МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

Економіко-математичні моделі в туризмі

Конспект лекцій
для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 242 «Туризм» денної форми навчання

Миколаїв
2021

УДК 338.48:519.86
Е45

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 30 серпня 2021 року, протокол № 1.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

Н. С. Ручинська – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

Е45 **Економіко-математичні моделі в туризмі** : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. - Миколаїв : МНАУ, 2020. - 135 с.

Конспект лекцій призначений для вивчення теоретичних та методологічних основ економіко-математичного дослідження якісних та кількісних закономірностей суспільно-економічних явищ та процесів, які пов’язані з туристичною сферою.

Містить навчальні матеріали з основних тем курсу «Економіко-математичні моделі в туризмі», що передбачені освітньо-професійною програмою «Туризм» початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти за спеціальністю 242 «Туризм», галузі знань 24 «Сфера обслуговування».

УДК 330.48:519.86

ЗМІСТ

Передмова

Курс дисципліни «Економіко-математичні моделі в туризмі» призначений для вивчення теоретичних та методологічних основ економіко-математичного дослідження якісних та кількісних закономірностей суспільно-економічних явищ та процесів, які пов’язані з туристичною сферою.

В основу курсу покладені питання, вивчення яких необхідне для розуміння принципів економіко-математичного моделювання економічних процесів та кількісного обґрунтування управлінських рішень. Містить загальну характеристику економіко-математичних методів і моделей, методи побудови оптимізаційних моделей та їх використання в туризмі, задачі теорії ігор та теорії графів.

Завдання курсу – вивчення здобувачами вищої освіти основних принципів та інструментарію постановки задач, методики побудови оптимізаційних моделей та методів їх розв’язування; формування практичних вмінь та навиків:

- дослідження кількісних взаємозв'язків та закономірностей розвитку економічних процесів;
- побудови та аналізу оптимізаційних моделей;
- розв’язування оптимізаційних задач у *MS Excel*;
- розв’язування задач про призначення, комівояжера, теорії ігор, динамічного програмування та теорії графів;
- застосування математичного апарату для дослідження реальних економічних процесів та прийняття оптимальних управлінських рішень в туристичній сфері.

Опанування тем дисципліни дозволяє сформувати визначену систему компетентностей та досягти очікуваних результатів навчання.

Посібник складено на основі ряду відомих підручників і посібників, зокрема [1,2,4,6,7,10]. Особливістю укладеного посібника є простота викладення теоретичного матеріалу на основі практичної його реалізації. Для успішного вивчення курсу «Економіко-математичні моделі в туризмі» здобувачам вищої освіти достатньо базових знань з розділів вищої математики, інформатики та комп’ютерної техніки.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ В ТУРИЗМІ

Тема 1.1. Економіко-математичні методи та моделі. Основи їх класифікації та основні принципи системного аналізу

План

1. Предмет та задачі дисципліни.
2. Поняття економіко-математичної моделі. Сутність, мета і задачі моделювання. Моделювання в туризмі.
3. Класифікація економіко-математичних моделей.
4. Методика і технологічні етапи побудови економіко-математичних моделей.
5. Системний підхід у моделюванні.

1. Предмет та задачі дисципліни

Економіко-математичне моделювання є одним із головних напрямків розвитку економічної науки та її практичних застосувань. Це самостійний напрям в науці, який об'єднує в єдине ціле окремі аспекти математики, економіки і кібернетики, є комплексним методом дослідження, синтезом економічних та математичних знань.

Мета – формування цілісних теоретичних знань з економіко-математичних методів та моделей, вироблення практичних навичок та вмінь з формалізації задач управління, створення математичних моделей, пошуку екстремуму функцій з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів.

Предмет – методи та моделі оптимізації статичних детермінованих та стохастичних систем та їх застосування до економічних задач, у тому числі за допомогою програмного забезпечення.

Використання економіко-математичне моделювання в економічних дослідженнях – необхідна умова для успішного розв'язування задач, які виникають в процесі перетворень в ринковій економіці. Економіко-математичні моделі є основою для реального врахування різноманітних варіантів розвитку економічних процесів, а в поєднанні з сучасними комп'ютерними технологіями – найбільш ефективним засобом їх реалізації.

2. Поняття економіко-математичної моделі. Сутність, мета і задачі моделювання. Моделювання в туризмі.

Моделювання як науковий метод, що базується на розробці й дослідженні моделей, явищ різної природи, в даний час широко використовується для розв'язання багатьох науково-технічних та економічних задач.

Термін ***"модель"*** (від лат. ***"modulus"***) означає зразок, норма, міра. ***Модель*** – це об'єкт, що заміщує оригінал і відображає найважливіші ознаки і властивості оригіналу для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез. У загальному розумінні ***модель*** – це пізнання. Іншим визначенням терміну ***"модель"*** є образ, зображення або прообраз будь-якого об'єкта або системи об'єктів, що використовується за певних умов як „замінник".

Під ***економіко-математичною моделлю*** розуміють концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь.

Об'єктом **моделювання** в економіці є економічна система. За своїм визначенням будь-яка економічна модель абстрактна, а отже неповна. Проте, модель повинна відтворювати найхарактерніші ознаки системи, що вивчається (прототипу), тобто ***основна вимога*** до моделей – ***адекватність*** реальній дійсності. Модель вважається адекватною об'єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому щодо об'єкта дослідження середовищі.

Моделювання – це вияв властивостей будь-якого об'єкта, процесу або явища за допомогою його моделі.

Моделювання є процесом побудови, вивчення і застосування моделей.

Моделювати можна об'єкт будь-якої природи і складності. Тому теза про принципову неможливість моделювання рівносильна твердженню про те, що неможливо пізнати об'єкт.

Розрізняють такі види моделювання:

• ***вербальне*** – використовується розмовна мова;

• ***геометричне*** – здійснюється на макетних або об'єктних моделях (передають просторові форми);

• ***фізичне* (аналогове)** – застосовується для вивчення фізико-хімічних, технологічних, біологічних, генних процесів, що відбуваються в оригіналі;

• ***інформаційне*** – схеми, графіки, креслення, формули, рівняння, нерівності. Важлива роль в цьому виді моделювання належить математичному та комп'ютерному моделюванню.

Математична модель – це абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношенням між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь і нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється.

Комп'ютерна модель записується мовою програмування і виконується перетворенням знаків в електричні сигнали із наступним зворотнім перетворенням сигналів на мову, що зрозуміла людині, відображенням символів алфавіту і графіків на дисплеї або на папері.

Мета й задачі моделювання:

- дослідження та вивчення на моделях економічних процесів і законів;
- передбачення наслідків рішень, що приймаються;
- автоматизація розрахунків у прогнозуванні, плануванні, управлінні, підготовці рішень.

Ефективність моделювання проявляється в тому, що:

1. Модель зручніша для дослідження, оскільки дозволяє виключити вплив другорядних та випадкових факторів.
2. Заміна натурних експериментів модельними запобігає руйнуванням реальних економік за умов негативних результатів експериментів. Приклади теоретично необгрунтованих, не перевірених моделюванням експериментів багаточисленні: регулювання цін, податкових ставок, курсів валют тощо.
3. Зниження трудомісткості і строків розробки аналізу, прогнозів, планів.

Роль прикладних економіко-математичних досліджень виражається через такі функції:

- удосконалення системи економічної інформації;
- інтенсифікація і підвищення точності економічних розрахунків;
- поглиблення кількісного аналізу економічних проблем;
- розв'язання принципово нових економічних задач.

3. Класифікація економіко-математичних моделей

1. За цільовим призначенням:

- ***теоретико-аналітичні*** – призначені для вивчення загальних закономірностей і властивостей економічної системи, що розглядається;
- ***прикладні*** – дають можливість визначати й оцінювати параметри функціонування конкретних економічних об'єктів і формулювати рекомендації для прийняття практичних господарських рішень (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління).

2. За масштабами досліджуваного економічного об'єкта:

- ***макроекономічні;***
- ***мікроекономічні.***

3. За способом відображення чинника часу:

- ***статичні*** – значення параметрів моделі належать до одного (фіксованого) моменту часу;
- ***динамічні*** – параметри змінюються в часі.

4. За ознакою способу відображення часу:

- ***неперервні*** – ті, в яких час розглядається як неперервний фактор;
- ***дискретні*** –- усі змінні моделі набувають дискретного значення;
- ***змішані.***

5. За способом відображення причинно-наслідкових зв'язків:

- ***детерміновані*** – не враховують елементів випадковості, наявні жорсткі функціональні зв'язки;
- ***стохастичні*** – враховують випадкові процеси. Використовують методи й інструменти теорії ймовірностей і математичної статистики;

- *теоретико-ігрові моделі* – враховують вплив факторів, що мають більш високу ступінь невизначеності, ніж стохастичні.

6. За формою математичних залежностей:

- *лінійні;*

- *нелінійні* (використовують для більшості залежностей в економіці).

7. За родом економічних задач, що вирішуються:

- ***фінансові;***

- ***виробничі;***

- ***транспортні;***

- ***управління запасами;***

- ***масового обслуговування;***

- ***формування й оцінки ефективності.***

8. За ступенем повноти подібності:

- ***ізоморфні*** – абсолютно подібні об'єкту, який досліджується;

- ***гомоморфні*** – частково подібні.

9. Щодо характеру використання:

- ***моделі без керування (дескриптивні моделі).*** Ці моделі в основному призначені для дослідження об'єктів шляхом встановлення кількісних співвідношень між їх характеристиками або параметрами (криві зростання, регресійні моделі). Вони лише пояснюють факти, чи дають прогноз.

- ***оптимізаційні моделі.*** Їх особливість – цілеспрямованість рішення та оцінка ефективності (якості) різних варіантів рішення. Вони передбачають вияв мети керування й побудову цільової функції, яка задає бажане значення певних параметрів (властивостей) об'єкта, що виражені в математичній формі.

Суть отримання оптимального рішення за допомогою моделі полягає в наступному. Нехай, відома мета управління (цільова функція). Вона може бути досягнута за різних значень параметрів даного об'єкта або різних варіантах рішення за умов існуючих обмежень. Є можливість оцінити ефективність (міру досягнення мети) кожного варіанта. Тоді отримання оптимального рішення означає вибір із множини можливих рішень одного, що забезпечує максимальну ефективність (наприклад, задачі лінійного, нелінійного програмування, транспортна задача тощо).

- ***ігрові моделі*** – досліджуються випадки, коли для об'єкта моделювання є характерним наявність сил, що протидіють, або невизначеності параметрів властивостей поведінки. Ці моделі розглядаються теорією ігор (теорія математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту або невизначеності. Під конфліктом потрібно розуміти будь-які розбіжності, що виникають внаслідок неспівпадіння інтересів).

- ***імітаційні моделі*** – є достатньо складними комп'ютерними програмами, що описують поведінку компонентів економічного об'єкта і взаємодію між ними. Розрахунки за цими програмами за наявності вихідних даних дозволяють імітувати динамічні процеси, що відбуваються в реальному об'єкті.

10. За тривалістю періоду, що розглядається:

- ***короткотермінові*** (до 1 року);

- ***середньотермінові*** (до 5 років);

- ***довготермінові*** (від 5 років).

4. Методика і технологічні етапи побудови економіко-математичних моделей

1. Визначення економічної проблеми і проблемної ситуації (наприклад, великі витрати виробництва, зменшення прибутку, отримання збитків, спад обсягу продаж, переповнені склади, інфляція тощо).

2. Постановка задачі.

2.1. Визначення об'єкта моделювання (підприємство, фінансова установа, продукт, фінансовий процес, сектор економіки).

2.2. Дослідження зовнішнього середовища об'єкта.

2.3. Визначення мети моделювання та критеріїв досягнення мети.

3. Формалізація задачі, тобто введення у змістовний опис математичних символів і позначень, математичний запис мети моделювання.

4. Вибір методу моделювання.

Найпоширенішими та ефективними математичними методами, що використовуються в економічному моделюванні та фінансовій аналітиці, є:

- диференціальне числення;
- теорія ймовірностей та математична статистика;
- математичне програмування (лінійне, нелінійне, динамічне, цілочислове);
- теорія графів, сіткові методи;
- теорія ігор;
- імітаційне моделювання;
- статистичні методи;
- регресійні методи;
- аналіз часових рядів;
- прогнозування;
- теорія керування запасами;
- теорія масового обслуговування.

5. Процес побудови моделі.

5.1. Визначення її структури, змінних, цільових функцій і критеріїв.

5.2. Розробка комп'ютерної моделі.

6. Процес моделювання.

6.1. Підготовка плану числових та імітаційних експериментів.

6.2. Підготовка вихідних даних.

6.3. Комп'ютерні розрахунки.

6.4. Оцінка результатів моделювання і налагодження моделі.

7. Практичне використання моделі.

5. Системний підхід у моделюванні

Система – це сукупність елементів, що становлять одне ціле, спрямоване на досягнення однієї мети.

Досліджувану множину елементів можна розглядати як систему, якщо вона характеризується такими ознаками:

1) цілісність системи, тобто принципова не зведеність системи до суми властивостей окремих її елементів;

2) наявність цілей і критеріїв щодо дослідження даної множини елементів;

3) наявність більш загальної – зовнішньої системи, яку називають "надсистемою" чи "середовищем";

4) можливість виділення в даній системі певних частин („підсистем").

У загальному вигляді поняття **«економічна система»** характеризується: а) множиною елементів; б) зв'язками між ними; в) цілісним характером економічного об'єкта, явища або процесу.

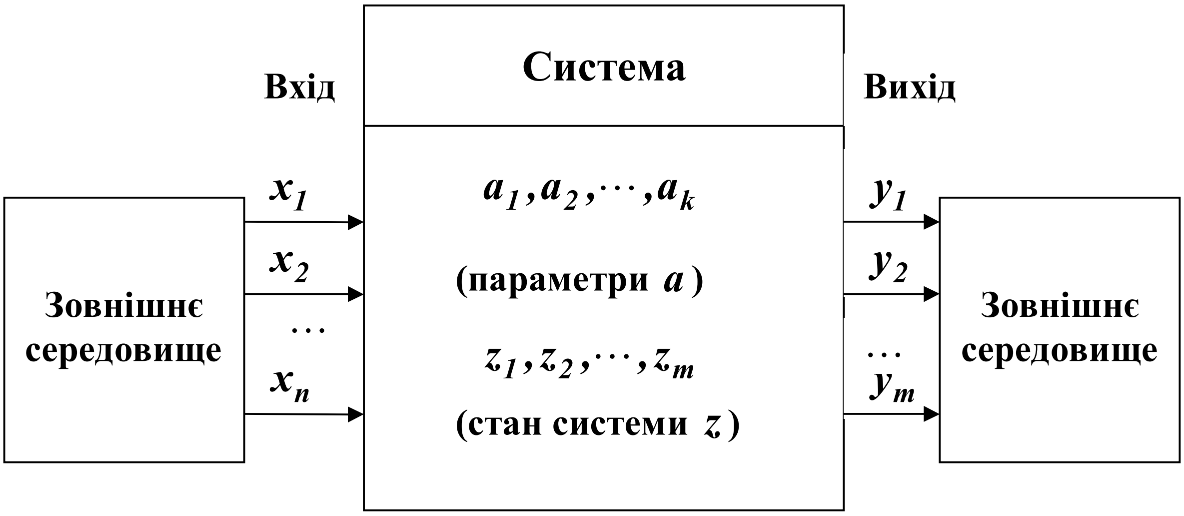

Рис. 1.1. Узагальнена модель економічної системи

Максимально спрощена модель (рис. 1.1) відображає дві важливі властивості системи – цілісність і відокремленість від зовнішнього середовища. Однак, економічна система не є ізольованою від зовнішнього середовища, а пов'язана з ним зв'язками, через які здійснює певний вплив, реалізуючі своє призначення, мету (виходи системи y_i). Крім цього, повинні існувати зв'язки іншого типу, що забезпечують її використання, тобто дію на систему з боку середовища (входи системи x_i).

Задаючи певні значення вхідних та вихідних факторів, залежності між змінними, за допомогою економіко-математичних методів здійснюють дослідження моделі за необхідними показниками.

Системний підхід – один із головних напрямків методології спеціального наукового пізнання економічного розвитку та соціальної практики, мета і завдання якого полягають у дослідженнях певних економічних об'єктів як складних систем.

Системний підхід у моделюванні фінансових процесів – це сукупність методів і прийомів оцінки властивостей фінансових об'єктів при їх вивченні і моделюванні.

Системний підхід дозволяє проводити аналіз різних варіантів і способів моделювання, досліджувати застосовуваність того чи іншого математичного апарату. Використання системного підходу дає більше шансів на побудову ефективної економіко-математичної моделі.

Основні принципи системного підходу:

Принцип остаточної (глобальної, генеральної) мети – функціонування та розвиток економічної системи і всіх її складових повинні спрямовуватись на досягнення певної глобальної (генеральної) мети. Всі зміни, вдосконалення та управління системою потрібно оцінювати з такої точки зору.

Принципи єдності, зв'язності і модульності – економічна система розглядається «ззовні» як єдине ціле (принцип єдності), водночас є необхідним «погляд зсередини», дослідження окремих взаємодіючих складових економічної системи (принцип зв'язності). Принцип модульності передбачає розгляд замість складових системи її входів і виходів, тобто абстрагування від зайвої деталізації за умови збереження можливості адекватного описання системи.

Принцип ієрархії – виявлення або створення в економічній системі ієрархічних зв'язків, модулів, цілей. В ієрархічних системах дослідження, як правило, розпочинається з «вищих» рівнів ієрархії, а в разі її відсутності дослідник повинен чітко визначити, в якій послідовності розглядатимуться складові системи та напрямок конкретизації уявлень.

Принцип функціональності – структура економічної системи тісно пов'язана та обумовлюється її функціями, отже, створювати та досліджувати систему необхідно після визначення її функцій. У разі появи нових функцій системи доцільно змінювати її структуру, а не намагатися „прив'язати" цю функцію до старої структури.

Принцип розвитку – здатність до вдосконалення, розвитку економічної системи за умови збереження певних якісних властивостей. При створенні та дослідженні штучних систем межі розширення функцій системи та її модернізація повинні визначатись їхньою доцільністю. Здатність до розвитку штучних систем визначається наявністю таких властивостей, як самонавчання, самоорганізація, штучний інтелект.

Принцип невизначеності – у більшості випадків досліджується економічна система, про яку не все відомо, поведінка якої не завжди зрозуміла, невідома її структура, непередбачуваний перебіг процесів, невідомі зовнішні впливи, тощо.

Принцип децентралізації – розумний компроміс між повною централізацією економічної системи та здатністю реагувати на вплив зовнішнього середовища окремими частинами системи. Співвідношення між централізацією та децентралізацією визначається метою та призначенням системи. Повністю централізована економічна система є негнучкою, неспроможною швидко реагувати і пристосовуватися до змінних умов. У економічних системах з високим ступенем децентралізації складніше узгоджувати функціонування елементів з точки зору досягнення глобальної мети. При цьому необхідно мати стійкий механізм регулювання, який не дозволяє значно відхилятися від поведінки, що веде до досягнення спільної мети. За відсутності такого механізму наявність певного рівня централізації є об'єктивною необхідністю, але ступінь централізації повинен бути мінімальним, і це забезпечить досягнення глобальної мети.

Системний підхід містить такі дії:

1. Вивчити й виділити усі головні та другорядні риси, а також властивості об'єкта.
2. Розмістити їх один за одним у певній послідовності.
3. Виявити взаємозв'язки, дати характеристику зв'язків.
4. Чітко поставити мету дослідження або моделювання об'єкта (побудувати дерево цілей).
5. Визначити критерії (показники) досягнення цілей.
6. Розробити методи й засоби досягнення мети.
7. Визначити необхідні ресурси.
8. Побудувати план діяльності із досягнення мети моделювання об'єкта.
9. Здійснити моделювання.

Тема 1.2. Оптимізаційні економіко-математичні моделі в туризмі

План

1. Загальна постановка оптимізаційної задачі.
2. Задача планування виробництва (використання ресурсів).
3. Задача структурної оптимізації (складання раціону).
4. Задача раціонального використання виробничих потужностей.
5. Задача оптимального розкрою матеріалів.

1. Загальна постановка оптимізаційної задачі

У загальному виді математична постановка оптимізаційної (екстремальної) задачі полягає у визначення найбільшого (максимального) або найменшого (мінімального) значення (екстремуму) цільової функції $F(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ за умов

$$q_i(x_1; x_2; \ldots; x_n) \le b_i,\ i = \overline{1,m},$$

де $F -$ задана функція цілі, екстремум якої необхідно знайти;

$q_i -$ задані функції, що формують систему обмежень задачі;

$b_i -$ деякі дійсні числа.

Залежно від властивостей функцій F і q оптимізаційне моделювання можна розглядати як низку самостійних дисциплін, що займаються вивченням і розробкою методів вирішення певних класів задач.

Основні етапи оптимізаційного моделювання

1. Побудова економіко-математичної моделі.
2. Пошук оптимального рішення за допомогою одного з математичних методів.
3. Впровадження отриманих результатів у практику управління досліджуваною екобномічною системою.

Алгоритм розв'язання задач на комп'ютері

1. Формалізація обчислювального процесу.
2. Підготовка й введення вхідних даних.
3. Розв'язання завдання на комп'ютері.
4. Аналіз отриманих результатів.

Інструментом для розв'язування оптимізаційних задач в табличному редакторі *Ms Excel* є надбудова *ПОИСК РЕШЕНИЙ*.

2. Задача планування виробництва (використання ресурсів)

Таблиця 2.1

Ресурси	Продукція				Запаси ресурсів
	P_1	P_2	…	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
S_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибуток	c_1	c_2	…	c_n	
Верхня межа продукції	d_1	d_2	…	d_n	

Припустимо, що існує m типів ресурсів $S_1, S_2, \dots, S_m$, з яких потрібно виробити n видів продукції $P_1, P_2, \dots, P_n$. Відомі запаси ресурсів $b_1, b_2, \dots, b_m$ і задано вектор $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, де $c_j -$прибуток від продажу одиниці продукції $j-$го виду продукції, та матрицю $A = (a_{ij})_{m \times n}$, де $a_{ij} -$кількість ресурсів $i-$го типу, що йде на виготовлення одиниці $j-$го виду продукції. Задано також верхні межі кількості випуску кожного виду продукції $d_1, d_2, \dots, d_n$ (табл. 2.1).

Потрібно так організувати виготовлення продукції з наявних ресурсів, щоб максимізувати прибуток від її продажу.

Для математичної постановки задачі введемо змінну $x_j -$ кількість випуску продукції $j-$го виду.

Тоді економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$0 \le x_j \le d_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

3. Задача структурної оптимізації (складання раціону)

Таблиця 2.2

Поживні речовини	Продукти				Щоденна потреба
	P_1	P_2	…	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
S_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Вартість	c_1	c_2	…	c_n	
Верхня межа	d_1^{max}	d_2^{max}	…	d_n^{max}	
Нижня межа	d_1^{min}	d_2^{min}	…	d_n^{min}	

Припустимо, що для складання раціону використовується n різних видів продуктів $P_1, P_2, \ldots, P_n$. У цих продуктах міститься m різних типів поживних речовин. Мінімальна добова кількість поживних речовин становить $b_1, b_2, \ldots, b_m$ одиниць. Задано вектор $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, де c_j – вартість одиниці j – го продукту, та матрицю $A = (a_{ij})_{m \times n}$, де a_{ij} – кількість поживних речовин i – го типу, які містяться в одиниці j – го продукту. Відомі також верхні та нижні межі кількості продуктів – $d_1^{max}, d_2^{max}, \ldots, d_n^{max}$ та $d_1^{min}, d_2^{min}, \ldots, d_n^{min}$ (табл. 2.2).

Потрібно так скласти раціон, щоб мінімізувати загальні витрати і забезпечити необхідною кількістю поживних речовин на добу. Для математичної постановки задачі введемо змінну x_j – кількість продукту j – го виду.

Тоді економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{1, m};$$

$$d_j^{min} \le x_j \le d_j^{max}, \quad j = \overline{1, n}.$$

До задачі про складання раціону зводяться також різні задачі про виготовлення сумішей (наприклад, пального).

Якщо кінцевий продукт має бути сумішшю вихідних компонентів, то необхідно прийняти як одиницю вимірювання для змінних долі (або відсотки) і ввести додаткове обмеження: $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, тобто сума всіх компонентів у кінцевій суміші має дорівнювати 1 (або 100%).

4. Задача раціонального використання виробничих потужностей

Таблиця 2.3

Верстати	Витрати верстата на виготовлення продукції				Продуктивність праці верстата				Час роботи верстата
	P_1	P_2	…	P_k	P_1	P_2	…	P_k	
S_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1k}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1k}	T_1
S_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	T_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
S_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mk}	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mk}	T_m
Кількість продукції					n_1	n_2	…	n_k	

Припустимо, що на підприємстві існує план виробництва продукції в деякому асортименті. Нехай $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – кількість продукції відповідного типу.

Ця продукція виготовляється на верстатах $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Час роботи кожного верстата обмежений значеннями $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Задані матриця $C = (c_{ij})_{m \times k}$, де c_{ij} – витрати i – го верстата під час виготовлення одиниці j – го типу продукції, та матрицю $A = (a_{ij})_{m \times k}$, де a_{ij} – продуктивність праці i – го верстата при виготовленні j – го типу продукції (табл. 2.3).

Потрібно так організувати виготовлення продукції, щоб мінімізувати сумарні витрати на виробництво її необхідного асортименту, не перевищивши час роботи кожного верстата.

Для математичної постановки задачі введемо матрицю $X = (x_{ij})_{m \times k}$, де x_{ij} – час роботи i – го верстата при виготовленні одиниці j – го типу продукції.

Тоді економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{ij} \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \le T_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = n_j, \quad j = \overline{1,k};$$

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,k}.$$

5. Задача оптимального розкрою матеріалів

Підприємство отримало напівфабрикати у вигляді m різних як за кількістю одиниць $b_1, b_2, \ldots, b_m$, так і за розмірами партій. У кожній партії напівфабрикат тільки одного розміру. Цей напівфабрикат необхідно розкроїти на заготовки, щоб максимізувати загальну кількість повних комплектів заготовок.

Відомо, що в один комплект заготовок s – го виду входить K_s штук полуфабрикатів $(s = \overline{1,l})$. Кожну одиницю напівфабрикату можна розкроїти на заготівки n різними засобами, при чому в розкрої i – ої партії j – м способом $(j = \overline{1,n})$ можна отримати a_{ijs} заготовок s – го виду.

Позначимо через x_{ij} кількість заготовок з i – ї партії напівфабрикатів, які заплановано розкроїти j – м способом, так що з i – ї партії за j – го способу розкрою буде виготовлено $a_{ijs} x_{ij}$ заготовок s – го виду; y – кількість повних комплектів заготовок.

Тоді економіко-математична модель оптимального розкрою матеріалу буде записана у вигляді максимізації кількості повних комплектів заготовок, що виражається цільовою функцією

$$Z = y \rightarrow max$$

за обмежень:

- за кількістю заготовок для складання числа комплектів

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijs} x_{ij} \geq y K_s \quad s = \overline{1,l};$$

- за кількістю заготовок в i – ї партії напівфабрикатів

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i, \quad i = \overline{1,m};$$

- за умови невід’ємності

$$y \geq 0; \; x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{i,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Тема 1.3. Задача про призначення

План

1. Постановка задачі оптимального призначення.
2. Поняття про редукцію у задачі на призначення.
3. Угорський метод розв'язання задачі про призначення.
4. Приклади розв'язання задачі про призначення.

1. Постановка задачі оптимального призначення

Нехай n робітників можуть виконувати n різних робіт, причому кожний робітник може виконувати тільки одну роботу. Відомі затрати c_{ij} виконання $i-$м робітником $j-$ї роботи. Розподілити робітників за роботами, щоб загальні затрати виконання робіт були мінімальними.

