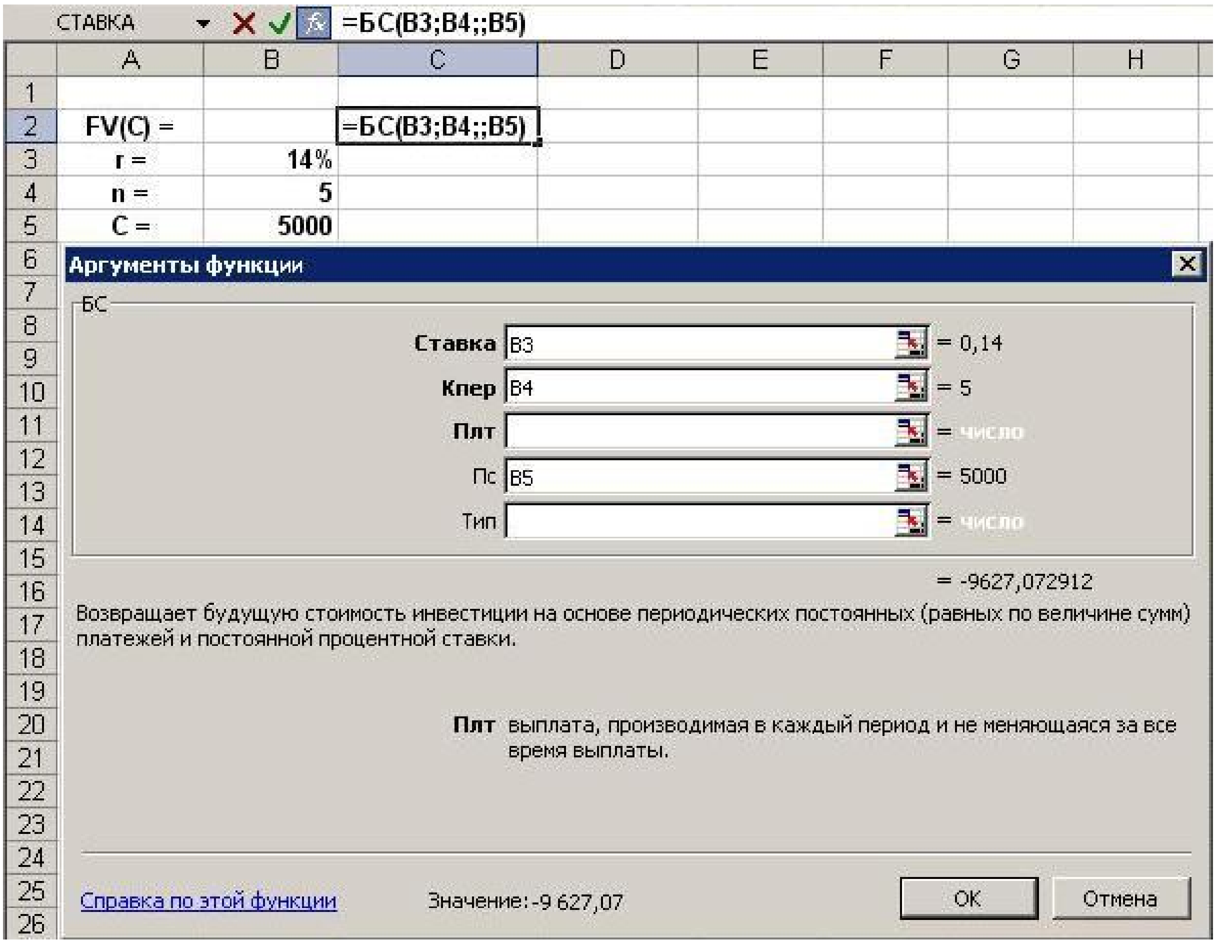
Обчислити повну дохідність цієї кредитної операції для банку.

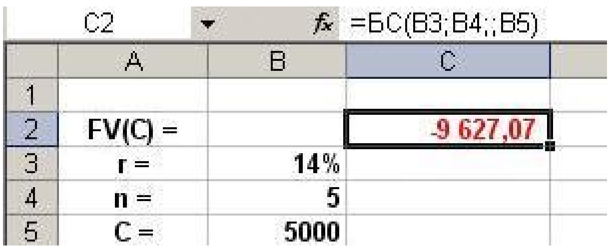
Розв’язання

Внесемо вихідні дані. У клітинці $B3$ встановимо формат «Процентний».

Спочатку розрахуємо величину кредиту, яку має повернути боржник через 5 років, виходячи з того, що основна сума боргу становить 5000грн і на цю суму банк нараховує складні проценти.

Скориставшись фінансовою функцією $БС(\ )$, отримаємо:



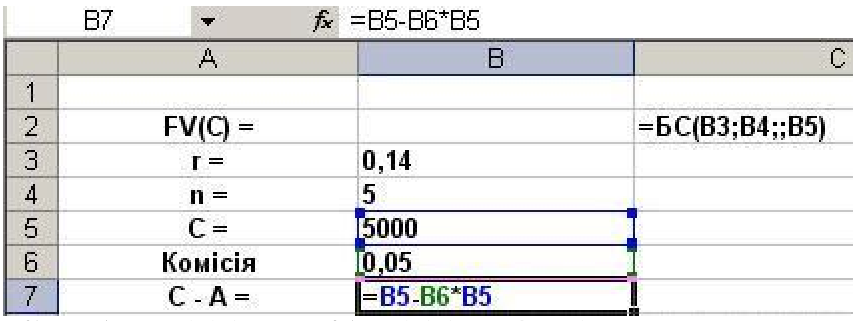


$$FV_{5;14\%}(5000) = БС(14\%;5;;5000) = -9627{,}07$$ (клітинка $C2$)

Від'ємне значення показує, що це величина боргу.

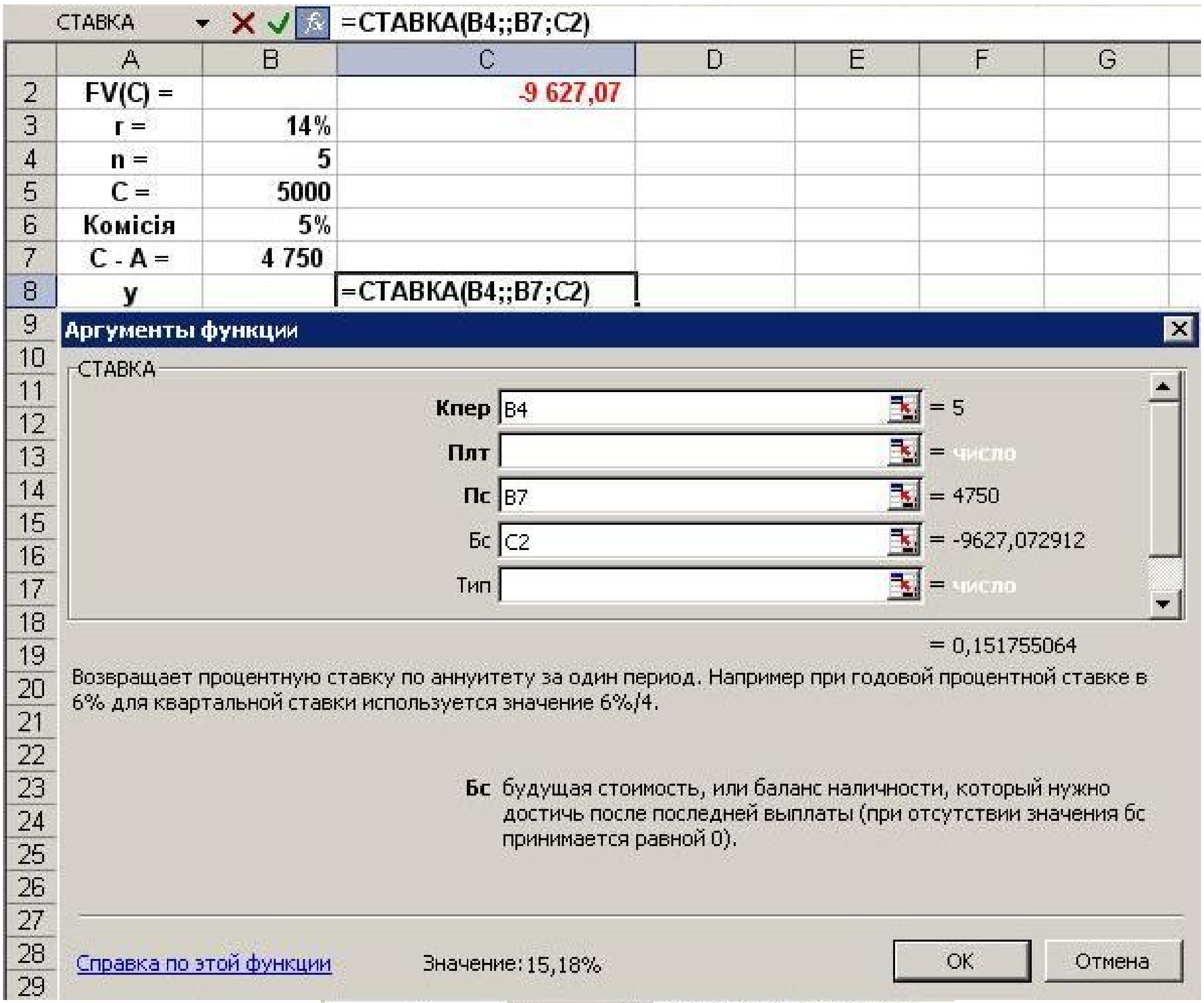
Тепер розрахуємо суму, яку фактично отримує на руки позичальник із вирахуванням комісії.

Маємо:



$$C - A = 5000 - 5\% * 5000 = 4750$$ (клітинка $B7$).

Отже, маючи початкову (4750 грн) та кінцеву (- 9627,07 грн) величини, можемо обчислити норму дохідності цієї операції для банку, скориставшись функцією $\boldsymbol{СТАВКА(\;)}$;



$$\boldsymbol{y = СТАВКА(5;\,;4750;\text{-}9627{,}07) = 15{,}18\%}$$ (клітинка $\boldsymbol{C8}$).

В якості перевірки, розрахуємо цю величину й іншим способом, ввівши у клітинку $\boldsymbol{C10}$ вираз

$$y = (1 + r)\cdot\left(\frac{C}{C - A}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

C10 fx =(1+B3)*(B5/B7)^(1/B4)-1

	A	B	C
2	FV(C) =		=БС(B3;B4;;B5)
3	r =	0,14	
4	n =	5	
5	C =	5000	
6	Комісія	0,05	
7	C - A =	=B5-B6*B5	
8	y		=СТАВКА(B4;;B7;C2)
9			
10			=(1+B3)*(B5/B7)^(1/B4)-1
11			

C10 fx =(1+B3)*(B5/B7)^(1/B4)-1

	A	B	C	D
1				
2	FV(C) =		-9 627,07	
3	r =	14%		
4	n =	5		
5	C =	5000		
6	Комісія	5%		
7	C - A =	4 750		
8	y		15,18%	
9				
10			15,18%	

Обидва способи дають однаковий результат.

Отже, повна дохідність цієї кредитної операції для банку становить ***15,18%*** річних, хоча банком задекларована ставка на рівні ***14%***.

Тема 5. Фінансові платежі для потоків обчислень.

5.1. Основні відомості про потоки платежів

Сучасні фінансово-кредитні розрахунки часто передбачають не ***окремі платежі,*** а їхню певну послідовність, тобто – ***потоки платежів*** у часі. З погляду фінансової математики, всі потоки платежів (грошові потоки) умовно поділяють на ***додатні*** (приплив коштів – доходи та інші надходження) та ***від'ємні*** (вилучення коштів – витрати та інші виплати).

Наприклад, погашення банківських кредитів та інших заборгованостей, орендні та комунальні виплати, операційні витрати тощо, з позиції суб'єкта господарської діяльності є ***від'ємним*** грошовим потоком. А, наприклад, виручка від реалізації товарів, робіт, послуг, надходження від інвестиційної діяльності, дивіденди по акціях тощо, є для нього ***додатним*** грошовим потоком.

Взагалі, поняття ***грошового потоку (потоку платежів***) є одним із основоположних у фінансовій математиці, оскільки описує будь-які послідовні в часі платежі.

Потік платежів (***cash flows stream) –*** це послідовність (ряд) платежів у часі зі зазначанням їх величин та знаків, а також моментів часу, у які їх здійснюють.

Окремий елемент такого ряду платежів – це **член потоку** (***cash flow).*** Якщо такий окремий платіж має знак «плюс» — це ***приплив (надходження)*** коштів, знак «мінус» — ***вилучення (виплата)*** коштів.

Таким чином, кожний грошовий потік задається двома параметрами:

– вартісними величинами (абсолютними розмірами послідовних платежів із зазначенням знаків «плюс» чи «мінус»);

– часовими характеристиками (послідовністю дат або термінів платежів).

Надалі, для математичного опису грошових потоків, використовуватимемо наступні позначення: $R = \{R_k ; t_k\}$ – потік платежів; R_k – платежі (члени потоку); t_k – моменти часу, в які здійснюють відповідні платежі $t_k = \overline{1;n}$.

Кількісний аналіз внутрішньої (інвестиційної) вартості переважної більшості об'єктів оцінки, зокрема фінансових та матеріальних активів, передбачає застосування методу ***дисконтування грошових потоків,*** які очікують від володіння (використання) цим об'єктом оцінки.

Причому, зазвичай дисконтування відбувається саме за методом ***складних процентів.*** Крім того, у фінансових обчисленнях щодо потоків платежів вважається, що ставка приведення (дисконтування) r відома та здебільшого ***незмінна*** протягом усієї тривалості потоку.

У відповідності із Законом України ***«Про оцінку майна, майнових прав та професійну оціночну діяльність в Україні»***, майном, яке може оцінюватися, вважаються об'єкти в матеріальній формі, будівлі та споруди (включаючи їх невід'ємні частини), машини, обладнання, транспортні засоби тощо; паї, цінні папери; нематеріальні активи, в тому числі об'єкти права інтелектуальної власності; цілісні майнові комплекси всіх форм власності.

В нашій державі існують ***Національні стандарти оцінки***, які визначають основні дефініції оціночної діяльності, зокрема поняття ринкової вартості, принципи оцінки, методичні підходи та особливості проведення оцінки відповідного майна залежно від мети оцінки.

Основоположним поняттям практичної оціночної діяльності є поняття ***чистого грошового потоку (чистого операційного доходу).*** Надалі, у фінансових обчисленнях щодо потоків платежів, якщо не обумовлене інше, розглядаючи грошові потоки ми матимемо на увазі саме ***чистий операційний дохід.***

Згідно ***Національного стандарту оцінки № 2***, ***чистий операційний дохід*** – це дохід, що визначається як різниця між ***валовим доходом*** та ***операційними витратами. Валовий дохід*** – це сукупне надходження коштів, які планують отримати від реалізації прав, пов'язаних з об'єктом оцінки.

І, відповідно, ***операційні витрати*** – це прогнозовані витрати власника, пов'язані з отриманням валового доходу. До операційних не належать витрати на обслуговування боргу та податків, що сплачуються від величини прибутку, отриманого від використання об'єкта оцінки, єдиного податку, фіксованого податку.

Крім того, у *Національному стандарті оцінки № 1*, зазначено, що **грошовий потік** — це сукупність *прогнозованих* або *фактичних* надходжень від діяльності (використання) об'єкта оцінки. Відповідно, **чистий грошовий потік (чистий операційний дохід**) – це сукупність *прогнозованих* або *фактичних* надходжень від використання об'єкта оцінки після вирахування усіх витрат, пов'язаних з отриманням цієї суми.

Таким чином, фінансові обчислення щодо потоків платежів (грошових потоків) часто стосуються не лише *фактичних* (детермінованих) сум коштів, але й *прогнозованих,* тобто майбутніх надходжень, отримання яких носить імовірнісний характер. Зазвичай, оцінювання грошових потоків є спрощеним, без врахування ризику неотримання коштів. Проте, роблячи певні фінансові обчислення, необхідно чітко усвідомлювати, що визначені *вартісні оцінки* є лише орієнтовними, що спричинено *невизначеністю* щодо своєчасного надходження у повному обсязі майбутнього потоку платежів.

Основними вартісними оцінками потоку платежів, визначеної тривалості, є дві його характеристики:

- початкова (теперішня) величина грошового потоку,
- кінцева (майбутня) величина грошового потоку.

Зазначимо, що початкову вартість потоку можна знайти для будь-якого потоку платежів, а кінцеву вартість лише у разі, якщо потік *скінчений* щодо кількості платежів у часі. Користуючись формулами нарощення та дисконтування складних процентів, можна визначити вартість грошового потоку на довільний момент часу.

Величиною потоку в момент називають суму платежів T потоку, дисконтованих до цього моменту часу:

$$R(T) = \sum_{k=1}^{T} R_k \cdot (1+r)^{T-t_k} .$$

Якщо відомо величину потоку в якийсь момент T, то завжди можна знайти величину потоку в будь-який інший момент часу T':

$$R(T') = R(T) \cdot (1+r)^{T'-T} .$$

Приклад 5.1.

Існує потік платежів $R = \{(-2000,1);(1000,2);(2000,3)\}$. Знайти основні вартісні характеристики цього потоку, якщо ставка $r = 10\%$. За умовами задачі тривалість потоку – три періоди. Маємо виплату коштів після першого періоду та надходження коштів після другого та третього періоду.

Теперішня величина потоку за формулою $R(T) = \sum_{k=1}^{T} R_k \cdot (1+r)^{T-t_k}$ дорівнює:

$$R(0) = -2000(1+0,1)^{-1} + 1000(1+0,1)^{-2} + 2000(1+0,1)^{-3} = 510,8$$

Тоді, кінцева величина потоку за формулою $R(T') = R(T) \cdot (1+r)^{T'-T}$:

$$R(3) = R(0) \cdot (1+r)^{3} = 679,8 .$$

Отже, для цього потоку платежів приведена вартість надходжень перевищує приведену вартість виплат коштів.

5.2. Основні поняття та класифікація фінансових рент

Кількісний фінансовий аналіз сукупності платежів у часі, передбачає визначення певних вартісних та часових параметрів грошового потоку. В загальному випадку члени потоку платежів можуть бути як *додатними,* так і *від'ємними,* здійснення платежів може бути як *регулярним* так і *нерегулярним* тощо.

Однак на практиці досить часто зустрічаються грошові потоки з певними стандартизованими параметрами – з однаковими проміжками часу між платежами, однаковими розмірами платежів, однаковим знаком (або лише виплати або лише надходження коштів) і т. ін.

Деякі регулярні, періодичні платежі, що мають однакову фінансову направленість (вилучення / приплив коштів) описують за допомогою поняття *фінансової ренти.*

Фінансова рента – потік послідовних *додатних* платежів, здійснюваних через *однакові проміжки часу.*

Поняття фінансової ренти є набагато вужчим за поняття грошового потоку. Для того, щоб деякий потік платежів можна було назвати рентою, він повинен відповідати наступним вимогам:

– члени грошового потоку – *додатні* величини незалежно від походження та цільового використання цих коштів;

– усі платежі є *періодичними* та *регулярними,* тобто часові інтервали між платежами однакові (фіксовані).

Річну ренту (ренту, за якою платежі здійснюють *щорічно*) ще називають *ануїтетом* .

Кожна рента описується такими основними параметрами:

– *член рентн* — величина кожного окремого платежу;

– *період ренти* — проміжок часу між двома послідовними платежами;

– *строк ренти* — час від початку першого періоду ренти до кінця останнього періоду.

Крім того, для оцінки вартісних характеристик ренти необхідно задати ставку дохідності r, яку використовують у разі нарощування або дисконтування платежів, з яких складається рента. Для окремих видів рент ще необхідно вказати додаткові умови та параметри, зокрема:

– кількість платежів у році;
– спосіб та частота нарахування процентів *тощо.*

У практичній діяльності застосовують різні за своїми умовами ренти. Класифікацію видів фінансових рент, що найбільш розповсюджені у реальних фінансових розрахунках наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Узагальнена класифікація фінансових рент

Ознака класифікації	Вид ренти
Періодичність платежів	*Річні (платіж один раз за рік);* $p-$*термінові* (p *платежів за рік)*
Частота платежів	*Дискретні;* *Неперервні*
Величина членів ренти	*Постійні (з однаковими членами);* *змінні (з різними членами)*
Кількість членів	*Обмежені (зі скінченою кількістю членів);* *необмежені (вічні)*
Обов'язковість платежу	*Умовні (кількість членів наперед невідоме, оплачуються згідно з умовою);* *безумовні, правильні (обов'язково оплачуються)*
Момент платежу	*Звичайні* – постнумерандо *(платіж в кінці періоду);* *авансові* – пренумерандо *(платіж на початку періоду)*

Використовуючи ці ознаки класифікації, можна виконати якісний аналіз та дати характеристику певним потокам платежів. Наприклад, виплата дивідендів за простими акціями – це *умовна, вічна рента постнумерандо.*

Основними вартісними оцінками будь-якої *скінченої* фінансової ренти є дві її характеристики:

– *нарощена (кінцева) величина ренти* S – це сума всіх членів ренти з нарахованими на них процентами на кінець її терміну існування (на дату останнього платежу).

– *теперішня (початкова) величина ренти* A – це сума всіх членів ренти, дисконтованих на початок її терміну існування. Іноді цю величину називають *капіталізованою ціною ренти*.

Для фінансової ренти, як і для будь-якого іншого потоку платежів, можна знайти її вартісну оцінку на довільний момент часу з інтервалу існування цієї ренти. Однак, розповсюдження отримали лише дві оцінки – на початковий та на кінцевий момент часу. Вартісні характеристики ренти залежать, зокрема, від моменту платежу (на початку, всередині, наприкінці періоду тощо). Найчастіше застосовують ренти *постнумерандо.*

5.3. Річна рента постнумерандо (звичайний ануїтет)

Річна рента постнумерандо (звичайний ануїтет) передбачає, що всі *додатні, періодичні* платежі цього грошового потоку здійснюють *наприкінці* року. Досить часто при цьому, ще й розміри періодичних платежів є *однаковими (рівними),* тобто рента є *постійною.*

Фінансові розрахунки за постійними платежами постнумерандо застосовують у більшості лізингових угод, схемах споживчого кредитування, купонних виплатах за облігаціями тощо. Саме такий вид фінансових рент є найрозповсюдженішим у практиці фінансово-кредитних операцій.

Постійну скінчену річну ренту постнумерандо з параметрами $\{R, n, r\}$ з погляду розташування платежів у часі графічно відображено на рис. 5.1.

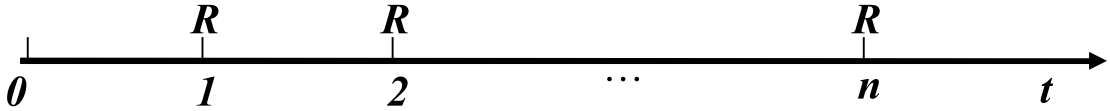


Рис. 5.1. Постійна скінчена річна рента постнумерандо

На рис. 5.1 показано, що розмір періодичних платежів $R = const$, платіж у початковий (нульовий) момент часу не здійснюють, платежі надходять наприкінці періодів з 1-го по останній ($n -$ний).

Для знаходження нарощеної величини ренти постнумерандо необхідно всі періодичні платежі привести (наростити) до останнього періоду часу з урахуванням ставки r (рис. 5.2).

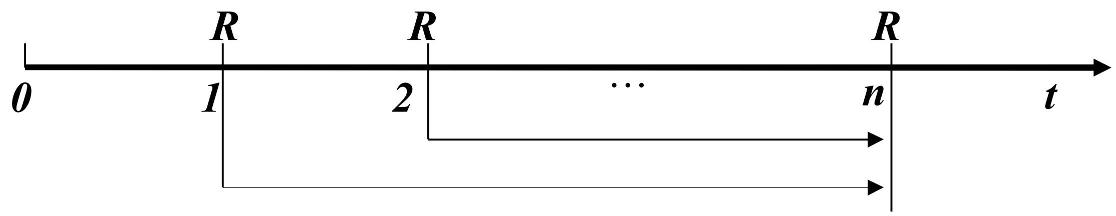


Рис. 5.2. Нарощування звичайного ануїтету у часі

Відповідно до схеми (рис. 5.2), нарощена сума n членів звичайного ануїтету становитиме:

$$S_{post} = R + R(1+r) + R(1+r)^2 + \ldots + R(1+r)^{n-1}.$$

Числова послідовність є геометричною прогресією з першим членом, що дорівнює R та темпом росту (знаменником прогресії) $(1+r)$.

Використовуючи формулу суми геометричної прогресії $S_n = b \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, маємо:

$$S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

де $\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ – множник нарощування звичайного ануїтету *(*Future Value Interest Factor Annuities, FVIFA, *дод. 5).*

Розглянемо оцінювання початкової (дисконтованої) вартості звичайного ануїтету (рис. 5.3).

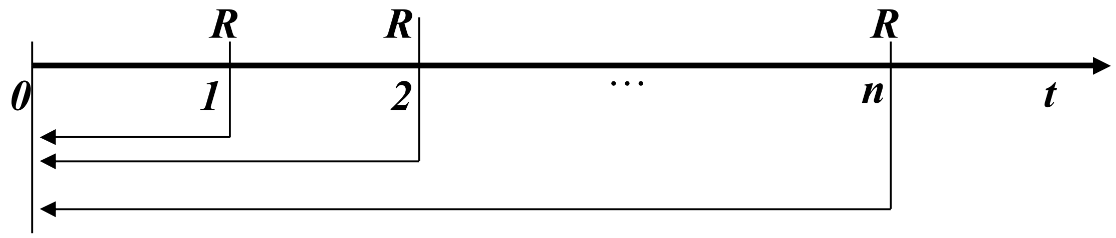


Рис. 5.3. Дисконтування звичайного ануїтету у часі

Відповідно схеми (рис. 5.3), приведена (дисконтована) сума n членів звичайного ануїтету становитиме:

$$A_{post} = \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^n} \Rightarrow A_{post} = \frac{S_{post}}{(1+r)^n}.$$

Отримане рівняння взаємозв'язку між теперішньою A_{post} та кінцевою S_{post} величинами звичайного ануїтету повністю відповідає загальній властивості грошових потоків $R(T') = R(T) \cdot (1+r)^{T'-T}$.

Підставивши вираз S_{post} у A_{post}, отримаємо:

$$A_{post} = \frac{S_{post}}{(1+r)^n} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot \frac{1}{(1+r)^n} \Rightarrow A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r},$$

де $\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ – множник дисконтування звичайного ануїтету *(*Present Value Interest Factor Annuities, PVIFA, *дод. 6).*

Таким чином, користуючись рівняннями $S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ і $A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, знаючи три параметри: розмір щорічного платежу R, кількість років n та ставку дохідності r, завжди можна знайти теперішню та майбутню величини звичайного ануїтету.

При плануванні схем погашення боргу, часто розв'язують обернену задачу – за відомої теперішньої або майбутньої величини боргу та необхідної ставки дохідності, оцінюють розмір щорічного платежу за кредитом, залежно від строку кредиту.

Розв'яжемо рівняння для S_{post} і A_{post} відносно величини щорічного платежу R.

За відомої кінцевої величини звичайного ануїтету маємо:

$$S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Rightarrow R = \frac{S_{post} \cdot r}{(1+r)^n - 1}.$$

За відомої початкової величини звичайного ануїтету маємо:

$$A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \Rightarrow R = \frac{A_{post} \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Отримані вирази дозволяють оцінити необхідну величину щорічного платежу за кредитною угодою та дозволяють її коригувати залежно від строку, суми боргу, ставки по кредиту тощо.

Приклад 5.2.

Маємо *звичайний ануїтет* з такими параметрами: строк ренти $n = 5$ років, річний платіж $R = 1000$ грн, ставка дисконтування $r = 10\%$.

Необхідно знайти нарощені суми наприкінці кожного року.

Розв'язання

Розглянемо механізм нараховування ренти по рокам. До суми, що була на рахунку на початок періоду, додаємо річний платіж і отримуємо суму на кінець періоду. Потім на останню нараховуємо складний процент і отримуємо суму на початок наступного періоду. Далі повторюємо цикл до закінчення терміну ренти. Розрахунки наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

Періоди (роки)	1	2	3	4	5

Сума на початок періоду, грн	0	1100	2310	3641	5105,1
Річні платежі, грн	1000	1000	1000	1000	1000
Сума на кінець періоду, грн	1000	2100	3310	4641	6105,1

Отже, з табл. 5.2 нарощена (кінцева) сума *ренти* становить 6105,1 грн, а теперішня величина ренти за формулою:

$$A_{post} = \frac{S_{post}}{(1+r)^n} = \frac{6105{,}1}{(1+0{,}1)^5} = 3791 \text{ грн.}$$

Використання формул $S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ та $A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ дає аналогічний результат.

Нескінчена рента постнумерандо (перпетуїтет)

Нескінчена рента (перпетуїтет) – це рента, послідовність платежів за якою нескінчена, тобто вважається що така рента буде виплачуватися необмежено довго.

З рівнянь $S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ та $A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ за умови, що $n \to \infty$, маємо:

$$S_{post} \to \infty,\ A_{post} = \frac{R}{r}.$$

Отже, нарощена величина S_{post} нескінченої ренти теж прямує до нескінченості, а *теперішня вартість* A_{post} нескінченої ренти залежить лише від розміру щорічного платежу та річної ставки дохідності. Причому припускається, що ринкова дохідність r з плином часу залишається незмінною.

Приклад 5.3

Компанія орендує приміщення за 60 тис. грн на рік. Чому дорівнює викупна ціна оренди, якщо річна ставка ринкової дохідності складає 15%?

Розв’язання

Викупна ціна – це теперішня величина всіх майбутніх орендних платежів.

За формулою: $A_{post} = \frac{R}{r} = \frac{60}{0{,}15} = 400$ тис. грн.

Неважко побачити, що при збільшенні річної ставки до 20 % викупна ціна становитиме лише 300 тис. грн, тобто номінальну (недисконтовану) суму п'ятирічних орендних платежів.

Зазначимо, що згідно виразу $A_{post} = \frac{R}{r}$, при збільшенні ринкової норми дохідності теперішня вартість нескінченої ренти буде зменшуватися, тобто строк окупності капіталовкладень буде коротший.

5.4. Річна рента пренумерандо (авансовий ануїтет)

Річна рента пренумерандо (авансовий ануїтет) передбачає, що всі *додатні, періодичні* платежі цього грошового потоку, на відміну від звичайних рент (постнумерандо), здійснюють не наприкінці, а *на початку* року (авансом).

Постійну скінчену річну ренту пренумерандо з параметрами $\{R, n, r\}$ з погляду розташування платежів у часі графічно відображено на рис. 5.4.

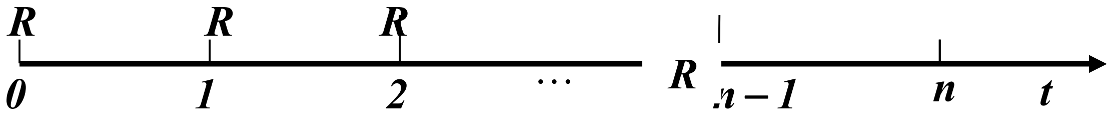


Рис. 5.4. Постійна скінчена річна рента пренумерандо

На рис. 5.4 показано, що розмір періодичних платежів $R = const$, перший платіж здійснюють в початковий (нульовий) момент часу, платежі надходять на початку періодів, тобто в останній ($n -$ний) момент часу платіж не здійснюють.

Порівнявши графіки виплат, наведені на рис. 5.1 та 5.4, можна зробити висновки, що фактично виплату для авансових рент здійснюють на один період раніше, ніж для звичайних рент.

Відповідно до введених раніше позначень, запишемо вираз для нарощеної суми n членів авансового ануїтету:

$$S_{pre} = R(1+r) + R(1+r)^2 + R(1+r)^3 + \ldots + R(1+r)^n$$

Порівнявши вирази нарощених сум для авансових та звичайних рент, отримаємо наступне співвідношення:

$$S_{pre} = S_{post} \cdot (1+r),$$

де $S_{pre} -$ нарощена сума ренти пренумерандо, $S_{post} -$ нарощена сума ренти постнумерандо.

З одержаного рівняння видно, що для авансового ануїтету, з погляду нарахування процентів, кожний член ренти «спрацьовує» на один раз більше, ніж для звичайного ануїтету.

З врахуванням формули $S_{post} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$, нарощена вартість авансового ануїтету дорівнює:

$$S_{pre} = S_{post} \cdot (1+r) \Rightarrow S_{pre} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1+r),$$

тобто для визначення нарощеної вартості авансового ануїтету значення з фінансової таблиці достатньо помножити на $(1+r)$.

Розглянемо питання оцінювання теперішньої вартості авансового ануїтету. Відповідно до наведеної схеми (рис. 5.4), приведена (дисконтована) сума n членів скінченої ренти пренумерандо становитиме:

$$A_{pre} = R + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^{n-1}}.$$

Для авансових рент, так само як і для інших видів рент, виходячи із загальної властивості грошових потоків $R(T') = R(T) \cdot (1+r)^{T'-T}$, можна записати формулу, що пов'язує між собою теперішню та кінцеву вартість авансового ануїтету:

$$A_{pre} = \frac{S_{pre}}{(1+r)^n}.$$

Для визначення теперішньої вартості авансового ануїтету за відомої теперішньої вартості звичайного ануїтету, за аналогією з $S_{pre} = S_{post} \cdot (1+r)$, можна записати співвідношення:

$$A_{pre} = A_{post} \cdot (1+r).$$

З врахуванням формули $A_{post} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, теперішня вартість авансового ануїтету:

$$A_{pre} = A_{post} \cdot (1+r) \Rightarrow A_{pre} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot (1+r),$$

тобто для визначення теперішньої вартості авансового ануїтету значення з фінансової таблиці достатньо помножити на $(1+r)$.

Приклад 5.4

Змінимо в умові прикладу 5.2 лише один параметр – тепер платежі здійснюють на початку періоду.

Маємо ***авансовий ануїтет*** з такими параметрами: строк ренти $n = 5$ років, річний платіж $R = 1000$ грн, ставка дисконтування $r = 10\%$.

Необхідно знайти нарощені суми наприкінці кожного року.

Розв'язання

Розрахунки наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Періоди (роки)	1	2	3	4	5
Річні платежі, грн	1000	1000	1000	1000	1000
Сума на початок періоду, грн	1000	2100	3310	4641	6105,1

Сума на кінець періоду, грн	1100	2310	3641	5109,1	6715,61

Порівнюючи значення в табл. 5.2 та табл. 5.3, бачимо, що основні відмінності є в тому, що за платіжною схемою звичайного ануїтету сума на початок першого року дорівнює нулю, а для авансового – 1000 грн.

Таким чином, з табл. 5.3 *нарощена (кінцева) сума* ренти дорівнює 6715,61 грн, а *теперішня величина* ренти за формулою

$$A_{pre} = \frac{S_{pre}}{(1+r)^n} = \frac{6715{,}61}{(1+0{,}1)^5} \approx 4170 \text{ грн.}$$

Використання формул $S_{pre} = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \cdot (1+r)$ та $A_{pre} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot (1+r)$ дає аналогічний результат.

Звертаємо увагу, що нарощена сума авансової ренти на початку 5-го року (6105,1 грн) одночасно є кінцевою сумою для звичайної ренти з ідентичними параметрами. Цей факт ще раз підтверджує справедливість формул $A_{pre} = \frac{S_{pre}}{(1+r)^n}$ та $A_{pre} = A_{post} \cdot (1+r)$ і свідчить, що вартісні характеристики ренти суттєво залежать від моменту платежу.

5.5. Річна рента з платежами в середині періодів

Аналіз фінансових потоків у різних сферах діяльності може сутгєво різнитися. Так, орендні, податкові та митні платежі часто здійснюють на початку відповідного періоду, тому вони являють собою авансову ренту. Відсотки за депозитами та кредитами, дивіденди за акціями зазвичай нараховують наприкінці періоду, тому вони є звичайною рентою. Однак, у цілому, рентні платежі можуть надходити в будь-які моменти часу, а не лише на початку чи в кінці періоду.

Наприклад, аналізуючи не фінансові, а виробничі інвестиції, можна побачити, що, за відсутності фактору сезонності, надходження і вилучення коштів на виробництві відбуваються майже рівномірно (а іноді – навіть постійно) протягом відповідного періоду (року, кварталу, місяця тощо). В такому разі доцільним є застосування рент з платежами, які здійснюють у середині періодів, оскільки обчислення саме за такою рентою дасть точніший результат.

Відомий російський економіст Є. М. Четиркін зазначає, що коли надходження від виробничих інвестицій розподіляються більш-менш рівномірно, застосування рент постнумерандо чи пренумерандо для опису таких потоків призводить до зміщення у значеннях отриманих показників. Для зменшення похибок він рекомендує відносити суми надходжень саме до середин періодів.

Розглянемо основні вартісні характеристики ренти з платежами, які здійснюють в середині періодів.

Постійну скінчену річну ренту з платежами в середині періодів з параметрами $\{R, n, r\}$ з погляду розташування платежів у часі графічно відображено на рис. 5.5.

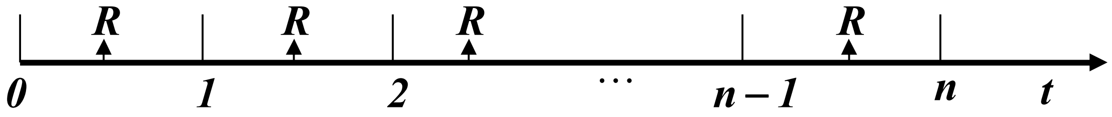


Рис. 5.5. Постійна скінчена річна рента з платежами в середині періодів

На рис. 5.5 показано, що розмір періодичних платежів $R = const$, платежі в початковий (нульовий) та в останній ($n -$ний) момент часу не здійснюють, платежі надходять в середині відповідних періодів.

Порівнявши графіки виплат, наведені на рис. 5.1, 5.4 та 5.5, можна зробити висновки, що фактично виплату для рент з платежами в середині періодів здійснюють на півперіоду раніше, ніж для *звичайних* рент та на півперіоду пізніше ніж для *авансових* рент.

За аналогією з рівнянням $S_{pre} = S_{post} \cdot (1 + r)$ для ренти з платежами в середині періодів можна записати рівняння, що визначає майбутню вартість ануїтету за відомої майбутньої вартості звичайного ануїтету:

$$S_{1/2} = S_{post} \cdot (1 + r)^{\frac{1}{2}},$$

де $S_{1/2}$ – нарощена сума ренти з платежами в середині періодів, S_{post} – нарощена сума ренти постнумерандо.

Для визначення теперішньої вартості ануїтету з платежами в середані періодів, за відомої теперішньої вартості звичайного ануїтету, за аналогією з $A_{pre} = A_{post} \cdot (1 + r)$, маємо:

$$A_{1/2} = A_{post} \cdot (1 + r)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, для обчислення початкової та кінцевої вартості скінченої ренти з платежами в середині періодів, спочатку зазвичай обчислюють вартісні характеристики для ідентичної ренти постнумерандо, а потім перемножують відповідні вартісні характеристики ренти постнумерандо на множник нарощування за половину періоду.

Запишемо формули для оцінювання вартісних характеристик одразу для ренти з платежами в середині періодів:

$$S_{1/2} = S_{post} \cdot (1 + r)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{1/2} = R \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \cdot (1 + r)^{\frac{1}{2}},$$

$$A_{\frac{1}{2}} = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \cdot (1+r)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно виводу двох останніх рівнянь, можна знайти відповідні вирази для ануїтетів з платежами в довільний момент часу.

5.6. Інші види фінансових рент

У загальному випадку будь-яка рента може передбачати p платежів за рік, при цьому проценти на них нараховують m разів на рік. Причому періодичність та кількість платежів p не обов'язково збігається з періодичністю та кількістю нарахувань процентів m. Тоді питання оцінювання теперішньої та майбутньої величин таких рент значно ускладнюється.

Розглянемо це питання на прикладі рент постнумерандо. Нехай скінчена рента постнумерандо передбачає p платежів за рік, при цьому проценти, нараховують m разів на рік.

1. Загальний випадок – $m \neq p$.

Нарощена сума ренти:

$$S = \frac{R}{p} \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}.$$

Знаючи нарощену величину такої ренти, можна знайти її теперішню вартість з рівняння:

$$A = \frac{S}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}}.$$

2. Річна рента $(p = 1)$ з нарахуванням процентів m разів за рік

Якщо проценти нараховують m разів на рік, а платежі річні, то нарощена сума дорівнює:

$$S = R \cdot \frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} - 1}.$$

Теперішню величину такої ренти обчислюють за формулою

$$A = \frac{S}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}} \, .$$

3. $p-$термінова рента з нарахуванням процентів один раз за рік $(m=1)$

Якщо платежі здійснюються декілька разів за рік, а проценти нараховують один раз за рік нарощена сума дорівнює:

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^{\frac{1}{p}} - 1} \, .$$

Теперішню величину такої ренти розраховують за формулою:

$$A = \frac{S}{(1+r)^n} \, .$$

4. $p-$- термінова рента з $m = p$

Досить часто у фінансових обчисленнях припускають, що кількість платежів за рік та кількість нарахувань процентів збігаються (тобто $m = p$).

Майбутня сума такої ренти дорівнює:

$$S = R\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n} - 1}{r} \, .$$

Даний вираз легко отримати з рівняння $S = R\cdot\frac{(1+r)^n - 1}{r}$, поклавши, що величина окремого платежу дорівнює $\frac{r}{m}$, а кількість платежів – $n\cdot m$.

Теперішню величину цієї ренти обчислюють за формулою

$$A = \frac{S}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}} \, .$$

Тоді,

$$A=\frac{S}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}}=R\cdot\frac{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}-1}{r}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot n}},$$

$$A==\frac{R}{r}\left(1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m\cdot n}\right).$$

Аналогічні рівняння можна вивести не лише для рент з платежами наприкінці періоду, а й для рент з платежами в довільний момент часу.

4. Окремі випадки фінансових рент

Якщо в класифікації (табл. 2.1) уточнити ще ряд параметрів, окрім періодичності платежів та нарахування процентів, то можна отримати зовсім інші типи рент.

Раніше було розглянуто лише ***постійні*** ренти, в яких величини всіх членів ренти однакові, але існують і **змінні** ренти з різними розмірами платежів. Причому в деяких випадках члени такої ренти змінюються за певними закономірностями. Наприклад, виокремлюють змінні ренти з ***постійним абсолютним приростом платежів*** (розміри членів ренти змінюються за арифметичною прогресією) та ***постійним відносним приростом платежів*** (за геометричною прогресією).

Крім того, було розглянуто лише ***дискретні*** ренти, за якими платежі надходять через фіксовані проміжки часу. Але інколи потік платежів розглядають як ***неперервний*** процес.

Найскладнішими в математичному плані є фінансові ренти, що описують *неперервним змінним потоком платежів*. На сьогодні, вони майже не застосовні на практиці, проте є окремим напрямом наукових досліджень. У фінансових обчисленнях, які стосуються таких потоків платежів, вважають, що коли потік неперервний, то розміри платежів у часі описуються функцією $R_t = f(t)$, а для нарахування процентів використовують процентну ставку у вигляді ***сили росту.***

Тоді нарощена сума неперервного змінного потоку платежів, відповідно до уведених раніше позначень дорівнює:

$$S=\int_0^n f(t)e^{r(n-t)}dt.$$

Відповідно, теперішня вартість такого потоку дорівнює:

$$A=\int_0^n f(t)e^{-rt}dt.$$

Зазначимо, що оскільки через потоки платежів описуються будь-які фінансові розрахунки в економіці, то розмаїття схем та механізмів фінансових операцій зумовлює появу безлічі різних видів фінансових рент.

5.7. Застосування довідкових фінансових таблиць та програмного забезпечення MS Excel *у фінансових обчисленнях для потоків платежів*

1. Застосування довідкових фінансових таблиць

Для полегшення обчислень вартісних характеристик фінансових рент за відсутності засобів комп'ютерної техніки використовують спеціальні **довідкові фінансові таблиці.**

Найчастіше зустрічаються довідкові таблиці складені для річних рент постнумерандо (звичайних ануїтетів). Вони полегшують розрахунки за спеціальними формулами. Для обчислення теперішньої та майбутньої вартості інших видів ануїтетів, отримані значення коригують з урахуванням відповідних властивостей.

У додатках наведені відповідно фінансові таблиці *множників нарощуван*ня (дод. 5) та *множників дисконтування* (дод. 6) звичайного ануїтету. Значення множників протабульовані за двома параметрами – величина ставки дохідності r та кількість періодів часу n.

Множник нарощування звичайного ануїтету, довідкові значення якого застосовують для полегшення процесу оцінювання майбутньої (кінцевої) вартості скінченої річної ренти постнумерандо, показує, у скільки разів збільшиться за n періодів зі ставкою відсотка r кінцева сума порівняно з величиною щорічного платежу:

$$S(n;r) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

Тоді, нарощена сума:

$$S = R \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} \Rightarrow S = R \cdot S(n;r)$$

Множник дисконтування звичайного ануїтету, довідкові значення якого застосовують для полегшення процесу оцінювання теперішньої (початкової) вартості скінченої річної ренти постнумерандо, показує частку, яку становитиме за n періодів зі ставкою відсотка r щорічний платіж порівняно з теперішньою величиною ануїтету:

$$A(n;r) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Відповідно, теперішня вартість:

$$A = R \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \Rightarrow A = R \cdot A(n;r).$$

Множники нарощування та дисконтування ануїтетів зв'язані рівнянням:

$$S(n;r) = A(n;r) \cdot (1+r)^n.$$

Отже, знаючи параметри ренги, можна швидко знайти її вартісні характеристики, користуючись довідковими таблицями множників ануїтетів.

2. Застосування MS Excel *у фінансових обчисленнях*

Описуючи основні функції MS Excel для обчислень за складними процентами, а саме функції $\boldsymbol{БС(\ ), ПС(\ ), СТАВКА(\ ), КПЕР(\ )}$, ми вказували, що аргумент $\boldsymbol{ПЛТ}$ (величина щорічного платежу у потоці платежів) для одноразового нарахування коштів не задають. Розрахунки щодо потоків платежів у середовищі MS Excel здійснюють за допомогою тих самих функцій, але з введенням параметру $\boldsymbol{ПЛТ}$.

Функції $\boldsymbol{БС(\ ), ПС(\ ), СТАВКА(\ ), КПЕР(\ )}$ дозволяють обчислити майбутню вартість, теперішню вартість ренти, ставку нарахування та кількість періодів нарахування. Крім того, для знаходження розміру щорічного платежу існує функція $\boldsymbol{ПЛТ(\ )}$.

Приклад 5.5

В нульовий момент часу сума коштів дорівнює 0, кінцева сума дорівнює 1610,51 грн, платежі здійснюють щорічно, наприкінці періодів, протягом п'яти років, ринкова ставка дохідності дорівнює 10 %.. Користуючись функцією $\boldsymbol{ПЛТ(\ )}$, знайти щорічний платіж фінансової ренти.

Розв’язання

Для проведення розрахунків розглянемо готовий шаблон з прикладу 3.9. Маємо: $\boldsymbol{S = 1610{,}51;\ n = 5;\ r = 10\%}$.. Застосуємо функцію $\boldsymbol{ПЛТ(\ )}$ та у вікні, що з'явилося, введемо відомі значення аргументів:

$$\boldsymbol{СТАВКА = 0{,}1;\ КПЕР = 5;\ ПС = 0;\ БС = -1610{,}51},$$

користуючись посиланнями на відповідні клітинки (рис. 5.6).