Можлива інша постановка задачі. Відома ефективність c_{ij} виконання $i-$м робітником $j-$ї роботи. Необхідно розподілити робітників за роботами, щоб загальна ефективність була максимальною.

Для математичної постановки задачі введемо бінарну змінну $x_{ij}-$ призначення особи A_i на роботу B_j:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{якщо } i-\text{й робітник призначений на } j-\text{у роботу}\\ 0, \text{у протилежному разі.}\end{cases}$$

Тоді економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to min(max);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \quad j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \quad i=\overline{1,n};$$

$$x_{ij}\geq 0, \quad i,j=\overline{1,n};$$

$$x_{ij}=\{0;1\}, \quad i,j=\overline{1,n}.$$

Перше обмеження означає, що $i-$робітник призначений на одну роботу, друге – на кожну $j-$ю роботу призначений один робітник.

Якщо кількість робітників не співпадає з кількістю робіт, то вводять або фіктивного робітника, або фіктивну роботу. Відповідні для них значення $c_{ij} = 0$.

Дану задача можна розглядати як транспортну, а отже розв’язати методом потенціалів. У випадку задачі на максимум, критерій оптимальності змінить знак на протилежний, тобто $u_i + v_j \geq c_{ij}$ для всіх незаповнених клітинок.

2. Поняття про редукцію у задачі на призначення

Редукція – це додавання (віднімання) постійної величини до (від) будь-якого рядка чи стовпчика матриці.

Покажемо, що оптимальний розв'язок задачі про призначення не зміниться при застосуванні редукції. Віднімемо від кожного $i-$го рядка та кожного $j-$го стовпчика постійні для відповідного рядка чи стовпчика значення p_i та q_j:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij};$$

$$Z'(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(c_{ij} - p_i - q_j\right) x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} q_i - \sum_{j=1}^{n} p_j = Z(x) - const.$$

Таким чином, редукція зменшує значення функції мети на постійну величину, що не приводить до зміни положення оптимального розв'язку.

3. Угорський метод розв’язання задачі про призначення

Даний метод використовує редукцію елементів матриці.

Розглянемо цей метод для задачі мінімізації затрат. У випадку задачі максимізації, необхідно помножити всі елементи матриці ефективності на (-1) та додати значення максимального елемента матриці вихідної умови задачі, а потім розв’язувати згідно розглянутого алгоритму.

Алгоритм угорського методу

1. Редукція рядків та стовпчиків матриці *C*

Послідовно в кожному з рядків матриці визначаємо мінімальний елемент та зменшуємо на це значення всі інші елементи відповідного рядка. В отриманій таким чином матриці таку ж процедуру виконуємо з кожним стовпчиком.

Метою цього кроку є отримання максимальної кількості нульових елементів в редукованій матриці.

2. Реалізація призначень

а). Послідовно переглядаючи рядки, визначаємо ті з них, в яких знаходиться рівно по одному невикресленому нульовому елементу. В кожному з таких рядків виконуємо призначення, яке відповідає цьому невикресленому нульовому елементу (призначені нулі відзначаємо кружечками). При виконанні призначення в кожному стовпчику, який відповідає призначеному нулеві, викреслюємо всі невикреслені раніше нульові елементи.

б). Послідовно переглядаємо стовпчики, визначаємо ті з них, в яких знаходиться рівно по одному нульовому елементу. В кожному з таких стовпчиків виконуємо призначення, що відповідає невикресленому нульовому елементу. При виконанні призначення в кожному рядкові, який відповідає призначеному нулеві, викреслюємо всі невикреслені раніше нульові елементи.

в). Перевірка оптимальності.

Якщо знайдене таким чином призначення повне (тобто призначено n нульових елементів), то воно й буде оптимальним розв'язком задачі.

Якщо деякі з нулів не викреслені (тобто залишилися рядки та стовпчики з кількістю нулів, більшою ніж 1), то обираємо рядок чи стовпчик з мінімальною кількістю нулів, довільно призначаємо один з них, викреслюємо всі нулі в в цьому рядку (стовпчику) та відповідному стовпчикові (рядку) і далі виконуємо крок 2. Якщо викреслені та призначені всі нулі в матриці, і знайдене призначення неповне, то переходимо до кроку 3.

3. Модифікація редукованої матриці

З метою модифікації редукованої матриці без зміни положення оптимального розв'язку виконуємо наступні дії. Відміняємо всі призначення та викреслення.

Потім:

а) обчислюємо число нулів в кожному невикресленому рядку та кожному невикресленому стовпчику;

б) викреслюємо рядок чи стовпчик з максимальною кількістю нулів;

в) виконуємо пункти а) та б) до того часу, поки всі нулі не будуть викреслені;

г) від всіх невикреслених елементів віднімаємо значення мінімального невикресленого елементу та додаємо його до елементів, що знаходяться на перетині викреслюючих прямих. Перехід до кроку 2.

4. Приклади розв'язання задачі про призначення

Приклад 3.1. Розв'язати за допомогою угорського методу задачу про призначення деталей на опрацювання на верстатах з матрицею затрат:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{10} & \boldsymbol{9} & \boldsymbol{7} \\ \boldsymbol{15} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{14} & \boldsymbol{8} \\ \boldsymbol{13} & \boldsymbol{14} & \boldsymbol{16} & \boldsymbol{11} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{15} & \boldsymbol{13} & \boldsymbol{19} \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Застосуємо угорський метод.

1. Редукуємо матрицю $\boldsymbol{C}$ за рядками та за стовпчиками:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix} - \begin{array}{c} \min\limits_{j} c_{ij} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\min_{i} c_{ij} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

2. Здійснюємо призначення, послідовно переглядаючи рядки редукованої матриці з призначенням нулів та їх викреслюванням згідно до алгоритму:

$$\begin{pmatrix} [0] & 8 & 2 & 5 \\ 11 & [0] & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Потім здійснюємо призначення, послідовно переглядаючи стовпчики редукованої матриці з призначенням нулів та їх викреслюванням згідно до алгоритму. Таким чином, в результаті отримаємо наступну матрицю призначень:

$$\begin{pmatrix} [0] & 8 & 2 & 5 \\ 11 & [0] & 5 & 4 \\ 2 & 3 & [0] & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Оскільки призначення неповне (матриця розміром 4×4, а призначень не 4, а лише 3), то переходимо до кроку 3 алгоритму.

3. Після завершення викреслювань (викреслюємо нулі матриці мінімальною кількістю прямих) визначаємо зміни в елементах матриці:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Визначаємо мінімальний серед невикреслених елементів – 2. Його значення додаємо до значень елементів, що знаходяться на перетині викреслюючих прямих, і віднімаємо від значень невикреслених елементів:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8-2 & 2-2 & 5-2 \\ 11+2 & 0 & 5 & 4 \\ 2+2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11-2 & 4-2 & 15-2 \end{pmatrix}.$$

Формуємо модифіковану матрицю та виконуємо крок 2 алгоритму (призначення та викреслювання нульових елементів) з модифікованою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cancel{0} & 6 & [0] & 3 \\ 13 & [0] & 5 & 4 \\ 4 & 3 & \cancel{0} & [0] \\ [0] & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cancel{0} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{0} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримане повне призначення, яке й є оптимальним розв'язком задачі про призначення:

$$x_{13} = x_{22} = x_{34} = x_{41} = 1.$$

Повертаючись до умови вихідної задачі, розраховуємо оптимальне значення функції мети для призначення:

$$Z_{opt} = c_{13} + c_{22} + c_{34} + c_{41} = 9 + 4 + 11 + 4 = 28.$$

Отже, робітник 1 призначений на роботу 3, робітник 2 – роботу 2, робітник 3 – роботу 4, робітник 4 – роботу 1.

При цьому затрати будуть мінімальними і складуть 28.

Приклад 3.2. Задано матрицю призначень. Знайти максимум цільової функції:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки задача на призначення є задачею максимізації, то зведемо її до задачі на мінімізацію: помножимо всі її елементи на -1 та додамо значення максимального елемента вихідної задачі 6. Отримаємо приведену матрицю:

$$C' = \begin{pmatrix} -2+6 & -3+6 & -3+6 & -5+6 & -4+6 \\ -4+6 & -2+6 & -4+6 & -6+6 & -2+6 \\ -2+6 & -2+6 & -2+6 & -4+6 & -3+6 \\ -4+6 & -3+6 & -4+6 & -3+6 & -5+6 \\ 0+6 & -1+6 & 0+6 & -2+6 & 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Застосуємо угорський метод.

1. Редукуємо матрицю C' за рядками та за стовпчиками:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{array}{c} \min\limits_j c_{ij} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\min_i c_{ij} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Здійснюємо призначення, послідовно переглядаючи рядки та стовпчики редукованої матриці з призначенням нулів та їх викреслюванням згідно до алгоритму:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & [0] & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cancel{0} & 4 \\ 1 & 1 & 1 & \cancel{0} & 1 \\ [0] & 1 & \cancel{0} & 2 & \cancel{0} \\ 1 & [0] & 1 & \cancel{0} & 2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки призначення неповне (матриця розміром 5×5, а призначень не 5, а лише 3), то переходимо до кроку 3 алгоритму.

3. Після завершення викреслювань (викреслюємо нулі матриці мінімальною кількістю прямих) визначаємо зміни в елементах матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначаємо мінімальний серед невикреслених елементів – 1. Його значення додаємо до значень елементів, що знаходяться на перетині викреслюючих прямих, і віднімаємо від значень невикреслених елементів:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 & 1-1 & 0 & 1-1 \\ 1-1 & 3-1 & 1-1 & 0 & 4-1 \\ 1-1 & 1-1 & 1-1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 & 2+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0+1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Формуємо модифіковану матрицю та виконуємо крок 2 алгоритму (призначення та викреслювання нульових елементів) з модифікованою матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & [0] \\ \cancel{0} & 2 & \cancel{0} & [0] & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & [0] & \cancel{0} & \cancel{0} \\ [0] & 1 & \cancel{0} & 3 & \cancel{0} \\ 1 & [0] & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримане повне призначення, яке й є оптимальним розв'язком задачі про призначення:

$$x_{15} = x_{24} = x_{33} = x_{41} = x_{52} = 1.$$

Повертаючись до умови вихідної задачі, розраховуємо оптимальне значення функції мети для призначення:

$$Z_{opt} = c_{15} + c_{24} + c_{33} + c_{41} + c_{52} = 4 + 6 + 2 + 4 + 1 = 17.$$

Отже, робітник 1 призначений на роботу 5, робітник 2 – роботу 4, робітник 3 – роботу 3, робітник 4 – роботу 1, робітник 5 – роботу 2. При цьому продуктивність робіт буде максимальною і складе 17 од.

Оптимальний план даної задачі не єдиний. Існують альтернативні матриці призначень з такою ж цільовою функцією.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 1 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cancel{0} & 1 & \cancel{0} & 0 \\ \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & 1 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{0} & 0 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тема 1.4. Задача комівояжера

План

1. Постановка задачі комівояжера.
2. Приклади задач, що зводяться до задачі комівояжера.
3. Розв'язання задачі комівояжера методом редукції.
4. Розв'язання задачі комівояжера методом Монте-Карло.
5. Розв'язання задачі комівояжера методом усереднених коефіцієнтів.

1. Постановка задачі комівояжера

Задача комівояжера є однією зі знаменитих задач теорії комбінаторики. Вона була поставлена у 1934 році.

Відомо n міст, відстані між якими задаються матрицею $C = (c_{ij})_{n\times n}$. Комівояжер (бродячий торговець) повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися у вихідний пункт маршруту, здійснюючи шлях мінімальної довжини.

Для математичної постановки задачі введемо бінарні змінні

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут включає переїзд з } i-\text{го міста в } j-\text{те}, \\ 0, \text{у протилежному разі}. \end{cases}$$

Тоді економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min, \quad i \neq j;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \quad i \neq j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad i \neq j;$$

$$x_{ij} = \{0;1\}; \quad i,j = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i,j = \overline{1,n};$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n-1 \quad i,j = \overline{2,n}, \quad i \neq j.$$

Перше обмеження означає умову одноразового в'їзду у кожне місто, а друге – одноразового виїзду з міста.

Додаткова (остання) умова вводиться для того, щоб запобігти можливості розриву маршруту, де u_i, u_j – невід'ємні цілочислові змінні, які в процесі розв'язання задачі набуватимуть значень порядкових номерів міст за оптимальним маршрутом комівояжера.

При розв'язанні задачі комівояжера в *Excel* діагональним елементам присвоюють значення або нуль, тоді вводять відповідні обмеження у *ПОИСК РЕШЕНИЙ*, або нескінченність (достатньо великі числа). Крім того, коли у розв'язку для деяких значень (i, j) отримуємо $x_{ij} = x_{ji} = 1$, то на один із цих елементів накладається додаткове обмеження $x_{ij} = 0$, або $x_{ji} = 0$.

2. Приклади задач, що зводяться до задачі комівояжера

До задачі «комівояжера» зводиться також багато інших практично важливих задач.

Одна група з цих задач є варіантами задачі комівояжера: комівояжер повинен обрати шлях, який забезпечує: найменшу витрату часу, палива, грошей на проїзд.

Друга група цих задач хоча і використовує методи розв'язання задачі комівояжера, але має інше практичне застосування: перевезення пошти або продуктів споживання у місті; з'єднання окремих пунктів лініями електропостачання, газопостачання, водопостачання; обробка n деталей на одному верстаті, якщо відомий час або вартість переналагодження верстата для різних деталей. Тут треба пояснити, чому методи розв'язання задачі комівояжера пов'язані з проектуванням лінії електропостачання: зазвичай споживачів електричної енергії (а також водопостачання і т.д.) намагаються з'єднати таким чином, щоб лінія живлення створювала коло, бо це забезпечує найбільшу надійність надання електроенергії (якщо в одному місті лінія буде перервана, то є можливість забезпечити постачання по колу, з іншої боку).

3. Розв'язання задачі комівояжера методом редукції

Приклад 4.1. Комівояжер повинен об'їхати по найкоротшому шляху $\boldsymbol{n}$ міст (табл. 4.1, $\boldsymbol{n = 4}$):

Таблиця 4.1

Задача комівояжера

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4
1	–	3	9	3
2	4	–	6	2
3	8	4	–	5
4	11	6	9	–

Задача полягає у тому, щоб мінімізувати функцію мети

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min, \quad i \neq j;$$

де c_{ij} – вартість проїзду між містами i та j; $i = \overline{1,n}$ – нумерація міст, з яких від'їжджають; $j = \overline{1,n}$ – нумерація міст, у які в'їжджають.

Усього комівояжер має обрати оптимальний варіант серед $(n-1)! = (4-1)! = 3! = 6$ маршрутів.

Розв'язання

Застосуємо метод, заснований на редукції рядків та стовпчиків.

Для оцінки можливої верхньої межі функції мети обираємо довільний маршрут комівояжера, наприклад,

$$(1,2) \to (2,3) \to (3,4) \to (4,1),$$

і отримуємо значення функції мети

$$F_{max} = 3 + 6 + 5 + 11 = 25.$$

Очевидно, що оптимальне значення функції мети F_{opt} повинне бути не більше за F_{max}.

Розрахунок проїзду комівояжера розкладається на $(n-2) = 4 - 2 = 2$ етапів. У межах кожного етапу алгоритм розрахунків однаковий.

Етап 1

Крок 1.1. **Редукція рядків**

У табл. 4.1 помічаємо у кожному рядку $\boldsymbol{i}$ найменше значення $\boldsymbol{c_{ij}}$ і віднімаємо його від елементів даного рядка. Значення $\boldsymbol{c_{ij}}$ вказуємо у стовпчику $\boldsymbol{A_i^{(1)}}$ (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Крок 1.1. Редукція рядків

n	1	2	3	4	$\boldsymbol{A_i^{(1)}}$
1	–	3	9	3	***3***
2	4	–	6	2	***2***
3	8	4	–	5	***4***
4	11	6	9	–	***6***

$\Rightarrow$

n	1	2	3	4
1	–	0	6	0
2	2	–	4	0
3	4	0	–	1
4	5	0	3	–

Крок 1.2. Редукція стовпчиків

У кожному стовпчику табл. 4.2 (в якому відсутні нульові елементи) позначаємо найменше значення оцінки шляху $\boldsymbol{c_{ij}}$ (далі – оцінка) і віднімаємо її від елементів даного стовпчика. Значення оцінок $\boldsymbol{c_{ij}}$ вказуємо у рядку $\boldsymbol{B_j^{(1)}}$ (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Крок 1.2. Редукція стовпчиків

n	1	2	3	4
1	–	0	6	0
2	2	–	4	0
3	4	0	–	1
4	5	0	3	–
$\boldsymbol{B_j^{(1)}}$	***2***	***0***	***3***	***0***

$\Downarrow$

n	1	2	3	4
1	–	0	3	0
2	0	–	1	0
3	2	0	–	1
4	3	0	0	–

Таким чином отримаємо таблицю у якій виконано редукцію рядків і стовпчиків (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

Редукція рядків та стовпчиків

n	1	2	3	4	$A_i^{(1)}$
1	–	0	3	0	***3***
2	0	–	1	0	***2***
3	2	0	–	1	***4***
4	3	0	0	–	***6***
$B_j^{(1)}$	***2***	***0***	***3***	***0***	

Розраховуємо найнижчу можливу межу функції мети

$$F_{min}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} B_j^{(1)} = 3 + 2 + 4 + 6 + 2 + 0 + 3 + 0 = 20.$$

Очевидно, що оптимальне значення функції мети F_{opt}, яке ми розраховуємо, повинно знаходитись у межах

$$F_{min}^{(1)} \le F_{opt} \le F_{max}, \text{ тобто } 20 \le F_{opt} \le 25.$$

Крок 1.3. Визначення штрафів

Якщо у кожному рядку та кожному стовпчику табл. 4.4 було б лише по одному нулю (та шлях був би замкненим – це обов'язково перевіряється), то нульові клітинки позначають оптимальний шлях комівояжера з оптимальною функцією мети $F_{opt} = 20$. На цьому розв'язання припиняється. Але у табл. 4.4 це не спостерігається, тому продовжуємо розрахунки.

Для даних табл. 4.4 визначаємо штрафи $a_i^{(1)}, b_j^{(1)}$, які показані у стовпчику та рядку табл. 4.5:

- штраф рядка $a_i^{(1)}$, який дорівнює найменшому значенню оцінки клітинок $i-$го рядка після першого нуля. Якщо у цьому рядку два або більше нулів, то $a_i^{(1)} = 0$. Штраф $a_i^{(1)}$ визначає додаткові витрати, які виникають, якщо не використовувати одну нульову клітинку у рядку;
- штраф стовпчика $b_j^{(1)}$, який дорівнює найменшому значенню оцінки клітинок $j-$стовпчика після першого нуля. Якщо у цьому стовпчику два або більше нулів, то $b_j^{(1)} = 0$. Штраф

$\boldsymbol{b_j^{(1)}}$ визначає додаткові витрати, які виникають, якщо не використовувати одну нульову клітинку у стовпчику.

Таблиця 4.5

Крок 1.3. Штрафи рядків та стовпчиків

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	$\boldsymbol{A_i^{(1)}}$	$\boldsymbol{a_i^{(1)}}$
1	–	0	3	0	***3***	***0***
2	0	–	1	0	***2***	***0***
3	2	0	–	1	***4***	***1***
4	3	0	0	–	***6***	***0***
$\boldsymbol{B_j^1}$	***2***	***0***	***3***	***0***		
$\boldsymbol{b_j^{(1)}}$	***2***	***0***	***1***	***0***		

За даними табл. 4.5 розраховуємо для кожної нульової клітинки функцію вторинного штрафу $\boldsymbol{\Phi_{ij}^{(1)} = a_i^{(1)} + b_j^{(1)}}$ і записуємо у табл. 4.6:

Таблиця 4.6

Функція вторинного штрафу у нульових клітинках табл. 4.5

Нульові комірки (i,j)	$(1,2)$	$(1,4)$	$(2,1)$	$(2,4)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(4,3)$
Вторинний штраф $\boldsymbol{\Phi_{ij}^{(1)}}$	0	0	$\boxed{2}$	0	1	0	1

Найбільше значення $\boldsymbol{\Phi_{ij}^{(1)} = \Phi_{21}^{(1)} = 2}$ вказує, що у маршрут комівояжера потрібно внести клітинку $(2,1)$. Це базова клітинку, з якої починається процес розмежування у розрахунках. Але цей вибір може виявитись і помилковим, тому це рішення потрібно перевірити (див. нижче).

Обрану клітинку $(2,1)$ ми використовуємо для викреслення рядка $\boldsymbol{i = 2}$ та стовпчика $\boldsymbol{j = 1}$ у табл. 4.5. У результаті отримуємо табл. 4.7, яку потрібно переробити, тому, що у для будь-якої таблиці комівояжера (і для скороченої, як у даному випадку) існує одна вимога, яка повинна виконуватись: у будь-якому рядку і у будь-якому стовпчику повинна існувати одна заборонена клітинка.

Таблиця 4.7

Скорочення рядка $\boldsymbol{i = 2}$ та стовпчика $\boldsymbol{j = 1}$

$\boldsymbol{n}$	2	3	4
1	0	3	0
3	0	–	1
4	0	0	–

У даному випадку такої забороненої клітинки немає у рядку $\boldsymbol{i = 1}$ та у стовпчику $\boldsymbol{j = 2}$ (як бачимо, тут повторюються номери викресленої клітинки з перестановкою рядка та стовпчика). Тому забороняємо до використання у розрахунках клітинку $\boldsymbol{(1,2)}$ і отримуємо табл. 4.8, яка використовується для розрахунків на другому етапі.

Таблиця 4.8

Таблиця етапу 2

$\boldsymbol{n}$	2	3	4
1	–	3	0
3	0	–	1
4	0	0	–

Етап 2

Крок 2.1. Редукція рядків (аналогічно етапу 1.1)

Отримуємо дані $\boldsymbol{A_i^{(2)}}$ табл. 4.9 для рядків.

Крок 2.2. Редукцію стовпчиків (аналогічно етапу 1.2)

Отримуємо дані $\boldsymbol{B_j^{(2)}}$ табл. 4.9 для стовпчиків.

Таблиця 4.9

Редукція та штрафи рядків і стовпчиків

$\boldsymbol{n}$	2	3	4	$\boldsymbol{A_i^{(2)}}$	$\boldsymbol{a_i^{(2)}}$
1	–	3	0	***0***	***3***
3	0	–	1	***0***	***1***
4	0	0	–	***0***	***0***
$\boldsymbol{B_j^{(2)}}$	***0***	***0***	***0***		
$\boldsymbol{b_j^{(2)}}$	***0***	***3***	***1***		

Якщо б дані $A_i^{(2)}$ та $B_j^{(2)}$ відрізнялися від нуля, то ми повинні були б визначити нову функцію

$$F_{min}^{(2)} = F_{min}^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} A_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} B_j^{(2)} = 20 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 20$$

і враховувати, що оптимальне значення функції мети повинно знаходитись у межа

$$F_{min}^{(2)} \le F_{opt} \le F_{max} .$$

Крок 2.3. Визначення штрафів (аналогічно кроку 1.3)

Отримуємо штрафи $a_i^{(2)}$, $b_j^{(2)}$ табл. 4.9 для рядків та стовпчиків. За даними табл. 4.9 розраховуємо для кожної нульової комірки функцію вторинного штрафу $\Phi_{ij}^{(2)} = a_i^{(2)} + b_j^{(2)}$ і вводимо розраховані дані у табл. 4.10.

Таблиця 4.10

Функція вторинного штрафу у нульових клітинках табл. 4.9

Нульові комірки (i, j)	$(1,4)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(4,3)$
Вторинний штраф $\Phi_{ij}^{(2)}$	$\boxed{4}$	1	0	3

Ми отримали найбільше значення штрафу $\Phi_{14}^{(2)} = 4$. Це означає, що комівояжер повинен на своєму шляху використати шлях $(1,4)$. У табл. 4.10 ми викреслюємо рядок $i = 1$ та стовпчик $j = 4$. У результаті ми отримуємо табл. 4.11 для наступного етапу.

Таблиця 4.11

Скорочення рядка $i = 1$ та стовпчика $j = 4$

n	2	3
3	0	–
4	0	0

У табл. 4.11 забороняємо до використання у розрахунках клітинку $(4,2)$ і отримуємо табл. 4.12.

Таблиця 4.12

Таблиця етапу 3

n	2	3
3	0	–
4	–	0

У результаті ми отримали скорочену матрицю оцінок проїзду з двома рядками і двома колонками. Далі розрахунки не виконуються, бо табл. 4.12 вказує маршрут завершення шляху комівояжера: $(3,2)$ та $(4,3)$.

Таким чином, маршрут комівояжера

$$(2,1) \to (1,4) \to (4,3) \to (3,2)$$

є неперервним і має оцінку (оцінки – по табл. 4.1)

$$F_{opt} = 4 + 2 + 9 + 4 = 20 .$$

При цьому виконується умова

$$F_{min}^{(2)} \le F_{opt} \le F_{max} ,$$

тобто

$$20 \le F_{opt} = 20 \le 25$$

Отриманий шлях потрібно перевірити на оптимальність.

З цією метою у початковій табл. 4.1 забороняємо до використання першу базову клітинку $(2,1)$ і отримуємо табл. 4.13.

Таблиця 4.13

Перевірка розрахунків

n	1	2	3	4
1	–	3	9	3
2	–	–	6	2
3	8	4	–	5
4	11	6	9	–

По табл. 4.13 виконуємо редукцію рядків (табл. 4.14).

Таблиця 4.14

Редукція рядків

n	1	2	3	4	$A_i^{(3)}$
1	–	3	9	3	***3***
2	–	–	6	2	***2***
3	8	4	–	5	***4***
4	11	6	9	–	***6***

$\Rightarrow$

n	1	2	3	4
1	–	0	6	0
2	–	–	4	0
3	4	0	–	1
4	5	0	3	–

Потім виконуємо редукцію стовпчиків (табл. 4.15).

Таблиця 4.15

Редукція стовпчиків

n	1	2	3	4
1	–	0	6	0
2	–	–	4	0
3	4	0	–	1
4	5	0	3	–
$B_j^{(3)}$	***4***	***0***	***3***	***0***

$\Downarrow$

n	1	2	3	4
1	–	0	3	0
2	–	–	1	0
3	0	0	–	1
4	1	0	0	–

Таким чином отримаємо таблицю у якій виконано редукцію рядків і стовпчиків (табл. 4.16).

Таблиця 4.16

Редукція рядків та стовпчиків

n	1	2	3	4	$A_i^{(3)}$
1	–	0	3	0	***3***
2	–	–	1	0	***2***
3	0	0	–	1	***4***
4	1	0	0	–	***6***
$B_j^{(3)}$	***4***	***0***	***3***	***0***	

За її даними

$$F_{min}^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(3)} + \sum_{j=1}^{n} B_j^{(3)} = 3 + 2 + 4 + 6 + 4 + 0 + 3 + 0 = 22$$

Оскільки $F_{min}^{(3)} > F_{min}^{(1)}$, $(22 > 20)$, то отриманий розв’язок є правильним.

Таким чином, отриманий маршрут комівояжера

$$(2,1) \to (1,4) \to (4,3) \to (3,2)$$

є вірним, і функція мети $F_{opt} = 20$.

Зауваження.

Якщо у задачі комівояжера не дотримується умова $F_{min}^{(1)} \le F_{opt} \le F_{max}$, то потрібно з самого початку зробити редукцію стовпчиків, а потім – редукцію рядків.

З цією метою рекомендуємо самостійно виконати розрахунки для задачі комівояжера табл. 4.17.