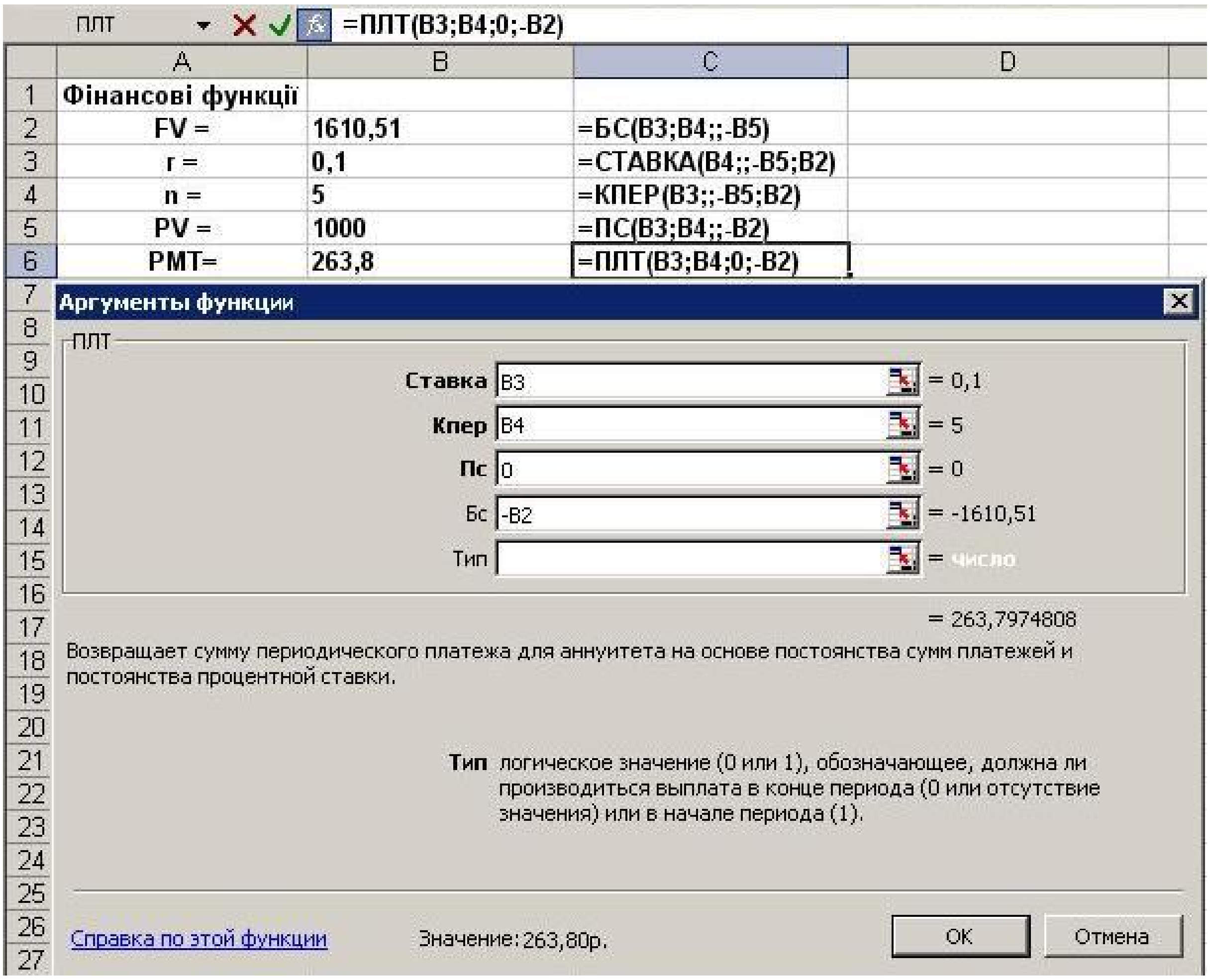


Рис. 5.6. Обчислення розміру щорічного платежу у MS Excel

Результат роботи функції $\boldsymbol{ПЛТ}(\ )$ відображено у клітинці $\boldsymbol{C6}$. Після натиснення клавіші **"OK"** у цій клітинці має з'явитися значення $\boldsymbol{PMT = 263{,}8}$.

Такий самий результат отримаємо за формулою

$$R = \frac{S \cdot r}{(1+r)^n - 1}.$$

Для обчислення рент пренумерандо використовують ті самі функції, лише додатково задають аргумент $\boldsymbol{ТИП = 1}$, який вказуватиме, що платежі здійснюють на початку періоду.

Тема 6. Оцінка та планування схем фінансово-кредитних розрахунків.

6.1. Застосування теорії рент у плануванні схем фінансово-кредитних розрахунків

Якщо фінансова операція передбачає не відокремлений (одноразовий) платіж, а певну послідовність платежів у часі, то для планування схеми таких розрахунків доцільно скористатися теорією фінансових рент.

Теорія фінансових рент – сучасна фінансова теорія, яка з'явилася порівняно недавно. Однак, можна стверджувати, що саме поява методології математичного дисконтування потоків платежів, значно розширило межі та можливості кількісного фінансового аналізу, зокрема дозволивши точніше враховувати вартість фінансових потоків у часі.

Фінансові обчислення щодо потоків платежів мають суто прикладний характер, визначаючи конкретні фінансові схеми розрахунків. Насамперед, у вигляді фінансових рент представляють різноманітні кредитні операції та відповідні схеми погашення заборгованостей.

Сучасні економічні відносини передбачають, що переважна більшість суб'єктів господарювання для свого розвитку застосовують ті чи інші варіанти кредитування. Оптимізацію кредитних розрахунків, що полягає у відшукуванні зручних схем кредитних виплат, провадять на основі аналізу відповідних потоків платежів.

Основні умови кредитування, які аналізують у теорії фінансових рент:

— термін кредиту (позики);
— метод (схема) погашення основної суми боргу та процентів;
— рівень процентів за кредитом та метод нарахування процентів;
— додаткові умови (пільговий період, можливості дострокового погашення, пролонгації, реструктуризації тощо).

Крім цього. фінансове навантаження щодо обслуговування боргу залежатиме від розміру та періодичності виплат, розміру першої виплати, принципів нарахування процентів на суму боргу і т.д.

Визначення оптимальних умов кредитних розрахунків передбачає опис кредитних виплат у вигляді певного потоку платежів з подальшою оцінкою його вартісних характеристик. Причому, залежно від розподілу платежів у часі, буде відкориговано й інші параметри кредитної угоди.

Таким чином, за допомогою операції математичного дисконтування можна знайти такий потік платежів, що забезпечуватиме оптимальне (прийнятне) фінансове навантаження для боржника відповідно до його виробничих циклів, оборотності коштів тощо.

Отже, кількісний аналіз фінансових потоків платежів – основа проведення більшості кредитно-фінансових операцій, зокрема:

(1.1) лізингових операцій;
(1.2) споживчих кредитів;
(1.3) іпотечних кредитів;

(1.4) орендних платежів з подальшим викупом майна;
(1.5) амортизаційних відрахувань;
(1.6) створення фондів нагромадження коштів;
(1.7) створення спеціальних фондів погашення боргу тощо.

Крім того, за допомогою теорії фінансових рент визначають вартісні характеристики різних видів цінних паперів. Наприклад, вартісна оцінка акцій ґрунтується на моделях дисконтування дивідендів, а оцінка процентних облігацій передбачає дисконтування процентних (купонних) виплат.

В цілому ж, сфера застосування теорії рент настільки широка й універсальна, що можна навіть стверджувати, що без її використання неможливо побудувати ефективну систему фінансового менеджменту будь-якого суб'єкта господарювання незалежно від його напряму діяльності.

6.2. Поняття лізингу та методи розрахунку лізингових платежів

До зручних фінансових механізмів залучення коштів можна віднести лізингові операції, які є розумною альтернативою борговим цінним паперам та банківському кредитуванню.

Лізингові схеми залучення капіталовкладень у виробництво є одним з потужних джерел матеріально-технічного переоснащення підприємств, оскільки дозволяють отримати в експлуатацію основні засоби виробництва на умовах поступової сплати коштів.

Лізинг – це угода, за якою лізингодавець на основі договору лізингу за встановлену плату (лізингові платежі) надає лізингоодержувачу право на використання визначеного майна, відповідно до встановлених специфікацій, на визначений строк та на певних умовах, з правом викупу майна лізингоодержувачем.

Лізинг має наступну принципову схему, що передбачає одночасне укладання, як мінімум двох контрактів – договору лізингу між лізингодавцем (тобто лізинговою компанією) і лізингоодержувачем і договору купівлі-продажу між лізингодавцем і продавцем (постачальником) майна (рис. 6.1).

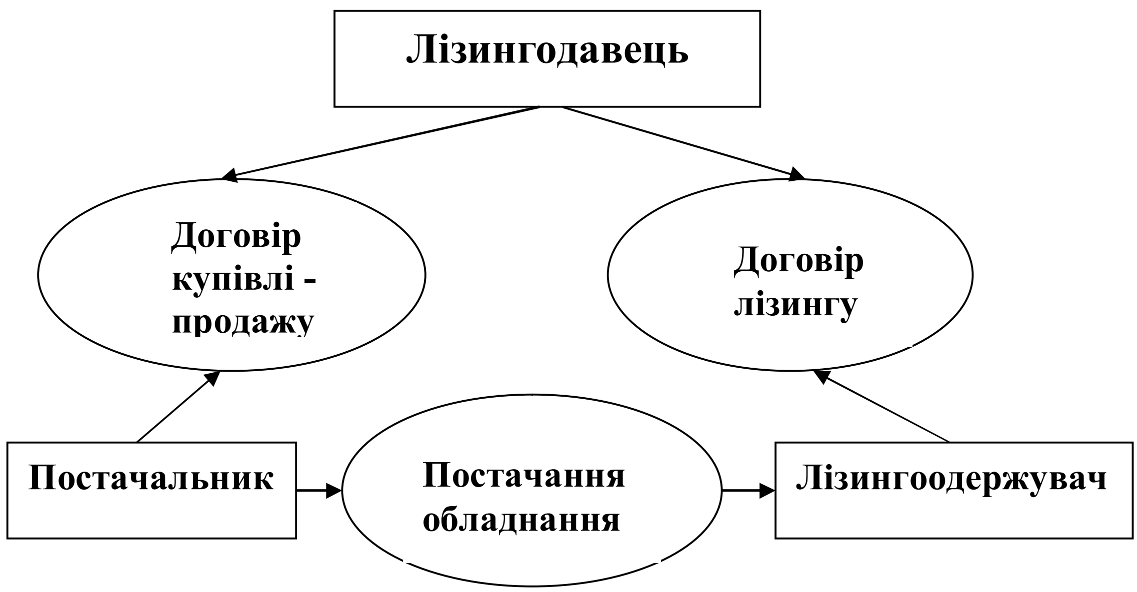


Рис. 6.1. Принципова схема лізингу

Лізинг є специфічною формою кредиту, що надається підприємству для придбання необхідного йому майна. Як і в будь-якій іншій фінансово-кредитній угоді, ключовим питанням лізингової угоди є визначення розміру заборгованості та схеми її погашення.

6.2.1. Механізм розрахунку лізингових платежів

Одним з основних етапів проектування лізингової угоди є визначення суми та графіку лізингових платежів. Ця задача є надзвичайно важливою як для лізингодавця, так і для лізингоодержувача, оскільки її результатом є оцінка кінцевої вартості лізингових послуг. Розмір лізингових платежів має бути економічно обґрунтованим, забезпечуючи лізингодавцю певний прийнятний рівень дохідності, а лізингоодержувачу – прийнятний рівень витрат. Для лізингодавця важливо врахувати та відобразити в лізингових платежах всі понесені ним витрати по лізинговій угоді, а також той прибуток, який він має отримати за надані лізингові послуги. З іншого боку, загальна сума лізингових платежів, по суті, являє собою вартість предмету лізингу для лізингоодержувача.

Фінансова схема лізингової угоди передбачає визначення дат та розмірів лізингових платежів, а також загального строку угоди. Причому строк лізингу будь-якого обладнання не може перевищувати терміну експлуатації цього майна.

Розрахунки розмірів лізингових платежів можуть проводитися різними методами в залежності від виду лізингу, форми і способу виплат, предмету лізингу та різних додаткових договірних умов.

В Україні найчастіше розрахунок лізингових платежів здійснюють за двома методиками:

– методика з амортизацією боргу рівними частинами (традиційний метод);
– методика фінансових рент (сучасний фінансовий метод).

6.2.2. Методика розрахунку лізингових платежів з амортизацією боргу рівними частинами

Методика розрахунку лізингових платежів з амортизацією боргу (відшкодуванням вартості предмета лізингу) рівними частинами є простішою в аспекті фінансових обчислень і тому історично з'явилася раніше. Цей традиційний метод розрахунків боргових виплат є простим та зрозумілим для боржника, проте має суттєвий недолік – він не враховує вартість грошей у часі та ефект дисконтування.

Сутність цього методичного підходу полягає в тому, що величина лізингового платежу в кожному періоді визначається як сума відрахувань частини вартості предмета лізингу (виплати по основній сумі боргу) та величини процентів (лізингової винагороди) на невідшкодовану (залишкову) вартість цього майна. Математично це можна записати так:

$$R_i = A_i + B_i,\ 1 = \overline{1,n},$$

де $R_i -$ розмір *лізингового п*латежу, $A_i -$ обсяг лізингової винагороди, $B_i -$ обсяг відшкодування вартості предмета лізингу в $i -$тому періоді.

При цьому, погашення вартості предмету лізингу відбувається рівними частинами, а величина процентів (лізингова винагорода) визначається послідовно в кожному періоді, виходячи із залишкової величини заборгованості за предмет лізингу на початок періоду.

Для зручності розглянемо широко розповсюджений випадок, коли відшкодування вартості предмету лізингу є періодичними і постійними та за строк дії угоди вартість майна повністю заміщується (залишкова вартість предмету лізингу по закінченню угоди дорівнює нулю). В такому разі величина періодичного відшкодування вартості предмета лізингу визначається діленням його повної вартості на кількість періодів:

$$B_i = \frac{C}{n} = B,$$

де $C -$ повна вартість предмета лізингу, $n -$ кількість періодів.

Залишкова вартість майна U_i на початку кожного наступного періоду залежить від попереднього:

$$U_i = U_{i-1} - B.$$

Зрозуміло, що залишкова вартість на початку першого періоду, до здійснення лізингових платежів, дорівнює повній вартості предмету лізингу: $U_1 = C$, а потім, з кожним наступним періодом, залишкова вартість зменшується.

Числова послідовність залишкової вартості майна по періодах по суті є спадаючою арифметичною прогресією, яка з кожним періодом зменшується на постійну величину B.

Отже, згідно введених раніше позначень, рівняння $U_i = U_{i-1} - B$ можна в наступному вигляді:

$$U_i = U_1 - B \cdot (i-1),$$

яке у свою чергу, врахувавши властивість $B_i = \dfrac{C}{n} = B$, можна перетворити так:

$$U_i = C - \frac{C}{n} \cdot (i-1) = C \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right).$$

Обсяг лізингової винагороди A_i, знаходять за формулою:

$$A_i = U_i \cdot r,$$

де r – ставка дохідності за лізинговою угодою (лізингова ставка).

Зрозуміло, що обсяг лізингової винагороди, а отже й загальна величина лізингового платежу, у кожному наступному періоді зменшується пропорційно до зменшення залишкової вартості майна.

З врахуванням одержаних виразів, рівняння $R_i = A_i + B_i, 1 = \overline{1,n}$ можна записати в наступному вигляді:

$$R_i = C \cdot r \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) + \frac{C}{n}.$$

З одержаного рівняння випливає, що за методикою розрахунку лізингових платежів з відшкодуванням вартості майна рівними частинами розмір лізингового платежу в кожному періоді є змінним та залежить лише від загальної вартості майна (основної суми боргу), лізингової ставки, кількості періодів та порядкового номеру періоду.

Приклад 6.1

Згідно договору фінансового лізингу вартість устаткування розміром 1200 тис. грн за термін дії договору повністю відшкодовується за рахунок рівних періодичних амортизаційних відрахувань. Строк дії договору дорівнює строку експлуатації устаткування і становить 5 років. Лізингові платежі здійснюють два рази на рік, а річна лізингова ставка дохідності $r = 2\%$.

Визначити розмір лізингових платежів у кожному періоді та загальну суму лізингових платежів.

Розв'язання

Розв'язання цієї задачі передбачає побудову графіка лізингових платежів. Спочатку визначимо загальну кількість лізингових платежів $n = 5 \cdot 2 = 10$ та лізингову ставку за період (півроку) $r = \frac{20}{2} = 10\%$. За умовами задачі відшкодування вартості майна здійснюють рівними частинами, отже за один період амортизаційні відрахування становлять: $\frac{1200}{10} = 120$ тис. грн.

Графік погашення заборгованості за даним договором фінансового лізингу наведений в табл. 6.1. Для побудови цієї таблиці спочатку заповнюють стовпчик $B_i = B = 120$. Потім, поступово в кожному періоді, користуючись формулою $A_i = U_i \cdot r$, визначають розмір лізингової винагороди. І вже після цього за формулою $R_i = A_i + B_i, 1 = \overline{1,n}$ розраховують розмір лізингового платежу в кожному періоді.

Таблиця 6.1

Номер платежу, i	Залишкова вартість майна, U_i	Відшкодування вартості майна, B_i	Лізингова винагорода, A_i	Лізингові платежі, R_i

1	1200	120	120	240
2	1080	120	108	228
3	960	120	96	216
4	840	120	84	204
5	720	120	72	192
6	600	120	60	180
7	480	120	48	168
8	360	120	36	156
9	240	120	24	144
10	120	120	12	132
Разом		1200	660	1860

З табл. 6.1 видно, що за 10 періодів відбувається повне відшкодування вартості майна, причому загальна сума лізингових платежів складає 1860 тис. грн.

Отже, порівняно з одноразовою повною виплатою взяте у лізинг устаткування подорожчало у $\frac{1800}{1200} = 1{,}55$ рази.

Стандартна схема погашення боргу, представлена у табл. 6.1 передбачає, що згідно формули $R_i = C \cdot r \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) + \frac{C}{n}$ лізингові платежі з кожним наступним періодом зменшуються. Проте, на практиці послідовність лізингових платежів може бути задана довільно. Зазвичай порядок платежів змінюють на вимогу лізингоодержувача, що дозволяє в багатьох випадках оптимізувати боргове навантаження, не змінюючи загальних строків та розмірів платежів. Наприклад, за чітко вираженого сезонного характеру виробництва, доцільно найбільші виплати відносити до періодів з максимальними обсягами реалізації продукції, а найменші – до періодів спаду виробництва та реалізації тощо.

Більш складні схеми оптимізації боргового навантаження за лізинговими угодами передбачають коригування строків угоди та періодичності платежів, що призводить до змін розмірів лізингових платежів. Зазначимо, що збільшення кількості платежів (збільшення строку угоди або частоти виплат) призводить до зменшення розміру кожного окремого лізингового платежу разом зі збільшенням сукупної лізингової винагороди, отже й із більшим подорожчанням вартості предмету лізингу.

Крім того, ще раз підкреслимо, що по закінченні договору лізингу відшкодування вартості майна далеко не завжди дорівнює його повній сумі амортизаційних відрахувань.

Отже, схеми погашення боргу також можуть передбачати неповне заміщення вартості майна, тобто наявність залишкової вартості майна у постпрогнозний період.

6.2.3. Методика розрахунку лізингових платежів, заснована на теорії фінансових рент

Однією з найбільш математично обґрунтованих і точних є методика визначення розміру лізингових платежів заснована на теорії фінансових рент. В її основі є рівність теперішньої (приведеної) вартості потоку лізингових платежів та вартості майна з усіма додатковими витратами по його придбанню. За цією методикою визначають єдину величину лізингового платежу по всіх періодах, яку надалі розподіляють на процентний платіж (лізингову винагороду) і величину відшкодування вартості майна.

Для розрахунків розміру лізингового платежу за цим методом виходять з наступних припущень:

- платежі однакові у всіх періодах;
- платежі здійснюють через рівні проміжки часу.

Крім того, розрахунок розміру лізингового платежу передбачає наявність заздалегідь визначеної лізингової ставки r.

Якщо обумовити, що платежі здійснюють наприкінці періоду (рента постнумерандо), і майно повністю амортизується за термін договору лізингу, то відповідно до введених раніше позначень величину лізингового платежу розраховують так:

$$R = \frac{C \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}}.$$

Зазначимо, що даний вираз є одним із варіантів запису виведеного раніше рівняння $R = \frac{A \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}}$, якщо в останньому покласти, що теперішня величина звичайного ануїтету дорівнює повній вартості переданого в лізинг майна, а величина щорічного платежу звичайного ануїтету дорівнює величині лізингового платежу.

Після того, як розмір лізингового платежу визначено, його розподіляють на лізингову винагороду та величину відшкодування вартості майна. Причому спочатку у кожному періоді, користуючись формулою $A_i = U_i \cdot r$, розраховують розмір лізингової винагороди, а вже потім з рівняння $R_i = A_i + B_i, 1 = \overline{1, n}$ визначають величину заміщення вартості майна.

Залишкову (незаміщену) вартість майна для кожного наступного періоду визначають як різницю між залишковою вартістю майна і величиною відшкодування вартості майна у поточному періоді.

Приклад 6.2

За даними прикладу 6.1 побудувати графік лізингових платежів на основі розрахунків за фінансовими рентами.

Отже, за умовами прикладу маємо: вартість устаткування $C = 1200$ тис. грн; строк дії договору $n = 5$ років; періодичність платежів $m = 2$ рази на рік; річна лізингова ставка дохідності $r = 20\%$.

Розв'язання

Спочатку обчислимо величину періодичного лізингового платежу:

$$R = \frac{C \cdot r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{1200 \cdot 0,1}{1-(1+0,1)^{-10}} = 195,2944739$$

Всі інші результати розрахунку наведено в таблиці 6.2. На відміну від традиційного методу розрахунку лізингових платежів, метод фінансових рент передбачає іншу послідовність заповнення таблиці-схеми погашення боргу. Для побудови цієї таблиці спочатку заповнюють стовпчик лізингових платежів R_i.

Потім, поступово в кожному періоді, користуючись формулою $A_i = U_i \cdot r$, визначають розмір лізингової винагороди. І вже після цього розраховують розмір відшкодування вартості майна та величину залишкової вартості майна, яка стане основою для розрахунку розміру лізингової винагороди у наступному періоді.

Таблиця 6.2

Номер платежу, i	Залишкова вартість майна, U_i	Відшкодування вартості майна, B_i	Лізингова винагорода, A_i	Лізингові платежі, R_i
1	1200	75,2944739	120	195,2944739
2	1124,70553	82,8239212	112,47055	195,2944739
3	1041,8816	91,1063134	104,18816	195,2944739
4	950,775292	100,216945	95,077529	195,2944739
5	850,558347	110,238639	85,055835	195,2944739
6	740,319708	121,262503	74,031971	195,2944739
7	619,057205	133,388753	61,90572	195,2944739
8	485,668451	146,727629	48,566845	195,2944739
9	338,940822	161,400392	33,894082	195,2944739
10	177,540431	177,540431	17,754043	195,2944739
Разом		1200	752,94474	1952,944739

З табл. 6.2 видно, що за 10 періодів відбувається повне заміщення вартості майна, причому загальна сума лізингових платежів складає приблизно 1953 тис. грн.

Отже, порівняно з одноразовою повною виплатою, взяте у лізинг устаткування подорожчало у $\frac{1953}{1200} = 1,6275$ 1 рази. Метод обчислень з використанням фінансових рент завдяки врахуванню ефекту дисконтування є більш реалістичним порівняно з традиційним методом. Розрахунки з використанням фінансових рент вигідні лізингодавцю та невигідні лізингоотримувачу, оскільки збільшують загальну суму лізингових платежів. Наприклад, порівнюючи дані табл. 6.1 та 6.2, бачимо, що за традиційним методом загальний обсяг лізингових платежів склав ***1860*** тис. грн, а за рентним методом – майже ***1953*** тис. грн.