Таблиця 4.17

Задача комівояжера

n	1	2	3	4
1	–	5	8	7
2	2	–	2	3
3	4	5	–	15
4	2	6	5	–

4. Розв’язання задачі комівояжера методом Монте-Карло

Методами Монте-Карло називають будь-яку статистичну процедуру, яка використовує статистичну вибірку.

Для розв’язання задачі комівояжера використовуються датчики випадкових чисел комп’ютера. Замість комп’ютера можна використати урну з жетонами. Місто $''1''$“ є початковим, і тому «закладають в урну» жетони з номерами $2 \ldots n$. Замість цього у комп’ютері можна розглядати номери $1 \ldots (n-1)$. «Ретельно перемішавши жетони» (у комп’ютері ця операція не потрібна), витягають їх по одному і записують номери жетонів, які вважаються за отриманий маршрут. Для цього маршруту розраховують функцію мети і запам’ятовують як маршрут, так і функцію мети.

Після цього процедуру повторюють. Якщо функція мети не змінилась або має гірше значення, то результат не враховують. Якщо функція мети має краще значення, то нові кращі результати запам’ятовують, а старі викреслюють.

За допомогою комп’ютера ця процедура дозволяє за короткий термін розглянути велику кількість маршрутів і обрати серед них якщо не найкращий, то принаймні не найгірший маршрут.

5. Розв’язання задачі комівояжера методом усереднених коефіцієнтів.

Розраховуємо середні вартості рядків C_{pi} та стовпчиків C_{kj}, а також визначаємо усереднені коефіцієнти K_{ij} за формулами:

$$C_{pi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}, \; C_{kj} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}, \; K_{ij} = C_{ij} - \left(C_{pi} + C_{kj}\right),$$

де $n, m -$ загальна кількість стовпчиків і рядків; $C_{ij} -$ початковий тариф клітинки $i -$ го рядка та $j -$ го стовпчика $\left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right)$. Для задачі комівояжера $n = m$. Середні тарифи рядків C_{pi} та стовпчиків C_{kj} записуємо у відповідному стовпчику та рядку таблиці. Значення усереднених коефіцієнтів K_{ij} для кожної клітинки записуємо зліва від початкових тарифів C_{ij} (усереднені коефіцієнти K_{ij} можуть бути від’ємними або додатними).

Кількість кроків розрахунків дорівнює кількості міст.

Алгоритм методу усереднених коефіцієнтів

1. На кожному кроці за початковими тарифами C_{ij} визначаємо значення величин середніх тарифів рядків C_{pi} та стовпчиків C_{kj} і усереднені коефіцієнти K_{ij} . За найменшим значенням усередненого коефіцієнта K_{ij} (з найбільшою їх абсолютною величиною) обираємо клітинку оптимального шляху комівояжера і записуємо її дані у підсумкову таблицю 4.18.

Таблиця 4.18

Оптимальний шлях комівояжера

№ кро-ку	Клітинка оптимального шляху (i, j)	Усереднений коефіцієнт K_{ij}	Початковий тариф C_{ij}	Заборонені рядок та стовпчик		Заборонена клітинка (i, j)
				i	j	
1						
….						
n						

Умовно «закреслюємо» рядок i та стовпчик j, які відповідають номерам рядка та стовпчика клітинки оптимального шляху. У результаті отримуємо скорочену таблицю для наступного кроку. Для скороченої таблиці, яка залишилась після вказаних перетворень, забороняємо одну з комірок згідно з правилом: у будь-якому рядку та у будь-якій стовпчику повинна існувати одна заборонена комірка.

2. Далі виконуємо дії п. 1. Коли для відвідин залишається лише два шляхи, то вони входять в оптимальний шлях комівояжера без розрахунків, бо інших варіантів їх обрання не існує. Практично кількість кроків через це скорочується.

Приклад 4.2. Розглянемо задачу комівояжера (табл. 4.19)

Таблиця 4.19

Задача комівояжера

n	1	2	3	4
1	–	35	18	11
2	20	–	27	4
3	3	8	–	60
4	50	10	12	–

Розв'язання

Таблиця 4.20

Середні тарифи рядків, стовпчиків і усереднені коефіцієнти

n	1	2	3	4	C_{pi}
1	–	35 5,75	18 -12,25	11 -23,75	$\frac{35+18+11}{4}=16$
2	20 -11	–	27 0	4 -27,5	$\frac{20+27+4}{4}=12,7$
3	**3** $\boxed{\mathbf{-33}}$	8 -23	–	60 23,5	$\frac{3+8+60}{4}=17,75$
4	50 13,75	10 -21,25	12 -20,25	–	$\frac{50+10+12}{4}=18$
C_{kj}	$\frac{20+3+50}{4}=18,2$	$\frac{35+8+10}{4}=13,2$	$\frac{18+27+12}{4}=14,2$	$\frac{11+4+60}{4}=18,7$	

Для розв'язання задачі комівояжера використовуємо метод усереднених коефіцієнтів.

Крок 1

За початковими тарифами C_{ij} у таблиці 4.20 розраховуємо значення:

$$C_{pi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}, \; C_{kj} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} C_{ij}, \; K_{ij} = C_{ij} - \left(C_{pi} + C_{kj}\right).$$

В оптимальний шлях комівояжера входить комірка $(3,1)$ з найменшим усередненим коефіцієнтом $K_{31} = -33$. Умовно «закреслюємо» рядок $i = 3$ та стовпчик $j = 1$. У скороченій таблиці 4.22 забороняємо комірку $(1,3)$ згідно з правилом: у будь-якому рядку та у будь-якій колонці повинна існувати одна заборонена комірка.

Заносимо дані у табл. 4.21.

Таблиця 4.21

Оптимальний шлях комівояжера

№ кроку	Клітинка оптимального шляху (i,j)	Усереднений коефіцієнт K_{ij}	Початковий тариф C_{ij}	Заборонені рядок та стовпчик		Заборонена клітинка (i,j)
				i	j	
1	$(3,1)$	-33	3	3	1	$(1,3)$
2	$(4,2)$	$-12,3$	10	4	2	$(2,4)$
3	$(1,4)$	–	11	–	–	–
4	$(2,3)$	–	27	–	–	–

Крок 2.

За початковими тарифами C_{ij} у скороченій таблиці 1.4 знову розраховуємо значення C_{pi}, C_{kj}, K_{ij}.

В оптимальний шлях комівояжера входить комірка $(4,2)$ з найменшим усередненим коефіцієнтом $K_{42} = -12,33$. Умовно «закреслюємо» рядок $i = 4$ та стовпчик $j = 2$. У скороченій таблиці 4.23 забороняємо комірку $(2,4)$ згідно з правилом: у будь-якому рядку та у будь-якій колонці повинна існувати одна заборонена комірка. Заносимо дані у табл. 4.21.

Таблиця 4.22

Середні тарифи рядків, стовпчиків і усереднені коефіцієнти

n	2	3	4	C_{pi}
1	35 4,67	–	11 -9,33	$\frac{35+11}{3}=15,33$
2	–	27 3,67	4 -11,33	$\frac{27+4}{3}=10,33$
4	**10** $\boxed{\mathbf{-12,33}}$	12 -8,33	–	$\frac{10+12}{3}=7,33$
C_{kj}	$\frac{35+10}{3}=15$	$\frac{27+12}{3}=13$	$\frac{11+4}{3}=5$	

Таблиця 4.23

Середні тарифи рядків, стовпчиків і усереднені коефіцієнти

n	3	4
1	–	11
2	27	–

Кроки 3, 4.

Для відвідин у комівояжера залишилось лише два шляхи: $(1,4)$ та $(2,3)$. Вони обираються без розрахунків і записуються в оптимальний шлях комівояжера (табл. 4.21).

Отриманий згідно з методом усереднених коефіцієнтів оптимальний шлях комівояжера (показаний у табл. 4.21)

$$(1,4)\rightarrow(4,2)\rightarrow(2,3)\rightarrow(3,1)$$

є неперервним і має оцінку (оцінки – по табл. 4.19)

$$F_{opt}=11+10+27+3=51.$$

Тема 1.5. Стратегічні ігри

План

1. Предмет теорії ігор та види невизначеності.
2. Основні понятті теорії ігор.
3. Чисті стратегії. Основні поняття.
4. Пошук оптимальних рішень за допомогою чистих стратегій.
5. Змішані стратегії.
6. Оптимальні змішані стратегії.

1. Предмет теорії ігор та види невизначеності

Для обґрунтування рішень в умовах невизначеності, коли імовірності можливих варіантів обстановки невідомі, розроблені спеціальні математичні методи, що розглядаються в теорії ігор.

Теорія ігор належить до найбільш молодих математичних дисциплін. Її виникнення датується 1944 р., коли вийшла у світ монографія Неймана і Моргенштерна «Теорія ігор і економічної поведінки». Надалі теорія ігор перетворилася в самостійний математичний напрямок, що має практичне застосування. Аналіз ризикової ситуації її методами спонукає менеджера розглядати всі можливі альтернативи як своїх дій, так і стратегії партнерів та конкурентів для зменшення ступеня ризику. Теорія ігор дає менеджеру математичний апарат для вибору стратегії в ***конфліктних ситуаціях***, тобто при зіткненні протилежних інтересів учасників (шахи, шашки, карточні ігри і т.д.). В економіці це взаємини між постачальником і споживачем, покупцем і продавцем, банком і клієнтом і т.д.

Теорія ігор *– це теорія математичних моделей прийняття оптимальних рішень в умовах конфлікту або невизначеності.*

Математична модель конфліктної ситуації називається ***грою***, сторони, що беруть участь у конфлікті – ***гравцями***, результат конфлікту – ***виграшем***.

Невизначеність результату гри викликається різними причинами, які можна розбити на групи:

1. Особливості правил гри викликають таку розмаїтість у її розвитку, що передбачати результат гри заздалегідь неможливо. Джерела невизначеності такого виду називаються

комбінаторними, а відповідні ігри – також комбінаторними (шахи). Для багатьох з них знайдені виграшні комбінації шляхом розв'язання логічних задач не надто великого обсягу.

2. Джерелом невизначеності є вплив випадкових факторів. Відповідні ігри називаються ***азартними*** (ігри в кості; гра, що полягає у відгадуванні, яким боком випаде монета; рулетка).

3. Третє джерело невизначеності складається у відсутності інформації про дії супротивника, про його стратегію. Ігри такого роду називаються ***стратегічними*** і вивчаються у теорії ігор.

4. Невизначеність викликана відсутністю інформації про умови, у яких здійснюється грі. Ці умови залежать не від свідомих дій іншого гравця, а від об'єктивної дійсності, що прийнято називати ***природою***. Такі ігри називаються ***іграми з природою***, або ***статистичними***.

2. Основні понятті теорії ігор

У теорії ризиків розглядаються стратегічні ігри. У грі можуть стикатися інтереси двох чи більше супротивників, відповідно ***парна*** та ***множинна*** гра. Найбільше практичне значення мають парні ігри. Учасників гри позначимо $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$.

Під ***грою*** будемо розуміти певну послідовність дій (ходів) гравців $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$, що здійснюється відповідно до чітко сформульованих правил.

Правила гри визначають можливі варіанти дій гравців, обсяг інформації кожної сторони про дії другої, результат гри, до якого приводить відповідна послідовність ходів.

Кількісна оцінка результатів гри називається ***платежем.***

Ходом у теорії ігор називається вибір однієї з допустимих правилами гри дій та її здійснення.

Особистий хід – це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій (наприклад, хід у шаховій грі). ***Випадковий хід*** – це випадково обрана дія (наприклад, вибір карти з перетасованої колоди). Надалі будемо розглядати тільки особисті ходи гравців.

Стратегією гравця називається план, згідно з яким він робить вибір у будь-якій можливій ситуації і при будь-якій можливій фактичній інформації.

Природно, що гравець приймає рішення по ходу гри. Однак теоретично можна припустити, що всі ці рішення прийняті гравцем заздалегідь. Тоді сукупність прийнятих рішень становить його стратегію. Залежно від числа можливих стратегій ігри поділяються на ***скінченні*** і ***нескінченні***.

Завданням теорії ігор є вироблення рекомендацій для гравців, тобто визначення для них оптимальної стратегії.

Оптимальною стратегією називається стратегія, яка при багаторазовому повторенні гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш (мінімально можливий середній програш).

Формалізація процесу розрахунку ризику за допомогою теорії ігор сприяє поліпшенню розуміння підприємцем проблем у цілому. Таким чином, теорія ігор – власне наука про ризик.

3. Чисті стратегії. Основні поняття

Найпростіший вид стратегічної гри – ***гра двох осіб з нульовою сумою*** (сума виграшів сторін дорівнює нулю), або ***антагоністична гра***. Тут мета одного гравця – максимізувати свій виграш, а другого – мінімізувати свій програш, причому рішення про вибір стратегії кожним гравцем приймається в умовах невизначеності, коли наперед невідомо, як вчинить супротивник. Гра складається з двох ходів.

Гравець A вибирає одну зі своїх можливих стратегій $A_i \ (i = 1, \ldots, m)$. Гравець B вибирає одну зі своїх стратегій $B_j \ (j = 1, \ldots, n)$. Причому кожен вибір робиться при повному незнанні вибору другого гравця. У результаті виграші $\varphi_1(A_i; B_j)$ і $\varphi_2(A_i; B_j)$ кожного з гравців задовольняють співвідношення (тому що це гра двох осіб з нульовою сумою):

$$\varphi_1(A_i; B_j) + \varphi_2(A_i; B_j) \equiv 0,$$

тобто (Виграш + Програш = 0).

Звідки, якщо ми приймемо, що $\varphi(A_i; B_j) = \varphi_1(A_i; B_j)$, то, знаючи, що $\varphi_1(A_i; B_j) = -\varphi_2(A_i; B_j)$, одержимо $\varphi = -\varphi(A_i; B_j)$.

Отже, мета гравця A – максимізувати функцію $\varphi(A_i; B_j)$, мета гравця B – мінімізувати ту ж саму функцію $\varphi(A_i; B_j)$. Кожний із гравців може вибирати одну із змінних, від яких залежить значення функції.

Якщо гравець A вибирає якусь зі стратегій A_i, то це само по собою не може впливати на значення функції $\varphi(A_i;B_j)$. Вплив A_i на величину значення $\varphi(A_i;B_j)$ є невизначеним; визначеність має місце тільки після вибору, виходячи з принципу мінімізації функції $\varphi(A_i;B_j)$ другим гравцем змінної B_j. При цьому B_j визначається другим гравцем.

Отже, нехай $\varphi(A_i;B_j)=a_{ij}$. Складемо матрицю P:

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рядки матриці відповідають ***чистим стратегіям*** A_i, стовпці – ***чистим стратегіям*** B_j. Матриця P називається ***платіжною*** чи ***матрицею гри.*** Елемент a_{ij} матриці – виграш гравця A, якщо він вибрав стратегію A_i, а гравець B вибрав стратегію B_j.

4. Пошук оптимальних рішень за допомогою чистих стратегій

Платіжна матриця (матриця гри) $P=(a_{ij})$ розміром $m\times n$ задана таблично (табл. 5.1):

Таблиця 5.1

Платіжна матриця гри

	Стратегія гравця B				
Стратегія гравця A	B_1	B_2	…	B_n	$\alpha_i=\min\limits_j a_{ij}$
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
$\beta_j=\max\limits_i a_{ij}$	β_1	β_2	…	β_n	

Нехай гравець A має m чистих стратегій A_i $(i = 1,\dots,m)$, гравець B має n чистих стратегій B_j $(j = 1,\dots,n)$. Гравець A може обрати будь-яку стратегію A_i, у відповідь на яку гравець B може обрати будь-яку стратегію B_j. Поєднання цих стратегій $(A_i ; B_j)$ приведе до певного числового результату – платежу (a_{ij}), що називають ***виграшем*** гравця A і ***програшем*** $(-a_{ij})$ гравця B.

Нехай гравець A вибирає якусь стратегію A_i, тоді в найгіршому випадку (наприклад, якщо вибір стане відомим гравцю B) він одержить виграш, який дорівнюватиме $\min\limits_{j} a_{ij}$.

Передбачаючи таку можливість, гравець A повинен вибрати таку стратегію, щоб максимізувати свій мінімальний виграш.

Для цього знайдемо спочатку для гравця A в кожному рядку число $\alpha_i = \min\limits_{j} a_{ij}$, що вказує на мінімально гарантований виграш для гравця A, що застосовує стратегію A_i.

Далі знайдемо в кожнім стовпці число $\beta_j = \max\limits_{i} a_{ij}$ що вказує на максимально гарантований програш для B, що застосовує стратегію B_j.

Величина $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$ гарантований виграш гравця A (варіант «кращий з гірших») називається ***нижньою ціною гри***, чи максимінним виграшем, або максимінною стратегією гравця A.

Гравець B, вибираючи стратегію, виходить з такого принципу: при виборі певної стратегії B_j, його програш не повинен перевищити максимального зі значень елементів $j-$го стовпця матриці, тобто повинен бути не більше $\max\limits_{i} a_{ij}$.

Розглядаючи згодом цю множину $\max\limits_{i} a_{ij}$ для різних значень j, гравець B, природно, вибере таке значення j, при якому його максимальний програш β мінімізується.

Величина $\beta = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$ гарантований програш гравця B називається ***верхньою ціною гри*** чи мінімаксним програшем або мінімаксною стратегією гравця B.

Тобто гравець B вибирає стратегію «кращу із гірших».

Завжди $a \le \beta$. Принцип, відповідно до якого вибирають ці стратегії, називається ***принципом максиміна*** для A і ***принципом мінімакса*** для B. Тоді при будь-якій стратегії, вибраній гравцем B, гравцю A забезпечується виграш не менше α, а для B при виборі ним мінімаксної стратегії забезпечується програш не більше β.

Якщо $\alpha = \beta$, то гра називається ***грою із сідловою точкою***, а загальне значення $\alpha = \beta = v$ називається ***ціною гри***. Елемент $a_{i_0 j_0}$ у матриці такої гри є одночасно мінімальним у рядку i_0, максимальним у стовпці j_0 і називається ***сідловою точкою*** (за аналогією з поверхнею сідла, що викривляється нагору в одному напрямку і вниз – в іншому).

Сідловій точці відповідають оптимальні чисті стратегії гравців, їхня сукупність є рішенням гри, що має таку ***властивість стійкості***: якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної стратегії, то для другого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним. Тоді ***оптимальним рішенням*** для обох гравців є вибір максимінної для A і мінімаксної для B стратегії. Будь-яке відхилення не буде вигідним.

Приклад 5.1

Для заданої платіжної матриці (табл. 5.2) знайти сідлову точку.

Таблиця 5.2

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	4	5	3	**3**
A_2	6	7	4	***4***
A_3	5	2	3	**2**
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	**6**	**7**	***4***	$\alpha = 4$ / $\beta = 4$

Розв'язання

Знайдемо мінімальні елементи в рядках:

$$\alpha_1 = min(4;5;3) = 3,\ \alpha_2 = min(6;7;4) = 4,\ \alpha_3 = min(5;2;3) = 2.$$

Тоді $\alpha = max(3;4;2) = 4 -$ нижня ціна гри.

Знайдемо максимальні елементи в стовпцях:

$\beta_1 = max(4;6;5) = 6$, $\beta_2 = max(5;7;2) = 7$, $\beta_3 = max(3;4;3) = 4$.

Тоді $\beta = min(6;7;4) = 4 -$ верхня ціна гри.

Оскільки $\alpha = \beta = 4$, то це гра із сідловою точкою і величина $v = 4 -$ ціна гри.

Рішення полягає в тому, що гравець A повинен вибрати стратегію A_2, при цьому його виграш не менше 4. Гравець B повинен вибрати стратегію B_3, при цьому його програш не більше 4. Легко помітити, що відхилення одного із гравців від оптимальної стратегії приводить до зменшення виграшу (для гравця A) і збільшенню програшу (для гравця B).

Приклад 5.2

Для платіжної матриці (табл. 5.3) знайти сідлову точку.

Таблиця 5.3

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	0,3	0,6	0,8	**0,3**
A_2	0,9	0,4	0,2	**0,2**
A_3	0,7	0,5	0,4	***0,4***
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	**0,9**	***0,6***	***0,8***	$\alpha = 0,4$ / $\beta = 0,6$

Розв'язання

Визначимо нижню і верхню ціни гри:

$$\alpha_1 = min(0,3;0,6;0,8) = 0,3,\ \alpha_2 = min(0,9;0,4;0,2) = 0,2,$$

$$\alpha_3 = min(0,7;0,5;0,4) = 0,4 .$$

Тоді $\alpha = max(0,3;0,2;0,4) = 0,4 -$ нижня ціна гри.

$$\beta_1 = max(0,3;0,9;0,7) = 0,9,\ \beta_2 = max(0,6;0,4;0,5) = 0,6,$$

$$\beta_3 = max(0,8;0,2;0,4) = 0,8 .$$

Тоді $\beta = min(0,9;0,6;0,8) = 0,6 -$ верхня ціна гри.

Оскільки $\alpha \neq \beta$ $(0,4 \neq 0,8)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

5. Змішані стратегії

Якщо гра не має сідлової точки ($\alpha < \beta$), то застосування чистих стратегій не дає оптимального розв'язку. Тоді застосовують стратегії, які для кожного з гравців забезпечують виграш, що не перевищує α, і програш, не менший β. Природним для кожного гравця є питання збільшення виграшу (зменшення програшу). Пошуки такого розв'язку полягають у тому, що гравці застосовують не одну, а кілька стратегій, вибір яких здійснюється випадково. Випадковий вибір гравцем своїх стратегій називається ***змішаною стратегією***.

У грі, матриця якої має розмірність $m \times n$, стратегії гравця A задаються наборами ймовірностей $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, з якими гравець застосовує свої первісні стратегії. Ці набори можна розглядати як $m-$мірні вектори, для яких виконуються умови:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0, i = \overline{1,m}.$$

Аналогічно для гравця B визначають $n-$мірні вектори $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, відповідні його змішаним стратегіям.

Стратегії гравців A і B, для яких імовірності x_i і y_j відмінні від нуля, називаються ***активними***.

Отже, **змішаною стратегією** гравця A називається застосування ним своїх чистих стратегій $A_1, A_2, \ldots, A_m$ з ймовірностями $x_1, x_2, \ldots, x_m$, причому $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Її записують у вигляді:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{pmatrix} \text{ або } \overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Тоді змішана стратегія для гравця B:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} \text{ або } \overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Причому $\sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1$, $Y_j -$імовірність настання чистої стратегії гравця B.

Чисті стратегії – окремий випадок змішаних, що задаються одиничним вектором (ймовірність $p = 1$).

6. Оптимальні змішані стратегії

Функцією виграшу чи платіжною функцією $f\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$ гри, з матрицею $P=\left(a_{ij}\right)$, при застосуванні гравцем A змішаної стратегії $\overline{X}$, а гравцем B змішаної стратегії $\overline{Y}$, називається середня величина виграшу гравця A (програшу гравця B), що визначається за формулою: $f\left(\overline{X},\overline{Y}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_j a_{ij} = \overline{X}\Pi\overline{Y}$.

Стратегії $\overline{X}^*,\overline{Y}^*$ називаються ***оптимальними***, якщо виконуються нерівності:

$$f\left(\overline{X},\overline{Y}^*\right)\le f\left(\overline{X}^*,\overline{Y}^*\right)\le f\left(\overline{X}^*,\overline{Y}\right),$$

тобто, якщо їхнє застосування забезпечить гравцю A середній виграш не менше, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{X}$ і гравцю B середній програш не більше, ніж при застосуванні ним будь-якої іншої стратегії $\overline{Y}$.

Сукупність оптимальних стратегій $\left(\overline{X}^*,\overline{Y}^*\right)$ називаються ***оптимальним рішенням***, а значення платіжної функції – ***ціною гри***: $v = f\left(\overline{X}^*,\overline{Y}^*\right)$.

Відповідно до ***основної теореми теорії ігор (теореми Неймана)***, кожна скінчена гра має принаймні одне оптимальне рішення, можливо, серед змішаних стратегій.

Застосування оптимальних стратегій дозволяє одержати виграш, що дорівнює ціні гри: $\alpha \le v \le \beta$.

Таким чином, застосування гравцем A оптимальної стратегії $\overline{X}^*$, повинне забезпечувати йому при будь-яких діях гравця B виграш, не менший, ніж v. Тому виконується співвідношення: $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}x_i^* \ge v, \quad j=\overline{1,n}$

Аналогічно для гравця B, оптимальна стратегія $\overline{Y}^*$ повинна забезпечити при будь-яких стратегіях гравця A програш, що не перевищує v: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_i^* \le v, \quad i=\overline{1,m}$.

Тема 1.6. Методи розв'язання стратегічних ігор

План

1. Дослідження ігор, заданих платіжними матрицями.
2. Аналітичний метод розв'язування ігор 2×2.
3. Графічний метод розв'язування ігор 2×2.
4. Приклади графічного розв'язування ігор 2×2.
5. Графічний метод розв'язування ігор $2 \times n$ і $m \times 2$.
6. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

1. Дослідження ігор, заданих платіжними матрицями

Завдання розв'язку гри, якщо її матриця не містить сідлової точки, тим складніше, чим більше значення m і n. Тому в теорії матричних ігор розглядаються способи, за допомогою яких розв'язок одних ігор зводиться до розв'язку інших, більш простих.

Наприклад, за допомогою скорочення розмірності матриці, тобто, виключення дублюючих та свідомо невигідних домінуючих стратегій. Після цього спрощену матрицю перевіряють на наявність у ній сідлової точки, що дозволяє відразу ж визначити розв'язок і ціну гри. Якщо сідлової точки немає, то переходять до визначення оптимальних змішаних стратегій.

Приклад 6.1

Дослідити гру, задану платіжною матрицею (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
A_1	8	6	4	7	7	4
A_2	5	4	3	4	6	3
A_3	4	3	2	3	4	2
A_4	7	2	6	5	9	2
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	8	6	6	7	9	$\alpha = 4$ / $\beta = 6$

Розв'язання

Визначимо нижню і верхню ціни гри вихідної матриці:

$$\alpha_1 = min(8;6;4;7;7) = 4,\ \alpha_2 = min(5;4;3;4;6) = 3\ ,$$

$$\alpha_3 = min(4;3;2;3;4) = 2,\ \alpha_4 = min(7;2;6;5;9) = 2.$$

Тоді $\alpha = max(4;3;2;2) = 4$ – нижня ціна гри.

$$\beta_1 = max(8;5;4;7) = 8,\ \beta_2 = max(6;4;3;2) = 6\ ,$$

$$\beta_3 = max(4;3;2;6) = 6\ ,\beta_4 = max(7;4;3;5) = 7\ ,$$

$$\beta_5 = max(7;6;4;9) = 9$$

Тоді $\beta = min(8;6;6;7) = 6$ – верхня ціна гри.

Оскільки $\alpha \neq \beta \quad (4 \neq 6)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

Такий же результат одержимо після виключення дублюючих і свідомо невигідних домінуючих стратегій.

1-й рядок домінує над 2-м і 3-м, оскільки всі його елементи відповідно не менші елементів 2-го і 3-го рядків. Тому стратегії A_2 і A_3 свідомо менш вигідні, ніж A_1 і можуть бути виключені (гравець A ніколи не скористається цими стратегіями). Виключимо рядки з меншими значеннями всіх елементів:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{6} \\ \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

У результаті одержуємо матрицю

$$P_2 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

У цій матриці 1, 4 і 5-й стовпці домінують над 2-м. Оскільки стовпці характеризують стратегії гравця B, що прагне зменшити виграш гравця A, то ці стратегії свідомо невигідні (виключимо стовпці з більшими значеннями всіх елементів):

$$P_2 = \begin{pmatrix} \cancel{8} & 6 & 4 & \cancel{7} & \cancel{7} \\ \cancel{7} & 2 & 6 & \cancel{5} & \cancel{9} \end{pmatrix}$$

Після їх виключення одержуємо матрицю $P_3 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ у якій немає домінуючих стратегій (табл. 6.2) .

Таблиця 6.2

Платіжна матриця без домінуючих стратегій

A_i \ B_j	B_2	B_3	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	6	4	**4**
A_4	2	6	**2**
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	**6**	**6**	$\alpha = 4$ / $\beta = 6$

Визначимо нижню і верхню ціни гри:

$$\alpha_1 = \min(6;4) = 4,\ \alpha_2 = \min(2;6) = 2 \Rightarrow \alpha = \max(4;2) = 4.$$

$$\beta_1 = \max(6;2) = 6,\ \beta_2 = \max(4;6) = 6 \Rightarrow \beta = \min(6;6) = 6.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$ $(4 \neq 6)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

Приклад 6.2

Дослідити гру, задану платіжною матрицею (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	1	4	3	5	1
A_2	3	2	4	4	2
A_3	0	1	-1	4	-1
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	3	4	4	5	$\alpha = 2$ / $\beta = 3$

Розв'язання

Визначимо нижню і верхню ціни гри:

$$\alpha_1 = \min(1;4;3;5) = 1,\ \alpha_2 = \min(3;2;4;4;) = 2,$$

$$\alpha_3 = \min(0;1;-1;4) = -1.$$

Тоді $\alpha = \max(1;2;-1) = 2 -$ нижня ціна гри.

$$\beta_1 = \max(1;3;0) = 3,\ \beta_2 = \max(4;2;1) = 4,\ \beta_3 = \max(3;4;-1) = 4,$$

$$\beta_5 = \max(5;4;4) = 5.$$

Тоді $\beta = \min(3;4;4;5) = 3 -$ верхня ціна гри.

Оскільки $\alpha \neq \beta \quad (2 \neq 3)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

Такий же результат одержимо після виключення дублюючих і свідомо невигідних домінуючих стратегій.

Для гравця A свідомо невигідною є стратегія A_3, так як всі значення цього рядка менші відповідних елементів 1 рядка. Для гравця B свідомо невигідними є стратегії B_3, B_4, так як всі значення цих стовпців перевищують відповідні елементи 1, і 2 стовпців:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Дослідимо одержану матрицю (табл. 6.4) :

Таблиця 6.4

Платіжна матриця без домінуючих стратегій

B_j / A_i	B_2	B_3	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	1	4	**1**
A_4	3	2	**2**
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	**3**	**4**	$\alpha = 2$ / $\beta = 3$

Визначимо нижню і верхню ціни гри:

$$\alpha_1 = \min(1;4) = 1,\ \alpha_2 = \min(3;2) = 2 \Rightarrow \alpha = \max(1;2) = 2.$$

$$\beta_1 = \max(1;3) = 3,\ \beta_2 = \max(4;2) = 4 \Rightarrow \beta = \min(3;4) = 3.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta \quad (2 \neq 3)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

Отже, при розв’язанні гри $m \times n$ слід:

а) перевірити, чи не містить матриця сідлової точки;

б) якщо сідлової точки немає, то потрібно порівняти між собою елементи рядків і стовпців для виключення дублюючих і домінуючих стратегій.

2. Аналітичний метод розв'язання ігор 2×2

Найбільш простою є гра, у якій кожний із гравців має 2 стратегії. Розглянемо платіжну матрицю $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Якщо сідлової точки немає, то розв'язком гри є змішані стратегії: $\overline{X}=(x_1;x_2)$, $\overline{Y}=(y_1;y_2)$.

Теорема про активні стратегії (теорема Оуена)

Якщо один із гравців дотримується своєї оптимальної змішаної стратегії, то його виграш залишається незмінним і дорівнює ціні гри v, за умови, що другий гравець не виходить за межі своїх активних стратегій.

Ця теорема дає можливість знаходити оптимальні стратегії для ігор розміру 2×2, $2\times n$, $m\times 2$.

Для гри розміру 2×2 маємо:

1. Якщо гра має ***сідлову точку***, то оптимальне рішення – це пари чистих стратегій, що відповідають цій точці.

2. Гра, у якій відсутня ***сідлова точка***, відповідно до теореми Неймана має оптимальне рішення, яке визначається парою змішаних стратегій $\overline{X},\overline{Y}$.

Розглянемо другий варіант.

Оптимальна стратегія для гравця B є змішаною.

Згідно теореми про активні стратегії: якщо гравець A додержується своєї оптимальної стратегії, то його середній виграш дорівнює ціні гри v, хоч би якою активною стратегією B_1 чи B_2 не користувачці гравець B, тобто

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2=v; \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2=v. \end{cases}$$

Оскільки сума ймовірностей дорівнює 1, то $x_1+x_2=1$.

Розв'язавши систему, одержимо:

$$x_1=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}; \qquad x_2=\frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}};$$

Підставляючи x_1 і x_2 у систему рівнянь, одержимо:

$$v=\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}.$$

Це оптимальна стратегія для гравця A.

Аналогічно, застосовуючи теорему про активні стратегії при пошуку оптимальної стратегії гравця $\boldsymbol{B}$, що за будь-якої чистої стратегії гравця $\boldsymbol{A}$ (A_1 чи A_2) середній програш гравця $\boldsymbol{B}$ дорівнює ціні гри v, тобто:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v. \end{cases}$$

Оскільки сума ймовірностей дорівнює 1, то $y_1 + y_2 = 1$

Розв'язавши систему, одержимо:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}; \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Це оптимальна стратегія для гравця $\boldsymbol{B}$.

Приклад 6.3

Знайти розв'язок гри, заданої матрицею $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Таблиця 6.5

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	1	3	**1**
A_2	2	1	**1**
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	**2**	**3**	$\alpha = 1$ \ $\beta = 2$

Маємо $\alpha = 1, \beta = 2$; гра не має сідлової точки.

Для гравця $\boldsymbol{A}$ знайдемо оптимальну стратегію:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 2}{1 + 1 - 3 - 2} = \frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 3}{1 + 1 - 3 - 2} = \frac{2}{3}.$$

Підставляючи x_1 і x_2 у систему рівнянь, одержимо ціну гри: $v = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \dfrac{1 \cdot 1 - 3 \cdot 2}{1 + 1 - 3 - 2} = \dfrac{5}{3}$.

Аналогічно, для гравця $\boldsymbol{B}$ знайдемо оптимальну стратегію :

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 3}{1 + 1 - 3 - 2} = \frac{2}{3};$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{1 - 2}{1 + 1 - 3 - 2} = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, оптимальні стратегії і ціна гри:

$$X_{opt} = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \ Y_{opt} = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), v = \frac{5}{3}.$$

Це означає, що гравець $\boldsymbol{A}$ застосовує свої чисті стратегії A_1 і A_2 відповідно з ймовірностями $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$, а гравець $\boldsymbol{B}$ застосовує свої чисті стратегії B_1 і B_2 відповідно з ймовірностями $\frac{2}{3}$ і $\frac{1}{3}$; при цьому середній виграш дорівнює $\frac{5}{3}$.

3. Графічний метод розв’язання ігор 2×2

Якщо платіжна матриця $\boldsymbol{P}$ містить від’ємні числа, то для графічного розв’язання необхідно перейти до нової матриці з невід’ємними елементами: для цього до її елементів достатньо додати відповідне додатне число $\boldsymbol{C}$. Розв’язок матричної гри при цьому не зміниться, а ціна гри збільшиться на це число $\boldsymbol{C}$. Тому у відповіді необхідно від знайденої ціни гри відняти число $\boldsymbol{C}$.

Розглянемо методику розв’язання гри графічним методом

На осі абсцис (рис. 6.1) відкладемо відрізок одиничної довжини A_1A_2. Ліва точка A_1 $(x = 0)$ відповідає стратегії A_1, права точка A_2 $(x = 1)$ – стратегії A_2, внутрішні точки цього відрізка – змішаним стратегіям гравця A: $\overline{X} = (x_1; x_2)$, де $x_1 = 1 - x -$ймовірність стратегії A_1, а $x_2 = x -$ ймовірність стратегії A_2.

На кінцях відрізка проведемо перпендикуляри до осі абсцис, на яких відкладають виграші при відповідних чистих стратегіях. Якщо гравець $\boldsymbol{B}$ приймає стратегію B_1, то виграші відповідають a_{11} і a_{21}. Відкладемо ці точки на прямих A_1 і A_2 і з’єднаємо отримані точки прямою B_1B_1'. Якщо гравець $\boldsymbol{A}$ застосовує змішану стратегію, то його виграшу відповідає точка M, що лежить на цій прямій. Аналогічно побудуємо пряму B_2B_2', що відповідає стратегії B_2 гравця B.

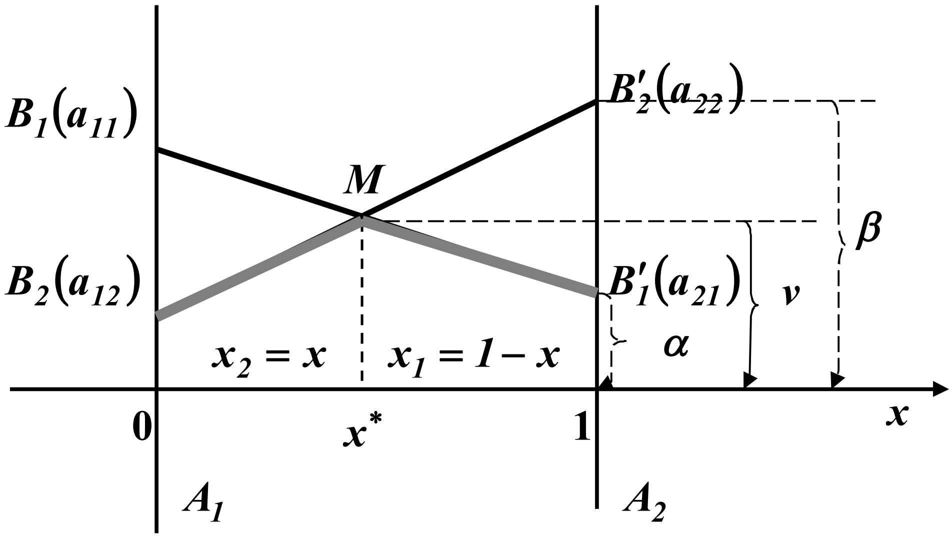

Рис. 6.1. Геометрична інтерпретація гри

На перетині цих прямих знаходиться точка M, що відповідає змішаній стратегії. Ординати точок, що лежать на ламаній B_2MB_1' (нижня ціна гри) характеризують мінімальний виграш гравця A при використанні будь-якої змішаної стратегії $\overline{X}$.

Згідно принципу максиміна, оптимальний розв'язок гри визначає точка M, у якій мінімальний виграш досягає максимуму. Їй відповідає на осі абсцис оптимальна стратегія x^*, а ордината дорівнює ціні гри v.

За ціною гри знаходимо оптимальну стратегію гравця A:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = v; \\ x_1^* + x_2^* = 1. \end{cases}$$

Аналогічно, можна визначити оптимальну стратегію гравця B, якщо поміняти місцями гравців A і B та згідно з принципом мінімакса розглянути верхню межу виграшу гравця B та визначити точку в якій він мінімізується.

Якщо матриця гри має сідлову точку, то можливі такі різновиди графічного зображення гри (рис. 6.2, рис. 6.3).

Нижньою ціною гри буде ламана B_1MB_2'. Оскільки максимальне значення ламаної досягається в точці B_2' стратегії A_2, то оптимальною для гравця A є чиста стратегія A_2, а для гравця B – чиста стратегія B_2, тобто $X^* = (0;1)$, $Y^* = (0;1)$.

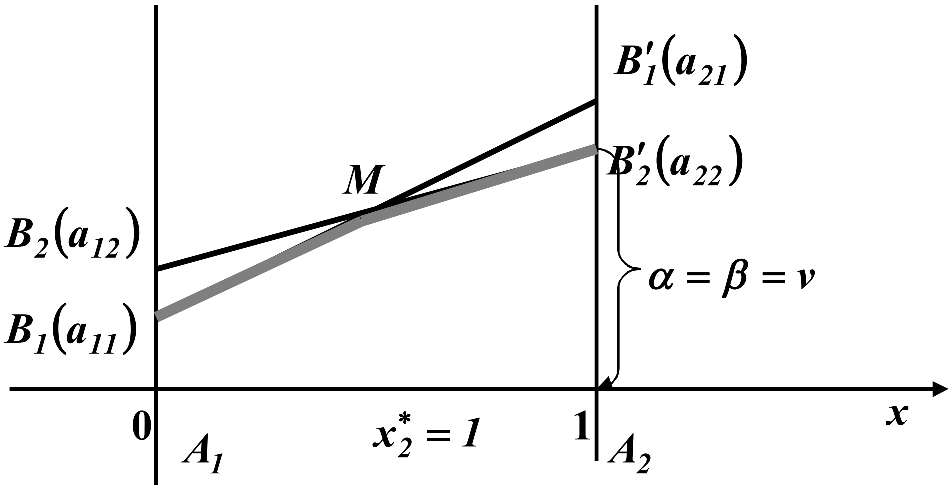

Рис. 6.2. Графічне зображення гри із сідловою точкою

Гра має сідлову точку $v = a_{22}$, що дорівнює ціні гри.

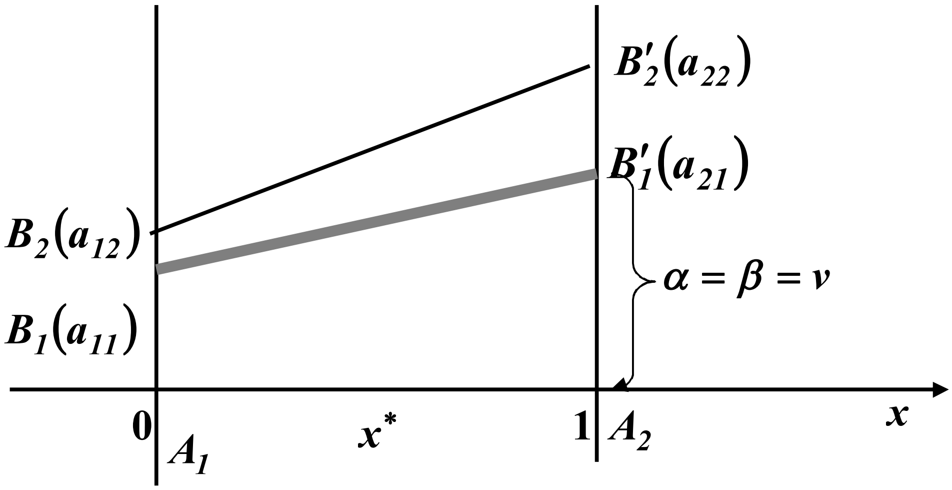

Рис. 6.3. Графічне зображення гри із сідловою точкою

Чиста стратегія B_2 не вигідна для гравця B, тому що при будь-якій стратегії гравця A вона дає останньому більший виграш, ніж чиста стратегія B_1. Згідно з критерієм мінімакса виділяємо пряму B_1B_1' і на ній точку з найбільшою ординатою. Чиста стратегія A_2 є оптимальною для гравця A, а чиста стратегія B_1 – для гравця B. Оптимальний розв’язок $\overline{X}^* = (0;1)$, $\overline{Y}^* = (1;0)$, а ціна гри $v = a_{21}$.

4. Приклади графічного розв'язування ігор 2×2

Приклад 6.4

Знайти графічним методом розв'язок гри $P=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

1. Визначення сідлової точки гри, заданої матрицею *P*

Таблиця 6.6

Платіжна матриця

B_j / A_i	B_1	B_2	$\alpha_i=\min\limits_j a_{ij}$
A_1	2	3	2
A_2	3	2	2
$\beta_j=\max\limits_i a_{ij}$	3	**3**	$\alpha=2$ / $\beta=3$

Визначимо нижню і верхню ціни гри:

$$\alpha_1=\min(2;3)=2,\ \alpha_2=\min(3;2)=2\ \Rightarrow \alpha=\max(2;2)=2.$$

$$\beta_1=\max(2;3)=3,\ \beta_2=\max(3;2)=3\ \Rightarrow \beta=\min(3;3)=3.$$

Оскільки $\alpha\neq\beta$ $(2\neq 3)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

2. Графічне розв'язання гри, заданої матрицею *P*

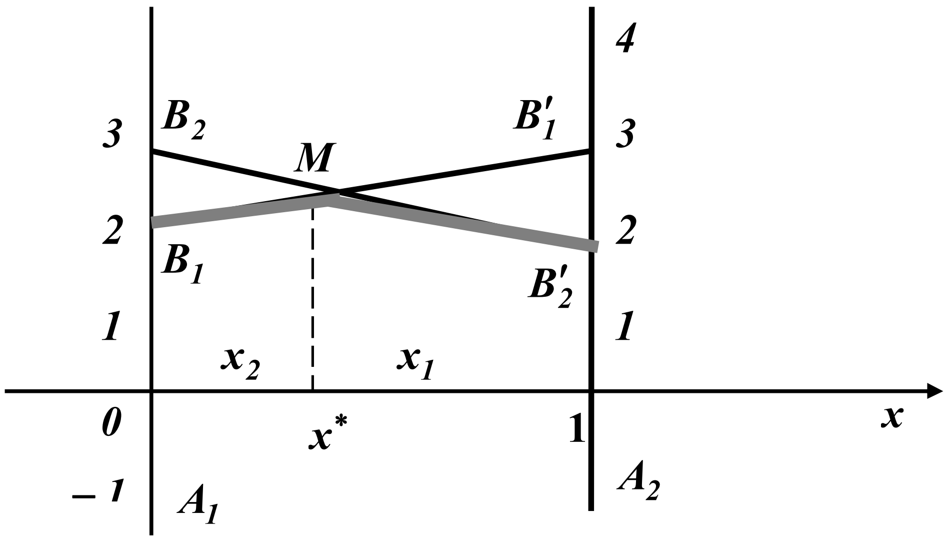

Рис. 6.4. Стратегії гравця ***B***

Якщо гравець B приймає чисту стратегію B_1, то виграші $a_{11} = 2$ і $a_{21} = 3$. Відкладемо ці точки на прямих A_1 і A_2 та з'єднаємо їх прямою $B_1B'_1$. Аналогічно, якщо гравець B приймає чисту стратегію B_2, то виграші $a_{12} = 3$ і $a_{22} = 2$. Відкладемо ці точки на прямих A_1 і A_2 та з'єднаємо їх прямою $B_2B'_2$.

Ламана $B_1MB'_2$ – нижня межа виграшу гравця A (рис. 6.4).

Абсциса точки M визначає оптимальну стратегію X^* гравця A, а ордината – ціну гри v. Визначимо оптимальну стратегію гравця A з геометричної побудови.

Побудуємо рівняння прямої $B_1B'_1$, що проходить через точки $(0;2)$ і $(1;3)$:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{3-2}; \qquad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1}; \qquad x = y-2; \qquad x - y + 2 = 0.$$

Аналогічно, побудуємо рівняння прямої $B_2B'_2$, що проходить через точки $(0;3)$ і $(1;2)$:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-3}{2-3}; \qquad \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1}; \qquad -x = y-3; \qquad x + y - 3 = 0.$$

Тоді координати точки $M = B_1B_1 \cap B_2B_2$ визначимо, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0; \\ x + y - 3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0{,}5; \\ y = 2{,}5. \end{cases}$$

Звідси, $x_1 = 1 - x = 0{,}5; \quad x_2 = x = 0{,}5; \quad v = y = 2{,}5.$

Отже, ***оптимальна стратегія гравця*** A буде $X^* = (0{,}5;0{,}5)$, ціна гри $v = 2{,}5$.

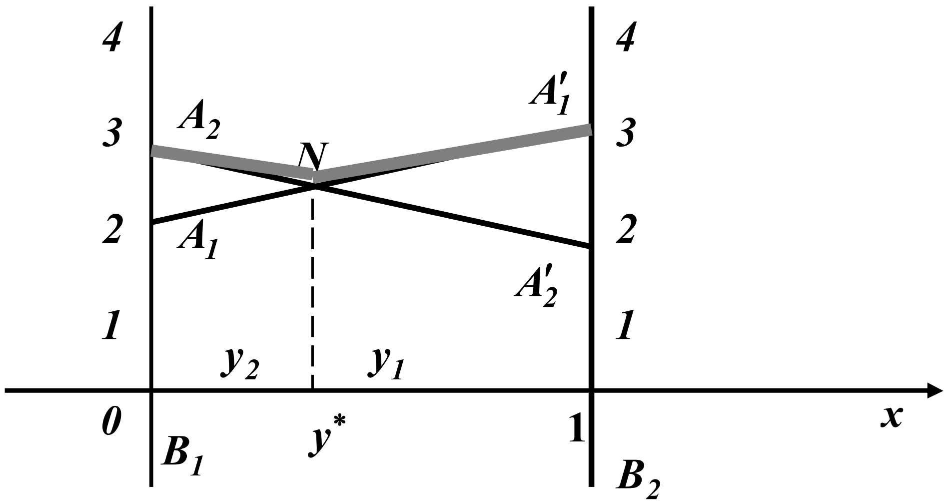

Рис. 6.5. Стратегії гравця A

Аналогічно можна визначити оптимальну стратегію гравця B, якщо поміняти місцями гравців A і B і розглянути верхню межу програшу – ламану A_2NA_1 (рис. 6.5)

Абсциса точки N визначає оптимальну стратегію Y^* гравця B, а ордината – ціну гри v. Визначимо оптимальну стратегію гравця B з геометричної побудови.

Побудуємо рівняння прямої A_1A_1', що проходить через точки $(0;2)$ і $(1;3)$:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-2}{3-2}; \qquad \frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}; \qquad x=y-2; \qquad x-y+2=0.$$

Аналогічно, побудуємо рівняння прямої A_2A_2', що проходить через точки $(0;3)$ і $(1;2)$:

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{2-3}; \qquad \frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}; \qquad -x=y-3; \qquad x+y-3=0.$$

Тоді координати точки $N = A_1A_1' \bigcap_2 A_2A_2'$ визначимо, розв’язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} x-y+2=0; \\ x+y-3=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0,5; \\ y=2,5. \end{cases}$$

Звідси, $y_1=1-x=0,5; \quad y_2=x=0,5; \quad v=y=2,5.$

Отже, ***оптимальна стратегія гравця B*** буде $Y^*=(0,5;0,5)$, ціна гри $v=2,5$.

3. Альтернативний спосіб визначення оптимальної стратегії гравця *B*

Оптимальну стратегію гравця B для гри, заданої матрицею $P=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ можна знайти без додаткової геометричної побудови (рис. 5), використовуючи знайдену ціну гри:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^*+a_{12}y_2^*=v; \\ y_1^*+y_2^*=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y_1^*+3y_2^*=2,5; \\ y_1^*+y_2^*=1. \end{cases} \begin{cases} y_1^*=0,5; \\ y_2^*=0,5. \end{cases}$$

Звідси, оптимальна стратегія гравця B буде $Y^*=(0,5;0,5)$.

5. Перевірка результатів аналітичним методом

Для гри, заданої матрицею $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ маємо:

– оптимальна стратегія гравця $\boldsymbol{A}$:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-3}{2+2-3-3} = \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-3}{2+2-3-3} = \frac{1}{2};$$

– оптимальна стратегії гравця $\boldsymbol{B}$:

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-3}{2+2-3-3} = \frac{1}{2};$$

$$y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{2-3}{2+2-3-3} = \frac{1}{2};.$$

– ціна гри: $v = \dfrac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \dfrac{2\cdot 2 - 3\cdot 3}{2+2-3-3} = -\dfrac{5}{2}.$

Приклад 6.5

Знайти графічним методом розв’язок гри $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв’язання

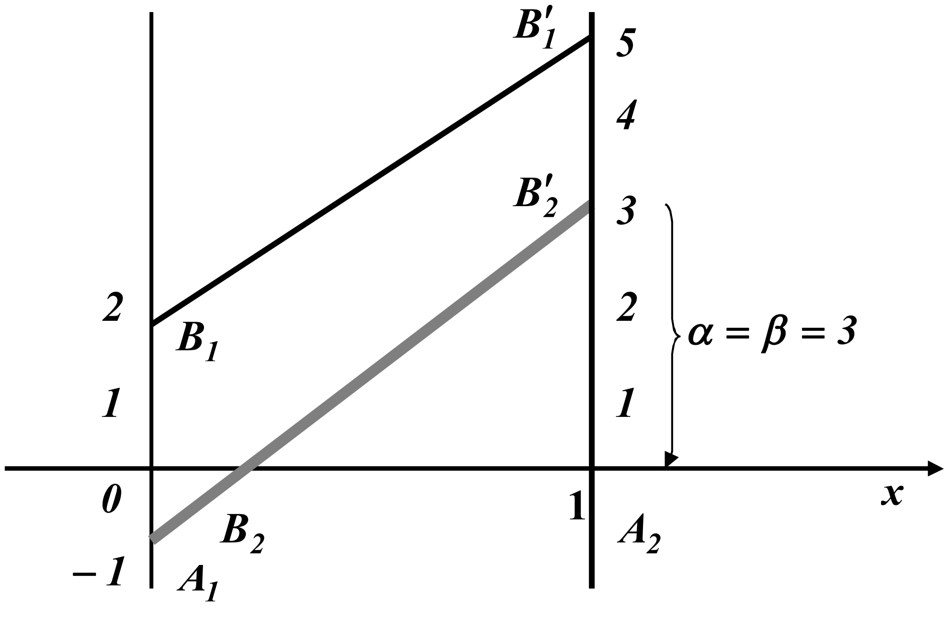

Рис. 6.6. Графічне зображення гри із сідловою точкою

Таблиця 6.7

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1	B_2	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	2	-1	-1
A_2	5	3	3
$\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$	**5**	**3**	**3** \ **3**

Гра має сідлову точку $v = \alpha = \beta = 3$. Згідно з принципом мінімакса пряма B_2B_2' – нижня межа виграшу. Точка з найбільшою ординатою лежить на прямій A_2, тому чиста стратегія A_2 є оптимальною для гравця A, а чиста стратегія B_2 – для гравця B.

Приклад 6.6 (Побудови матриці гри)

Гра полягає в тому, що гравець A записує числа 1 (стратегія A_1), $2\left(A_2\right)$, чи $3\left(A_3\right)$. Гравець B, у свою чергу, може записати числа $1\left(B_1\right)$, $2\left(B_2\right)$, $3\left(B_3\right)$,чи $4\left(B_4\right)$.

Якщо обидва числа виявляться рівної парності, то гравець A виграє суму цих чисел, якщо різної парності, то гравець B виграє суму цих чисел. Скласти платіжну матрицю, визначити верхню і нижню ціну гри і мінімаксні стратегії.

Розв'язання

Відповідно до умови, платіжна матриця гри має такий вигляд:

Таблиця 6.8

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1 1	B_2 2	B_3 3	B_4 4
A_1 1	1+1	-(1+2)	1+3	-(1+4)
A_2 2	-(2+1)	2+2	-(2+3)	2+4
A_3 3	3+1	-(3+2)	3+3	-(3_4)

Звідси,

Таблиця 6.9

Платіжна матриця

A_i \ B_j	B_1 1	B_2 2	B_3 3	B_4 4	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
A_1 1	2	-3	4	-5	-5
A_2 2	-3	4	-5	6	-5
A_3 3	4	-5	6	-7	-7
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	4	4	6	6	-5 \ 4

Нижня ціна гри: $\alpha = \max \alpha_i = -5$; верхня ціна гри: $\beta = \min \beta_j = 4$.