На практиці методика розрахунків за фінансовими рентами нерідко ускладнюється коли, наприклад, платежі здійснюють не наприкінці, а на початку періоду, майно не повністю амортизується за термін договору лізингу тощо.

6.2.4. Коригування залишкової вартості майна на авансовий платіж

До тепер обчислення розміру періодичних лізингових платежів, здійснювались виходячи з повної вартості предмету лізингу, яка дорівнювала залишковій вартості майна у першому періоді, тобто згідно введених раніше позначень: $U_1 = C$.

Проте, не практиці часто лізингоотримувач спочатку виплачує певну частину вартості майна авансом, а вже після цього здійснює періодичні лізингові платежі.

У разі, коли за договором лізингу передбачений авансовий платіж у розмірі C_a, то залишкова вартість майна у першому періоді дорівнюватиме:

$$U_1 = C - C_a.$$

Оскільки саме величина U_1 є початковим розміром лізингової заборгованості, то з урахуванням властивості $U_1 = C - C_a$ рівняння $R = \frac{C \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$ у цьому випадку необхідно скорегувати так:

$$R = \frac{(C - C_a) \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Зазначимо, що обидва рівняння передбачають, що лізингові платежі здійснюють наприкінці періоду, починаючи з першого, та вартість майна повністю амортизується за термін дії лізингової угоди.

На практиці, величину авансової виплати часто прив'язують до розміру лізингових платежів. Тобто, спочатку за формулою $R = \frac{C \cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$ обчислюють розмір лізингового платежу, а потім обумовлюють необхідність внесення авансом величини, що є кратною до одиничного лізингового платежу.

Якщо лізингоодержувач у початковий період виплачує аванс, рівний x періодичним платежам R, а платежі, що залишилися, виплачує по стандартній схемі, то кількість періодів виплат зменшиться до величини $(n-x)$. Тоді вираз для R набуде наступного вигляду:

$$R=\frac{(C-R\cdot x)\cdot r}{1-(1+r)^{-(n-x)}}.$$

Розв'язавши одержане рівняння відносно R отримаємо:

$$R=\frac{C\cdot r}{1-(1+r)^{-(n-x)}+r\cdot x}.$$

Порівнюючи одержаний вираз з $R=\frac{C\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$, можна зробити висновки, що виплата авансу суттєво зменшує розмір періодичного лізингового платежу, отже зменшує й загальне подорожчання предмету лізингу.

6.2.5. Коригування вартості майна на величину залишкової вартості

Якщо вартість предмету лізингу неповністю амортизується за термін дії лізингової угоди, то після закінчення договору лізингу це майно має залишкову вартість C_o. Ця залишкова вартість є майбутньою величиною, що буде отримана через n періодів часу. В зв'язку з тим, що, обчислюючи розмір лізингових платежів, ми оперуємо з вартістю майна, приведеною до початкового моменту часу, то величину C_o необхідно спочатку привести (дисконтувати) до теперішнього часу за методикою складних процентів, користуючись формулою $PV=\frac{FV}{(1+r)^n}$.

Тоді формула розрахунку лізингових платежів набуде такого вигляду:

$$R=\frac{\left(C-C_0\cdot(1+r)^{-n}\right)\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Зрозуміло, що найпоширеніша формула $R=\frac{C\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$ фактично є частинним випадком попереднього рівняння, оскільки при $C_o=0$, ці вирази є тотожними.

6.2.6. Виплати лізингових платежів на початку періоду

Дотепер ми розглядали ситуацію, коли платежі здійснюють наприкінці періоду. Подивимось як зміниться схема погашення боргу у разі виплат на початку відповідних періодів.

За методом фінансових рент лізингові платежі на початку періодів описують за допомогою рент пренумерандо, а не рент постнумерандо (звичайних рент).

Нагадаємо, що рівняння $R=\dfrac{C\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$ для оцінки розміру лізингових платежів, що здійснюють наприкінці періодів, отримане на основі рівняння $R=\dfrac{A\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$ для рент постнумерандо. Якщо в останньому врахувати властивість $A_{pre}=A_{post}\cdot(1+r)$, то у разі виплат на початку періоду можна записати наступне рівняння:

$$R=\frac{C}{1+r}\cdot\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}.$$

З нього видно, що при сплаті лізингових платежів на початку періоду, їх розмір стає меншим у порівнянні з платежами наприкінці періоду в $(1+r)$ разів. Це є абсолютно логічним, адже з економічної точки зору лізингові платежі зменшуються, тому що борг повертається раніше.

Приклад 6.3

За даними прикладу 6.1 побудувати графік лізингових платежів на основі розрахунків за фінансовими рентами, при умові, що платежі здійснюють на початку періоду.

Розв'язання

Отже, маємо:

вартість устаткування $C=1200$ тис. грн;

строк дії договору $n=5$ років;

періодичність платежів $m=2$ рази на рік;

річна лізингова ставка дохідності $r=20\%$.

Спочатку розрахуємо величину періодичного лізингового платежу:

$$R=\frac{C}{1+r}\cdot\frac{r}{1-(1+r)^{-n}},$$

$$R=\frac{1200}{1+0,1}\cdot\frac{0,1}{1-(1+0,1)^{-10}}=177,5404308.$$

Всі інші результати розрахунку наведено в таблиці 6.3.

Таблиця 6.3

Номер	Залишкова	Відшкодування	Лзингова	Лізингові

платежу, i	вартість майна, U_i	вартості майна, B_i	винагорода, A_i	платежі, R_i
1	1200	177,540431	0	177,5404308
2	1022,45957	75,2944739	102,24596	177,5404308
3	947,165095	82,8239212	94,71651	177,5404308
4	864,341174	91,1063134	86,434117	177,5404308
5	773,234861	100,216945	77,323486	177,5404308
6	673,017916	110,238639	67,301792	177,5404308
7	562,779277	121,262503	56,277928	177,5404308
8	441,516774	133,388753	44,151677	177,5404308
9	308,12802	146,727629	30,812802	177,5404308
10	161,400392	161,400392	16,140039	177,5404308
Разом		1200	575,40431	1775,404308

Заповнення таблиці відбувається аналогічно з таблицею 6.2. Однак, на відміну від схеми погашення боргу з платежами наприкінці періоду, оскільки платежі здійснюють на початку періоду, то з першого лізингового платежу винагорода не утримується, а вся сума йде на відшкодування вартості майна.

Результати розрахунків, наведені в табл. 6.3 свідчать, що загальна сума лізингових платежів при виплатах на початку періоду є меншою, ніж у випадку з виплатами наприкінці періоду (***1775*** тис. грн у табл. 6.3 проти ***1953*** тис. грн у табл. 6.2).

В цілому ж, порівнюючи результати, наведені в табл. 6.2 та 6.3, можна зробити висновки, що коли лізингоотримувач намагається досягти як найменшого удорожчання вартості предмету лізингу, йому необхідно як найшвидше сплачувати борг або хоча б здійснювати платежі на початку періоду.

Розглянуті вище окремі випадки лізингових платежів за методикою фінансових рент, що описуються відповідними рівняннями – це далеко не повний перелік існуючих схем погашення боргу за договором лізингу. Реальний договір лізингу може передбачати набагато більше додаткових фінансових умов, що знайде своє відображення й у відповідних схемах погашення боргу. Не намагаючись описати всі можливі схеми, коротко зупинимось на їхніх загальних рисах. У більшості випадків, всі графіки розрахунку лізингових платежів, що отримані за методикою фінансових рент, об'єднує кілька властивостей, основні з яких – рівність розміру лізингових платежів по періодах, поступове зменшення від періоду до періоду розміру лізингової винагороди та збільшення обсягів відшкодування вартості майна.

Зазначимо, що окрім фінансових схем розрахунків за договорами лізингу, методику фінансових рент, що описується відповідними рівняннями (п. 6.2.4-6.2.6), застосовують при плануванні майже всіх видів фінансово-кредитних розрахунків, в яких умовами договору передбачено погашення боргу шляхом періодичних виплат, зокрема – схем споживчого та іпотечного кредитування.

6.3. Споживчі кредити та аналіз схем споживчого кредитування

Останні декілька років в Україні активно розвивається ринок споживчого кредитування. Цей вид кредитування призначений для фізичних осіб, які використовують позичені кошти на купівлю побутової техніки, інших електронних пристроїв, автомобілів тощо. Кредиторами виступають комерційні банки, що спеціалізуються на роздрібному бізнесі, кредитні спілки, союзи та інші фінансові організації.

Зазвичай такі кредити є досить короткостроковими, а виплати за ними є щомісячними. Типова схема розрахунків за цією кредитною угодою ґрунтується на методиці фінансових рент.

Отже, основною відмінністю схем споживчого кредитування від схем лізингових платежів є наявність кількох виплат протягом кожного періоду.

Якщо припустити, що за наявної річної кредитної ставки r виплати здійснюють m разів протягом одного року, то канонічна формула $R = \dfrac{C \cdot r}{1 - (1+r)^{-n}}$ для обчислення розміру періодичного платежу R набуде такого вигляду:

$$R = C \cdot \frac{\frac{r}{m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m}}.$$

Аналогічно можна перетворити й вищенаведені формули (п. 6.2.4-6.2.6) для випадку, коли $m > 1$.

Оскільки, у споживчому кредитуванні зазвичай $m = 12$, то за наявності місячної, а не річної ставки по кредиту, можна застосовувати й рівняння $R = \dfrac{C \cdot r}{1 - (1+r)^{-n}}$.

Зрозуміло, що при проведенні розрахунків за допомогою функції $ПЛТ(\,)$ у MS Excel, для визначення розміру щомісячного платежу, необхідно спочатку перевести кредитну ставку та строк кредитування до місячних значень.

Аналізуючи схеми споживчого кредитування, маємо зазначити, що кредитні установи, при видачі споживчого кредиту, окрім кредитної ставки, застосовують до позичальника різноманітні комісії та інші початкові платежі. Всі ці скриті виплати призводять до значного «удорожчення» кредиту для позичальника. Тому ключовим питанням стає визначення не задекларованої кредитною установою, а реальної ставки дохідності за кредитною операцією.

Зазвичай, обчислення розміру періодичного платежу R здійснюють за формулою

$$R = C \cdot \frac{\frac{r}{m}}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-n\cdot m}}$$

на основі загальної величини позики C. Однак, визначаючи реальну дохідність кредитора, необхідно враховувати, що за наявності додаткових комісій у розмірі **A,** позичальник насправді отримує суму у розмірі лише $(C - A)$.

Тоді, позначивши реальну ставку дохідності як y**,** запишемо таке рівняння фінансової еквівалентності:

$$C \cdot \frac{\frac{r}{m}}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-n\cdot m}} = (C - A)\cdot \frac{\frac{y}{m}}{1-\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-n\cdot m}}.$$

Розв'язок рівняння відносно y покаже реальну ставку дохідності кредитної операції.

Зрозуміло, що за великої кількості виплат одержане рівняння з невідомим y стає багаточленом високого ступеня, тому розв'язання такого рівняння передбачає використання спеціальних обчислювальних засобів.

Для оцінювання реальної норми дохідності у MS Excel можна застосувати вже відому нам функцію ***СТАВКА*( ).**

Приклад 6.4

Купуючи автомобіль вартістю 120 тис. грн, покупець половину коштів виплатив сам, а решту суми взяв у кредит у банку під 18% річних терміном на 2 роки. При видачі позики банк утримав комісію за оформлення договору. Обчислити реальну дохідність кредитної операції, за умови що позичальник погашатиме борг за методикою фінансових рент з щомісячними виплатами.

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємось можливостями MS Excel. За умовами прикладу основна сума боргу складає $C = 60000$ грн, а сума, яку фактично отримає боржник становить лише $C - A = 60000 - 60000 \cdot 0{,}05 = 57000$ грн.

Спочатку за допомогою функції ***ПЛТ*( )** знайдемо величину щомісячного платежу (рис. 6.2).

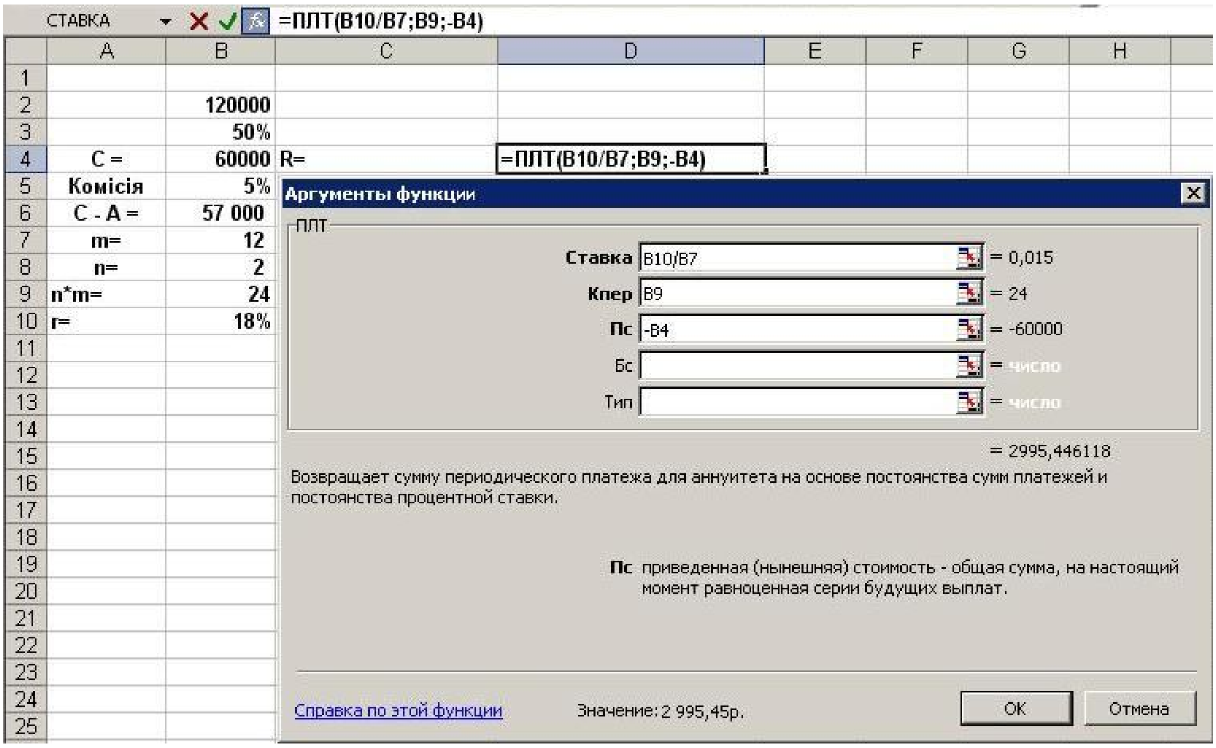


Рис. 6.2. Обчислення розміру щомісячного платежу у MS Excel

Аргументи функції $\boldsymbol{ПЛТ()}$ необхідно задавати як у формулі

$$\boldsymbol{R = C \cdot \frac{\frac{r}{m}}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-n\cdot m}}}$$

, тобто аргумент $\boldsymbol{СТАВКА = \frac{18\%}{12}}$; $\boldsymbol{КПЕР = 24}$, а основна сума боргу $\boldsymbol{ПС = 60000}$ (з від'ємним знаком, оскільки це величина заборгованості). Результат роботи функції $\boldsymbol{ПЛТ()}$ відображено на рис. 6.2 у комірці $\boldsymbol{D4}$. Отже, щомісячний платіж $\boldsymbol{R = 2995{,}45}$ грн.

Тепер за допомогою функції $\boldsymbol{СТАВКА()}$ розрахуємо реальну ставку дохідності цієї кредитної операції для банку (рис. 6.3).

На рис. 6.3 показано, як задаються аргументи функції $\boldsymbol{СТАВКА()}$. Необхідно ввести $\boldsymbol{КПЕР = 24}$; розраховану величину щомісячного платежу $\boldsymbol{ПЛТ = 2995{,}45}$; а також фактичну початкову суму кредиту $\boldsymbol{ПС = 57000}$ (з від'ємним знаком, оскільки це величина заборгованості). Результат роботи функції $\boldsymbol{СТАВКА()}$ відображений на рис. 6.3 у комірці $\boldsymbol{C6}$, отже реальна місячна ставка дохідності дорівнює $\boldsymbol{1{,}95\%}$.

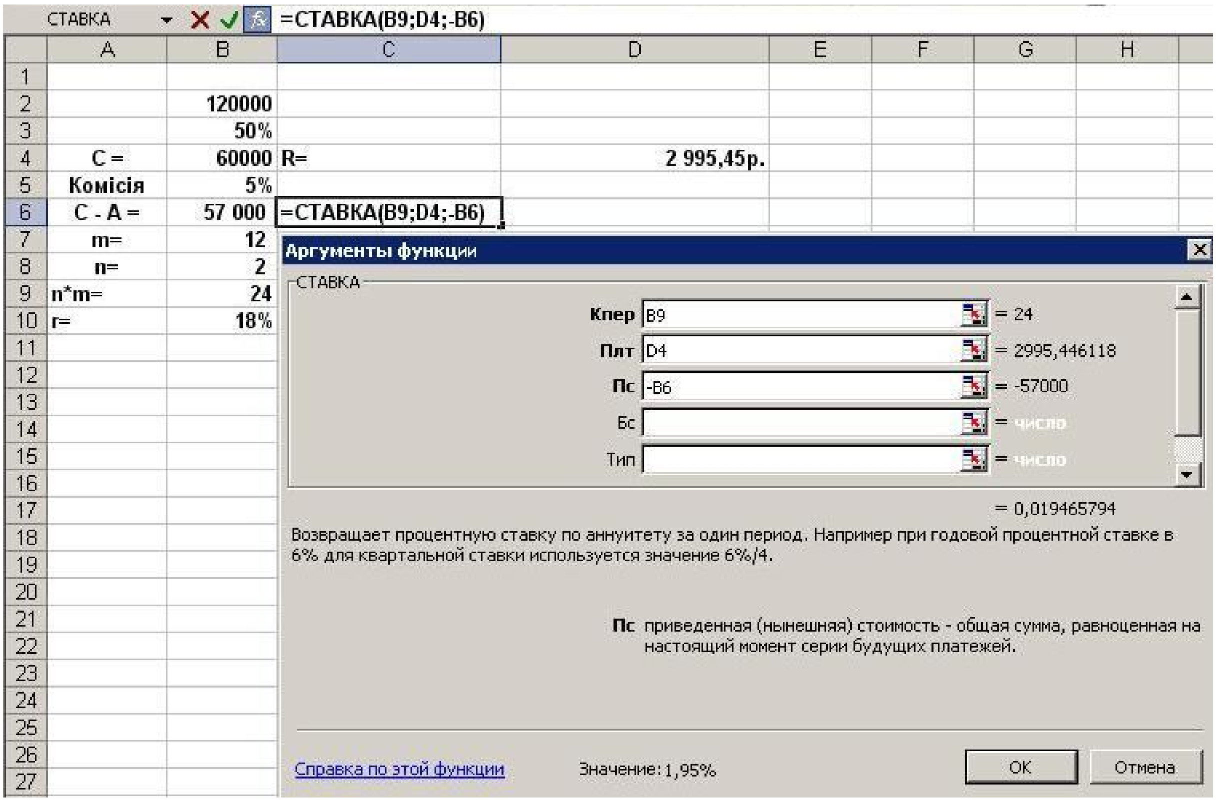


Рис. 6.3. Обчислення реальної норми дохідності у MS Excel

Останнім кроком є приведення цієї ставки до річного виразу за формулою ефективної ставки дохідності $r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m - 1$. Маємо:

$y = (1 + 0{,}0195)^{12} - 1 = 0{,}2603$, або $26{,}03\%$. Цей результат, отриманий у середовищі MS Excel, відображений на рис. 6.4 у комірці $D10$.

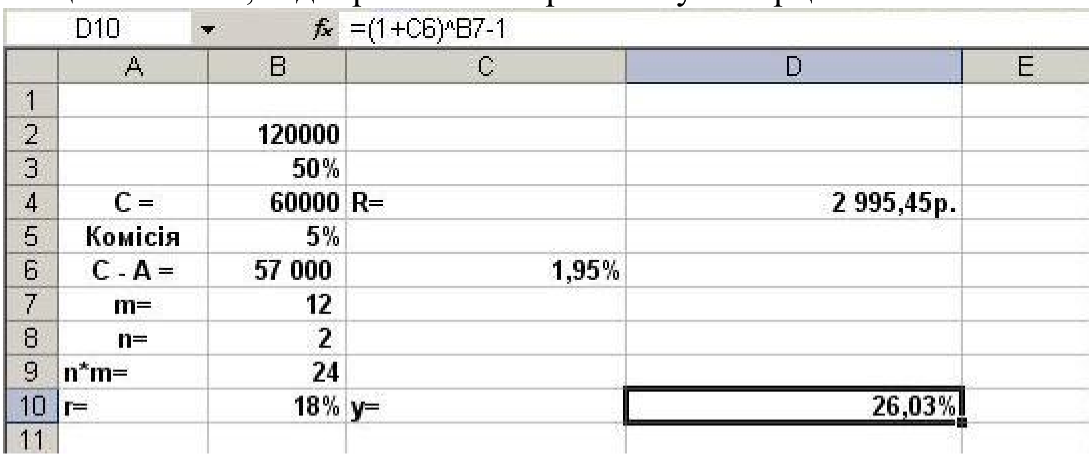


Рис. 6.4. Обчислення ефективної ставки дохідності у MS Excel

Таким чином, за річної кредитної ставки $r = 18\%$, з урахуванням комісійних, реальна (фактична) кредитна ставка $y = 26{,}03\%$. Зрозуміло, що збільшення кількості періодичних виплат, призвело б до ще більшого зростання реальної норми дохідності цієї кредитної операції.

6.4. Поняття іпотеки та розрахунки за іпотечними позиками

На сучасному етапі іпотечне кредитування в Україні набуває бурхливого розвитку. На разі вже існують спеціалізовані державні та комерційні іпотечні установи, які пропонують різноманітні іпотечні програми. Діяльність з іпотечного кредитування регулюється Законом України «Про іпотеку» та іншими законодавчими та нормативними актами.

Іпотека – вид забезпечення виконання зобов'язання нерухомим майном, що залишається у володінні і користуванні *іпотекодавця*, згідно з яким *іпотекодержатель* має право в разі невиконання боржником забезпеченого іпотекою зобов'язання одержати задоволення своїх вимог за рахунок предмета іпотеки переважно перед іншими кредиторами цього боржника.

Таким чином, ***іпотекодержатель*** є кредитором за борговим зобов'язанням, а ***іпотекодавець*** – боржником, який передає в іпотеку відповідне нерухоме майно для забезпечення виконання цього зобов'язання.

Головною перевагою іпотечного кредитування є те, що, починаючи з моменту державної реєстрації, позичальник стає власником нерухомості, а кредит за житло, яким він вже користується, можна погашати ще протягом багатьох років. Причому, за наявності стабільного доходу, іпотека на досить довгий строк з щомісячними виплатами є не дуже обтяжливою для іпотекодавця.

Приклад 6.5

Розрахувати розміри щомісячних платежів за іпотечним кредитом, виданим на строк ***10*** років під ***14%*** річних за п'яти різних сум кредитів.

Розв’язання

F2 | fx =D2/B2*1000

	A	B	C	D	E	F
1						
2	C =	8000	R=	=ПЛТ(B6/B3;B5;-B2)		=D2/B2*1000
3	m=	12				
4	n=	10				
5	n*m=	=B4*B3				
6	r=	0,14				

E11 | fx

	A	B	C	D	E	F
1						
2	C =	8000	R=	$ 124		$ 15,5
3	m=	12				
4	n=	10				
5	n*m=	120				
6	r=	14%				

Рис. 6.5. Обчислення щомісячних платежів за іпотечним кредитом у MS Excel

Скориставшись у середовищі MS Excel описаною раніше функцією ***ПЛТ*( )** (рис. 6.5), отримаємо таку таблицю:

Таблиця 6.4

Сума кредиту	Щомісячний платіж
$ 8 000	$ 124
$ 15 000	$ 233
$ 20 000	$ 311
$ 30 000	$ 466
$ 50 000	$ 776

Таким чином, згідно таблиці 6.4, кожна тисяча виданого кредиту коштує позичальнику приблизно ***$ 15,5*** на місяць.