Отже, для гравця A максимінними стратегіями є A_1 6. або A_2, при яких йому забезпечений «виграш» не менше (-5) (тобто програш не більше 5). Для гравця B відповідно мінімаксними стратегіями є B_1 або B_2, що забезпечують йому програш не більше 4. Оскільки $\alpha \neq \beta$ $\left(-5 \neq 4\right)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

5. Графічний метод розв’язування ігор $2 \times n$ і $m \times 2$

Графічний метод можна застосовувати до ігор, в яких хоча б один гравець має тільки дві стратегії, тобто до ігор $2 \times n$ і $m \times 2$.

Основні етапи відшукання розв’язку.

1. Будуємо прямі, що відповідають стратегіям другого (першого) гравця.
2. Визначаємо нижню (верхню) межу виграшу.
3. Знаходимо дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з найбільшою (найменшою) ординатою.
4. Визначаємо ціну гри й оптимальні стратегії.

Якщо матриця $2 \times n$, то потрібно побудувати n прямих, що відповідають n стратегіям другого гравця і визначити нижню межу виграшу. Точка M, що лежить на нижній межі, для якої величина виграшу найбільша, визначає ціну гри і її розв'язок.

При цьому визначаються активні стратегії гравця $\boldsymbol{B}$ (відповідні їм прямі перетинаються в точці $\boldsymbol{M}$): з геометричних міркувань можна знайти значення y_j, що відповідають активним стратегіям гравця $\boldsymbol{B}$.

Аналогічно може бути розв'язана гра з матрицею $m \times 2$, тільки в цьому випадку будують верхню межу програшу і на ній визначають мінімум.

Слід зазначити, що геометричні побудови є сенс використовувати для визначення активних стратегій гравців. Потім розв'язок гри можна одержати з геометричних побудов чи за допомогою формул, оскільки з відповідної матриці виключаються всі стратегії, крім активних, і вона містить два рядки і два стовпці.

6. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Розглянемо гру, у якій матриця $\boldsymbol{A}$ має розмірність $m \times n$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. Матриця не містить сідлової точки, тому рішення гри знаходиться в змішаних стратегіях $x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

При оптимальній стратегії гравця $\boldsymbol{A}$ виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v \text{ (для гравця } \boldsymbol{A}\text{)},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v \text{ (для гравця } \boldsymbol{B}\text{)}.$$

Таким чином, можна розглянути задачу пошуку оптимальної стратегії гравця $\boldsymbol{A}$, для якої мають місце такі обмеження:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq v, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Поділивши всі обмеження на v і позначивши $t_i = \frac{x_i}{v}$, дістанемо:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_1 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1. \end{cases}$$

Аналогічну систему запишемо для гравця B:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \leq v, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_n \leq v, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = 1.$$

Поділивши всі обмеження на v і позначивши $z_j = \frac{y_j}{v}$, дістанемо:

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1n}z_n \leq 1, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2n}z_n \leq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}z_1 + a_{m2}z_2 + \ldots + a_{nm}z_n \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} t_i v,$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} z_j v,$$

Величина v (ціна гри) не відома, але можна вважати, що вона більша ніж 0. Ця умова виконується завжди, якщо елементи матриці невід’ємні (якщо є від’ємні елементи, то потрібно додати до всіх елементів матриці деяке додатне число C). Якщо $v < 0$, то необхідно поміняти знаки нерівностей.

Рішення гри повинне максимізувати значення v для гравця A $\left(f(x) = v \to max\right)$, значить функція

$$F = \sum_{i=1}^{m} t_i \to min \text{, тому що } t_i = \frac{x_i}{v}.$$

Отже, отримана задача лінійного програмування.

Цільова функція має вигляд:

$$F = \sum_{i=1}^{m} t_i \to min$$

обмеження:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} t_i \geq 1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = \frac{1}{v}.$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо t_i і відповідну величину $\frac{1}{v}$, а потім знайдемо значення $x_i = v \cdot t_i$.

Аналогічно для гравця B:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} z_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \leq 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j = \frac{1}{v}.$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо z_j і відповідну величину $\frac{1}{v}$, а потім знайдемо значення $y_j = v \cdot z_j$.

Ця задача називається парою двоїстих симетричних задач лінійного програмування. Використовуючи властивість симетричності, можна розв'язати одну з задач, що вимагає менше обчислень, а розв'язання другої задачі знайти на підставі оптимального плану двоїстої. Для розв'язання таких задач у математичному програмуванні розроблені спеціальні методи, наприклад симплексний метод.

Тема 1.7. Статистичні ігри

План

1. Елементи теорії статистичних рішень.
2. Основні поняття теорії статистичних ігор.
3. Критерій Вальда (критерій крайнього песимізму).
4. Критерій крайнього оптимізму (кращий із кращих).
5. Мінімаксний критерій Севіджа (критерій крайнього песимізму)
6. Критерій узагальненого максиміна Гурвіца (критерій песимізму-оптимізму).
7. Принцип недостатнього обґрунтування Лапласа.

1. Елементи теорії статистичних рішень

У багатьох задачах, що прирівнюються до ігрових, невизначеність викликана відсутністю інформації про умови, у яких відбувається дія. Ці умови залежать не від свідомих дій одного гравця, а від об'єктивної дійсності, що прийнято називати ***природою***. Такі ігри називають статистичними.

Творець теорії статистичних ігор А. Вальд показав, що якщо рішення приймається в умовах часткової невизначеності, то основним підходом для прийняття рішень є статистичні ігри.

Статистичні ігри (моделі) **–** це гра двох осіб – людини і природи – з використанням людиною додаткової статистичної інформації про стани природи.

Природа не є розумним гравцем, що прагне вибрати для себе оптимальні стратегії, не зацікавлена у виграші. Інша справа – людина (статистик), що має на меті виграти гру з уявлюваним супротивником, тобто з природою. Гравець-природа не вибирає оптимальної стратегії, але статистик повинен прагнути до визначення розподілу ймовірностей стану природи.

Статистик (гравець А) намагається діяти обачно, використовуючи, наприклад, мінімаксну стратегію, що дозволяє одержати найменший програш.

Гравець-природа діє зовсім випадково, можливість стратегії визначається як її стан, наприклад, умови погоди в даному районі, попит на продукцію, обсяг перевезень, вантажопотік іт. д.

Отже, основними відмінностями статистичної гри від стратегічної є:

– відсутність прагнення до виграшу в гравця-природи, тобто відсутність антагоністичного супротивника;

– можливість другого гравця-статистика провести статистичний експеримент для одержання додаткової інформації про стратегії природи.

2. Основні поняття теорії статистичних ігор

У статистичних іграх використовуються такі поняття: функція ризику, функція втрат, функція рішень. Умови гри задаються у вигляді матриці $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$ – множина рішень статистика, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{ij})$ – множина рішень природи, або $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_{ij})$ – матриця ризиків. Елемент $\boldsymbol{a}_{ij}$ дорівнює виграшу гравця $\boldsymbol{A}$, якщо він використовує стратегію $\boldsymbol{A}_i$, а природа має стан $\boldsymbol{B}_j$.

Елементи ***матриці ризику*** $\boldsymbol{r}_{ij}$ – це різниця між виграшем, що одержав би статистик $\boldsymbol{A}$, якби знав стан природи $\boldsymbol{B}_j$, і виграшем, який він одержить у тих же умовах, застосовуючи стратегію $\boldsymbol{A}_i$:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}.$$

Приклад 7.1

Для матриці прибутків (табл. 7.1) побудувати матрицю ризиків.

Таблиця 7.1

Матриця прибутків

	P_1	P_2	P_3
A_1	3	4	5
A_2	6	7	8
A_3	9	1	2
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	**9**	**7**	**8**

Розв’язання

Знайдемо максимальні елементи в кожному стовпці:

$\beta_1 = \max(3;6;9) = 9$, $\beta_2 = \max(4;7;1) = 7$, $\beta_3 = \max(5;8;2) = 8$.

Звідси, маємо:

Таблиця 7.2

Матриця ризиків

	P_1	P_2	P_3
A_1	9-3	7-4	8-5
A_2	9-6	7-7	8-8
A_3	9-9	7-1	8-2

$\Rightarrow$

	P_1	P_2	P_3
A_1	6	3	3
A_2	3	0	0
A_3	0	6	6

Згідно з ***критерієм Байєса*** якщо припустити відомим розподіл ймовірностей для різних станів природи, то для прийняття рішення слід знайти математичні сподівання.

Критерієм прийняття рішення є максимізація виграшу чи мінімізація очікування ризику чи втрат.

Нехай імовірності стану природи дорівнюють p_j ($\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$). Вибір $i-$ої стратегії визначається математичним сподіванням: $M_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$.

Якщо ж питання розподілу ймовірності природи невідоме, можна скористатися рядом класичних критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

3. Критерій Вальда (критерій крайнього песимізму)

Критерій Вальда аналогічний підходу, застосовуваному в стратегічних іграх, де супротивник вкрай агресивний. Критерій орієнтує особу, що приймає рішення, на вкрай обережну лінію поводження, тому ним користуються у випадках, коли необхідно забезпечити успіх за будь-яких можливих умов. Це критерій гарантованого результату.

3.1. Критерій Вальда для матриці виграшів

Для ***матриці виграшів*** гравця ***А*** використовується ***критерій максиміна***: найкращим рішенням буде те, для якого виграш виявиться максимальним із усіх мінімальних, при різних варіантах умов:

$$H_W = \max_i \min_j a_{ij}, \text{ або } H_W = \max_i \alpha_i, \text{ де } \alpha_i = \min_j a_{ij}.$$

Максимінний критерій Вальда збігається з критерієм вибору стратегії, що дозволяє одержати нижню ціну гри для двох осіб з нульовою сумою, тобто вибирається стратегія, що гарантує за будь-яких умов виграші не менші ніж $\max_i \min_j a_{ij}$. Він використовується у випадках, коли потрібна гарантія, щоб виграш у будь-яких умовах виявився не менший, ніж найбільший з можливих у гірших умовах (кращий з гірших).

Приклад 7.2

Застосуємо критерій Вальда для матриці виграшів (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Матриця виграшів

	P_1	P_2	P_3	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
A_1	5	3	1	**1**
A_2	6	4	8	***4***
A_3	2	9	6	**2**
$H_W = \max_i \alpha_i$				**4**

Знайдемо мінімальні виграші в кожному рядку: $\alpha_i = (1;4;2)$ а потім серед них максимальне значення: $H_W = \max_i(1;4;2) = 4$, яке відповідає стратегії A_2.

У цьому випадку незалежно від станів природи P одержимо виграш не менше 4. За будь-якого іншого рішення, у разі несприятливих умов, може бути отриманий виграш менше 4.

3.2. Критерій Вальда для матриці програшів

Для ***матриці програшів*** гравця A використовується ***критерій мінімакса***: найкращим рішенням буде те, для якого програш виявиться мінімальним із усіх максимальних, при різних варіантах умов:

$$H_W = \min_i \max_j a_{ij}, \text{ або } H_W = \min_i \beta_i, \text{ де } \beta_i = \max_j a_{ij}.$$

Мінімаксний критерій Вальда використовується у випадках, коли потрібна гарантія, щоб програш у будь-яких умовах виявився не більший, ніж найменший з можливих у гірших умовах (кращий з гірших).

Даний критерій простий і чіткий, але консервативний у тому розумінні, що орієнтує того, хто приймає рішення, на вкрай обережну лінію поводження. Ним, головним чином, користуються у випадках, коли необхідно забезпечити **успіх** за будь-яких можливих умов.

Приклад 7.3

Застосуємо критерій Вальда для матриці збитків (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

Матриця збитків

	P_1	P_2	P_3	$\beta_i = \max\limits_j a_{ij}$
A_1	2	4	9	**9**
A_2	1	7	2	*7*
A_3	8	9	1	**9**
$H_W = \min\limits_i \beta_i$				**7**

Знайдемо максимальні збитки в кожному рядку: $\beta_i = (9;7;9)$, а потім серед них мінімальне значення: $H_W = \min\limits_i (9;7;9) = 7$, яке відповідає стратегії A_2. У цьому випадку, незалежно від встанів природи P, одержимо збитки не більше 7. При будь-якому іншому рішенні, у випадку несприятливих умов, може бути отриманий програш більше 7.

4. Критерій крайнього оптимізму (кращий із кращих)

4.1. Для ***матриці виграшів***: найкращим рішенням буде те, для якого виграш виявиться максимальним із усіх максимальних, при різних варіантах умов:

$$H_O = \max_i \max_j a_{ij},$$

або $H_O = \max\limits_i \alpha_i$, $\alpha_i = \max\limits_j a_{ij}$.

Приклад 7.4

Таблиця 7.4

Матриця прибутків

	P_1	P_2	P_3	$\alpha_i = \max\limits_j a_{ij}$
A_1	5	3	1	**5**
A_2	6	4	8	**8**
A_3	2	9	6	***9***
$H_O = \max\limits_i \alpha_i$				**9**

Застосуємо критерій крайнього оптимізму для матриці прибутку. Знайдемо максимальні прибутки в кожному рядку: $\alpha_i = (5;8;9)$, а потім серед них максимальне значення: $H_O = \max\limits_i(5;8;9) = 9$, яке відповідає стратегії A_3.

4.2. Для ***матриці збитків:*** найкращим рішенням буде те, для якого програш виявиться мінімальним із усіх мінімальних, при різних варіантах умов:

$H_O = \min\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, або $H_O = \min\limits_i \beta_j$, де $\beta_j = \min\limits_j a_{ij}$

Приклад 7.5

Таблиця 7.5

Матриця збитків

	P_1	P_2	P_3	$\beta_j = \min\limits_j a_{ij}$
A_1	2	4	9	**2**
A_2	1	7	2	**1**
A_3	8	9	1	**1**
$H_O = \min\limits_i \beta_j$				**1**

Застосуємо критерій крайнього оптимізму для матриці збитків (табл. 7.5).

Знайдемо мінімальні збитки в кожному рядку: $\beta_j = (2;1;1)$, а потім серед них мінімальне значення: $H_O = \min\limits_i(2;1;1) = 1$, яке відповідає стратегії A_2 чи A_3.

5. Мінімаксний критерій Севіджа (критерій крайнього песимізму)

Використовується в тих випадках, коли потрібно уникнути великого ризику (гірший із кращих). На відміну від критерію Вальда розглядається матриця втрат прибутку (матриця ризику).

5.1. Критерій Севіджа для матриці виграшів (прибутку)

Втрати прибутку p_{ij} визначаються, як різниця між максимальним виграшем і виграшем щодо конкретного рішення за даної обстановки: $p_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$. Тоді ***матриця втрат (недоодержання) прибутку*** $P = (p_{ij})$.

Критерій Севіджа рекомендує перевагу віддавати рішенню, для якого **втрати** максимальні за різних варіантів умов виявляються мінімальними

$$H_S = \min_i \max_j p_{ij},$$

$$\text{або } H_S = \min_i \alpha_i, \text{ де } \alpha_i = \max_j p_{ij},$$

де p_{ij} – втрати, що відповідають i – тому рішенню, при j – тому варіанті обстановки.

Приклад 7.6

Таблиця 7.6

Матриця прибутків

	P_1	P_2	P_3
A_1	5	3	1
A_2	6	4	8
A_3	2	9	6
$\max_i a_{ij}$	**6**	**9**	**8**

Застосуємо критерій Севіджа для матриці прибутку.

Знайдемо максимальні елементи в кожному стовпці та побудуємо матрицю втрат прибутку (табл. 7.7), враховуючи $p_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$:

Таблиця 7.7

Матриця втрат прибутків

	P_1	P_2	P_3
A_1	6-5	9-3	8-1
A_2	6-6	9-4	8-8
A_3	6-2	9-9	8-6

$\Rightarrow$

	P_1	P_2	P_3	$\alpha_i = \max\limits_j p_{ij}$
A_1	1	5	7	7
A_2	0	5	0	5
A_3	4	0	2	4
$H_S = \min\limits_i \alpha_i$				**4**

Звідси $H_S = \min\limits_i(7;5;4) = 4$, що відповідає стратегія A_3. Вибір рішення A_3 гарантує, що у випадку несприятливої обстановки, втрати не перевищать 4 одиниці.

5.2. Критерій Севіджа для матриці програшів (збитків)

Ризиком називається різниця між мінімальним програшем, який сплатив би статистик, знаючи стан P_j і фактичним програшем при рішенні A_i: $r_{ij} = a_{ij} - \min\limits_i a_{ij}$. Тоді ***матриця ризику*** $R = (r_{ij})$.

Критерій мінімального ризику Севіджа рекомендує вибирати стратегію, при якій величина ризику набирає найменше значення у найнесприятливішій ситуації:

$$H_S = \min_i \max_j r_{ij}, \text{ або } H_S = \min_i \beta_i, \text{ де } \beta_i = \max_j r_{ij}.$$

Основним вихідним допущенням критерію є положення про те, що на настання варіантів обстановки впливають дії розумних конкурентів, інтереси яких прямо протилежні інтересам особи, що приймає рішення. Тому якщо в конкурентів є можливість здобути які-небудь переваги, вони обов'язково це зроблять. Це змушує особу, що приймає рішення, забезпечити мінімум утрат внаслідок цих дій (критерій відноситься до розряду обережних).

Як критерій Вальда, так і критерій Севіджа засновані на найпесимістичнішій оцінці обстановки. Однак на відміну від критерію Вальда, що спрямований на одержання гарантованого виграшу, критерій Севіджа ***мінімізує можливі втрати***.

Приклад 7.7

Таблиця 7.8

Матриця збитків

	P_1	P_2	P_3
A_1	2	4	9
A_2	1	7	2
A_3	8	9	1
$\min\limits_i a_{ij}$	**1**	**4**	**1**

Застосуємо критерій Севіджа для матриці збитків (табл. 7.8).

Знайдемо мінімальні елементи в кожному стовпці та побудуємо матрицю ризиків, враховуючи $r_{ij} = a_{ij} - \min\limits_i a_{ij}$.

Таблиця 7.9

Матриця ризиків

	P_1	P_2	P_3
A_1	2-1	4-4	9-1
A_2	1-1	7-4	2-1
A_3	8-1	9-4	1-1

$\Rightarrow$

	P_1	P_2	P_3	$\beta_i = \max\limits_j r_{ij}$
A_1	1	0	8	**8**
A_2	0	3	1	**3**
A_3	7	5	0	**7**
$H_S = \min\limits_i \beta_i$				**8**

За критерієм мінімального ризику Севіджа потрібно вибрати стратегію, при якій величина ризику набирає найменше значення в найбільш несприятливій ситуації, тобто $H_S = \min\limits_i(8;3;7) = 3$, що відповідає стратегії A_2.

6. Критерій узагальненого максиміна Гурвіца (критерій песимізму-оптимізму)

На відміну від критерію Вальда і критерію Севіджа, критерій Гурвіца враховує як песимістичний, так і оптимістичний підхід до ситуації. Використовується, якщо потрібно зупинитися між лінією поводження в розрахунку на гірше і лінією поводження в розрахунку на краще, через це його часто називають ***критерієм песимізму-оптимізму.***

Цей принцип є спрощеним варіантом ***принципу Байєса-Лапласа***. Якщо відомі ймовірності окремих станів, то беруть середнє арифметичне результатів при найкращому рішенні. Іноді, якщо існує можливість визначити вагу найгіршого і найкращого рішень, використовують їх зважену середню арифметичну.

6.1. Критерій Гурвіца для матриці виграшів

Для ***матриці виграшів***: перевага надається варіанту рішень, для якого виявиться максимальним показник G:

$$H_G = \max_i G_i = \max_i \left\{ x \min_j a_{ij} + (1-x) \max_j a_{ij} \right\},$$

або

$$H_G = \max_i G_i, \text{ де } \quad G_i = x\alpha_i + (1-x)\beta_i,\ \alpha_i = \min_j a_{ij},\ \beta_i = \max_j a_{ij},$$

де a_{ij} – виграш, що відповідає i – му рішенню при j – ім варіанті обстановки, x – показник оптимізму $(0 \le x \le 1)$, при $x = 0$ – лінія поводження в розрахунку на краще, $x = 1$ – лінія поводження в розрахунку на гірше.

При $x = 1$, критерій Гурвіца прирівнюється до критерію Вальда, тобто орієнтація на обережне поводження. При $x = 0$, орієнтація на граничний ризик, що відповідає критерію крайнього оптимізму. Значення x між 0 і 1 є проміжними між ризиком і обережністю залежно від конкретної обстановки і схильності особи, що приймає рішення, до ризику.

Девіз цього критерію – «Пан або пропав».

6.2. Критерій Гурвіца для матриці програшів

Для ***матриці програшів***: перевага надається варіанту рішень, для якого виявиться мінімальним показник G:

$$H_G = \min_i G_i = \min_i \left\{ x \max_j a_{ij} + (1-x) \min_j a_{ij} \right\},$$

або

$$H_G = \min_i G_i, \text{ де } \quad G_i = x\alpha_i + (1-x)\beta_i,\ \alpha_i = \max_j a_{ij}\ ,\ \beta_i = \min_j a_{ij},$$

де $0 \le x \le 1$ показник песимізму.

При $x = 1$ приходимо до песимістичного критерію Вальда, при $x = 0$ – до гранично оптимістичного критерію.

Значення x вибирають на підставі суб'єктивних розумінь. Чим більше бажання підстрахуватися в даній ситуації, тим ближче до одиниці значення x.

Принцип Гурвіца є спрощеним варіантом принципу Байєса-Лапласа. Якщо відомі ймовірності окремих станів, то беруть середнє арифметичне результатів при найкращому рішенні. Іноді, якщо існує можливість визначити вагу найгіршого і найкращого рішень, використовують їх зважену середню арифметичну.

Приклад 7.8

Знайти оптимальне рішення, скориставшись критерієм Гурвіца, якщо відома матриця прибутку

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 8 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Таблиця 7.10

Матриця прибутку

	P_1	P_2	P_3	$\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$	$\beta_i = \max\limits_j a_{ij}$
A_1	5	3	1	**1**	**5**
A_2	6	4	8	**4**	**8**
A_3	2	9	6	**2**	**9**

Знайдемо спочатку величини $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $\beta_i = \max\limits_j a_{ij}$:

Тепер приймається рішення про вибір стратегії, при якій має місце формула:

$$H_G = \max_i G_i = \max_i \left\{ x \min_j a_{ij} + (1 - x) \max_j a_{ij} \right\}$$

$$H_G = \max_i \begin{pmatrix} x \cdot 1 + (1 - x) \cdot 5 \\ x \cdot 4 + (1 - x) \cdot 8 \\ x \cdot 2 + (1 - x) \cdot 9 \end{pmatrix}$$

Тоді $x -$ показник оптимізму $(0 \le x \le 1)$.

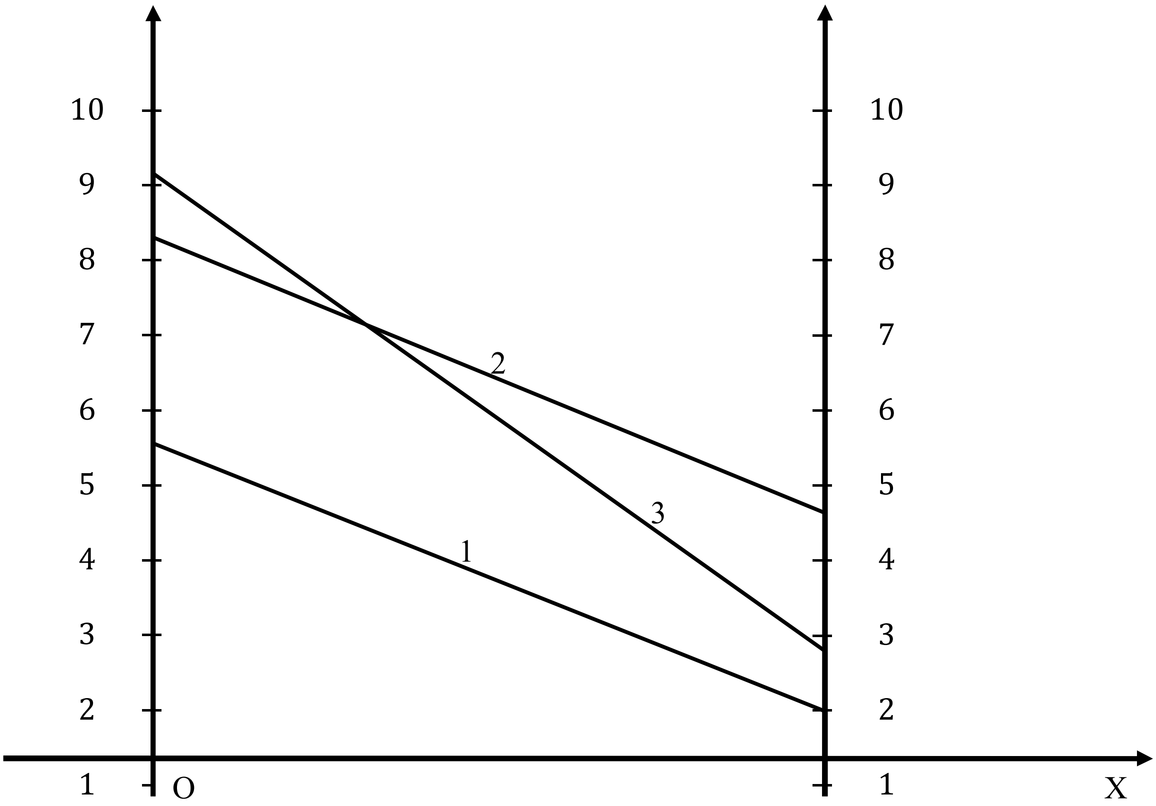

Рис. 7.1. Графічний розв’язок для критерію Гурвіна

Побудуємо графік статистики: побудуємо пряму $\boldsymbol{Ox}$, відкладемо на ній точки $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$, побудуємо перпендикуляри з цих точок до осі $\boldsymbol{Ox}$ (див. рис. 1).

Відкладемо точки на прямих $\boldsymbol{\alpha}$ і $\boldsymbol{\beta}$:

– прямій $\boldsymbol{l_1}$ відповідають точки 1 і 5;
– прямій $\boldsymbol{l_2}$ відповідають точки 4 і 8;
– прямій $\boldsymbol{l_3}$ відповідають точки 2 і 9.

Нижньою ціною гри буде пряма $\boldsymbol{l_1}$, отже потрібно вибрати стратегію 1. При $\boldsymbol{x = 1}$ виграш буде дорівнювати 1, при $\boldsymbol{x = 0}$ мінімальний виграш буде дорівнювати 5.

7. Принцип недостатнього обґрунтування Лапласа

Принцип недостатнього обґрунтування Лапласа використовується у випадку, якщо можна припустити, що будь-який з варіантів стану не більше ймовірний, ніж інший. Тоді усі стани природи вважаються рівноймовірними і вибір рішення можна робити по мінімуму середньозваженого показника ризику:

$$\overline{R_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = \overline{1,m},$$

де n – кількість розглянутих варіантів станів.

Однак у цих випадках не можна стверджувати, що прийняте рішення є оптимальним. Оптимальним воно є тільки щодо прийнятого розподілу ймовірностей станів природи.

Критерій Лапласа – частинний випадок критерію Байєса. Для критерію Лапласа стани природи рівноможливі.

Приклад 7.9

Таблиця 7.11

Матриця прибутку

Варіанти рішень	Продукція		
	P_1	P_2	P_3
A_1	0,55	0,47	0,00
A_2	0,05	0,62	0,10
A_3	0,45	0,00	0,30
A_4	0,00	0,72	0,05

Розглянемо вибір варіантів в умовах невизначеності з використанням принципу недостатнього обґрунтування Лапласа на вихідних даних, наведених у таблиці 7.11.

Оскільки розглядалися три види продукції $(n = 3)$, то ймовірність кожного варіанта становить $p_i = \frac{1}{3}$ (рівноймовірна).

Тоді, з урахуванням наведених даних про втрати прибутку для кожної пари сполучень рішень A і випуску продукції P, а також імовірності кожного варіанта стану, рівної $\frac{1}{3}$, розрахуємо середньозважений показник ризику для кожного з рішень:

$$\overline{R_1} = 0,55 \cdot \frac{1}{3} + 0,47 \cdot \frac{1}{3} + 0,00 \cdot \frac{1}{3} \approx 0,3366;$$

$$\overline{R_2} = 0,05 \cdot \frac{1}{3} + 0,62 \cdot \frac{1}{3} + 0,10 \cdot \frac{1}{3} \approx 0,2541;$$

$$\overline{R_3} = 0,45 \cdot \frac{1}{3} + 0,00 \cdot \frac{1}{3} + 0,30 \cdot \frac{1}{3} \approx 0,2475;$$

$$\overline{R_4} = 0,00 \cdot \frac{1}{3} + 0,72 \cdot \frac{1}{3} + 0,05 \cdot \frac{1}{3} \approx 0,2541.$$

Найменше значення $H_L = \min\limits_i \overline{R_i}$ відповідає стратегії A_3, яку і будемо вважати оптимальною. Хоча найкращим з погляду критерію – середньозваженого показника ризику були стратегії A_2 і A_4. Таким чином, зміна ймовірності настання варіантів станів привела до зміни варіанта стратегії, якому слід віддавати перевагу.

Приклад 7.10

Можливе будівництво чотирьох типів електростанцій: A_1 (теплових), A_2 (пригребельних), A_3 (безгребельних) і A_4 (шлюзових). Ефективність кожного з типів електростанцій залежить від різних факторів: режиму рік, вартості палива і його перевезення тощо. Припустимо, що виділено чотири різних стани, кожен з яких означає певне сполучення факторів, що впливають на ефективність енергетичних об'єктів. Стани природи позначимо через P_1, P_2, P_3, P_4. Економічна ефективність будівництва окремих типів електростанції змінюється залежно від станів природи і заданої матриці $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Знайти найменш ризиковану стратегію, користуючись критеріями оптимізму і песимізму.

Розв'язання

Як вихідні дані розглянемо матрицю програшів (табл. 7.12).

Таблиця 7.12

Матриця програшів

	P_1	P_2	P_3	P_4	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$
A_1	5	2	8	4	**2**	**8**
A_2	2	3	4	12	**2**	**12**
A_3	8	5	3	10	**3**	**10**
A_4	1	4	2	8	**1**	**8**
$\min\limits_i a_{ij}$	**1**	**2**	**2**	**4**		

1. Відповідно до ***критерію Вальда***:

$$H_W = \min_i \max_j a_{ij} = \min(8;12;10;8) = 8$$

найменш ризикованими будуть стратегії A_1 і A_4, тобто слід передбачити будівництво теплової чи шлюзової ГЕС.

2. Відповідно до ***критерію крайнього оптимізму:***

$$H_O = \min_i \min_j a_{ij} = \min(2;2;3;1) = 1$$

найменш ризикованою є стратегія A_4, тобто слід передбачити будівництво шлюзової ГЕС.

3. Відповідно до ***критерію Севіджа*** побудуємо матрицю ризику, враховуючи $r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij}$.

Таблиця 7.13

Матриця ризиків

	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	5-1	2-2	8-2	4-4
A_2	2-1	3-2	4-2	12-4
A_3	8-1	5-2	3-2	10-4
A_4	1-1	4-2	2-2	8-4

$\Rightarrow$

	P_1	P_2	P_3	P_4	$\beta_i == \max_j r_{ij}$
A_1	4	0	6	0	**6**
A_2	1	1	2	8	**8**
A_3	7	3	1	6	**7**
A_4	0	2	0	4	**4**
$H_S = = \min_i \beta_i$					**4**

Оскільки $H_S = \min_i \max_j r_{ij} = (6;8;7;4) = 4$, то найменш ризикованою є стратегія A_4, тобто слід передбачити будівництво шлюзової ГЕС.

4. Відповідно до ***критерію Гурвіца***

$$H_G = \min_i G_i = \min_i \left\{ x \max_j a_{ij} + (1-x) \min_j a_{ij} \right\}.$$

$$H_G = \min_i G_i = \min_i \begin{pmatrix} x \cdot 8 + (1-x) \cdot 2 \\ x \cdot 12 + (1-x) \cdot 2 \\ x \cdot 10 + (1-x) \cdot 3 \\ x \cdot 8 + (1-x) \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки значення x вибирають на підставі суб'єктивних міркувань (чим більше бажання підстрахуватися в даній ситуації, тим ближче до одиниці значення x), припустимо, що $x = 0,5$.

Тоді,

$$H_G = \min_i G_i = \min_i \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 8 + (1 - 0,5) \cdot 2 \\ 0,5 \cdot 12 + (1 - 0,5) \cdot 2 \\ 0,5 \cdot 10 + (1 - 0,5) \cdot 3 \\ 0,5 \cdot 8 + (1 - 0,5) \cdot 1 \end{pmatrix} = \min_i \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 6,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 4,5,$$

тобто слід прийняти стратегію A_4 про будівництво шлюзових ГЕС.

5. Відповідно до ***принципу Лапласа*** якщо припустити відомим розподіл ймовірностей для різних станів природи, наприклад, вважати ці стани рівномовірними $p_i = \frac{1}{4}$, то для прийняття рішення знайдемо середньозважені показники ризику для кожного з рішень (математичні сподівання програшу):

$$\overline{R_1} = 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{4};$$

$$\overline{R_2} = 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4} = \frac{21}{4};$$

$$\overline{R_3} = 8 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{26}{4};$$

$$\overline{R_4} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Оскільки мінімальне значення має $\overline{R_4}$, то слід вибрати стратегію A_4, тобто будувати шлюзову ГЕС.

Висновок

Оптимальними стратегіями будуть:

– за принципом Байєса-Лапласа – A_4;

– за критерієм Вальда слід – A_1 і A_4;

– за критерію крайнього оптимізму – A_4;

– за критерієм Севіджа – A_4;

– за критерієм Гурвіца – A_4.

Заключне рішення залежить від схильності до ризику особи, що приймає рішення (ОПР).

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
ПРИКЛАДНІ ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ В ТУРИЗМІ

Тема 2.1. Динамічне програмування

План

1. Задачі динамічного програмування.
2. Принцип оптимальності Беллмана.
3. Мінімальна відстань (витрати) засобами ДП.
4. Приклад визначення мінімальної відстані (витрат) засобами динамічного програмування.

1. Задачі динамічного програмування

Динамічне програмування – метод оптимізації, пристосований до операцій, в яких процес ухвалення розв'язання може бути розподілений на етапи (кроки). Такі операції називаються ***багатокроковими***. Розвиток ДП почався у 50-ті роки XX ст. і зв'язаний з ім'ям Р. Беллмана.

Загальна постановка задачі динамічного програмуваня

Розглядається керований процес, наприклад, економічний процес розподілу коштів між підприємствами, використання ресурсів протягом декількох років, заміни устаткування, поповнення запасів тощо. У результаті керування систему (об'єкт керування) $\boldsymbol{S}$ переводять із початкового стану $\boldsymbol{S_0}$ у стан $\hat{\boldsymbol{S}}$. Припустимо, що керування можна розподілити на $\boldsymbol{n}$ кроків, тобто рішення приймають послідовно на кожнім кроці, а керування, що переводить систему $\boldsymbol{S}$ із початкового стану в кінцевий, являє собою сукупність $\boldsymbol{n}$ покрокових керувань.

Позначимо через $\boldsymbol{X_k}$ керування на $\boldsymbol{k}-$му кроці ($\boldsymbol{k=\overline{1,n}}$). Змінні $\boldsymbol{X_k}$ задовольняють деяким обмеженням і називаються ***припустимими*** ($\boldsymbol{X_k}$ може бути числом, точкою в $\boldsymbol{n}-$мірному просторі, якісною ознакою).

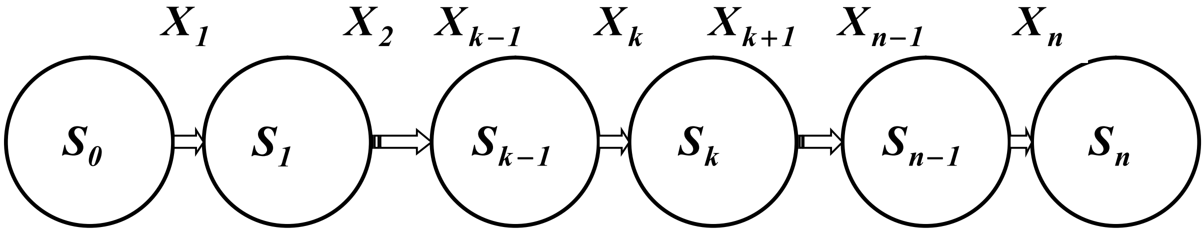

Рис. 8.1. Послідовність станів і керування

Нехай $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – керування, що переводить систему S зі стану S_0 у стан $\hat{S}$. Позначимо через S_k стан системи після $k-$го кроку керування. Одержуємо послідовність станів $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}, S_k, \ldots, S_{n-1}, S_n = \hat{S}$, яку позначимо колами (рис. 1).

Показник ефективності розглянутої керованої операції – цільова функція — залежить від початкового стану і керування:

$$Z = F(S_0, X).$$

Припущення задачі динамічного програмування

1. Стан S_k системи наприкінці $k-$го кроку залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} і керування на $k-$му кроці X_k і не залежить від попередніх станів і керувань. Ця вимога називається «відсутністю післядії» і записується у вигляді рівнянь:

$$S_k = \varphi(S_{k-1}, X_k), k = \overline{1, n},$$

які називаються ***рівняннями станів.***

2. Цільова функція $Z = F(S_0, X)$ є адитивною від показника ефективності кожного кроку. Позначимо показник ефективності $k-$го кроку через

$$Z_k = f_k(S_{k-1}, X_k), k = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(S_{k-1}, X_k).$$

Задача покрокової оптимізації (задача динамічного програмування): визначити таке припустиме керування X, що переводить систему S зі стану S_0 у стан $\hat{S}$, за якого цільова функція Z набуває найбільшого (найменшого) значення.

Особливості моделі динамічного програмування

1. Задача оптимізації інтерпретується як $n-$кроковий процес керування.

2. Цільова функція дорівнює сумі цільових функцій кожного кроку.

3. Вибір керування на $k-$му кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку, не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку).

4. Стан S_k після k – го кроку керування залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} і керування X_k (відсутність післядії).

5. На кожнім кроці керування X_k залежить від кінцевого числа керувальних змінних, а стан S_k –від кінцевого числа параметрів.

2. Принцип оптимальності Беллмана

Принцип оптимальності вперше був сформульований Р. Беллманом у 1953 р.

Хоч би який був стан S системи внаслідок якого-небудь числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно разом з оптимальним керуванням на всіх подальших кроках призводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи поданий.

Беллман чітко сформулював й умови, за яких принцип справджується. Основна вимога – процес керування має бути без зворотного зв'язку, тобто керування на цьому кроці не має впливати на попередні кроки.

Принцип оптимальності встановлює, що для будь-якого процесу без зворотного зв'язку оптимальним керуванням є таке, яке є оптимальним для будь-якого підпроцесу стосовно його вихідного стану. Тому рішення на кожному кроці виявляється найкращим із погляду керування в цілому. Якщо зобразити геометрично оптимальну траєкторію у формі ламаної лінії, то будь-яка частина цієї ламаної буде оптимальною траєкторією відносно початку і кінця.

3. Мінімальна відстань (витрати) засобами динамічного програмування

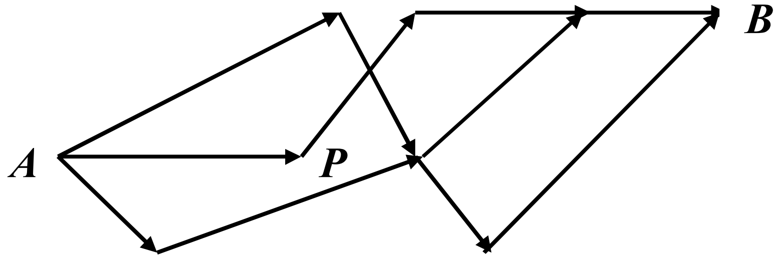

Рис. 8.2. Ациклічна мережа (спрямований граф)

Кожному ребру приписується вага більша нуля (можна вважати за довжину шляху). Постановка задачі: $\boldsymbol{min\, S(A,B) \to ?}$

Алгоритм розв'язання заснований на ***принципу оптимальності Беллмана*** стосовно мінімальної відстані:

$$\boldsymbol{S \mid S(A,P,B) = min(AP) \Rightarrow S(P,B) = min},$$

тобто: найкоротший шлях від $\boldsymbol{A}$ до $\boldsymbol{B}$ має таку властивість, що які б не були початкові відрізки цього шляху і пункт $\boldsymbol{P}$, в який вони привели, подальший шлях має бути найкоротшим шляхом від $\boldsymbol{P}$ до $\boldsymbol{B}$.

Означення. Послідовність рішень – ***стратегія.*** На безлічі стратегій існує ***цільова функція***. Стратегія, на якій цільова функція досягає $\boldsymbol{min}$ або $\boldsymbol{max}$ – це ***оптимальна стратегія***.

Для реалізації методу необхідно.

1. Процес розв'язання перетворити в $\boldsymbol{n}$ – етапну процедуру.
2. Для кожного етапу описати:
   а) безліч рішень;
   б) безліч початкових станів.
3. Для 1 і 2 застосувати принцип оптимальності.

Оптимальна стратегія має таку властивість, що хоч би які були початкові розв'язання і стани, досягнуті в результаті цих рішень, подальші розв'язання мають бути оптимальними щодо досягнутих попередніх станів.

4. Приклад визначення мінімальної відстані (витрат) засобами динамічного програмування

Завдання

Знайти мінімальну відстань від вузла 1 до вузла 16 (рис. 8.3).

4.1. Реалізація моделі табличним способом

1. Розподілимо процес на $\boldsymbol{n}$ етапів (рис. 8.3);
2. Для кожного етапу запишемо в таблицю 1 безліч станів – $\boldsymbol{S}$ і безліч рішень – $\boldsymbol{X}$;
3. Застосуємо ***принцип оптимальності*** **Беллмана** стосовно мінімальної відстані, тобто: найкоротший шлях від $\boldsymbol{A}$ до $\boldsymbol{B}$ має таку властивість, що які б не були початкові відрізки цього шляху і пункт $\boldsymbol{P}$, в який вони привели, подальший шлях має бути найкоротшим шляхом від $\boldsymbol{P}$ до $\boldsymbol{B}$.

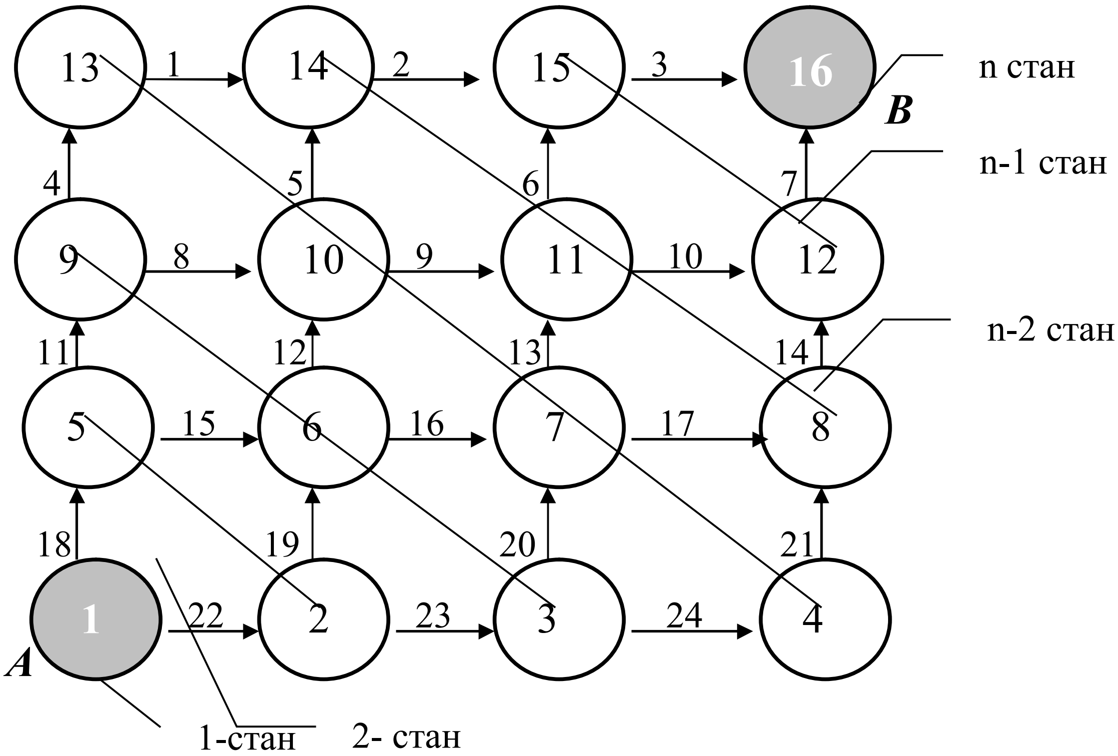

Рис. 8.3. Розмічений граф

Таблиця 8.1

Таблична реалізація мінімальної відстані

x / *s*	16				$\hat{x}$	$\hat{f}$	Стан
12	7				16	7	***n = 6***
15	3				**16**	3	
x / *s*	12	15			$\hat{x}$	$\hat{f}$	***n – 1 = 5***
8	7+14=21				12	21	
11	7+10=17	3+6=9			15	9	
14		3+2=5			**15**	5	
x / *s*	8	11	14		$\hat{x}$	$\hat{f}$	***4***
	21+21=42				8	42	
7	21+17=38	9+13=22			11	22	
10		9+9=18	5+5=10		14	10	
13			5+1=6		**14**	6	
x / *s*	4	7	10	13	$\hat{x}$	$\hat{f}$	***3***
3	42+24=66	22+20=42			7	42	
6		22+16=38	10+12=22		10	22	

9			10+8=18	6+4=10	**13**	10	
$s \backslash x$	3	6	9		$\hat{x}$	$\hat{f}$	***2***
2	42+23=65	22+19=41			6	41	
5		22+15=37	10+11=21		**9**	21	
$s \backslash x$	2	5			$\hat{x}$	$\hat{f}$	***1***
1	41+22=63	21+18=39			**5**	**39**	

Позначимо $\hat{x}$ і $\hat{f}$ – оптимальне розв'язання і оптимальне значення цільової функції конкретного етапу. З останнього запису таблиці видно, що мінімальна відстань від A до B: $f = 39$. Починаючи знизу вгору таблиці 8.1, випишемо конкретний маршрут відповідної цільової функції, значення якої дорівнює 39.

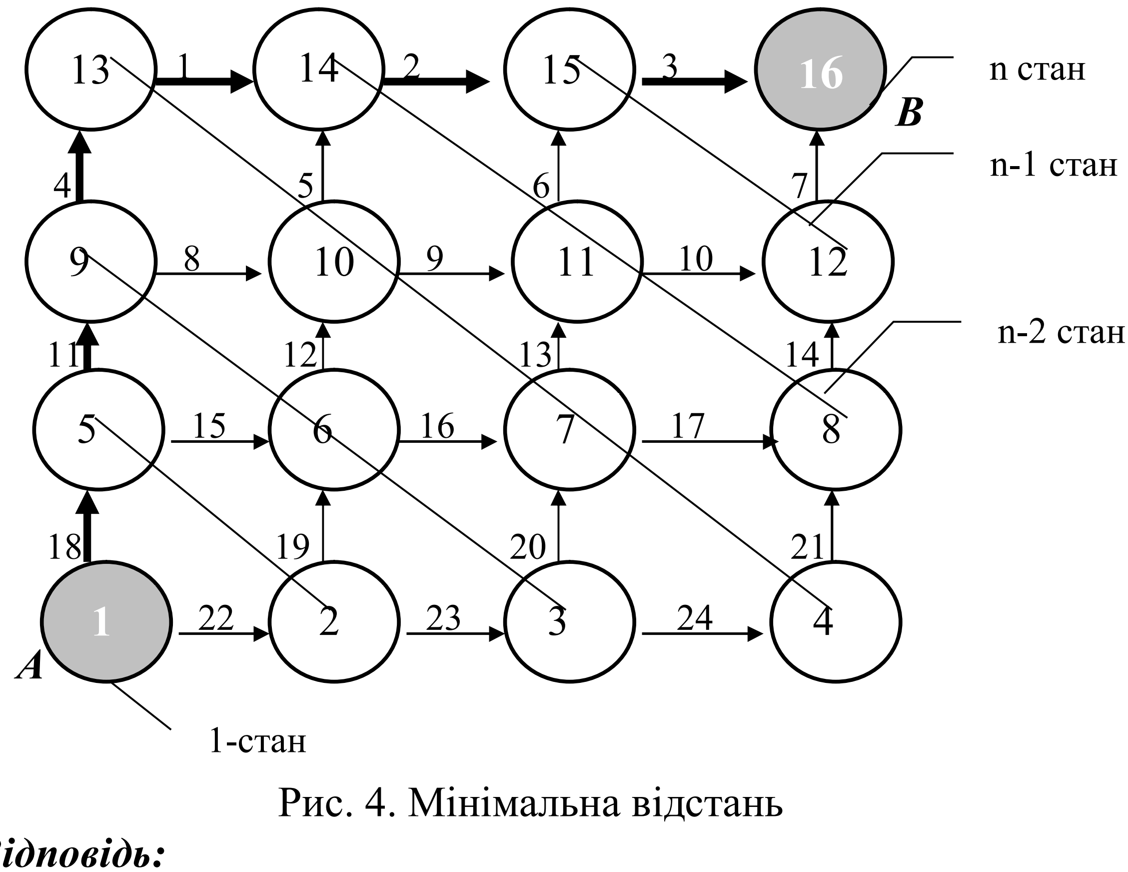

Рис. 4. Мінімальна відстань

Відповідь:

$$S = (1 \to 5 \to 9 \to 13 \to 14 \to 15 \to 16) = 39$$ (наведено жирною лінією).

4.2. Реалізація моделі «безпосередньо на мережі»

Реалізувати модель можна і без таблиць – виписуючи проміжні дані безпосередньо на мережу (рис. 8.5), надаючи кожному станові пріоритетного напрямку.

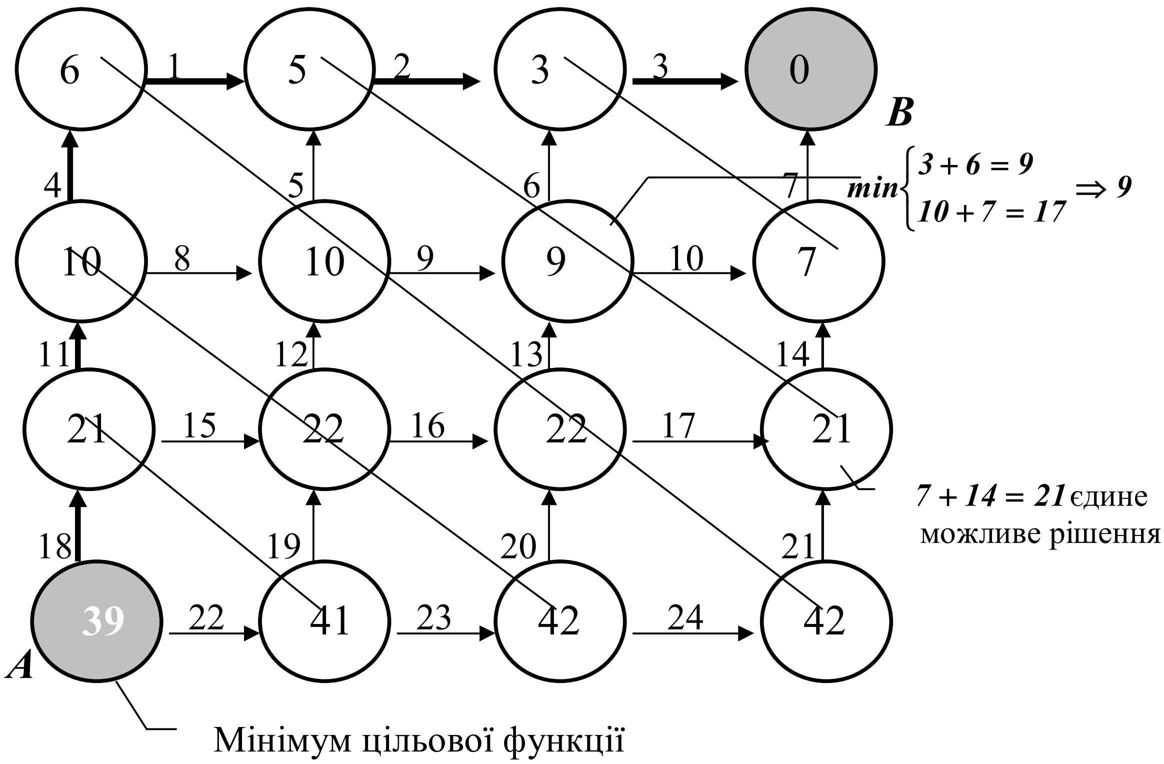

Рис. 8.5. Реалізація моделі безпосередньо на мережі

Тема 2.2. Теорія графів

План

1. Призначення та сфера використання мереж.
2. Основні поняття теорії графів.
3. Побудова правильної нумерації вершин графу.
4. Алгоритм пошуку найкоротшого шляху мережі (графу).

1. Призначення та сфера використання мереж

В умовах ринкової економіки все гостріше стає питання оперативності прийняття рішень керівництвом підприємства. Однією з важливих задач розробки напряму діяльності підприємства на перспективу є виявлення і аналіз найбільш економічних варіантів реалізації різних проектів господарювання. Тому найбільш перспективним буде використання системного підходу до рішення проблеми економіко-математичних методів та моделей. Системи об'єктів дослідження разом зі зв'язками між ними називаються ***мережею.***

Діапазон реального існування мереж дуже широкий: мережі електропостачання, радіо- та телекомунікацій, транспортні (залізничні, автомобільні), об'єкти господарювання як в одному господарстві, так і в їх комплексі, плани виконання робіт з реалізації певних проектів і т. ін.

Але прикладами таких систем можуть бути також організація поточного виробництва, реконструкція існуючого виробництва, організація капітального будівництва, реконструкція та ремонт існуючих споруд, організація науково-дослідних робіт і т. ін., де також необхідно узгоджувати та оцінювати зв'язки між окремими елементами.

2. Основні поняття теорії графів

Побудова математичних моделей розв'язання задач планування та управління мережами ґрунтується на дослідженні попарних (бінарних) зв'язків між об’єктами, які утворюють систему дослідження.

Графом називається сукупність двох скінчених множин: множини точок, які називаються **вершинами**, і множини пар вершин, які називаються **ребрами** або **дугами** графа.

Якщо пари вершин є впорядкованими, тобто на кожному ребрі задається напрям, то граф називається ***орієнтованим;*** в іншому випадку – ***неорієнтованим.***

Послідовність ребер, що не повторюються та веде від деякої вершини до іншої, утворює ***шлях***.

Граф називається ***зв'язним,*** якщо для будь-яких двох його вершин існує шлях, що їх з'єднує; інакше граф називається ***незв'язним.***

Приклади графів

1. Карта автомобільних доріг є граф, вершини якого - населені пункти, а зв'язки (ребра або дуги у випадку однобічного руху) - дороги, які з'єднують населені пункти.

2. При розв'язанні задач технічної діагностики (наприклад, при пошуку зіпсованого елемента) досліджувану систему умовно поділяють на кілька взаємопов'язаних частин, кожна з яких виконує певну функцію. Схему функціонування такої системи зручно зобразити як орієнтований граф, вершинами якого будуть виділені частини системи, а дугами – функціональні зв'язки між цими частинами.