У багатьох випадках, маючи справу з нерухомістю, за недостатності власних коштів, особа вибирає між орендою та купівлею в кредит (іпотекою).

Теорія фінансових рент дозволяє порівняти вартість потоку щомісячних орендних платежів з викупною ціною нерухомості та прийняти правильне рішення.

Приклад 6.6

У зв'язку з розширенням бізнесу компанія планує відкрити новий офіс. Є вибір з двох альтернатив: купівля офісу або довгострокова оренда. Щомісячні орендні платежі складатимуть ***25*** тис. грн, а викупна ціна цього приміщення — ***1*** млн грн. В випадку купівлі приміщення компанія може залучити кредит під заставу цієї нерухомості на всю суму під ***12%*** річних з щомісячними виплатами за методикою фінансових рент. Плановий строк оренди співпадає зі строком можливого кредиту і становить ***6*** років.

Яке рішення доцільно прийняти керівництву компанії?

Розв'язання

Для розв'язку цієї задачі скористаємось можливостями MS Excel. Введемо умови прикладу в електронну таблицю (рис. 6.6)

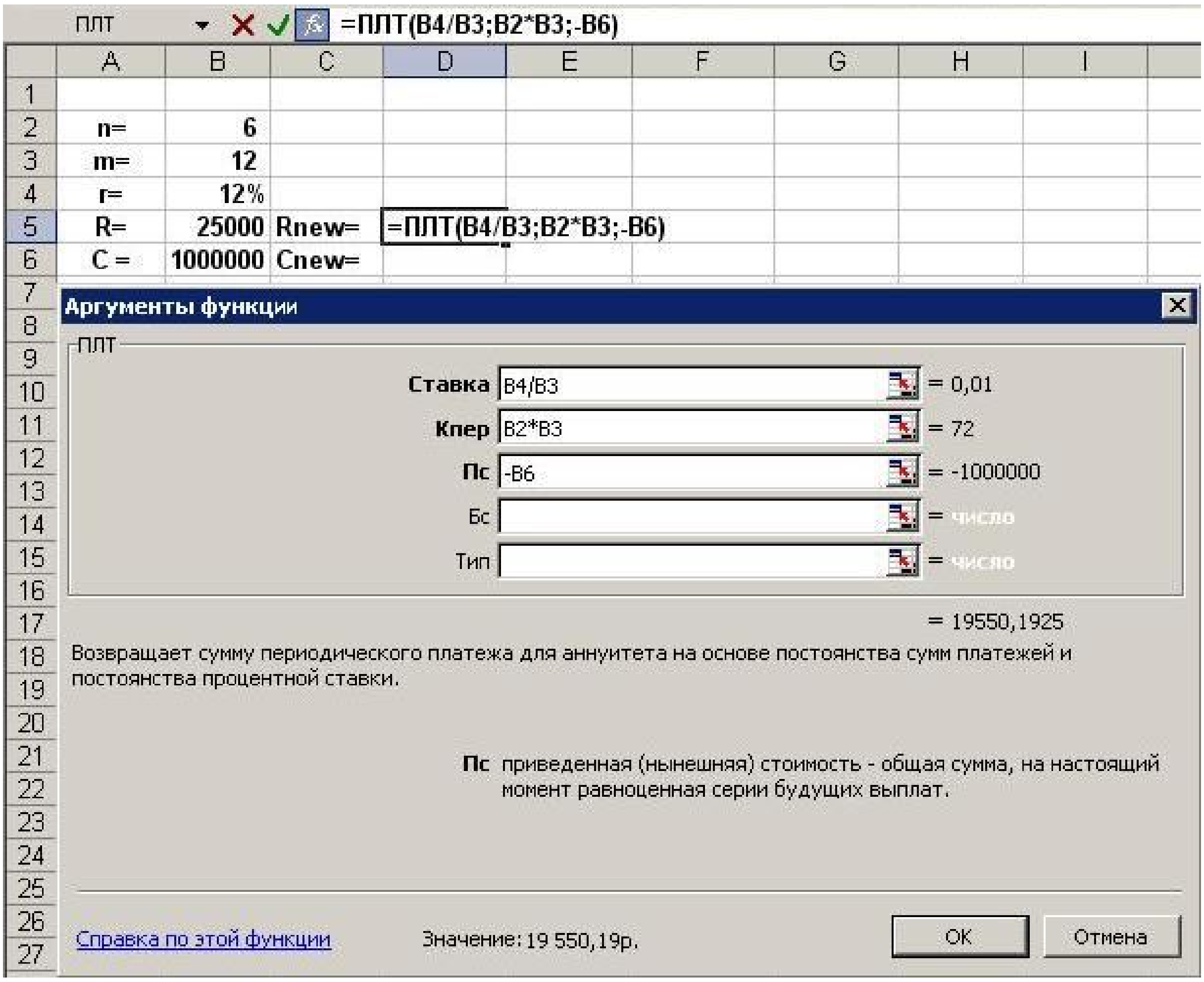


Рис. 6.6. Обчислення щомісячних платежів за іпотечним кредитом у MS Excel

Подивимось які щомісячні платежі необхідно платити за іпотекою на протязі 6 років. Іпотечні платежі можна знайти за формулою

$$\boldsymbol{R = C \cdot \frac{\frac{r}{m}}{1-\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m}}}$$

або за допомогою функції $\boldsymbol{ПЛТ()}$, як показано на рис. 6.6. Результат роботи цієї функції наведений у комірці $\boldsymbol{D5}$.

Таким чином, ми бачимо, що для іпотеки розміром $\boldsymbol{1}$ млн грн величина щомісячного платежу $\boldsymbol{R = 19550{,}19}$ грн. Зрозуміло, що до цієї величини ще необхідно додати певні операційні витрати, пов'язані з купівлею нерухомості (юридичне оформлення договору, страхування тощо). Проте, враховуючи, що щомісячні орендні платежі складають $\boldsymbol{25}$ тис. грн, доцільнішим все ж таки буде купівля нерухомості за допомогою іпотечного кредитування.

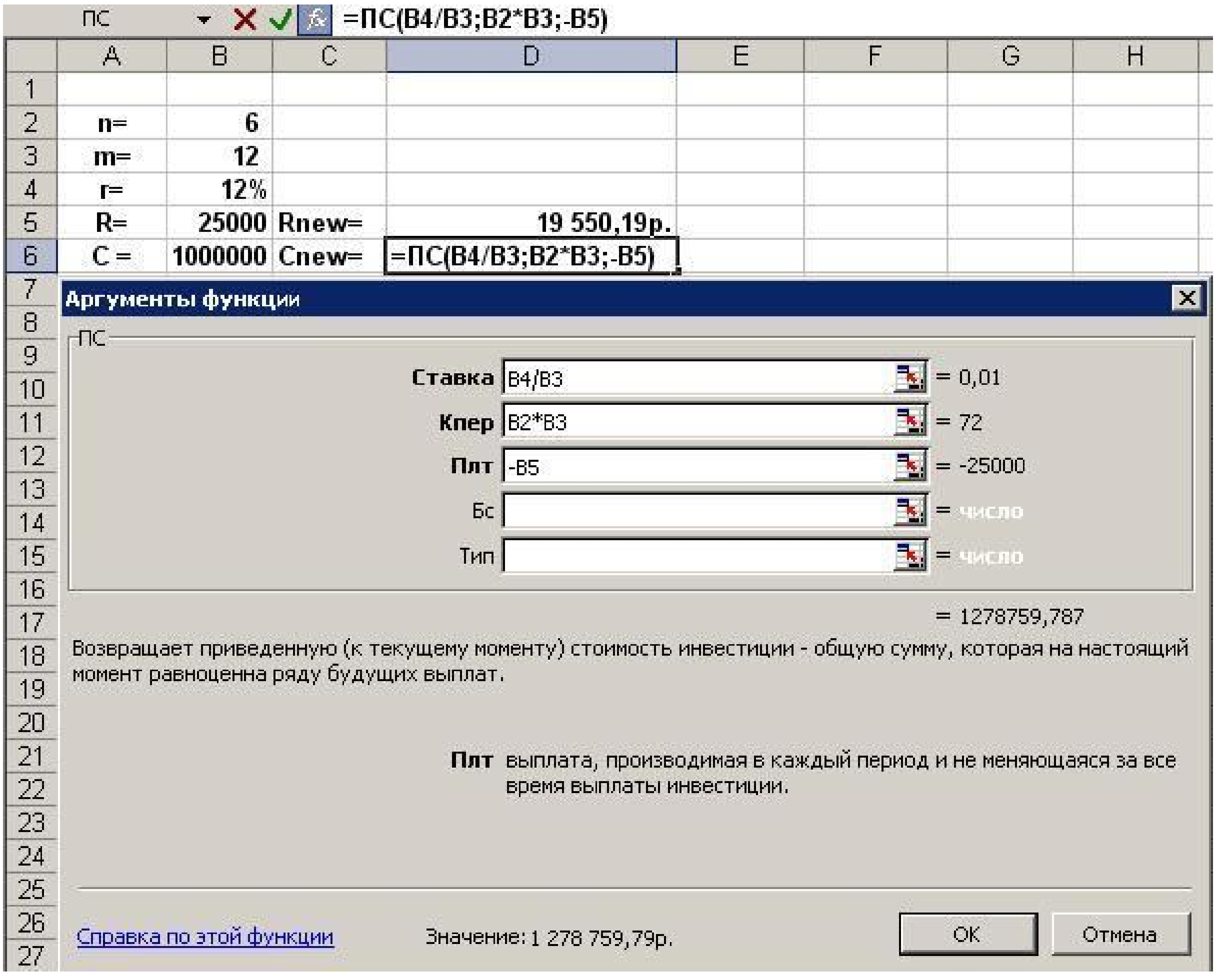


Рис. 6.7. Обчислення теперішньої вартості фінансової ренти щомісячних платежів у MS Excel

До аналогічних висновків можна було прийти й іншим способом. Можна розрахувати теперішню вартість фінансової ренти щомісячних орендних платежів за допомогою функції $\boldsymbol{ПС(\ )}$. Результат роботи цієї функції на рис. 6.7 наведений в комірці $\boldsymbol{D6}$. Отже ми бачимо, що приведена вартість потоку платежів за 6 років оренди складає $\boldsymbol{1278759{,}79}$ грн, що набагато більше за викупну ціну у $\boldsymbol{1}$ млн. грн. Крім того, викуповуючи об'єкт нерухомості, необхідно враховувати, що й після 6 років експлуатації він буде мати значну залишкову вартість.

В цілому, порівнюючи схеми погашення заборгованостей за іпотекою зі схемами споживчих та лізингових кредитів, можна стверджувати, що з погляду фінансових обчислень методики розрахунку графіку та розміру виплат є майже ідентичними, а наведене вище рівняння

$$\boldsymbol{R = C \cdot \frac{\frac{r}{m}}{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m}}}$$

однаково правомірне для всіх цих фінансово-кредитних операцій.

Основною відмінністю іпотеки, наприклад, від споживчих кредитів є довгостроковість іпотечного кредитування та набагато нижчі ставки за кредитом. Нижча дохідність іпотечного кредитування для кредитора компенсується високою надійністю повернення коштів за рахунок наявності в цій кредитній угоді якісної застави — нерухомого майна, яке з плином часу майже не втрачає, а іноді — й зростає в ціні.

6.5. Фонди нагромадження та погашення боргу

Обчислення за фінансовими рентами мають дуже широке поле застосування. У фінансовій сфері постійно з'являються нові фінансово-кредитні операції, отже й нові схеми фінансових обчислень. Розглянемо питання, яке стосується створення спеціальних грошових фондів.

До фондів спеціального призначення фінансисти відносять так звані фонди нагромадження капіталу. Це цільові фонди, які створюють на визначений термін з метою накопичення визначеної суми коштів. Отже, їхньою специфічною ознакою є те, що в момент створення такого фонду відразу фіксується строк його існування і сума, яка повинна бути накопичена за цей термін. Формують фонд нагромадження зазвичай за рахунок рівних періодичних внесків. Такі фонди використовують як юридичні, так і фізичні особи. В принципі, будь-яке довготермінове відкладання коштів — на купівлю квартири, автомобіль, ремонт, на платну освіту тощо, можна вважати створенням фонду нагромадження коштів.

В аспекті фінансових рент, основною відмінністю обчислення розміру періодичних платежів для фонду нагромадження коштів полягає в тому, що на відміну від лізингових, споживчих, іпотечних кредитів розрахунки ґрунтуються не на початковій величині (сумі кредиту), а на кінцевій величині коштів (майбутній накопиченій сумі).

Нагадаємо, що канонічна формула $R=\dfrac{C\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$ виводилася з рівняння $R=\dfrac{A\cdot r}{1-(1+r)^{-n}}$, а модель оцінки періодичного платежу для фонду нагромадження основана на рівнянні $R=\dfrac{S\cdot r}{(1+r)^{n}-1}$. Позначивши величину фонду нагромадження як C_k, для обчислення розміру періодичного платежу запишемо: $R=\dfrac{C_k\cdot r}{(1+r)^{n}-1}$

Дана формула справедлива для щорічних платежів та річної ставки дисконтування. За наявності m періодичних платежів протягом року, даний вираз необхідно перетворити так:

$$R = C_k \cdot \frac{\frac{r}{m}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n \cdot m} - 1}.$$

Розрахунки за останніми двома формулами можна виконати у MS Excel, застосувавши функцію $\textbf{\textit{ПЛТ}}(\ )$.

Ми неодноразово використовували цю функцію, обчислюючи розміри лізингових, іпотечних та інших кредитних платежів. При цьому серед аргументів функції вказували початкову величину боргу $\textbf{\textit{ПС}}$. Застосовуючи функцію $\textbf{\textit{ПЛТ}}(\ )$ для фондів нагромадження, необхідно замість аргументу $\textbf{\textit{ПС}}$ вказувати кінцеву величину $\textbf{\textit{БС}}$.

Приклад 6.7

Відразу після народження дитини батьки вирішили відкладати кошти на здобуття нею вищої освіти. Для цього вони відкрили в надійному банку довгостроковий депозит з можливістю поповнення з фіксованою ставкою складних процентів ***10%*** річних.

Яку суму мають перераховувати батьки наприкінці кожного року, щоб до 18-річчя дитини накопичити суму величиною ***$ 1000000?***

Розв'язання

Для розв'язання цієї задачі скористаємося можливостями MS Excel. Введемо умови прикладу в електронну таблицю.

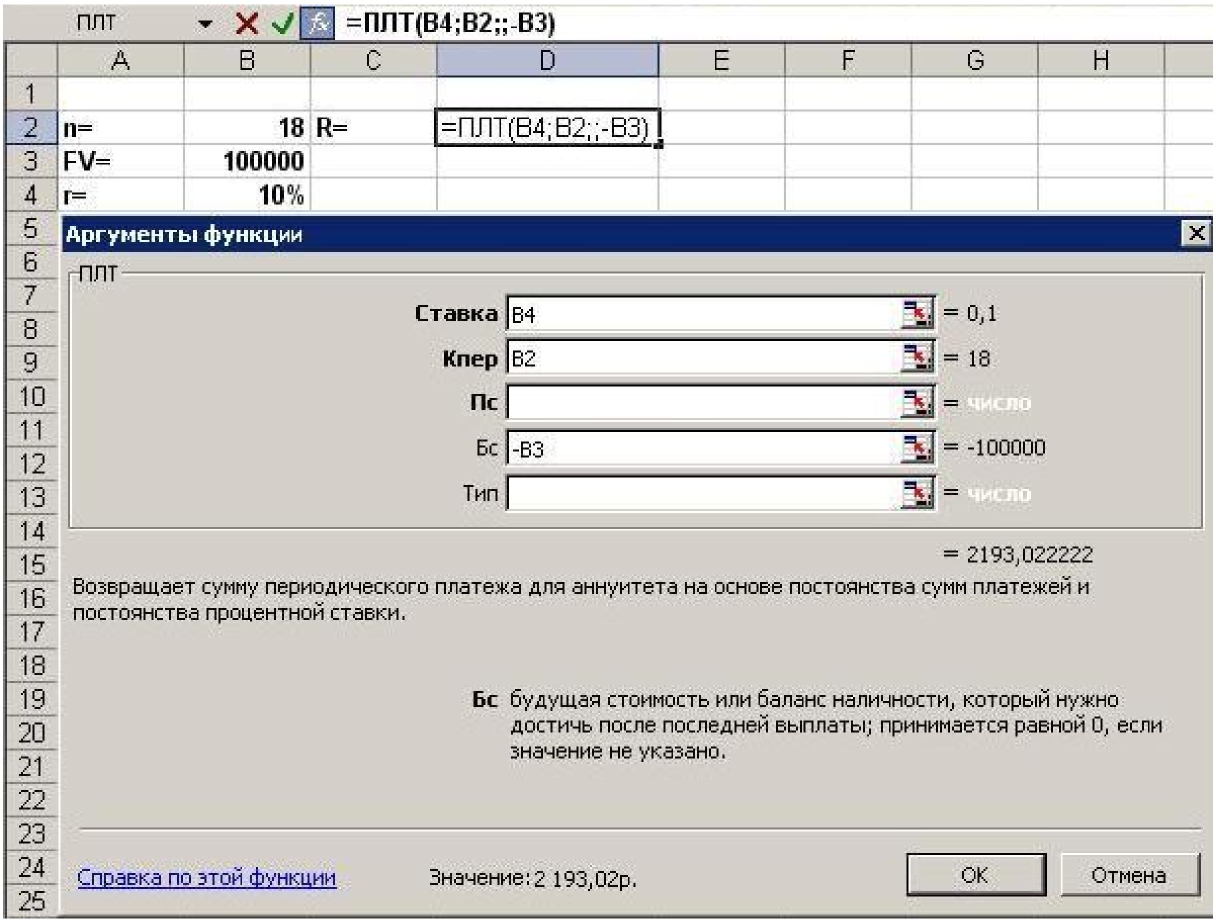


Рис. 6.8. Обчислення щорічного платежу у MS Excel

Розмір щорічного платежу є результатом роботи функції ***ПЛТ***( ), який відображений на рис. 6.8 у комірці ***D2***.

Таким чином, щоб отримати на банківському депозиті суму ***$ 1000000*** через 18 років, необхідно відкладати ***$ 2193,02*** наприкінці кожного року.

Більш складною формою фонду нагромадження є **фонд погашення боргу.** Цей вид фонду створює боржник за кредитною угодою, коли умовами цієї угоди передбачено періодичні виплати процентів за кредитом та ще й погашення основної суми боргу наприкінці терміну кредитування.

Для виплати основної суми боргу необхідно накопичити до встановленої даті фіксовану суму грошей, тобто фактично створити фонд нагромадження, але крім цього ще й необхідно сплачувати проценти по кредиту. В таких випадках виплати процентів та відрахування в фонд нагромадження здійснюють одночасно. Сума цих двох видів періодичних виплат за рік складає величину *річного видатку за боргом.*

Приклад 6.8

Кредит в розмірі ***89*** тис. грн під ***20%*** річних надано строком на ***5*** років. Проценти погашають щорічно, а «тіло» кредиту повертають в кінці строку. З метою повернення кредиту боржник створив фонд погашення боргу, на залишок якого наприкінці кожного року йому нараховують проценти по ставці $\boldsymbol{15\%}$ річних.

Необхідно визначити розмір річних видатків за боргом.

Розв'язання

Для розв'язку цієї задачі скористаємось можливостями MS Excel. Введемо умови прикладу в електронну таблицю (рис. 6.9).

На рис. 6.9 у комірці $\boldsymbol{D2}$ показано розмір щорічного платежу, необхідного щоб за 5 років при ставці 15% накопити 80 тис. грн. Отже, $\boldsymbol{R = 11864{,}24}$ грн.

Щорічні проценти за кредитом становлять: $\boldsymbol{80000 * 20\% = 16000}$ грн.

Тоді, річний видаток за боргом складає:

$$\boldsymbol{11865{,}24 + 16000 = 27865{,}24} \text{ грн.}$$

Таким чином, за умовами кредитування боржник має щороку виплачувати майже $\boldsymbol{28000}$грн. Розмір всіх боргових виплат за п'ять років дорівнюватиме:

$$\boldsymbol{11865{,}24 \cdot 5 + 80000 = 139326{,}2} \text{ грн.}$$

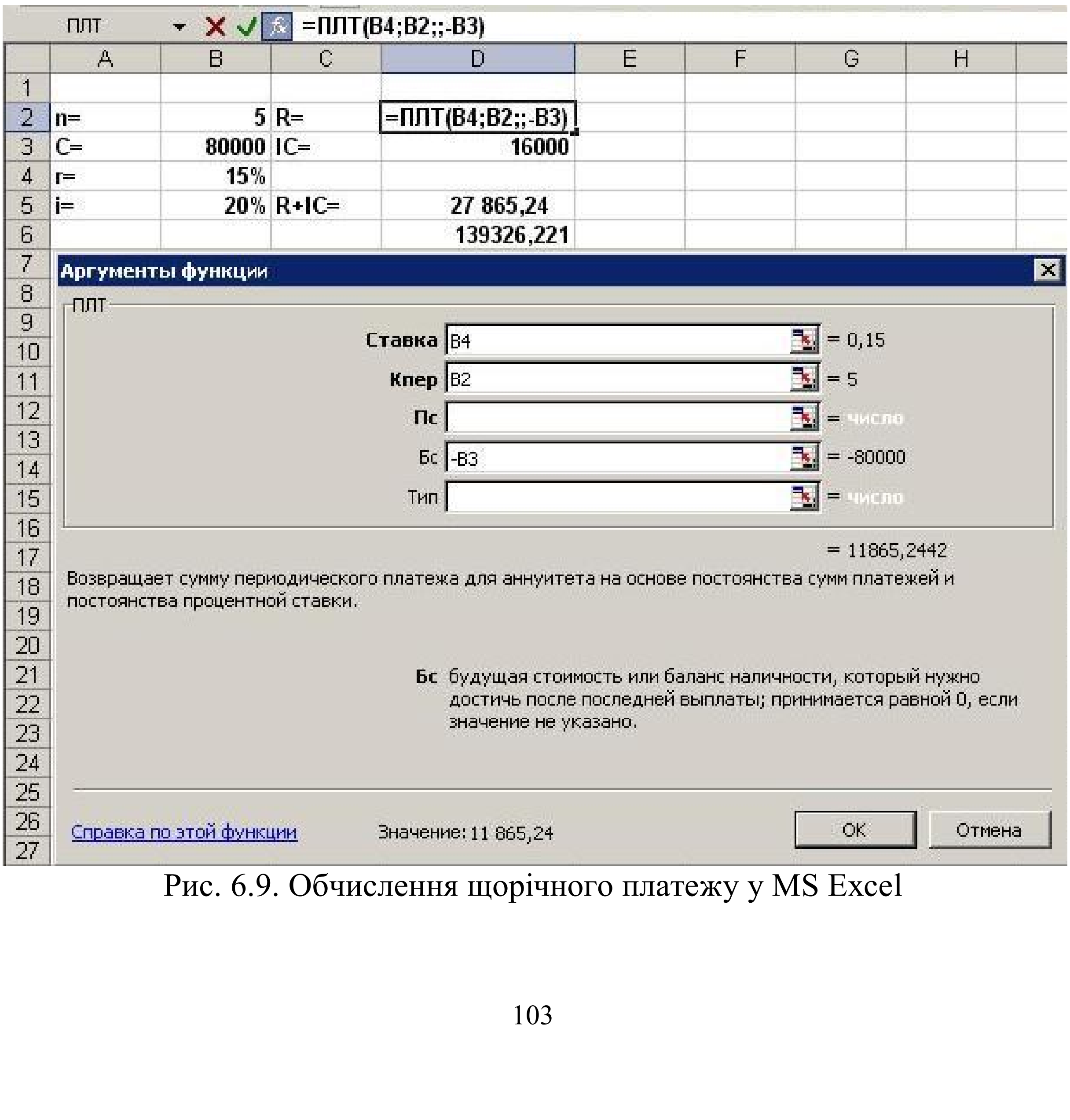


Рис. 6.9. Обчислення щорічного платежу у MS Excel

Зазначимо, що за відсутності фонду погашення боргу розмір видатків боржники становив би ***160000*** грн, тобто ***32000*** грн на рік.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Васильченко І.П., Васильченко З.М. Фінансова математика: навч. посібник. К.: Кондор, 2007. 184 с.