Граф вважається ***завантаженим***, якщо він визначений разом з певною функцією на множині його ребер або дуг. Така функція може визначати віддаль між вершинами (карта доріг), час або вартість перевезень між населеними пунктами, пропускну спроможність лінії електропередач або каналу системи зрошення.

Маршрутом називається така послідовність ребер, коли кожна пара сусідніх ребер має одну загальну вершину.

Простим ланцюгом називається маршрут, в якому вершини не повторюються. Ланцюг визначається послідовністю вершин, через які він проходить. ***Цикл*** – це ланцюг, початкова вершина якого співпадає з кінцевою. ***Шляхом*** називається орієнтований ланцюг. Отже, поняття "шлях" стосується лише орієнтованих графів.

В економіці (фінансах) найчастіше використовуються два види графів: дерево і мережа.

Деревом є зв'язний граф без циклів, що має початкову вершину **(*корінь)*** і крайні вершини; шляхи від початкової вершини до крайніх вершин називаються ***гілками.***

Мережа – це орієнтований кінцевий зв'язний граф, що має початкову вершину **(*джерело)*** і кінцеву вершину ***(стік)***.

3. Побудова правильної нумерації вершин графу

Для розв'язання багатьох практичних задач зручно виконати так звану правильну нумерацію вершин. За такої нумерації будь-який шлях від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером буде проходити лише через вершини зі зростаючими номерами.

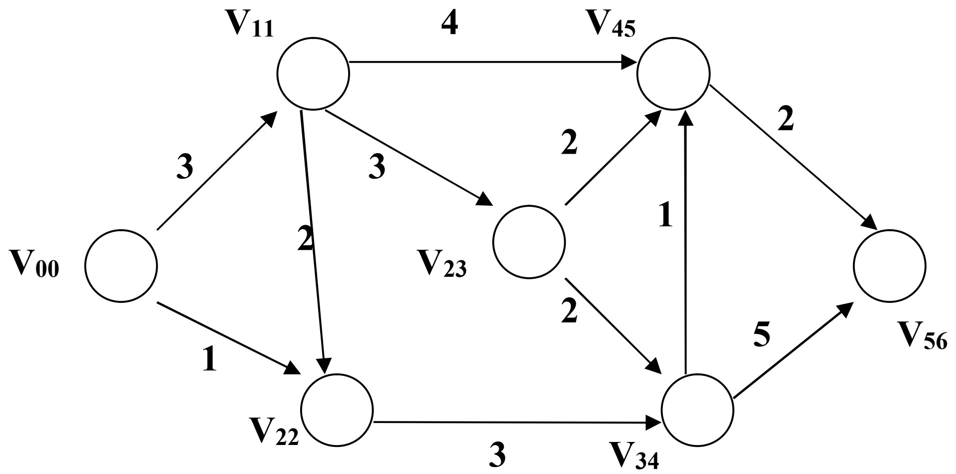

Рис. 9.1

Алгоритм закреслення дуг

1. Умовно виділимо всі дуги, які виходять з початкової вершини, назвемо її вершиною нульового рангу та дамо їй номер "ОО" (V_{00}). Закреслюємо дуги, що виходять із цієї вершини.

Розглянемо вершини, в які не заходять інші дуги, окрім закреслених. Такі вершини назвемо вершинами 1-го рангу та пронумеруємо їх у довільному порядку, дотримуючись неперервності в нумерації. За цих умов кожній вершині будемо надавати два індекси: перший - ранг вершини, другий - її порядковий номер серед множини вершин однакового рангу. На рис. 9.1 маємо одну вершину "11" (V_{11}) першого рангу.

2. Умовно закреслимо всі дуги, які виходять з вершин 1-го рангу. Вершини, в які не заходять інші дуги, окрім уже позначених, назвемо вершинами 2-го рангу та пронумеруємо їх у

довільній послідовності, зберігаючи неперервність в нумерації стосовно раніше використаних чисел натурального ряду. Для графу рис. 9.1 це вершини "22" (V_{22}) та"23" (V_{23}). І так далі.

Алгоритм завершується по досягненні кінцевої вершини. Для нашого прикладу (рис. 9.1) це вершина "56" (V_{56}), Де індекс 5 означає ранг кінцевої вершини, а індекс 6 - її порядковий номер.

4. Алгоритм пошуку найкоротшого шляху мережі

Виконавши правильну нумерацію графу (мережі), можна ефективно реалізувати алгоритм пошуку найкоротшого шляху між заданими вершинами. Перегляд вершин виконується в послідовності зменшення їх номерів. На кожному етапі алгоритму відбувається перехід від вершини більш високого рангу до вершини меншого рангу за умови, що із множини всіх шляхів, які поминаються в одній і тій же вершині, необхідно залишити для наступного кроку реалізації алгоритму лише найкоротший шлях від цієї вершини до завершальної.

Розглянемо реалізацію алгоритму на прикладі графу, зображеного на рис. 9.2.

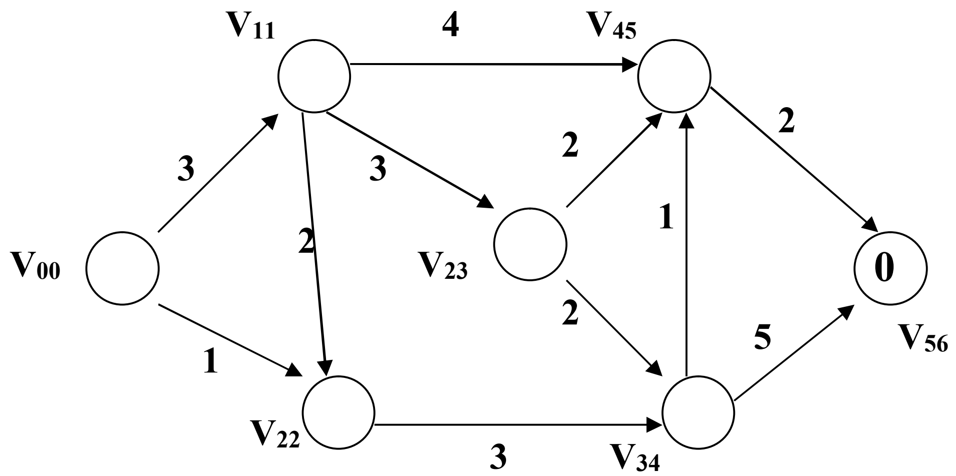

Рис. 9.2

Згідно з алгоритмом будемо рухатися під кінцевої вершини V_{56} до початкової V_{00}, крокуючи послідовно від вершин більш високого рангу до вершин меншого рангу.

У кружках, які зображають вершини графу, будемо записувати найкоротшу відстань від вершини (n-i)-го рангу до кінцевої вершини.

Одночасно найкоротший шлях від кожної вершини до кінцевої будемо відмічати подвійною стрілкою.

1. У кружку останньої кінцевої вершини V_{56} записуємо "0", бо звідси виконуємо відлік відстані (рис. 9.2).

2. Переходимо до вершини 4-го рангу - вершина V_{45}. Від цієї вершини в кінцеву маємо лише один шлях: (V_{45}, V_{56}), його довжина дорівнює двом одиницям виміру, її і запишемо у вершині V_{45}, а відповідну дугу позначимо на графові подвійною стрілкою (рис. 9.3).

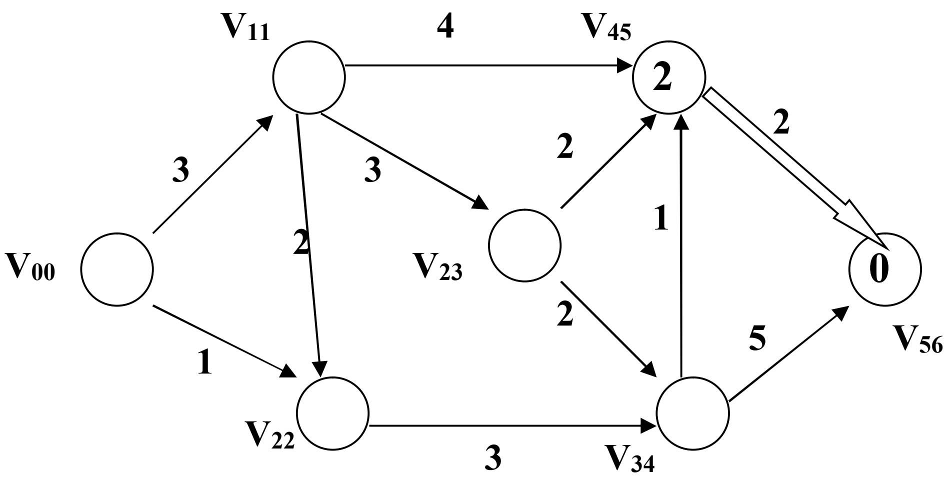

Рис. 9.3

3. Переходимо до вершини 3-го рангу V_{34}.

З цієї вершини в кінцеву маємо два шляхи: (V_{34}, V_{56},) та (V_{34}, V_{45}, V_{56}). Найкоротшим є останній. Його одержуємо, додаючи дугу (V_{34}, V_{45}) до вже побудованого шляху (V_{45}, V_{56}) та відмічаючи шлях (V_{34}, V_{45}) подвійною стрілкою.

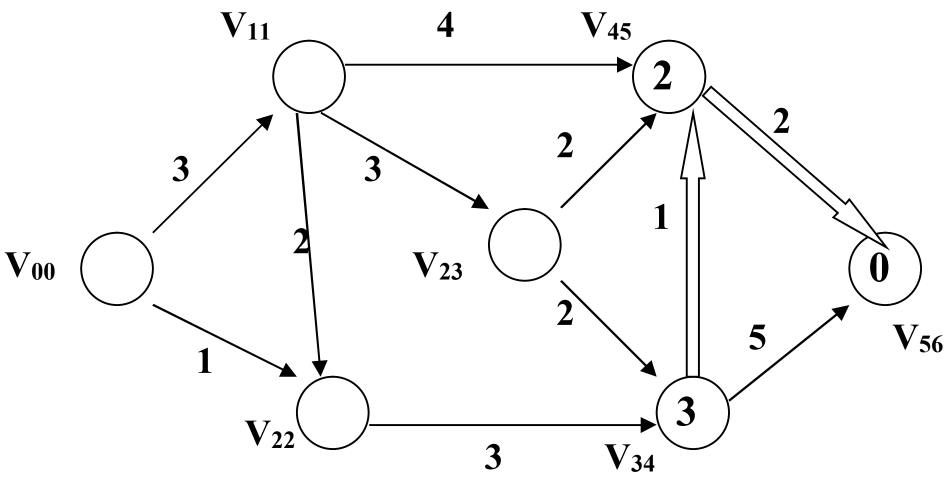

Рис. 9.4

Довжина шляху (V_{34}, V_{45}, V_{56},) дорівнює 1+2=3, записуємо це число у вершині V_{34}. Шлях (V_{34}, V_{56}) при наступних пошуках не використовуємо, тому що з вершини 3-го рангу вже знайдено найкоротший шлях до кінцевої вершини (рис. 9.4).

4. Переходимо до вершин 2-го рангу: V_{22}, V_{23}.

а) З вершини V_{22} до вершини вищого рангу можна потрапити лише по дузі (V_{22}, V_{34}). Її відмічаємо подвійною лінією та записуємо в V_{22} число 3+3=6 - найкоротша відстань від V_{22} до V_{56}, враховуючи, що найкоротша відстань від V_{34} до V_{56} уже визначена (рис 9.5).

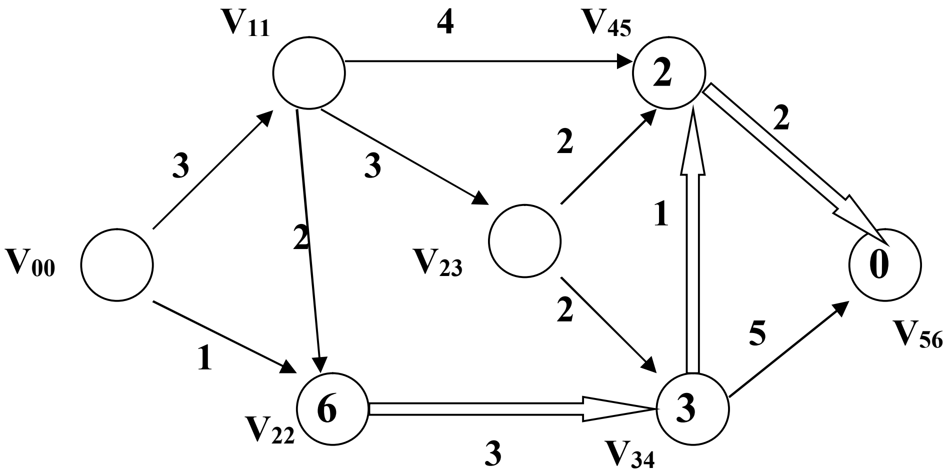

Рис. 9.5

б) З вершини V_{23} можна потрапити в вершини вищого рангу або по дузі (V_{23}, V_{34}), або по дузі (V_{23}, V_{45}). Обчислюємо шлях від V_{23} до V_{56} за умов руху із V_{23} по названим дугам.

Шлях (V_{23}, V_{45} ,V_{56}) має довжину 2+2=4, шлях (V_{23}, V_{34}, V_{56}) 2+3=5. Найкоротшим від V_{23} до V_{56}, буде шлях (V_{23}, V_{45} ,V_{56}). Отже дугу (V_{23}, V_{45}) позначаємо подвійною лінією, а в вершині V_{23} ставимо "4". (рис. 9.6)

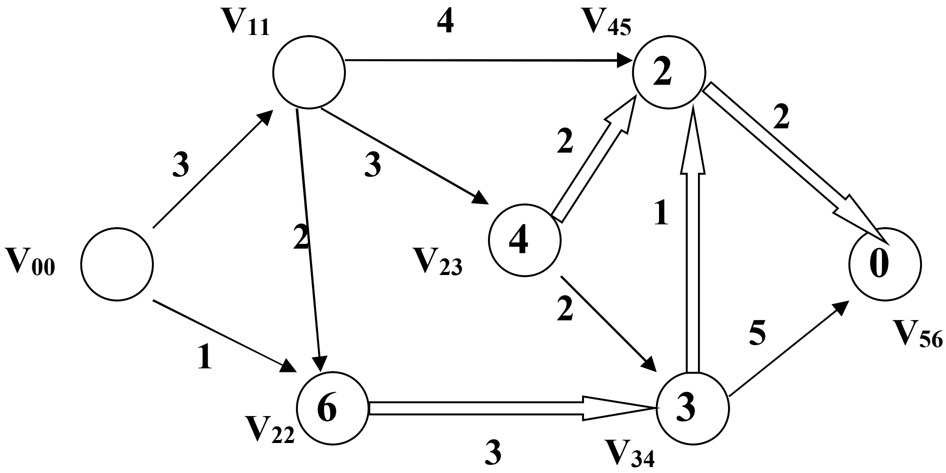

Рис. 9.6

5. Розглянувши всі вершини 2-го рангу, переходимо до вершин 1-го рангу.

Це лише V_{11}, з якої виходять дуги (V_{11}, V_{22}), (V_{11}, V_{23}) та (V_{11}, V_{45}). Розглядаємо й оцінюємо шляхи, які починаються цими дугами та закінчуються в V_{56}:

(V_{11}, V_{45} ,V_{56}), (V_{11}, V_{23} ,$V_{45,}$ V_{56}) та (V_{11}, V_{22} ,$V_{34,}$ $V_{45,}$ V_{56}).

Решту шляхів, що починаються цими дугами й закінчуються в V_{56}, не розглядаємо, бо вони мають дуги, які не позначені подвійною стрілкою (шляхи з непозначеними подвійною стрілкою дугами не можуть бути найкоротшими до кінцевої вершини). Обчислюємо довжину кожного з трьох названих шляхів та вибираємо найкоротший: (V_{11}, V_{45} ,V_{56}). Довжину цього шляху 4+2=6 записуємо в V_{11}, позначивши подвійною лінією дугу (V_{11}, V_{45}). (рис. 9.7)

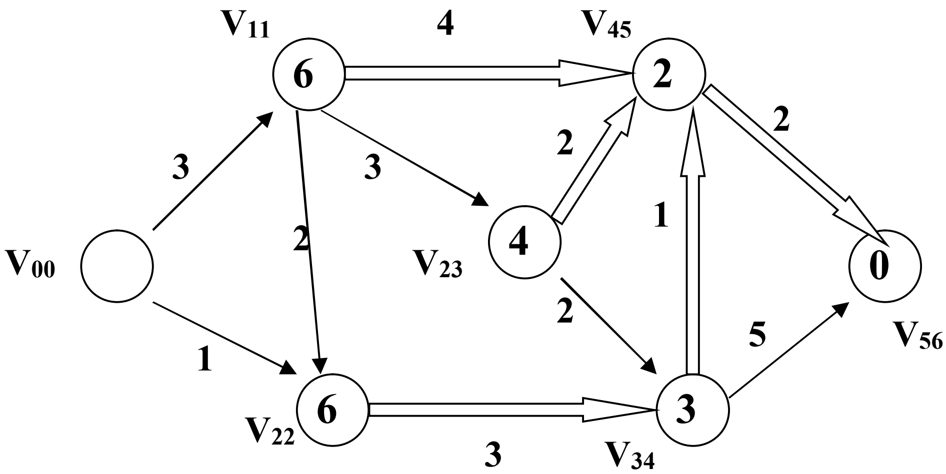

Рис. 9.7

Отже, найкоротші шляхи як від V_{11}, так і від V_{22} до V_{56} мають однакову довжину - шість одиниць.

6. Перейдемо до розгляду вершини $V_{00.}$

З неї виходять дві дуги - (V_{00}, V_{11}) та (V_{00}, V_{22}), користуючись якими, можна дістатися до вершин вищого, ніж нульовий, рангу. З двох названих дуг меншу довжину має дуга (V_{00}, V_{22}). Тому найкоротший шлях від початкової вершини V_{00} до кінцевої V_{56} буде ($V_{00,}$ $V_{22,}$ V_{34},V_{45}, V_{56}), його довжина - сім одиниць. Складові дуги шляху всі позначені подвійною лінією. (рис. 9.8)

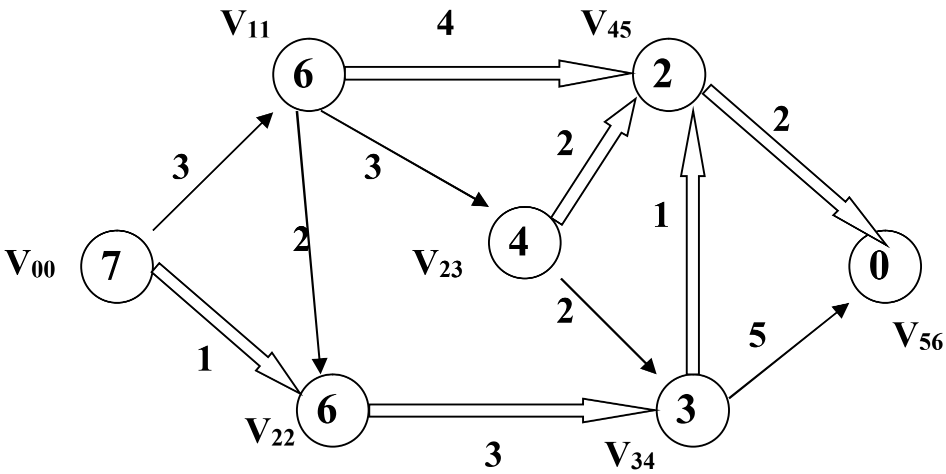

Рис. 9.8

Якщо завантаження графу (рис. 9.8) тлумачити не як відстані, а як тарифи перевезень вантажу, то ми знайшли шлях найменшої вартості перевезення з вершини V_{00} до V_{56}

Зауваження

Описаний алгоритм побудований на так званому ***«принципі оптимальності»:***

якщо найкоротший шлях від початкової вершини до кінцевої проходить через деяку вершину V_i ,то відрізок цього шляху від вершини V_i до кінцевої вершини є найкоротшим серед усіх шляхів, які з'єднують вершину V_i , та кінцеву.

Так, у розглянутому прикладі найкоротший шлях від V_{00} до V_{56} (V_{00}, V_{22}, V_{34}, V_{45}, V_{56}) як свої складові має найкоротші шляхи до кінцевої вершини від усіх вершин, через які він проходить.

Тема 2.3. Моделі сіткового планування і управління в туризмі

План

1. Поняття сіткової моделі.
2. Основні елементи сіткової моделі.
3. Правила побудови сіткової моделі.
4. Основні часові параметри сіткової моделі
5. Оптимізація сіткової моделі. Коефіцієнт напруженості.
6. Сіткове планування в умовах невизначеності.

1. Поняття сіткової моделі

Сітковою моделлю (сітковим графіком, мережею) називається економіко-математична модель, що відображає комплекс робіт (операцій) і подій, пов’язаних із реалізацією деякого проекту (науково-дослідного, виробничого, фінансового та ін.), в їх логічній і технологічній послідовності і зв'язку.

Математичний апарат сіткових моделей базується на ***теорії графів.*** Аналіз сіткової моделі, представленої в графічній або табличній (матричній) формі, дозволяє, по-перше, більш чітко виявити взаємозв'язки етапів реалізації проекту і, по-друге, визначити найоптимальніший порядок виконання цих етапів в цілях, наприклад, скорочення термінів виконання всього комплексу робіт. Таким чином, методи сіткового планування відносяться до методів прийняття оптимальних рішень.

Сіткова модель є графом типу «мережа». В економічних дослідженнях сіткові моделі застосовуються при моделюванні економічних процесів ***методами сіткового планування і управління (СПУ).***

Об'єктом управління в системах сіткового планування і управління є колективи виконавців, що мають в своєму розпорядженні певні ресурси та виконують певний комплекс операцій, який покликаний забезпечити досягнення поставленої мети, наприклад, розробку нової фінансової послуги, проведення фінансової діагностики.

2. Основні елементи сіткової моделі

Основою СПУ є сіткова модель (СМ), в якій моделюється сукупність взаємозв'язаних робіт і подій, що відображають процес досягнення певної мети. Вона може бути представлена у вигляді графіка або таблиці.

Основними елементами сіткової моделі є подія, робота і шлях. На рис. 10.1 графічно представлена СМ, що складається з 11 подій і 16 робіт, тривалість виконання яких вказана над роботами.

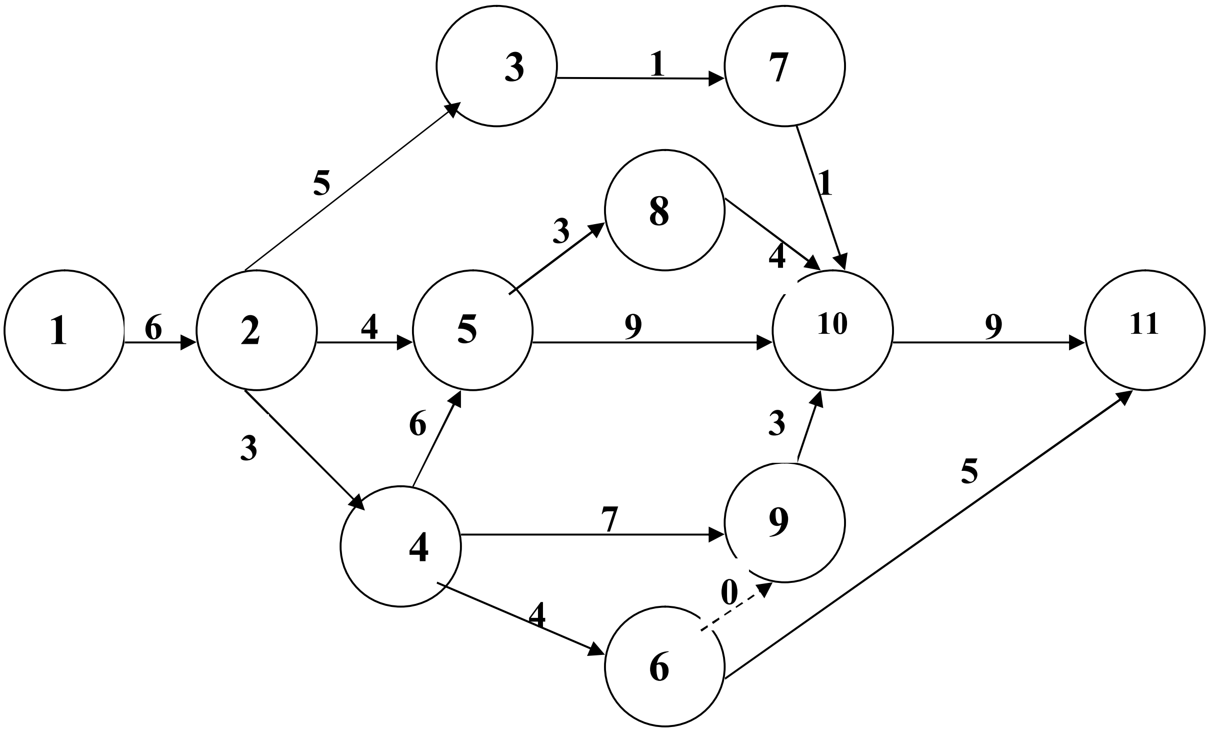

Рис. 10.1. Сіткова модель

Робота характеризує матеріальну дію, що вимагає використання ресурсів, або логічну дію, яка вимагає лише взаємозв'язку подій**.** При графічному представленні робота зображується стрілкою, яка сполучає дві події. Вона позначається парою чисел $\boldsymbol{(i; j)}$, $\boldsymbol{i}$ – номер події, з якої робота виходить, а $\boldsymbol{j}$ – номер події, в яку вона входить. Робота не може початися раніше, ніж відбудеться подія**,** з якої вона виходить. Кожна робота має певну тривалість $\boldsymbol{t(i; j)}$.

Наприклад, запис $\boldsymbol{t(2;5) = 4}$ означає, що робота $\boldsymbol{(2;5)}$ має тривалість $\boldsymbol{4}$ одиниці.

До робіт відносяться також такі процеси, які не вимагають ні ресурсів, ні часу виконання. Вони полягають у встановленні логічного взаємозв'язку робіт і показують, що одна з безпосередньо залежить від іншої; такі роботи називаються ***фіктивними*** і на графіку зображаються пунктирними стрілками (робота $(6;9)$).

Подіями називаються результати виконання однієї або декількох робіт. Вони не мають тривалості в часі. Подія здійснюється в той момент, коли закінчується остання з робіт, що входить до нього. Події позначаються одним числом і при графічному представленні сіткової моделі зображаються колом (або іншою геометричною фігурою), усередині якого проставляється його порядковий номер $(i = 1,2,3.\dots,N)$. В сітковій моделі є початкова подія (з номером 1), з якої роботи тільки виходять, і кінцева подія (з номером N), в яку роботи лише входять.

Шлях **–** це послідовність робіт, які слідують одна за одною і сполучають початкову і кінцеву події. Будь-який графік сіткової моделі має декілька шляхів, наприклад, в наведеній вище моделі шляхами є $L_1 = (1,2,3,7,10,11)$, $L_2(1,2,4,6,11)$ та ін. Тривалість шляху визначається сумарною тривалістю робіт, які його складають. Шлях, що має максимальну довжину, називається ***критичним*** і позначають L_{kp}, а його тривалість – t_{kp}.

Роботи, що належать критичному шляху, називаються ***критичними.*** їх невчасне виконання веде до зриву термінів всього комплексу робіт.

Сіткові моделі мають низку характеристик, які дозволяють визначити ступінь напруженості виконання окремих робіт, а також всього їх комплексу і ухвалити рішення про перерозподіл ресурсів. Проте, перед розрахунком показників сіткової моделі необхідно перевірити графік сіткової моделі на його відповідність деяким обов'язковим вимогам.