2. Григорків В.С. Фінансова математика : підручник. Чернівці: Чернівецький нац.. ун-т, 2011. 488 с.

3. Долінський Л.Б. Фінансова математика : навч. посібник К. : КНЕУ, 2009. –265 с.

4. Круш П.В., Клименко О.В. Економіка (розрахунки фінансово-інвестиційних операцій в Excel): навч. посібник. К.: Центр навчальної літератури, 2006. 264 с.

5. Четыркин Е.М. Финансовая математика: учебник 9-е изд. М.: Издательство «Дело» АНХ, 2010. 400 с.

6. Бочаров П.П., Касимов Ю.Ф. Финансова математика: учебник. М.: Гардарики, 2002. 400 с

7. Збірник задач з фінансової математики. О.Д. Борисенко, Ю.С. Мішура, В.М. Радченко, Г.М. Шевченко. К. : Техніка, 2007. 256 с.

Додаток 1

ДОВІДКОВІ ФІНАНСОВІ ТАБЛИЦІ

Порядкові номери днів у невисокосному році

Число	Місяць											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Додаток 2

Множники нарощування складних процентів: $M(n;r)=(1+r)^n$

r / t	1 %	2%	3%	4%	5%
1	1,0100000	1,0200000	1,0300000	1,0400000	1,0500000
2	1,0201000	1,0404000	1,0609000	1,0816000	1,1025000
3	1,0303010	1,0612080	1,0927270	1,1248640	1,1576250
4	1,0406040	1,0824322	1,1255088	1,1698586	1,2155063
5	1,0510101	1,1040808	1,1592741	1,2166529	1,2762816
6	1,0615202	1,1261624	1,1940523	1,2653190	1,3400956
7	1,0721354	1,1486857	1,2298739	1,3159318	1,4071004
8	1,0828567	1,1716594	1,2667701	1,3685691	1,4774554
9	1,0936853	1,1950926	1,3047732	1,4233118	1,5513282
10	1,1046221	1,2189944	1,3439164	1,4802443	1,6288946
11	1,1156683	1,2433743	1,3842339	1,5394541	1,7103394
12	1,1268250	1,2682418	1,4257609	1,6010322	1,7958563
13	1,1380933	1,2936066	1,4685337	1,6650735	1,8856491
14	1,1494742	1,3194788	1,5125897	1,7316764	1,9799316
15	1,1609690	1,3458683	1,5579674	1,8009435	2,0789282
16	1,1725786	1,3727857	1,6047064	1,8729812	2,1828746
17	1,1843044	1,4002414	1,6528476	1,9479005	2,2920183
18	1,1961475	1,4282462	1,7024331	2,0258165	2,4066192
19	1,2081090	1,4568112	1,7535061	2,1068492	2,5269502
20	1,2201900	1,4859474	1,8061112	2,1911231	2,6532977
21	1,2323919	1,5156663	1,8602946	2,2787681	2,7859626
22	1,2447159	1,5459797	1,9161034	2,3699188	2,9252607
23	1,2571630	1,5768993	1,9735865	2,4647155	3,0715238
24	1,2697346	1,6084372	2,0327941	2,5633042	3,2250999
25	1,2824320	1,6406060	2,0937779	2,6658363	3,3863549
26	1,2952563	1,6734181	2,1565913	2,7724698	3,5556727
27	1,3082089	1,7068865	2,2212890	2,8833686	3,7334563
28	1,3212910	1,7410242	2,2879277	2,9987033	3,9201291
29	1,3345039	1,7758447	2,3565655	3,1186515	4,1161356
30	1,3478489	1,8113616	2,4272625	3,2433975	4,3219424

Додаток 2 (продовження)

Множники нарощування складних процентів: $M(n;r)=(1+r)^n$

r / t	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0600000	1,0700000	1,0800000	1,0900000	1,1000000
2	1,1236000	1,1449000	1,1664000	1,1881000	1,2100000
3	1,1910160	1,2250430	1,2597120	1,2950290	1,3310000
4	1,2624770	1,3107960	1,3604890	1,4115816	1,4641000
5	1,3382256	1,4025517	1,4693281	1,5386240	1,6105100
6	1,4185191	1,5007304	1,5868743	1,6771001	1,7715610
7	1,5036303	1,6057815	1,7138243	1,8280391	1,9487171
8	1,5938481	1,7181862	1,8509302	1,9925626	2,1435888
9	1,6894790	1,8384592	1,9990046	2,1718933	2,3579477
10	1,7908477	1,9671514	2,1589250	2,3673637	2,5937425
11	1,8982986	2,1048520	2,3316390	2,5804264	2,8531167
12	2,0121965	2,2521916	2,5181701	2,8126648	3,1384284
13	2,1329283	2,4098450	2,7196237	3,0658046	3,4522712
14	2,2609040	2,5785342	2,9371936	3,3417270	3,7974983
15	2,3965582	2,7590315	3,1721691	3,6424825	4,1772482
16	2,5403517	2,9521637	3,4259426	3,9703059	4,5949730
17	2,6927728	3,1588152	3,7000181	4,3276334	5,0544703
18	2,8543392	3,3799323	3,9960195	4,7171204	5,5599173
19	3,0255995	3,6165275	4,3157011	5,1416613	6,1159090
20	3,2071355	3,8696845	4,6609571	5,6044108	6,7274999
21	3,3995636	4,1405624	5,0338337	6,1088077	7,4002499
22	3,6035374	4,4304017	5,4365404	6,6586004	8,1402749
23	3,8197497	4,7405299	5,8714636	7,2578745	8,9543024
24	4,0489346	5,0723670	6,3411807	7,9110832	9,8497327
25	4,2918707	5,4274326	6,8484752	8,6230807	10,8347059
26	4,5493830	5,8073529	7,3963532	9,3991579	11,9181765
27	4,8223459	6,2138676	7,9880615	10,2450821	13,1099942
28	5,1116867	6,6488384	8,6271064	11,1671395	14,4209936
29	5,4183879	7,1142570	9,3172749	12,1721821	15,8630930
30	5,7434912	7,6122550	10,0626569	13,2676785	17,4494023

Додаток 2 (продовження)

Множники нарощування складних процентів: $M(n;r)=(1+r)^n$

r / t	11%	12%	13%	14%	15%
1	1,1100000	1,1200000	1,1300000	1,1400000	1,1500000
2	1,2321000	1,2544000	1,2769000	1,2996000	1,3225000
3	1,3676310	1,4049280	1,4428970	1,4815440	1,5208750
4	1,5180704	1,5735194	1,6304736	1,6889602	1,7490063
5	1,6850582	1,7623417	1,8424352	1,9254146	2,0113572
6	1,8704146	1,9738227	2,0819518	2,1949726	2,3130608
7	2,0761602	2,2106814	2,3526055	2,5022688	2,6600199
8	2,3045378	2,4759632	2,6584442	2,8525864	3,0590229
9	2,5580369	2,7730788	3,0040419	3,2519485	3,5178763
10	2,8394210	3,1058482	3,3945674	3,7072213	4,0455577
11	3,1517573	3,4785500	3,8358612	4,2262323	4,6523914
12	3,4984506	3,8959760	4,3345231	4,8179048	5,3502501
13	3,8832802	4,3634931	4,8980111	5,4924115	6,1527876
14	4,3104410	4,8871123	5,5347525	6,2613491	7,0757058
15	4,7845895	5,4735658	6,2542704	7,1379380	8,1370616
16	5,3108943	6,1303937	7,0673255	8,1372493	9,3576209
17	5,8950927	6,8660409	7,9860778	9,2764642	10,7612640
18	6,5435529	7,6899658	9,0242680	10,5751692	12,3754536
19	7,2633437	8,6127617	10,1974228	12,0556929	14,2317716
20	8,0623115	9,6462931	11,5230878	13,7434899	16,3665374
21	8,9491658	10,8038483	13,0210892	15,6675785	18,8215180
22	9,9335740	12,1003101	14,7138308	17,8610394	21,6447457
23	11,0262672	13,5523473	16,6266288	20,3615850	24,8914576
24	12,2391566	15,1786289	18,7880905	23,2122069	28,6251762
25	13,5854638	17,0000644	21,2305423	26,4619158	32,9189526
26	15,0798648	19,0400721	23,9905128	30,1665840	37,8567955
27	16,7386500	21,3248808	27,1092794	34,3899058	43,5353148
28	18,5799014	23,8838665	30,6334858	39,2044926	50,0656121
29	20,6236906	26,7499305	34,6158389	44,6931216	57,5754539
30	22,8922966	29,9599221	39,1158980	50,9501586	66,2117720

Додаток 2 (продовження)

Множники нарощування складних процентів: $M(n;r) = (1+r)^n$

r / t	16%	17%	18%	19%
1	1,1600000	1,1700000	1,1800000	1,1900000
2	1,3456000	1,3689000	1,3924000	1,4161000
3	1,5608960	1,6016130	1,6430320	1,6851590
4	1,8106394	1,8738872	1,9387778	2,0053392
5	2,1003417	2,1924480	2,2877578	2,3863537
6	2,4363963	2,5651642	2,6995542	2,8397609
7	2,8262197	3,0012421	3,1854739	3,3793154
8	3,2784149	3,5114533	3,7588592	4,0213853
9	3,8029613	4,1084003	4,4354539	4,7854486
10	4,4114351	4,8068284	5,2338356	5,6946838
11	5,1172647	5,6239892	6,1759260	6,7766737
12	5,9360270	6,5800674	7,2875926	8,0642417
13	6,8857914	7,6986788	8,5993593	9,5964476
14	7,9875180	9,0074542	10,1472440	11,4197727
15	9,2655209	10,5387215	11,9737479	13,5895295
16	10,7480042	12,3303041	14,1290225	16,1715401
17	12,4676849	14,4264558	16,6722466	19,2441327
18	14,4625145	16,8789533	19,6732509	22,9005180
19	16,7765168	19,7483754	23,2144361	27,2516164
20	19,4607595	23,1055992	27,3930346	32,4294235
21	22,5744810	27,0335510	32,3237808	38,5910139
22	26,1863979	31,6292547	38,1420614	45,9233066
23	30,3762216	37,0062280	45,0076324	54,6487348
24	35,2364170	43,2972868	53,1090063	65,0319944
25	40,8742438	50,6578255	62,6686274	77,3880734
26	47,4141228	59,2696558	73,9489803	92,0918073
27	55,0003824	69,3454973	87,2597968	109,5892507
28	63,8004436	81,1342319	102,9665602	130,4112084
29	74,0085146	94,9270513	121,5005410	155,1893379
30	85,8498769	111,0646500	143,3706384	184,6753122

Додаток 2 (продовження)

Множники нарощування складних процентів: $M(n;r)=(1+r)^n$

r / t	20%	21 %	22%	23%
1	1,2000000	1,2100000	1,2200000	1,2300000
2	1,4400000	1,4641000	1,4884000	1,5129000
3	1,7280000	1,7715610	1,8158480	1,8608670
4	2,0736000	2,1435888	2,2153346	2,2888664
5	2,4883200	2,5937425	2,7027082	2,8153057
6	2,9859840	3,1384284	3,2973040	3,4628260
7	3,5831808	3,7974983	4,0227108	4,2592760
8	4,2998170	4,5949730	4,9077072	5,2389094
9	5,1597804	5,5599173	5,9874028	6,4438586
10	6,1917364	6,7274999	7,3046314	7,9259461
11	7,4300837	8,1402749	8,9116503	9,7489137
12	8,9161004	9,8497327	10,8722134	11,9911638
13	10,6993205	11,9181765	13,2641003	14,7491315
14	12,8391846	14,4209936	16,1822024	18,1414318
15	15,4070216	17,4494023	19,7422870	22,3139611
16	18,4884259	21,1137767	24,0855901	27,4461722
17	22,1861111	25,5476699	29,3844199	33,7587917
18	26,6233333	30,9126805	35,8489923	41,5233138
19	31,9479999	37,4043434	43,7357706	51,0736760
20	38,3375999	45,2592556	53,3576401	62,8206215
21	46,0051199	54,7636992	65,0963209	77,2693645
22	55,2061439	66,2640761	79,4175115	95,0413183
23	66,2473727	80,1795321	96,8893641	116,9008215
24	79,4968472	97,0172338	118,2050242	143,7880104
25	95,3962166	117,3908529	144,2101295	176,8592528
26	114,4754600	142,0429320	175,9363580	217,5368810
27	137,3705520	171,8719477	214,6423568	267,5703636
28	164,8446624	207,9650567	261,8636752	329,1115473
29	197,8135948	251,6377186	319,4736838	404,8072031
30	237,3763138	304,4816395	389,7578942	497,9128599

Додаток 2 (продовження)

Множники нарощування складних процентів: $M(n;r)=(1+r)^n$

r / t	24%	25%	26%
1	1,2400000	1,2500000	1,2600000
2	1,5376000	1,5625000	1,5876000
3	1,9066240	1,9531250	2,0003760
4	2,3642138	2,4414063	2,5204738
5	2,9316251	3,0517578	3,1757969
6	3,6352151	3,8146973	4,0015041
7	4,5076667	4,7683716	5,0418952
8	5,5895067	5,9604645	6,3527880
9	6,9309883	7,4505806	8,0045128
10	8,5944255	9,3132257	10,0856862
11	10,6570876	11,6415322	12,7079646
12	13,2147887	14,5519152	16,0120354
13	16,3863379	18,1898940	20,1751646
14	20,3190590	22,7373675	25,4207074
15	25,1956332	28,4217094	32,0300913
16	31,2425852	35,5271368	40,3579151
17	38,7408056	44,4089210	50,8509730
18	48,0385990	55,5111512	64,0722259
19	59,5678627	69,3889390	80,7310047
20	73,8641498	86,7361738	101,7210659
21	91,5915457	108,4202172	128,1685430
22	113,5735167	135,5252716	161,4923642
23	140,8311607	169,4065895	203,4803789
24	174,6306393	211,7582368	256,3852774
25	216,5419927	264,6977960	323,0454496
26	268,5120710	330,8722450	407,0372665
27	332,9549680	413,5903063	512,8669557
28	412,8641603	516,9878828	646,2123642
29	511,9515588	646,2348536	814,2275789
30	634,8199329	807,7935669	1025,9267495

Додаток 3

Множники дисконтування складних процентів: $D(n;r) = (1+r)^{-n}$

r / t	1 %	2%	3%	4 %	5 %
1	0,9900990	0,9803922	0,9708738	0,9615385	0,9523810
2	0,9802960	0,9611688	0,9425959	0,9245562	0,9070295
3	0,9705901	0,9423223	0,9151417	0,8889964	0,8638376
4	0,9609803	0,9238454	0,8884870	0,8548042	0,8227025
5	0,9514657	0,9057308	0,8626088	0,8219271	0,7835262
6	0,9420452	0,8879714	0,8374843	0,7903145	0,7462154
7	0,9327181	0,8705602	0,8130915	0,7599178	0,7106813
8	0,9234832	0,8534904	0,7894092	0,7306902	0,6768394
9	0,9143398	0,8367553	0,7664167	0,7025867	0,6446089
10	0,9052870	0,8203483	0,7440939	0,6755642	0,6139133
11	0,8963237	0,8042630	0,7224213	0,6495809	0,5846793
12	0,8874492	0,7884932	0,7013799	0,6245970	0,5568374
13	0,8786626	0,7730325	0,6809513	0,6005741	0,5303214
14	0,8699630	0,7578750	0,6611178	0,5774751	0,5050680
15	0,8613495	0,7430147	0,6418619	0,5552645	0,4810171
16	0,8528213	0,7284458	0,6231669	0,5339082	0,4581115
17	0,8443775	0,7141626	0,6050164	0,5133732	0,4362967
18	0,8360173	0,7001594	0,5873946	0,4936281	0,4155207
19	0,8277399	0,6864308	0,5702860	0,4746424	0,3957340
20	0,8195445	0,6729713	0,5536758	0,4563869	0,3768895
21	0,8114302	0,6597758	0,5375493	0,4388336	0,3589424
22	0,8033962	0,6468390	0,5218925	0,4219554	0,3418499
23	0,7954418	0,6341559	0,5066917	0,4057263	0,3255713
24	0,7875661	0,6217215	0,4919337	0,3901215	0,3100679
25	0,7797684	0,6095309	0,4776056	0,3751168	0,2953028
26	0,7720480	0,5975793	0,4636947	0,3606892	0,2812407
27	0,7644039	0,5858620	0,4501891	0,3468166	0,2678483
28	0,7568356	0,5743746	0,4370768	0,3334775	0,2550936
29	0,7493421	0,5631123	0,4243464	0,3206514	0,2429463
30	0,7419229	0,5520709	0,4119868	0,3083187	0,2313774

Додаток 3 (продовження)

Множники дисконтування складних процентів: $D(n;r)=(1+r)^{-n}$

r / t	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9433962	0,9345794	0,9259259	0,9174312	0,9090909
2	0,8899964	0,8734387	0,8573388	0,8416800	0,8264463
3	0,8396193	0,8162979	0,7938322	0,7721835	0,7513148
4	0,7920937	0,7628952	0,7350299	0,7084252	0,6830135
5	0,7472582	0,7129862	0,6805832	0,6499314	0,6209213
6	0,7049605	0,6663422	0,6301696	0,5962673	0,5644739
7	0,6650571	0,6227497	0,5834904	0,5470342	0,5131581
8	0,6274124	0,5820091	0,5402689	0,5018663	0,4665074
9	0,5918985	0,5439337	0,5002490	0,4604278	0,4240976
10	0,5583948	0,5083493	0,4631935	0,4224108	0,3855433
11	0,5267875	0,4750928	0,4288829	0,3875329	0,3504939
12	0,4969694	0,4440120	0,3971138	0,3555347	0,3186308
13	0,4688390	0,4149644	0,3676979	0,3261786	0,2896644
14	0,4423010	0,3878172	0,3404610	0,2992465	0,2633313
15	0,4172651	0,3624460	0,3152417	0,2745380	0,2393920
16	0,3936463	0,3387346	0,2918905	0,2518698	0,2176291
17	0,3713644	0,3165744	0,2702690	0,2310732	0,1978447
18	0,3503438	0,2958639	0,2502490	0,2119937	0,1798588
19	0,3305130	0,2765083	0,2317121	0,1944897	0,1635080
20	0,3118047	0,2584190	0,2145482	0,1784309	0,1486436
21	0,2941554	0,2415131	0,1986557	0,1636981	0,1351306
22	0,2775051	0,2257132	0,1839405	0,1501817	0,1228460
23	0,2617973	0,2109469	0,1703153	0,1377814	0,1116782
24	0,2469785	0,1971466	0,1576993	0,1264049	0,1015256
25	0,2329986	0,1842492	0,1460179	0,1159678	0,0922960
26	0,2198100	0,1721955	0,1352018	0,1063925	0,0839055
27	0,2073680	0,1609304	0,1251868	0,0976078	0,0762777
28	0,1956301	0,1504022	0,1159137	0,0895484	0,0693433
29	0,1845567	0,1405628	0,1073275	0,0821545	0,0630394
30	0,1741101	0,1313671	0,0993773	0,0753711	0,0573086

Додаток 3 (продовження)

Множники дисконтування складних процентів: $D(n;r)=(1+r)^{-n}$

r / t	11 %	12%	13%	14%	15%
1	0,9009009	0,8928571	0,8849558	0,8771930	0,8695652
2	0,8116224	0,7971939	0,7831467	0,7694675	0,7561437
3	0,7311914	0,7117802	0,6930502	0,6749715	0,6575162
4	0,6587310	0,6355181	0,6133187	0,5920803	0,5717532
5	0,5934513	0,5674269	0,5427599	0,5193687	0,4971767
6	0,5346408	0,5066311	0,4803185	0,4555865	0,4323276
7	0,4816584	0,4523492	0,4250606	0,3996373	0,3759370
8	0,4339265	0,4038832	0,3761599	0,3505591	0,3269018
9	0,3909248	0,3606100	0,3328848	0,3075079	0,2842624
10	0,3521845	0,3219732	0,2945883	0,2697438	0,2471847
11	0,3172833	0,2874761	0,2606977	0,2366174	0,2149432
12	0,2858408	0,2566751	0,2307059	0,2075591	0,1869072
13	0,2575143	0,2291742	0,2041645	0,1820694	0,1625280
14	0,2319948	0,2046198	0,1806766	0,1597100	0,1413287
15	0,2090043	0,1826963	0,1598908	0,1400965	0,1228945
16	0,1882922	0,1631217	0,1414962	0,1228917	0,1068648
17	0,1696326	0,1456443	0,1252179	0,1077997	0,0929259
18	0,1528222	0,1300396	0,1108123	0,0945611	0,0808051
19	0,1376776	0,1161068	0,0980640	0,0829484	0,0702653
20	0,1240339	0,1036668	0,0867823	0,0727617	0,0611003
21	0,1117423	0,0925596	0,0767985	0,0638261	0,0531307
22	0,1006687	0,0826425	0,0679633	0,0559878	0,0462006
23	0,0906925	0,0737880	0,0601445	0,0491121	0,0401744
24	0,0817050	0,0658821	0,0532252	0,0430808	0,0349343
25	0,0736081	0,0588233	0,0471020	0,0377902	0,0303776
26	0,0663136	0,0525208	0,0416831	0,0331493	0,0264153
27	0,0597420	0,0468936	0,0368877	0,0290783	0,0229699
28	0,0538216	0,0418693	0,0326440	0,0255073	0,0199738
29	0,0484879	0,0373833	0,0288885	0,0223748	0,0173685
30	0,0436828	0,0333779	0,0255651	0,0196270	0,0151031

Додаток 3 (продовження)

Множники дисконтування складних процентів: $D(n;r)=(1+r)^{-n}$

r / t	16%	17%	18%	19%	20 %
1	0,8620690	0,8547009	0,8474576	0,8403361	0,8333333
2	0,7431629	0,7305136	0,7181844	0,7061648	0,6944444
3	0,6406577	0,6243706	0,6086309	0,5934158	0,5787037
4	0,5522911	0,5336500	0,5157889	0,4986688	0,4822531
5	0,4761130	0,4561112	0,4371092	0,4190494	0,4018776
6	0,4104423	0,3898386	0,3704315	0,3521423	0,3348980
7	0,3538295	0,3331954	0,3139250	0,2959179	0,2790816
8	0,3050255	0,2847824	0,2660382	0,2486705	0,2325680
9	0,2629530	0,2434037	0,2254561	0,2089668	0,1938067
10	0,2266836	0,2080374	0,1910645	0,1756024	0,1615056
11	0,1954169	0,1778097	0,1619190	0,1475650	0,1345880
12	0,1684628	0,1519741	0,1372195	0,1240042	0,1121567
13	0,1452266	0,1298924	0,1162877	0,1042052	0,0934639
14	0,1251953	0,1110192	0,0985489	0,0875674	0,0778866
15	0,1079270	0,0948882	0,0835160	0,0735861	0,0649055
16	0,0930405	0,0811010	0,0707763	0,0618370	0,0540879
17	0,0802074	0,0693171	0,0599799	0,0519639	0,0450732
18	0,0691443	0,0592454	0,0508304	0,0436671	0,0375610
19	0,0596071	0,0506371	0,0430766	0,0366951	0,0313009
20	0,0513855	0,0432796	0,0365056	0,0308362	0,0260841
21	0,0442978	0,0369911	0,0309370	0,0259128	0,0217367
22	0,0381878	0,0316163	0,0262178	0,0217754	0,0181139
23	0,0329205	0,0270225	0,0222185	0,0182987	0,0150949
24	0,0283797	0,0230961	0,0188292	0,0153770	0,0125791
25	0,0244653	0,0197403	0,0159569	0,0129219	0,0104826
26	0,0210908	0,0168720	0,0135228	0,0108587	0,0087355
27	0,0181817	0,0144205	0,0114600	0,0091250	0,0072796
28	0,0156739	0,0123253	0,0097119	0,0076681	0,0060663
29	0,0135120	0,0105344	0,0082304	0,0064437	0,0050553
30	0,0116482	0,0090038	0,0069749	0,0054149	0,0042127

Додаток 3 (продовження)

Множники дисконтування складних процентів: $D(n;r)=(1+r)^{-n}$

r / t	21 %	22 %	23 %	24%	25%
1	0,8264463	0,8196721	0,8130081	0,8064516	0,8000000
2	0,6830135	0,6718624	0,6609822	0,6503642	0,6400000
3	0,5644739	0,5507069	0,5373839	0,5244873	0,5120000
4	0,4665074	0,4513991	0,4368975	0,4229736	0,4096000
5	0,3855433	0,3699993	0,3552012	0,3411077	0,3276800
6	0,3186308	0,3032781	0,2887815	0,2750869	0,2621440
7	0,2633313	0,2485886	0,2347817	0,2218443	0,2097152
8	0,2176291	0,2037611	0,1908794	0,1789067	0,1677722
9	0,1798588	0,1670173	0,1551865	0,1442796	0,1342177
10	0,1486436	0,1368994	0,1261679	0,1163545	0,1073742
11	0,1228460	0,1122127	0,1025755	0,0938343	0,0858993
12	0,1015256	0,0919776	0,0833947	0,0756728	0,0687195
13	0,0839055	0,0753915	0,0678006	0,0610264	0,0549756
14	0,0693433	0,0617963	0,0551224	0,0492149	0,0439805
15	0,0573086	0,0506527	0,0448150	0,0396894	0,0351844
16	0,0473624	0,0415186	0,0364350	0,0320076	0,0281475
17	0,0391425	0,0340316	0,0296219	0,0258126	0,0225180
18	0,0323492	0,0278948	0,0240829	0,0208166	0,0180144
19	0,0267349	0,0228646	0,0195796	0,0167876	0,0144115
20	0,0220949	0,0187415	0,0159183	0,0135384	0,0115292
21	0,0182603	0,0153619	0,0129417	0,0109180	0,0092234
22	0,0150911	0,0125917	0,0105217	0,0088049	0,0073787
23	0,0124720	0,0103211	0,0085543	0,0071007	0,0059030
24	0,0103074	0,0084599	0,0069547	0,0057264	0,0047224
25	0,0085186	0,0069343	0,0056542	0,0046180	0,0037779
26	0,0070401	0,0056839	0,0045969	0,0037242	0,0030223
27	0,0058183	0,0046589	0,0037373	0,0030034	0,0024179
28	0,0048085	0,0038188	0,0030385	0,0024221	0,0019343
29	0,0039740	0,0031301	0,0024703	0,0019533	0,0015474
30	0,0032843	0,0025657	0,0020084	0,0015752	0,0012379

Додаток 3 (продовження)

Множники дисконтування складних процентів: $D(n;r)=(1+r)^{-n}$

r / t	26%	27%	28%
1	0,7936508	0,7874016	0,7812500
2	0,6298816	0,6200012	0,6103516
3	0,4999060	0,4881900	0,4768372
4	0,3967508	0,3844015	0,3725290
5	0,3148816	0,3026784	0,2910383
6	0,2499060	0,2383294	0,2273737
7	0,1983381	0,1876610	0,1776357
8	0,1574112	0,1477645	0,1387779
9	0,1249295	0,1163500	0,1084202
10	0,0991504	0,0916142	0,0847033
11	0,0786908	0,0721372	0,0661744
12	0,0624530	0,0568009	0,0516988
13	0,0495659	0,0447251	0,0403897
14	0,0393380	0,0352166	0,0315544
15	0,0312206	0,0277296	0,0246519
16	0,0247783	0,0218344	0,0192593
17	0,0196653	0,0171924	0,0150463
18	0,0156074	0,0135373	0,0117549
19	0,0123868	0,0106593	0,0091835
20	0,0098308	0,0083932	0,0071746
21	0,0078022	0,0066088	0,0056052
22	0,0061922	0,0052038	0,0043791
23	0,0049145	0,0040975	0,0034211
24	0,0039004	0,0032263	0,0026728
25	0,0030955	0,0025404	0,0020881
26	0,0024568	0,0020003	0,0016313
27	0,0019498	0,0015751	0,0012745
28	0,0015475	0,0012402	0,0009957
29	0,0012282	0,0009765	0,0007779
30	0,0009747	0,0007689	0,0006077

Додаток 4

Множники утримання складних процентів: $Dis(n;r)=(1-d)^n$

r / t	1 %	2%	3%	4%	5%
1	0,9900000	0,9800000	0,9700000	0,9600000	0,9500000
2	0,9801000	0,9604000	0,9409000	0,9216000	0,9025000
3	0,9702990	0,9411920	0,9126730	0,8847360	0,8573750
4	0,9605960	0,9223682	0,8852928	0,8493466	0,8145063
5	0,9509900	0,9039208	0,8587340	0,8153727	0,7737809
6	0,9414801	0,8858424	0,8329720	0,7827578	0,7350919
7	0,9320653	0,8681255	0,8079828	0,7514475	0,6983373
8	0,9227447	0,8507630	0,7837434	0,7213896	0,6634204
9	0,9135172	0,8337478	0,7602311	0,6925340	0,6302494
10	0,9043821	0,8170728	0,7374241	0,6648326	0,5987369
11	0,8953383	0,8007314	0,7153014	0,6382393	0,5688001
12	0,8863849	0,7847167	0,6938424	0,6127098	0,5403601
13	0,8775210	0,7690224	0,6730271	0,5882014	0,5133421
14	0,8687458	0,7536419	0,6528363	0,5646733	0,4876750
15	0,8600584	0,7385691	0,6332512	0,5420864	0,4632912
16	0,8514578	0,7237977	0,6142537	0,5204029	0,4401267
17	0,8429432	0,7093218	0,5958260	0,4995868	0,4181203
18	0,8345138	0,6951353	0,5779513	0,4796033	0,3972143
19	0,8261686	0,6812326	0,5606127	0,4604192	0,3773536
20	0,8179069	0,6676080	0,5437943	0,4420024	0,3584859
21	0,8097279	0,6542558	0,5274805	0,4243223	0,3405616
22	0,8016306	0,6411707	0,5116561	0,4073494	0,3235335
23	0,7936143	0,6283473	0,4963064	0,3910555	0,3073569
24	0,7856781	0,6157803	0,4814172	0,3754132	0,2919890
25	0,7778214	0,6034647	0,4669747	0,3603967	0,2773896
26	0,7700431	0,5913954	0,4529655	0,3459808	0,2635201
27	0,7623427	0,5795675	0,4393765	0,3321416	0,2503441
28	0,7547193	0,5679762	0,4261952	0,3188559	0,2378269
29	0,7471721	0,5566167	0,4134093	0,3061017	0,2259355
30	0,7397004	0,5454843	0,4010071	0,2938576	0,2146388

Додаток 4 (продовження)

Множники утримання складних процентів: $Dis(n;r) = (1-d)^n$

r / t	6%	7%	8%	9%	10%
1	0,9400000	0,9300000	0,9200000	0,9100000	0,9000000
2	0,8836000	0,8649000	0,8464000	0,8281000	0,8100000
3	0,8305840	0,8043570	0,7786880	0,7535710	0,7290000
4	0,7807490	0,7480520	0,7163930	0,6857496	0,6561000
5	0,7339040	0,6956884	0,6590815	0,6240321	0,5904900
6	0,6898698	0,6469902	0,6063550	0,5678693	0,5314410
7	0,6484776	0,6017009	0,5578466	0,5167610	0,4782969
8	0,6095689	0,5595818	0,5132189	0,4702525	0,4304672
9	0,5729948	0,5204111	0,4721614	0,4279298	0,3874205
10	0,5386151	0,4839823	0,4343885	0,3894161	0,3486784
11	0,5062982	0,4501035	0,3996374	0,3543687	0,3138106
12	0,4759203	0,4185963	0,3676664	0,3224755	0,2824295
13	0,4473651	0,3892946	0,3382531	0,2934527	0,2541866
14	0,4205232	0,3620439	0,3111928	0,2670420	0,2287679
15	0,3952918	0,3367009	0,2862974	0,2430082	0,2058911
16	0,3715743	0,3131318	0,2633936	0,2211374	0,1853020
17	0,3492798	0,2912126	0,2423221	0,2012351	0,1667718
18	0,3283230	0,2708277	0,2229364	0,1831239	0,1500946
19	0,3086237	0,2518698	0,2051014	0,1666428	0,1350852
20	0,2901062	0,2342389	0,1886933	0,1516449	0,1215767
21	0,2726999	0,2178422	0,1735979	0,1379969	0,1094190
22	0,2563379	0,2025932	0,1597100	0,1255772	0,0984771
23	0,2409576	0,1884117	0,1469332	0,1142752	0,0886294
24	0,2265001	0,1752229	0,1351786	0,1039904	0,0797664
25	0,2129101	0,1629573	0,1243643	0,0946313	0,0717898
26	0,2001355	0,1515503	0,1144151	0,0861145	0,0646108
27	0,1881274	0,1409417	0,1052619	0,0783642	0,0581497
28	0,1768398	0,1310758	0,0968410	0,0713114	0,0523348
29	0,1662294	0,1219005	0,0890937	0,0648934	0,0471013
30	0,1562556	0,1133675	0,0819662	0,0590530	0,0423912

Додаток 4 (продовження)

Множники утримання складних процентів: $Dis(n;r) = (1-d)^n$

r / t	11%	12%	13%	14%	15%
1	0,8900000	0,8800000	0,8700000	0,8600000	0,8500000
2	0,7921000	0,7744000	0,7569000	0,7396000	0,7225000
3	0,7049690	0,6814720	0,6585030	0,6360560	0,6141250
4	0,6274224	0,5996954	0,5728976	0,5470082	0,5220063
5	0,5584059	0,5277319	0,4984209	0,4704270	0,4437053
6	0,4969813	0,4644041	0,4336262	0,4045672	0,3771495
7	0,4423133	0,4086756	0,3772548	0,3479278	0,3205771
8	0,3936589	0,3596345	0,3282117	0,2992179	0,2724905
9	0,3503564	0,3164784	0,2855442	0,2573274	0,2316169
10	0,3118172	0,2785010	0,2484234	0,2213016	0,1968744
11	0,2775173	0,2450809	0,2161284	0,1903194	0,1673432
12	0,2469904	0,2156712	0,1880317	0,1636746	0,1422418
13	0,2198215	0,1897906	0,1635876	0,1407602	0,1209055
14	0,1956411	0,1670157	0,1423212	0,1210538	0,1027697
15	0,1741206	0,1469739	0,1238194	0,1041062	0,0873542
16	0,1549673	0,1293370	0,1077229	0,0895314	0,0742511
17	0,1379209	0,1138166	0,0937189	0,0769970	0,0631134
18	0,1227496	0,1001586	0,0815355	0,0662174	0,0536464
19	0,1092472	0,0881395	0,0709359	0,0569470	0,0455994
20	0,0972300	0,0775628	0,0617142	0,0489744	0,0387595
21	0,0865347	0,0682553	0,0536913	0,0421180	0,0329456
22	0,0770159	0,0600646	0,0467115	0,0362215	0,0280038
23	0,0685441	0,0528569	0,0406390	0,0311505	0,0238032
24	0,0610043	0,0465140	0,0353559	0,0267894	0,0202327
25	0,0542938	0,0409324	0,0307596	0,0230389	0,0171978
26	0,0483215	0,0360205	0,0267609	0,0198134	0,0146181
27	0,0430061	0,0316980	0,0232820	0,0170396	0,0124254
28	0,0382754	0,0278943	0,0202553	0,0146540	0,0105616
29	0,0340651	0,0245469	0,0176221	0,0126025	0,0089774
30	0,0303180	0,0216013	0,0153313	0,0108381	0,0076308

Додаток 4 (продовження)

Множники утримання складних процентів: $Dis(n;r) = (1-d)^n$

r \ t	16%	17%	18%	19%	20%
1	0,8400000	0,8300000	0,8200000	0,8100000	0,8000000
2	0,7056000	0,6889000	0,6724000	0,6561000	0,6400000
3	0,5927040	0,5717870	0,5513680	0,5314410	0,5120000
4	0,4978714	0,4745832	0,4521218	0,4304672	0,4096000
5	0,4182119	0,3939041	0,3707398	0,3486784	0,3276800
6	0,3512980	0,3269404	0,3040067	0,2824295	0,2621440
7	0,2950903	0,2713605	0,2492855	0,2287679	0,2097152
8	0,2478759	0,2252292	0,2044141	0,1853020	0,1677722
9	0,2082157	0,1869403	0,1676196	0,1500946	0,1342177
10	0,1749012	0,1551604	0,1374480	0,1215767	0,1073742
11	0,1469170	0,1287831	0,1127074	0,0984771	0,0858993
12	0,1234103	0,1068900	0,0924201	0,0797664	0,0687195
13	0,1036647	0,0887187	0,0757844	0,0646108	0,0549756
14	0,0870783	0,0736365	0,0621432	0,0523348	0,0439805
15	0,0731458	0,0611183	0,0509575	0,0423912	0,0351844
16	0,0614425	0,0507282	0,0417851	0,0343368	0,0281475
17	0,0516117	0,0421044	0,0342638	0,0278128	0,0225180
18	0,0433538	0,0349467	0,0280963	0,0225284	0,0180144
19	0,0364172	0,0290057	0,0230390	0,0182480	0,0144115
20	0,0305904	0,0240748	0,0188920	0,0147809	0,0115292
21	0,0256960	0,0199820	0,0154914	0,0119725	0,0092234
22	0,0215846	0,0165851	0,0127030	0,0096977	0,0073787
23	0,0181311	0,0137656	0,0104164	0,0078552	0,0059030
24	0,0152301	0,0114255	0,0085415	0,0063627	0,0047224
25	0,0127933	0,0094831	0,0070040	0,0051538	0,0037779
26	0,0107464	0,0078710	0,0057433	0,0041746	0,0030223
27	0,0090269	0,0065329	0,0047095	0,0033814	0,0024179
28	0,0075826	0,0054223	0,0038618	0,0027389	0,0019343
29	0,0063694	0,0045005	0,0031667	0,0022185	0,0015474
30	0,0053503	0,0037354	0,0025967	0,0017970	0,0012379

Додаток 4 (продовження)

Множники утримання складних процентів: $Dis(n;r)=(1-d)^n$

r / t	21 %	22%	23%	24%
1	0,7900000	0,7800000	0,7700000	0,7600000
2	0,6241000	0,6084000	0,5929000	0,5776000
3	0,4930390	0,4745520	0,4565330	0,4389760
4	0,3895008	0,3701506	0,3515304	0,3336218
5	0,3077056	0,2887174	0,2706784	0,2535525
6	0,2430875	0,2251996	0,2084224	0,1926999
7	0,1920391	0,1756557	0,1604852	0,1464519
8	0,1517109	0,1370114	0,1235736	0,1113035
9	0,1198516	0,1068689	0,0951517	0,0845906
10	0,0946828	0,0833578	0,0732668	0,0642889
11	0,0747994	0,0650191	0,0564154	0,0488596
12	0,0590915	0,0507149	0,0434399	0,0371333
13	0,0466823	0,0395576	0,0334487	0,0282213
14	0,0368790	0,0308549	0,0257555	0,0214482
15	0,0291344	0,0240668	0,0198317	0,0163006
16	0,0230162	0,0187721	0,0152704	0,0123885
17	0,0181828	0,0146423	0,0117582	0,0094152
18	0,0143644	0,0114210	0,0090538	0,0071556
19	0,0113479	0,0089084	0,0069715	0,0054382
20	0,0089648	0,0069485	0,0053680	0,0041331
21	0,0070822	0,0054198	0,0041334	0,0031411
22	0,0055949	0,0042275	0,0031827	0,0023873
23	0,0044200	0,0032974	0,0024507	0,0018143
24	0,0034918	0,0025720	0,0018870	0,0013789
25	0,0027585	0,0020062	0,0014530	0,0010479
26	0,0021792	0,0015648	0,0011188	0,0007964
27	0,0017216	0,0012205	0,0008615	0,0006053
28	0,0013601	0,0009520	0,0006633	0,0004600
29	0,0010744	0,0007426	0,0005108	0,0003496
30	0,0008488	0,0005792	0,0003933	0,0002657

Додаток 4 (продовження)

Множники утримання складних процентів: $\boldsymbol{Dis(n;r)=(1-d)^n}$

r / t	25%	26%	27%	28%
1	0,7500000	0,7400000	0,7300000	0,7200000
2	0,5625000	0,5476000	0,5329000	0,5184000
3	0,4218750	0,4052240	0,3890170	0,3732480
4	0,3164063	0,2998658	0,2839824	0,2687386
5	0,2373047	0,2219007	0,2073072	0,1934918
6	0,1779785	0,1642065	0,1513342	0,1393141
7	0,1334839	0,1215128	0,1104740	0,1003061
8	0,1001129	0,0899195	0,0806460	0,0722204
9	0,0750847	0,0665404	0,0588716	0,0519987
10	0,0563135	0,0492399	0,0429763	0,0374391
11	0,0422351	0,0364375	0,0313727	0,0269561
12	0,0316764	0,0269638	0,0229020	0,0194084
13	0,0237573	0,0199532	0,0167185	0,0139741
14	0,0178179	0,0147654	0,0122045	0,0100613
15	0,0133635	0,0109264	0,0089093	0,0072442
16	0,0100226	0,0080855	0,0065038	0,0052158
17	0,0075169	0,0059833	0,0047478	0,0037554
18	0,0056377	0,0044276	0,0034659	0,0027039
19	0,0042283	0,0032764	0,0025301	0,0019468
20	0,0031712	0,0024246	0,0018470	0,0014017
21	0,0023784	0,0017942	0,0013483	0,0010092
22	0,0017838	0,0013277	0,0009842	0,0007266
23	0,0013379	0,0009825	0,0007185	0,0005232
24	0,0010034	0,0007270	0,0005245	0,0003767
25	0,0007525	0,0005380	0,0003829	0,0002712
26	0,0005644	0,0003981	0,0002795	0,0001953
27	0,0004233	0,0002946	0,0002040	0,0001406
28	0,0003175	0,0002180	0,0001489	0,0001012
29	0,0002381	0,0001613	0,0001087	0,0000729
30	0,0001786	0,0001194	0,0000794	0,0000525

Додаток 5

Множники нарощування ануїтету: $FVIFA = S(n;r) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

r / t	1 %	2 %	3%	4%	5%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,010000	2,020000	2,030000	2,040000	2,050000
3	3,030100	3,060400	3,090900	3,121600	3,152500
4	4,060401	4,121608	4,183627	4,246464	4,310125
5	5,101005	5,204040	5,309136	5,416323	5,525631
6	6,152015	6,308121	6,468410	6,632975	6,801913
7	7,213535	7,434283	7,662462	7,898294	8,142008
8	8,285671	8,582969	8,892336	9,214226	9,549109
9	9,368527	9,754628	10,159106	10,582795	11,026564
10	10,462213	10,949721	11,463879	12,006107	12,577893
11	11,566835	12,168715	12,807796	13,486351	14,206787
12	12,682503	13,412090	14,192030	15,025805	15,917127
13	13,809328	14,680332	15,617790	16,626838	17,712983
14	14,947421	15,973938	17,086324	18,291911	19,598632
15	16,096896	17,293417	18,598914	20,023588	21,578564
16	17,257864	18,639285	20,156881	21,824531	23,657492
17	18,430443	20,012071	21,761588	23,697512	25,840366
18	19,614748	21,412312	23,414435	25,645413	28,132385
19	20,810895	22,840559	25,116868	27,671229	30,539004
20	22,019004	24,297370	26,870374	29,778079	33,065954
21	23,239194	25,783317	28,676486	31,969202	35,719252
22	24,471586	27,298984	30,536780	34,247970	38,505214
23	25,716302	28,844963	32,452884	36,617889	41,430475
24	26,973465	30,421862	34,426470	39,082604	44,501999
25	28,243200	32,030300	36,459264	41,645908	47,727099
26	29,525631	33,670906	38,553042	44,311745	51,113454
27	30,820888	35,344324	40,709634	47,084214	54,669126
28	32,129097	37,051210	42,930923	49,967583	58,402583
29	33,450388	38,792235	45,218850	52,966286	62,322712
30	34,784892	40,568079	47,575416	56,084938	66,438848

Додаток 5 (продовження)

Множники нарощування ануїтету: $FVIFA = S(n;r) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

r / t	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,060000	2,070000	2,080000	2,090000	2,100000
3	3,183600	3,214900	3,246400	3,278100	3,310000
4	4,374616	4,439943	4,506112	4,573129	4,641000
5	5,637093	5,750739	5,866601	5,984711	6,105100
6	6,975319	7,153291	7,335929	7,523335	7,715610
7	8,393838	8,654021	8,922803	9,200435	9,487171
8	9,897468	10,259803	10,636628	11,028474	11,435888
9	11,491316	11,977989	12,487558	13,021036	13,579477
10	13,180795	13,816448	14,486562	15,192930	15,937425
11	14,971643	15,783599	16,645487	17,560293	18,531167
12	16,869941	17,888451	18,977126	20,140720	21,384284
13	18,882138	20,140643	21,495297	22,953385	24,522712
14	21,015066	22,550488	24,214920	26,019189	27,974983
15	23,275970	25,129022	27,152114	29,360916	31,772482
16	25,672528	27,888054	30,324283	33,003399	35,949730
17	28,212880	30,840217	33,750226	36,973705	40,544703
18	30,905653	33,999033	37,450244	41,301338	45,599173
19	33,759992	37,378965	41,446263	46,018458	51,159090
20	36,785591	40,995492	45,761964	51,160120	57,274999
21	39,992727	44,865177	50,422921	56,764530	64,002499
22	43,392290	49,005739	55,456755	62,873338	71,402749
23	46,995828	53,436141	60,893296	69,531939	79,543024
24	50,815577	58,176671	66,764759	76,789813	88,497327
25	54,864512	63,249038	73,105940	84,700896	98,347059
26	59,156383	68,676470	79,954415	93,323977	109,181765
27	63,705766	74,483823	87,350768	102,723135	121,099942
28	68,528112	80,697691	95,338830	112,968217	134,209936
29	73,639798	87,346529	103,965936	124,135356	148,630930
30	79,058186	94,460786	113,283211	136,307539	164,494023

Додаток 5 (продовження)

Множники нарощування ануїтету: $FVIFA = S(n;r) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

r / t	11 %	12%	13%	14%	15%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,110000	2,120000	2,130000	2,140000	2,150000
3	3,342100	3,374400	3,406900	3,439600	3,472500
4	4,709731	4,779328	4,849797	4,921144	4,993375
5	6,227801	6,352847	6,480271	6,610104	6,742381
6	7,912860	8,115189	8,322706	8,535519	8,753738
7	9,783274	10,089012	10,404658	10,730491	11,066799
8	11,859434	12,299693	12,757263	13,232760	13,726819
9	14,163972	14,775656	15,415707	16,085347	16,785842
10	16,722009	17,548735	18,419749	19,337295	20,303718
11	19,561430	20,654583	21,814317	23,044516	24,349276
12	22,713187	24,133133	25,650178	27,270749	29,001667
13	26,211638	28,029109	29,984701	32,088654	34,351917
14	30,094918	32,392602	34,882712	37,581065	40,504705
15	34,405359	37,279715	40,417464	43,842414	47,580411
16	39,189948	42,753280	46,671735	50,980352	55,717472
17	44,500843	48,883674	53,739060	59,117601	65,075093
18	50,395936	55,749715	61,725138	68,394066	75,836357
19	56,939488	63,439681	70,749406	78,969235	88,211811
20	64,202832	72,052442	80,946829	91,024928	102,443583
21	72,265144	81,698736	92,469917	104,768418	118,810120
22	81,214309	92,502584	105,491006	120,435996	137,631638
23	91,147884	104,602894	120,204837	138,297035	159,276384
24	102,174151	118,155241	136,831465	158,658620	184,167841
25	114,413307	133,333870	155,619556	181,870827	212,793017
26	127,998771	150,333934	176,850098	208,332743	245,711970
27	143,078636	169,374007	200,840611	238,499327	283,568766
28	159,817286	190,698887	227,949890	272,889233	327,104080
29	178,397187	214,582754	258,583376	312,093725	377,169693
30	199,020878	241,332684	293,199215	356,786847	434,745146

Додаток 5 (продовження)

Множники нарощування ануїтету: $FVIFA = S(n;r) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

r / t	16%	17%	18%	19 %	20 %
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,160000	2,170000	2,180000	2,190000	2,200000
3	3,505600	3,538900	3,572400	3,606100	3,640000
4	5,066496	5,140513	5,215432	5,291259	5,368000
5	6,877135	7,014400	7,154210	7,296598	7,441600
6	8,977477	9,206848	9,441968	9,682952	9,929920
7	11,413873	11,772012	12,141522	12,522713	12,915904
8	14,240093	14,773255	15,326996	15,902028	16,499085
9	17,518508	18,284708	19,085855	19,923413	20,798902
10	21,321469	22,393108	23,521309	24,708862	25,958682
11	25,732904	27,199937	28,755144	30,403546	32,150419
12	30,850169	32,823926	34,931070	37,180220	39,580502
13	36,786196	39,403993	42,218663	45,244461	48,496603
14	43,671987	47,102672	50,818022	54,840909	59,195923
15	51,659505	56,110126	60,965266	66,260682	72,035108
16	60,925026	66,648848	72,939014	79,850211	87,442129
17	71,673030	78,979152	87,068036	96,021751	105,930555
18	84,140715	93,405608	103,740283	115,265884	128,116666
19	98,603230	110,284561	123,413534	138,166402	154,740000
20	115,379747	130,032936	146,627970	165,418018	186,688000
21	134,840506	153,138535	174,021005	197,847442	225,025600
22	157,414987	180,172086	206,344785	236,438456	271,030719
23	183,601385	211,801341	244,486847	282,361762	326,236863
24	213,977607	248,807569	289,494479	337,010497	392,484236
25	249,214024	292,104856	342,603486	402,042491	471,981083
26	290,088267	342,762681	405,272113	479,430565	567,377300
27	337,502390	402,032337	479,221093	571,522372	681,852760
28	392,502773	471,377835	566,480890	681,111623	819,223312
29	456,303216	552,512066	669,447450	811,522831	984,067974
30	530,311731	647,439118	790,947991	966,712169	1181,881569

Додаток 5 (продовження)

Множники нарощування ануїтету: $\boldsymbol{FVIFA = S(n;r) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}}$

r / t	21 %	22 %	23 %	24 %
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	2,210000	2,220000	2,230000	2,240000
3	3,674100	3,708400	3,742900	3,777600
4	5,445661	5,524248	5,603767	5,684224
5	7,589250	7,739583	7,892633	8,048438
6	10,182992	10,442291	10,707939	10,980063
7	13,321421	13,739595	14,170765	14,615278
8	17,118919	17,762306	18,430041	19,122945
9	21,713892	22,670013	23,668950	24,712451
10	27,273809	28,657416	30,112809	31,643440
11	34,001309	35,962047	38,038755	40,237865
12	42,141584	44,873697	47,787669	50,894953
13	51,991317	55,745911	59,778833	64,109741
14	63,909493	69,010011	74,527964	80,496079
15	78,330487	85,192213	92,669396	100,815138
16	95,779889	104,934500	114,983357	126,010772
17	116,893666	129,020090	142,429529	157,253357
18	142,441336	158,404510	176,188321	195,994162
19	173,354016	194,253503	217,711635	244,032761
20	210,758360	237,989273	268,785311	303,600624
21	256,017615	291,346913	331,605932	377,464774
22	310,781315	356,443234	408,875297	469,056320
23	377,045391	435,860746	503,916615	582,629836
24	457,224923	532,750110	620,817437	723,460997
25	554,242157	650,955134	764,605447	898,091636
26	671,633009	795,165264	941,464700	1114,633629
27	813,675941	971,101622	1159,001581	1383,145700
28	985,547889	1185,743978	1426,571945	1716,100668
29	1193,512946	1447,607654	1755,683492	2128,964828
30	1445,150664	1767,081337	2160,490695	2640,916387

Додаток 5 (продовження)

Множники нарощування ануїтету: $FVIFA = S(n;r) = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

r / t	25%	26%
1	1,000000	1,000000
2	2,250000	2,260000
3	3,812500	3,847600
4	5,765625	5,847976
5	8,207031	8,368450
6	11,258789	11,544247
7	15,073486	15,545751
8	19,841858	20,587646
9	25,802322	26,940434
10	33,252903	34,944947
11	42,566129	45,030633
12	54,207661	57,738598
13	68,759576	73,750633
14	86,949470	93,925798
15	109,686838	119,346505
16	138,108547	151,376596
17	173,635684	191,734511
18	218,044605	242,585484
19	273,555756	306,657710
20	342,944695	387,388715
21	429,680869	489,109781
22	538,101086	617,278324
23	673,626358	778,770688
24	843,032947	982,251067
25	1054,791184	1238,636345
26	1319,488980	1561,681794
27	1650,361225	1968,719061
28	2063,951531	2481,586016
29	2580,939414	3127,798381
30	3227,174268	3942,025959

Додаток 6

Множники дисконтування ануїтету: $PVIFA = A(n;r) = \dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

r / t	1%	2%	3%	4%	5%
1	0,990099	0,980392	0,970874	0,961538	0,952381
2	1,970395	1,941561	1,913470	1,886095	1,859410
3	2,940985	2,883883	2,828611	2,775091	2,723248
4	3,901966	3,807729	3,717098	3,629895	3,545951
5	4,853431	4,713460	4,579707	4,451822	4,329477
6	5,795476	5,601431	5,417191	5,242137	5,075692
7	6,728195	6,471991	6,230283	6,002055	5,786373
8	7,651678	7,325481	7,019692	6,732745	6,463213
9	8,566018	8,162237	7,786109	7,435332	7,107822
10	9,471305	8,982585	8,530203	8,110896	7,721735
11	10,367628	9,786848	9,252624	8,760477	8,306414
12	11,255077	10,575341	9,954004	9,385074	8,863252
13	12,133740	11,348374	10,634955	9,985648	9,393573
14	13,003703	12,106249	11,296073	10,563123	9,898641
15	13,865053	12,849264	11,937935	11,118387	10,379658
16	14,717874	13,577709	12,561102	11,652296	10,837770
17	15,562251	14,291872	13,166118	12,165669	11,274066
18	16,398269	14,992031	13,753513	12,659297	11,689587
19	17,226008	15,678462	14,323799	13,133939	12,085321
20	18,045553	16,351433	14,877475	13,590326	12,462210
21	18,856983	17,011209	15,415024	14,029160	12,821153
22	19,660379	17,658048	15,936917	14,451115	13,163003
23	20,455821	18,292204	16,443608	14,856842	13,488574
24	21,243387	18,913926	16,935542	15,246963	13,798642
25	22,023156	19,523456	17,413148	15,622080	14,093945
26	22,795204	20,121036	17,876842	15,982769	14,375185
27	23,559608	20,706898	18,327031	16,329586	14,643034
28	24,316443	21,281272	18,764108	16,663063	14,898127
29	25,065785	21,844385	19,188455	16,983715	15,141074
30	25,807708	22,396456	19,600441	17,292033	15,372451

Додаток 6 (продовження)

Множники дисконтування ануїтету: $\boldsymbol{PVIFA = A(n;r) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$

r / t	6%	7 %	8%	9%	10%
1	0,943396	0,934579	0,925926	0,917431	0,909091
2	1,833393	1,808018	1,783265	1,759111	1,735537
3	2,673012	2,624316	2,577097	2,531295	2,486852
4	3,465106	3,387211	3,312127	3,239720	3,169865
5	4,212364	4,100197	3,992710	3,889651	3,790787
6	4,917324	4,766540	4,622880	4,485919	4,355261
7	5,582381	5,389289	5,206370	5,032953	4,868419
8	6,209794	5,971299	5,746639	5,534819	5,334926
9	6,801692	6,515232	6,246888	5,995247	5,759024
10	7,360087	7,023582	6,710081	6,417658	6,144567
11	7,886875	7,498674	7,138964	6,805191	6,495061
12	8,383844	7,942686	7,536078	7,160725	6,813692
13	8,852683	8,357651	7,903776	7,486904	7,103356
14	9,294984	8,745468	8,244237	7,786150	7,366687
15	9,712249	9,107914	8,559479	8,060688	7,606080
16	10,105895	9,446649	8,851369	8,312558	7,823709
17	10,477260	9,763223	9,121638	8,543631	8,021553
18	10,827603	10,059087	9,371887	8,755625	8,201412
19	11,158116	10,335595	9,603599	8,950115	8,364920
20	11,469921	10,594014	9,818147	9,128546	8,513564
21	11,764077	10,835527	10,016803	9,292244	8,648694
22	12,041582	11,061240	10,200744	9,442425	8,771540
23	12,303379	11,272187	10,371059	9,580207	8,883218
24	12,550358	11,469334	10,528758	9,706612	8,984744
25	12,783356	11,653583	10,674776	9,822580	9,077040
26	13,003166	11,825779	10,809978	9,928972	9,160945
27	13,210534	11,986709	10,935165	10,026580	9,237223
28	13,406164	12,137111	11,051078	10,116128	9,306567
29	13,590721	12,277674	11,158406	10,198283	9,369606
30	13,764831	12,409041	11,257783	10,273654	9,426914

Додаток 6 (продовження)

Множники дисконтування ануїтету: $\boldsymbol{PVIFA = A(n;r) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$

r / t	11 %	12%	13%	14%	15%
1	0,900901	0,892857	0,884956	0,877193	0,869565
2	1,712523	1,690051	1,668102	1,646661	1,625709
3	2,443715	2,401831	2,361153	2,321632	2,283225
4	3,102446	3,037349	2,974471	2,913712	2,854978
5	3,695897	3,604776	3,517231	3,433081	3,352155
6	4,230538	4,111407	3,997550	3,888668	3,784483
7	4,712196	4,563757	4,422610	4,288305	4,160420
8	5,146123	4,967640	4,798770	4,638864	4,487322
9	5,537048	5,328250	5,131655	4,946372	4,771584
10	5,889232	5,650223	5,426243	5,216116	5,018769
11	6,206515	5,937699	5,686941	5,452733	5,233712
12	6,492356	6,194374	5,917647	5,660292	5,420619
13	6,749870	6,423548	6,121812	5,842362	5,583147
14	6,981865	6,628168	6,302488	6,002072	5,724476
15	7,190870	6,810864	6,462379	6,142168	5,847370
16	7,379162	6,973986	6,603875	6,265060	5,954235
17	7,548794	7,119630	6,729093	6,372859	6,047161
18	7,701617	7,249670	6,839905	6,467420	6,127966
19	7,839294	7,365777	6,937969	6,550369	6,198231
20	7,963328	7,469444	7,024752	6,623131	6,259331
21	8,075070	7,562003	7,101550	6,686957	6,312462
22	8,175739	7,644646	7,169513	6,742944	6,358663
23	8,266432	7,718434	7,229658	6,792056	6,398837
24	8,348137	7,784316	7,282883	6,835137	6,433771
25	8,421745	7,843139	7,329985	6,872927	6,464149
26	8,488058	7,895660	7,371668	6,906077	6,490564
27	8,547800	7,942554	7,408556	6,935155	6,513534
28	8,601622	7,984423	7,441200	6,960662	6,533508
29	8,650110	8,021806	7,470088	6,983037	6,550877
30	8,693793	8,055184	7,495653	7,002664	6,565980

Додаток 6 (продовження)

Множники дисконтування ануїтету: $\boldsymbol{PVIFA = A(n;r) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$

r / t	16%	17 %	18%	19%	20%
1	0,862069	0,854701	0,847458	0,840336	0,833333
2	1,605232	1,585214	1,565642	1,546501	1,527778
3	2,245890	2,209585	2,174273	2,139917	2,106481
4	2,798181	2,743235	2,690062	2,638586	2,588735
5	3,274294	3,199346	3,127171	3,057635	2,990612
6	3,684736	3,589185	3,497603	3,409777	3,325510
7	4,038565	3,922380	3,811528	3,705695	3,604592
8	4,343591	4,207163	4,077566	3,954366	3,837160
9	4,606544	4,450566	4,303022	4,163332	4,030967
10	4,833227	4,658604	4,494086	4,338935	4,192472
11	5,028644	4,836413	4,656005	4,486500	4,327060
12	5,197107	4,988387	4,793225	4,610504	4,439217
13	5,342334	5,118280	4,909513	4,714709	4,532681
14	5,467529	5,229299	5,008062	4,802277	4,610567
15	5,575456	5,324187	5,091578	4,875863	4,675473
16	5,668497	5,405288	5,162354	4,937700	4,729561
17	5,748704	5,474605	5,222334	4,989664	4,774634
18	5,817848	5,533851	5,273164	5,033331	4,812195
19	5,877455	5,584488	5,316241	5,070026	4,843496
20	5,928841	5,627767	5,352746	5,100862	4,869580
21	5,973139	5,664758	5,383683	5,126775	4,891316
22	6,011326	5,696375	5,409901	5,148550	4,909430
23	6,044247	5,723397	5,432120	5,166849	4,924525
24	6,072627	5,746493	5,450949	5,182226	4,937104
25	6,097092	5,766234	5,466906	5,195148	4,947587
26	6,118183	5,783106	5,480429	5,206007	4,956323
27	6,136364	5,797526	5,491889	5,215132	4,963602
28	6,152038	5,809851	5,501601	5,222800	4,969668
29	6,165550	5,820386	5,509831	5,229243	4,974724
30	6,177198	5,829390	5,516806	5,234658	4,978936

Додаток 6 (продовження)

Множники дисконтування ануїтету: $\boldsymbol{PVIFA = A(n;r) = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}}$

r / t	21 %	22%	23 %	24%
1	0,826446	0,819672	0,813008	0,806452
2	1,509460	1,491535	1,473990	1,456816
3	2,073934	2,042241	2,011374	1,981303
4	2,540441	2,493641	2,448272	2,404277
5	2,925984	2,863640	2,803473	2,745384
6	3,244615	3,166918	3,092254	3,020471
7	3,507946	3,415506	3,327036	3,242316
8	3,725576	3,619268	3,517916	3,421222
9	3,905434	3,786285	3,673102	3,565502
10	4,054078	3,923184	3,799270	3,681856
11	4,176924	4,035397	3,901846	3,775691
12	4,278450	4,127375	3,985240	3,851363
13	4,362355	4,202766	4,053041	3,912390
14	4,431698	4,264562	4,108163	3,961605
15	4,489007	4,315215	4,152978	4,001294
16	4,536369	4,356734	4,189413	4,033302
17	4,575512	4,390765	4,219035	4,059114
18	4,607861	4,418660	4,243118	4,079931
19	4,634596	4,441525	4,262698	4,096718
20	4,656691	4,460266	4,278616	4,110257
21	4,674951	4,475628	4,291558	4,121175
22	4,690042	4,488220	4,302079	4,129980
23	4,702514	4,498541	4,310634	4,137080
24	4,712822	4,507001	4,317588	4,142807
25	4,721340	4,513935	4,323243	4,147425
26	4,728380	4,519619	4,327839	4,151149
27	4,734199	4,524278	4,331577	4,154152
28	4,739007	4,528096	4,334615	4,156575
29	4,742981	4,531227	4,337086	4,158528
30	4,746265	4,533792	4,339094	4,160103

Додаток 6 (продовження)

Множники дисконтування ануїтету: $PVIFA = A(n;r) = \dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

r / t	25%	26%	27%	28%
1	0,800000	0,793651	0,787402	0,781250
2	1,440000	1,423532	1,407403	1,391602
3	1,952000	1,923438	1,895593	1,868439
4	2,361600	2,320189	2,279994	2,240968
5	2,689280	2,635071	2,582673	2,532006
6	2,951424	2,884977	2,821002	2,759380
7	3,161139	3,083315	3,008663	2,937015
8	3,328911	3,240726	3,156428	3,075793
9	3,463129	3,365656	3,272778	3,184214
10	3,570503	3,464806	3,364392	3,268917
11	3,656403	3,543497	3,436529	3,335091
12	3,725122	3,605950	3,493330	3,386790
13	3,780098	3,655516	3,538055	3,427180
14	3,824078	3,694854	3,573272	3,458734
15	3,859263	3,726074	3,601001	3,483386
16	3,887410	3,750853	3,622836	3,502645
17	3,909928	3,770518	3,640028	3,517692
18	3,927942	3,786125	3,653565	3,529447
19	3,942354	3,798512	3,664225	3,538630
20	3,953883	3,808343	3,672618	3,545805
21	3,963107	3,816145	3,679227	3,551410
22	3,970485	3,822338	3,684430	3,555789
23	3,976388	3,827252	3,688528	3,559210
24	3,981111	3,831152	3,691754	3,561883
25	3,984888	3,834248	3,694295	3,563971
26	3,987911	3,836705	3,696295	3,565602
27	3,990329	3,838655	3,697870	3,566877
28	3,992263	3,840202	3,699110	3,567873
29	3,993810	3,841430	3,700087	3,568650
30	3,995048	3,842405	3,700856	3,569258

Додаток 7

Фінансові функції у *MS Excel 2003*

Примітка. Порядкові номери функцій відповідають послідовності їх розташування у довідковій системі *MS Excel,* а їх назви – відповідають версії програмного забезпечення. В інших версіях *MS Excel* перелік та назви функцій можуть відрізнятися.

№	Назва функції	Короткий опис функції
1.	НАКОПДОХОД	Повертає накопичений дохід по цінних паперах з періодичною виплатою відсотків
2.	НАКОПДОХОДПОГАШ	Повертає накопичений дохід по цінних паперах, відсоток по яких виплачується в строк вступу до сили
3.	АМОРУМ	Повертає величину амортизації для кожного періоду, використовуючи коефіцієнт амортизації
4.	АМОРУВ	Повертає величину амортизації для кожного звітного періоду
5.	ДНЕЙКУПОНДО	Повертає кількість днів між початком періоду купона і датою угоди
6.	ДНЕЙКУПОН	Повертає число днів в періоді купона, який містить дату угоди
7.	ДНЕЙКУПОНГІОСЛЕ	Повертає число днів від дати угоди до терміну наступного купона
8.	ДАТАКУПОНПОСЛЕ	Повертає наступну дату купона після дати угоди
9.	ЧИСЛКУПОН	Повертає кількість купонів, які можуть бути сплачені між датою угоди і терміном вступу до сили
10.	ДАТАКУПОНДО	Повертає попередню дату купона перед датою угоди
11.	ОБЩПЛАТ	Повертає загальну виплату, проведену між двома періодичними виплатами
12.	ОБЩДОХОД	Повертає загальну виплату по позиці між двома періодами
13.	ФУО	Повертає амортизацію майна на заданий період, використовуючи метод постійного обліку амортизації
14.	ДДОБ	Повертає величину амортизації майна для вказаного періоду при використанні методу двократного обліку амортизації або іншого явно вказаного методу
15.	СКИДКА	Повертає норму знижки для цінних паперів
16.	РУБЛЬ.ДЕС	Перетворить ціну в рублях, виражену у вигляді

		дробу, в ціну в рублях, виражену десятковим числом
17.	РУБЛЬ.ДРОБЬ	Перетворить ціну в рублях, виражену десятковим числом, у ціну в рублях, виражену у вигляді дробу
18.	ДЛИТ	Повертає щорічну тривалість дії цінних паперів з періодичними виплатами по відсотках
19.	ЭФФЕКТ	Повертає щорічні процентні ставки, що діють.
20.	БС	Повертає майбутнє значення внеску
21.	БЗРАСПИС	Повертає майбутнє значення початкової пропозиції після обліку ряду складних процентних ставок
22.	ИНОРМА	Повертає ставку дохідності повністю забезпеченого цінного паперу
23.	ПРПЛТ	Повертає величину виплати доходу на вкладення за даний період
24.	ВСД	Повертає внутрішню ставку дохідності (віддачі) для серії потоків грошових коштів
25.	ПРОЦПЛАТ	Обчислює виплати за вказаний період інвестиції
26.	МДЛИТ	Повертає модифіковану тривалість Маколея для цінних паперів з передбачуваною номінальною вартістю 100 рублів
27.	МВСД	Повертає внутрішню ставку дохідності, при якій позитивні і негативні грошові потоки мають різну ставку
28.	НОМИНАЛ	Повертає номінальну річну процентну ставку.
29.	КПЕР	Повертає загальну кількість періодів виплати для даного внеску
ЗО.	ЧПС	Повертає чисту приведену вартість інвестиції, заснованої на серії періодичних грошових потоків і ставці дисконтування
31.	ЦЕНАПЕРВНЕРЕГ	Повертає ціну за 100 рублів номінальної вартості цінних паперів з нерегулярним першим періодом
32.	ДОХОДПЕРВНЕРЕГ	Повертає дохід по цінних паперах з нерегулярним першим періодом
33.	ЦЕНАПОСЛНЕРЕГ	Повертає ціну за 100 рублів номінальної вартості цінних паперів з нерегулярним останнім періодом
34.	ДОХОДПОСЛНЕРЕГ	Повертає дохід по цінних паперах з нерегулярним останнім періодом
35.	ПЛТ	Повертає величину виплати за один період річної ренти

36.	ОСПЛТ	Повертає величину виплат на основний капітал для внеску в заданий період
37.	ЦЕНА	Повертає ціну за 100 рублів номінальної вартості цінних паперів, по яких проводиться періодична виплата відсотків
38.	ЦЕНАСКИДКА	Повертає ціну за 100 рублів номінальної вартості цінних паперів, на які зроблена знижка
39.	ЦЕНАПОГАШ	Повертає ціну за 100 рублів номінальної вартості цінних паперів, по яких виплачується дохід у момент вступу до сили
40.	ПС	Повертає приведену (до теперішнього моменту) вартість інвестиції
41.	СТАВКА	Повертає процентну ставку по ануїтету за один період
42.	ПОЛУЧЕНО	Повертає суму, отриману в строк набуття чинності повністю забезпечених цінних паперів
43.	АПЛ	Повертає величину безпосередньої амортизації майна за один період
44.	АСЧ	Повертає величину амортизації активу за даний період, розраховану методом «суми (річних) чисел»
45.	РАВНОКЧЕК	Повертає еквівалентний облігації дохід по казначейському чеку
46.	ЦЕНАКЧЕК	Повертає ціну за 100 рублів номінальної вартості для казначейського чека
47.	ДОХОДКЧЕК	Повертає дохід по казначейському чеку
48.	ПУО	Повертає величину амортизації майна для явно вказаного або відповідного періоду при використанні методу разового обліку амортизації
49.	ЧИСТВНДОХ	Повертає внутрішню ставку прибутковості запланованих неперіодичних грошових потоків
50.	ЧИСТНЗ	Повертає чисту поточну вартість інвестиції, що обчислюється на основі ряду надходжень готівки, яка не обов'язково є періодичною
51.	ДОХОД	Повертає дохід від цінних паперів, по яких проводяться періодичні виплати відсотків
52.	ДОХОДСКИДКА	Повертає річний дохід по цінних паперах, на які зроблена знижка. Приклад — казначейські чеки
53.	ДОХОДПОГАШ	Повертає річний дохід від цінних паперів, відсоток по яких виплачується в строк погашення

Навчальне видання

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

Укладачі:

Шебаніна Олена В’ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 6,939.
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.