3. Правила побудови сіткової моделі

1. Події правильно пронумеровані, тобто для кожної роботи $(i;j)$ $i < j$ (рис. 2 – роботи $(4;3)$ і $(3;2)$). При

невиконанні цієї вимоги необхідно використовувати алгоритм перенумерації подій;

2. Відсутні події (окрім завершальної), за якими не слідує хоча б одна робота (рис. 10.2 – подія 5);

3. Відсутні події (за винятком початкової), яким не передує хоча б одна робота (рис. 10.2 – подія 7);

4. Відсутні цикли, тобто замкнуті шляхи, що сполучають подію з нею ж самою (рис. 10.2 – шлях $(2,4,3)$);

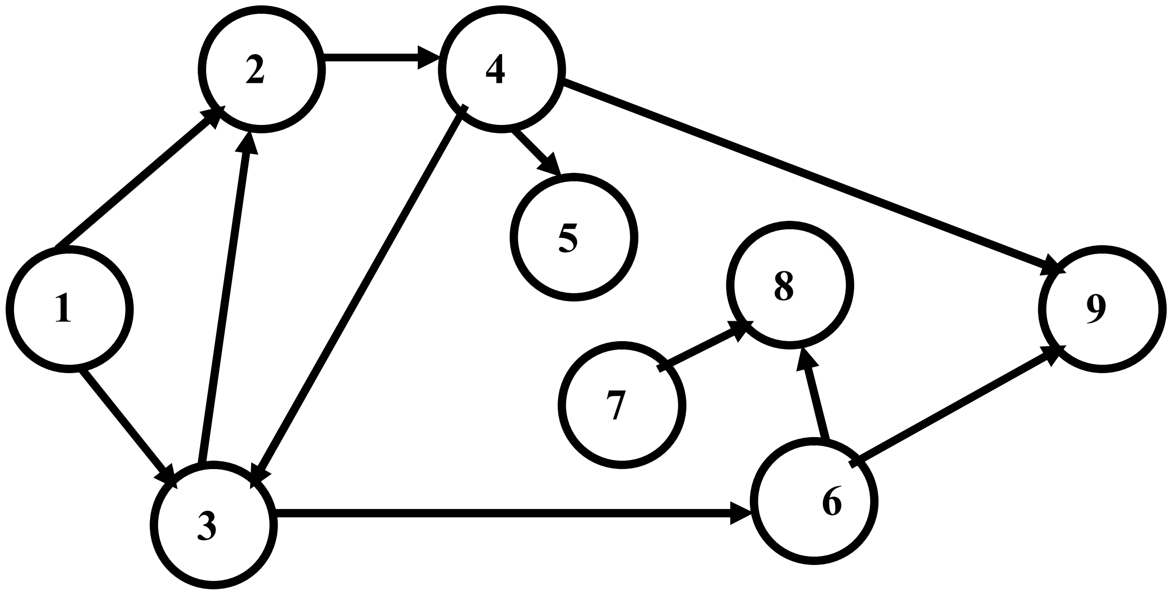

Рис. 10.2. Приклади помилок при побудові графіка СМ

При невиконанні вказаних вимог немає сенсу обчислювати характеристики (параметри) подій, робіт і шляху (табл. 10.1).

4. Основні часові параметри сіткової моделі

Для подій розраховують три характеристики: ранній і пізній термін настання події, а також її резерв.

Ранній термін настання події j – це термін, необхідний для виконання всіх робіт, що передують даній події. Цей час розраховується шляхом вибору максимального значення із тривалості всіх шляхів, що ведуть від початкової до даної події, причому $t_p(1)=0$, а $t_p(N)=t_{кр}(L)$:

$$t_p(j)=\max_i\{t_p(i)+t(i;j)\},\ j=\overline{2,N}$$

Пізнім терміном настання події i називається такий максимальний термін, який не порушує пізніх припустимих термінів настання наступних за нею подій. При визначенні пізніх термінів настання подій розрахунок ведуть від ***завершальної*** події до початкової. Цей шлях визначається шляхом вибору мінімального значення із тривалості шляхів, наступних за даними подіями, що ведуть до ***кінцевої*** події.

Визначення пізніх термінів виконання подій ґрунтується на регресивному рахунку, тобто рахунку від зворотного. Спочатку визначається пізній термін виконання наступної $j-$ої події, а потім попередньої $i-$ої за формулою:

$$t_n(j) = \min_j\{t_n(i) - t(i;j)\},\ j = \overline{2, N-1}$$

При цьому враховують співвідношення $t_n(N) = t_p(N)$.

Всі події, за винятком подій, що належать критичному шляху, мають резерв $R(i)$:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Таблиця 10.1

Основні часові параметри СМ

Елементи СМ	Найменування параметра	Умовне позначення параметра
Подія i	***Ранній термін*** настання події	$t_p(i)$
	Пізній термін настання події	$t_n(i)$
	Резерв часу події	$R(i)$
Робота $(i;j)$	***Тривалість*** роботи	$t(i;j)$
	Ранній термін початку роботи	$t_{pn}(i;j)$
	Ранній термін закінчення роботи	$t_{pз}(i;j)$
	Пізній термін початку роботи	$t_{nn}(i;j)$
	Пізній термін закінчення роботи	$t_{nз}(i;j)$
	Повний резерв часу роботи	$R_n(i;j)$
	Незалежний резерв часу роботи	$R_н(i;j)$
Шлях L	***Тривалість*** шляху	$t(L)$
	Тривалість критичного шляху	$t_{кр}$
	Резерв часу шляху	$R(L)$

Резерв часу події показує, на який гранично допустимий термін можна затримати настання цієї події, не викликаючи при цьому збільшення терміну виконання всього комплексу робіт. Для всіх робіт $(i;j)$ на основі ранніх і пізніх термінів настання подій можна визначити показники:

Ранній термін початку $-t_{рп}(i;j)=t_р(i)$.

Ранній термін закінчення $-t_{рз}(i;j)=t_р(i)+t(i;j)$.

Пізній термін закінчення $-t_{пз}(i;j)=t_п(i)$

Пізній термін початку $-t_{пп}(i;j)=t_п(j)-t(i;j)$

Повний резерв часу $-R_п(i;j)=t_п(j)-t_р(i)-t(i;j)$

Незалежний резерв–

$$R_н(i;j)=max\{0;t_р(j)-t_п(i)-t(i;j)\}$$

$$R_н(i;j)=max\{0;R_п(i;j)-R(i)-R(j)\}$$

Повний резерв часу роботи $(i;j)$ показує, на скільки можна збільшити час виконання конкретної роботи за умови, що термін виконання всього комплексу робіт не зміниться.

Незалежний резерв часу роботи $(i;j)$ – частина повного резерву часу, яка одержана у випадку, коли всі попередні роботи закінчуються в пізні терміни, а всі подальші – починаються в ранні терміни. Використання цього резерву не впливає на величину резервів часу інших робіт.

Шлях характеризується двома показниками – тривалістю і резервом.

Тривалість шляху розглянуто раніше.

Резерв визначається як різниця між довжиною критичного шляху і шляху, який розглядається:

$$R(L)=t_{кр}-t(L).$$

З цього визначення випливає, що роботи, які лежать на критичному шляху, і сам критичний шлях мають нульовий резерв часу. Резерв часу шляху показує, на скільки може збільшитися тривалість робіт, що становлять даний шлях, без зміни тривалості загального терміну виконання всіх робіт.

5. Оптимізація сіткової моделі. Коефіцієнт напруженості

Для ***оптимізації сіткової моделі***, що виражається в перерозподілі ресурсів з ненапружених робіт на критичні для прискорення їх виконання, необхідно якомога більш точно оцінити ступінь складності своєчасного виконання всіх робіт, а також «ланцюжків» шляху.

Більш точним інструментом розв'язання цієї задачі у порівнянні з повним резервом є ***коефіцієнт напруженості,*** який може бути обчислений за формулою:

$$K_н(i;j) = \frac{t(L_{max}) - t_{кр}}{t_{кр} - t'_{кр}} = 1 - \frac{R_п(i;j)}{t_{кр} - t'_{кр}},$$

де $t(L)$ – тривалість максимального шляху, що проходить через роботу $(i;j)$; $t'_{кр}$ – тривалість відрізка даного шляху, який співпадає з критичним шляхом.

Коефіцієнт напруженості змінюється від нуля до одиниці, причому чим він є ближчим до одиниці, тим складніше виконати дану роботу у встановлений термін. Найбільш напруженими є роботи критичного шляху, для яких він дорівнює 1. На основі цього коефіцієнта всі роботи сіткової моделі можуть бути розподілені на три групи:

- напружені $K_н(i;j) > 0,8$;
- підкритичні $0 \le K_н(i;j) \le 0,8$;
- резервні $K_н(i;j) < 0,6$.

В результаті перерозподілу ресурсів (фінансових, матеріальних, інтелектуальних) аналітики (ОПР) прагнуть максимально зменшити загальну тривалість робіт, що можливо при переведенні всіх робіт у першу групу. При розрахунку часових параметрів моделі доцільно користуватися графіком сіткової моделі.

6. Сіткове планування в умовах невизначеності

Тривалість виконання робіт досить важко задати точно, і тому в практичній роботі замість одного числа (детермінована оцінка) задаються дві оцінки – мінімальна і максимальна.

Мінімальна (оптимістична) оцінка $t_{min}(i;j)$ характеризує тривалість виконання роботи за найсприятливіших обставин, а ***максимальна (песимістична)*** $t_{max}(i;j)$ – за найнесприятливіших.

Тривалість роботи в цьому випадку розглядається як випадкова величина, яка в результаті реалізації може прийняти будь-яке значення в заданому інтервалі. Такі оцінки називаються ймовірнісними (випадковими). їх очікуване значення $t_{оч}$ оцінюється за формулою:

$$t_{оч}(i;j) = \frac{3t_{min}(i;j) + 2t_{max}(i;j)}{5}$$

Для характеристики ступеня розсіювання можливих значень навколо очікуваного рівня використовується показник дисперсії:

$$\sigma^2(i;j) = \frac{(t_{max}(i;j) - t_{min}(i;j))^2}{25}$$

На основі цих оцінок можна розрахувати всі характеристики сіткової моделі, проте, вони матимуть іншу природу, виступатимуть як середні характеристики. При достатньо великій кількості робіт можна стверджувати (а при малій – лише припускати), що загальна тривалість будь-якого, у тому числі і критичного, шляхів має нормальний закон розподілу з середнім значенням, що дорівнює сумі середніх значень тривалості робіт, які його складають, і дисперсією, що дорівнює сумі дисперсій цих же робіт.

Окрім обчислення типових характеристик сіткової моделі, при імовірнісному заданні тривалості робіт можна розв'язати дві додаткові задачі:

1) визначити ймовірність того, що тривалість критичного шляху $t_{кр}$ перевищить заданого директивного рівня T;

2) визначити максимальний термін виконання всього комплексу робіт T при заданому рівні ймовірності p.

Перша задача розв'язується на основі інтеграла ймовірності Лапласа $\Phi(z)$ використанням формули:

$$P(t_{кр} < T) = 0,5 + 0,5\Phi(z),$$

де z – нормоване відхилення випадкової величини,

$z = \dfrac{T - t_{кр}}{\sigma_{кр}}$, $\sigma_{кр}$ – середнє квадратичне відхилення.

Відповідність між z і інтегралом ймовірності $\Phi(z)$ наведено в спеціальній таблиці.

При достатньо великій одержаній величині ймовірності (більше $0,8$) можна з високим ступенем упевненості припускати своєчасність виконання всього комплексу робіт.

Для розв'язання другої задачі використовується формула:

$$T = t_{оч}(L_{кр}) + z\sigma_{кр}.$$

Окрім описаного вище спрощеного способу розрахунку сіткової моделі з детермінованою структурою й оцінками ймовірності тривалості виконання робіт, використовується метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло). Відповідно до нього на комп'ютері багато разів моделюються тривалості виконання всіх робіт і розраховуються основні характеристики сіткової моделі. Великий обсяг експериментів дозволяє більш точно виявити закономірності модельованої мережі.

Тема 2.4. Марківські процеси

План

1. Поняття марківського випадкового процесу.
2. Потоки подій.
3. Рівняння Колмогорова. Граничні ймовірності станів.

1. Поняття марківського випадкового процесу

Процес роботи системи масового обслуговування (СМО) – це ***випадковий процес.***

Під ***випадковим (ймовірним*** **або** ***стохастичним) процесом*** розуміємо процес зміни в часі стану якої-небудь системи відповідно до ймовірних закономірностей.

Процес називається ***процесом із дискретними станами***, якщо його можливі стани $S_1, S_2, \ldots$ можна заздалегідь перелічити, а перехід системи з одного стану в інший відбувається миттєво (стрибком).

Процес називається ***процесом із безперервним часом***, якщо моменти можливих переходів системи із одного стану в інший є випадковими, а не фіксованими заздалегідь.

Процес роботи СМО являє собою випадковий процес із дискретними станами і безперервним часом, тобто стан СМО змінюється стрибком у випадкові моменти появи якихось подій (наприклад, надходження нової заявки, закінчення обслуговування). Математичний аналіз роботи СМО істотно спрощується, якщо процес цієї роботи – марківський.

Випадковий процес називається ***марківським*** або ***випадковим процесом без наслідку***, якщо для будь-якого моменту часу t_0 імовірність характеристики процесу в майбутньому залежить тільки від його стану в певний момент t_0 і не залежать від того, коли і як система його набула.

Приклад 11.1 (приклад марківського процесу)

Система S – лічильник у таксі. Стан системи в момент t характеризується кількістю кілометрів (десятих часток кілометрів), пройдених автомобілем до певного моменту. Нехай у момент t_0 лічильник показує S_0. Імовірність того, що в момент

$t > t_0$ лічильник покаже ту чи іншу кількість кілометрів (точніше, вартість проїзду) S_1, залежить від S_0, але не залежить від того, в які моменти часу змінювалися показання лічильника до моменту t_0.

Багато процесів можна приблизно вважати марківськими. Наприклад, процес гри в шахи; система S – група шахових фігур. Стан системи характеризується кількістю фігур супротивника, що збереглися на дошці в момент t_0. Імовірність того, що в момент $t > t_0$ матеріальна перевага буде на боці одного із супротивників, залежить у першу чергу від того, в якому стані знаходяться система у певний момент t_0, а не від того, коті в якій послідовності зникли фігури з дошки до моменту t_0.

У ряді випадків передісторію розглянутих процесів можна просто не враховувати і застосовувати для їхнього вивчення марківські моделі.

Аналізуючи випадкові процеси з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – так званим ***графом станів.*** Звичайно стани системи зображують прямокутниками (колами), а можливі переходи з одного стану в інший – стрілками (орієнтованими дугами), що з'єднують стани.

Приклад 11.2

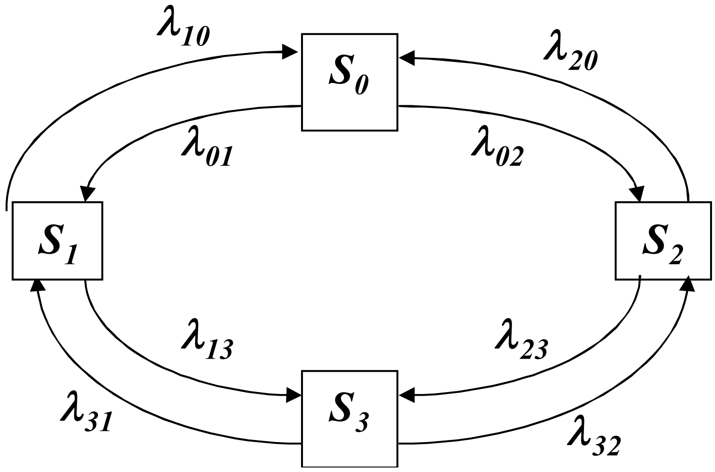

Рис. 11.1. Гра станів випадкового процесу

Побудувати граф станів такого випадкового процесу: пристрій S складається з двох вузлів, кожний із яких у випадковий момент часу може вийти з ладу, після чого миттєво починається ремонт вузла, що продовжується заздалегідь невідомий випадковий час.

Розв'язання

Можливі стани системи: $\boldsymbol{S_0}$ – обидва вузли справні; $\boldsymbol{S_1}$ – перший вузол ремонтується, другий справний; $\boldsymbol{S_2}$ – другий вузол ремонтується, перший справний; $\boldsymbol{S_3}$ – обидва вузли ремонтуються. Граф системи наведений на рис. 11.1.

Стрілка, спрямована, наприклад, із $\boldsymbol{S_0}$ у $\boldsymbol{S_1}$ означає перехід системи в момент відновлення першого вузла, з $\boldsymbol{S_1}$ у $\boldsymbol{S_0}$ – перехід у момент закінчення ремонту цього вузла.

На графі відсутні стрілки з $\boldsymbol{S_0}$ у $\boldsymbol{S_3}$ і з $\boldsymbol{S_1}$ у $\boldsymbol{S_2}$. Це означає, що виходи вузлів із ладу передбачають незалежними один від одного, і наприклад, імовірністю одночасного виходу з ладу двох вузлів (перехід з $\boldsymbol{S_0}$ у $\boldsymbol{S_3}$) або одночасного закінчення ремонтів двох вузлів (перехід з $\boldsymbol{S_3}$ у $\boldsymbol{S_0}$) можна знехтувати.

Для математичного опису марківського випадкового процесу з дискретними станами і безперервним часом, що відбувається в СМО, розглянемо одне з важливих понять теорії ймовірностей — поняття ***потоку подій.***

2. Потоки подій

Під ***потоком подій*** розуміють послідовність однорідних подій, що надходять одна за одною в якісь випадкові моменти часу (наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік відмовлень ЕОМ, потік покупців тощо).

Потік характеризується ***інтенсивністю*** $\boldsymbol{\lambda}$ – частотою появи подій або середнім числом подій, що надходять у СМО за одиницю часу.

Регулярним називається потік подій, що надходять одна за одною через визначені рівні проміжки часу.

Наприклад, потік виробів на конвеєрі складального цеху (з постійною швидкістю руху) є регулярним.

Потік подій називається ***стаціонарним,*** якщо його ймовірнісні характеристики не залежать від часу.

Зокрема, інтенсивність стаціонарного потоку є величина постійна: $\boldsymbol{\lambda(t) = \lambda}$. Наприклад, потік автомобілів на міському проспекті не є стаціонарним протягом доби, але цей потік можна вважати стаціонарним, скажемо, у години пік. Зазначимо, що в останньому разі фактична кількість автомобілів за одиницю часу (наприклад, щохвилини) може помітно відрізнятися одна від одної, але середня їхня кількість буде постійна і не залежатиме від часу.

Потік подій називається ***потоком без наслідку***, якщо для будь-яких двох неперетинних ділянок часу T_1 і T_2 число подій, що припадають на один з них, не залежить від кількості подій, що припадають на інші.

Наприклад, потік пасажирів, що входять у метро, практично не має наслідку. А, скажемо, потік покупців, що відходять з покупками від прилавка, має наслідок (хоча б тому, що інтервал часу між окремими покупцями не може бути менше, ніж мінімальний час обслуговування кожного з них).

Потік подій називається ***одинарним,*** якщо ймовірність потрапляння на малий (елементарний) відтинок часу Δt двох і більше подій нескінченно мала порівняно з імовірністю влучення однієї події, тобто якщо події з'являються в ньому поодинці, а не групами.

Наприклад, потік потягів, що підходять до станції, одинарний, а потік вагонів не одинарний.

Потік подій називається ***найпростішим*** (або ***стаціонарним пуассонівським***), якщо він одночасно стаціонарний, одинарний і не має наслідку.

Назва «найпростіший» застосована тому, що такі потоки мають найпростіший математичний опис.

3. Рівняння Колмогорова. Граничні ймовірності станів

Розглянемо математичний опис марківського процесу з дискретними станами і безперервним часом на прикладі випадкового процесу з прикладу 1, граф якого зображений на рис. 1. Вважаємо, що всі переходи системи зі стану S_i у стан S_j проходять під впливом найпростіших потоків подій з інтенсивностями λ_{ij} $(i, j = 0,1,2,3)$; так, перехід системи зі стану S_0 у S_1 відбуватиметься під впливом потоку відмовлень першого вузла, а зворотний перехід зі стану S_1 у S_0 – під впливом потоку «закінчень ремонтів» першого вузла тощо. Граф станів системи з проставленими біля стрілок інтенсивностями будемо називати ***розміченим.*** Ця система $\boldsymbol{S}$ має чотири можливих стани: $\boldsymbol{S_0, S_1, S_2, S_3}$.

Імовірністю $\boldsymbol{i}$***–го стану*** називається імовірність $\boldsymbol{p_i(t)}$, що в момент $\boldsymbol{t}$ система буде перебувати в стані $\boldsymbol{S_i}$. Очевидно, що для будь-якого моменту $\boldsymbol{t}$ сума ймовірностей усіх станів дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1.$$

Дійсно: $A_i \xrightarrow{def}$ подія в тім, що система знаходиться в стані $S_i \Rightarrow \sum_{i=0}^{3} A_i -$ достовірна подія $\xrightarrow{def} P\left(\sum_{i=0}^{3} A_i\right) = 1$,

$$\left[A_i - \textbf{\textit{неспільна подія}}\right] \Rightarrow P\left(\sum_{i=0}^{3} A_i\right) = \sum_{i=0}^{3} P(A_i) = 1;\ \left(P(A_i) = p_i(t)\right)$$

, що й треба було довести.

Математик ***Колмогоров*** отримав систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10} p_1 + \lambda_{20} p_2 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) p_0; \\ p_1' = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{31} p_3 - (\lambda_{10} + \lambda_{13}) p_1; \\ p_2' = \lambda_{02} p_0 + \lambda_{32} p_3 - (\lambda_{20} + \lambda_{23}) p_2; \\ p_3' = \lambda_{13} p_1 + \lambda_{23} p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32}) p_3. \end{cases}$$

Словесно: У лівій частині кожного з них стоїть похідна імовірності $\boldsymbol{i}$–го стану. У правій частині – сума добутків імовірностей усіх станів (з яких входять стрілки в цей стан) на інтенсивності відповідних потоків подій, мінус сумарна інтенсивність усіх потоків, що виводять систему із цього стану, помножена на імовірність цього ($\boldsymbol{i}$-го) стану.

Рівняння Колмогорова дають можливість знайти всі ймовірності станів як ***функції часу***.

Виокремлюють імовірності системи $p_i(t)$ у граничному стаціонарному режимі, тобто при $t \to \infty$, що називаються ***граничними*** (або ***фінальними)*** ймовірностями станів.

У теорії випадкових процесів доводиться, що якщо кількість станів системи звичайна і з кожного з них можна (за кінцеву кількість кроків) перейти в будь-який інший стан, то граничні ймовірності існують.

Гранична імовірність стану S_i показує ***середній відносний час*** перебування системи в цьому стані.

Наприклад, якщо гранична імовірність стану S_0, тобто $p_0 = 0,5$, то це означає, що в середньому половину часу система знаходиться в стані S_0.

Якщо граничні імовірності постійні, то замінимо в рівняннях Колмогорова їхні похідні нульовими значеннями, одержимо систему лінійних алгебричних рівнянь, що описують стаціонарний режим.

Для системи S із графом станів, зображеному на рис. 1, така система рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} (\lambda_{01} + \lambda_{02})p_0 = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2; \\ (\lambda_{10} + \lambda_{13})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3; \\ (\lambda_{20} + \lambda_{23})p_2 = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3; \\ (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3 = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2. \end{cases}$$

Дану систему можна скласти безпосередньо за розміченим графом станів, якщо керуватися **правилом**, відповідно до якого ліворуч у рівняннях стоїть гранична ймовірність його стану p_i, помножена на сумарну інтенсивність усіх потоків, що ведуть із цього стану, а праворуч – сума добутків інтенсивностей усіх потоків, що входять у i – ий стан, на імовірності тих подій, з яких ці потоки виходять.

Тема 2.5. Системи масового обслуговування в туризмі

План

1. Процеси обслуговування.
2. СМО процесу загибелі та розмноження.
3. СМО з відмовленнями.
3.1. Основні показники системи з відмовленнями.
3.2. Одноканальна система з відмовленнями.
3.3. Багатоканальна система з відмовленнями.

1. Процеси обслуговування

Досліджуючи операції, часто доводиться розглядати системи, призначені для багаторазового використання в процесі розв'язування однотипних задач. Такі процеси одержали назву ***процесів обслуговування***, а системи – ***систем масового обслуговування (СМО)***. Прикладами таких систем є телефонні системи, ремонтні майстерні, магазини, перукарні тощо.

Кожна СМО складається з певної кількості обслуговувальних одиниць (приладів, пристроїв, пунктів, станцій), які будемо називати ***каналами*** **обслуговування**. Каналами можуть бути лінії зв'язку, робочі точки, комп’ютери машини, продавці тощо. За кількістю каналів СМО поділяють на ***одноканальні*** і ***багатоканальні.***

Заявки надходять у СМО звичайно не регулярно, а випадково, що утворює так званий ***випадковий потік заявок (вимог)***. Обслуговування заявок також триває якийсь випадковий час. Випадковий характер потоку заявок і часу обслуговування призводить до того, що СМО виявляється завантаженою нерівномірно: в якісь періоди часу накопичується дуже велика кількість заявок (вони або стають у чергу, або залишають СМО необслугованими), в інші ж періоди СМО працює з недовантаженням або простоює.

Предметом теорії масового обслуговування є побудова математичних моделей, що зв'язують задані умови роботи СМО (кількість каналів, їхня продуктивність, характер потоку заявок тощо) з показниками ефективності СМО, що описують її здатність справлятися з потоком заявок.

Як ***показники ефективності*** СМО використовуються: середня кількість заявок (тут і надалі середні величини розуміються як математичні очікування відповідних випадкових величин), що їх обслуговують в одиницю часу; середня кількість заявок у черзі; середній час чекання обслуговування; імовірність відмовлення в обслуговуванні без чекання; імовірність того, що кількість заявок у черзі перевищить визначене значення тощо.

СМО поділяють на два основних типи (класи): СМО з відмовленнями і СМО з чеканням (чергою).

У ***СМО з відмовленнями*** заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, одержує відмовлення, залишає СМО і надалі в процесі обслуговування не застосовується (наприклад, заявка на телефонну розмову в момент, коли всі канали зайняті, одержує відмовлення і залишає СМО не обслугованою).

У ***СМО з чеканням*** заявка, що надійшла в момент, коли всі канали зайняті, стає в чергу на обслуговування. СМО з чеканням поділяють на різні види залежно від того, як організована черга: з обмеженою або необмеженою довжиною черги, з обмеженим часом чекання тощо.

Для класифікації СМО багато важить дисципліна обслуговування, що визначає порядок вибору заявок зі всієї кількості і порядок розподілу їх між вільними каналами. За цією ознакою обслуговування заявки може бути організоване за принципом:

«перша прийшла — перша обслугована»;
«остання прийшла — перша обслугована».

Такий порядок може застосовуватися, наприклад, при надходженні для обслуговування виробів зі складу, тому що останні з них виявляються часто доступнішими, або обслуговування за пріоритетом, коли перш за все обслуговуються найважливіші заявки.

Пріоритет може бути як ***абсолютним,*** коли важливіша заявка «витісняє» з-під обслуговування звичайну заявку (наприклад, у разі аварійної ситуації планові роботи ремонтних бригад перериваються до ліквідації аварії), так і ***відносним***, коли важливіша заявка одержує лише «краще» місце в черзі.

2. СМО процесу загибелі та розмноження

У теорії масового обслуговування є дуже поширеним спеціальний клас випадкових процесів – так званий ***процес загибелі і розмноження***. Назва цього процесу походить із біологічних задач, де він є математичною моделлю зміни чисельності біологічних популяцій. Граф станів процесу загибелі і розмноження має вигляд, показаний на рис. 12.1:

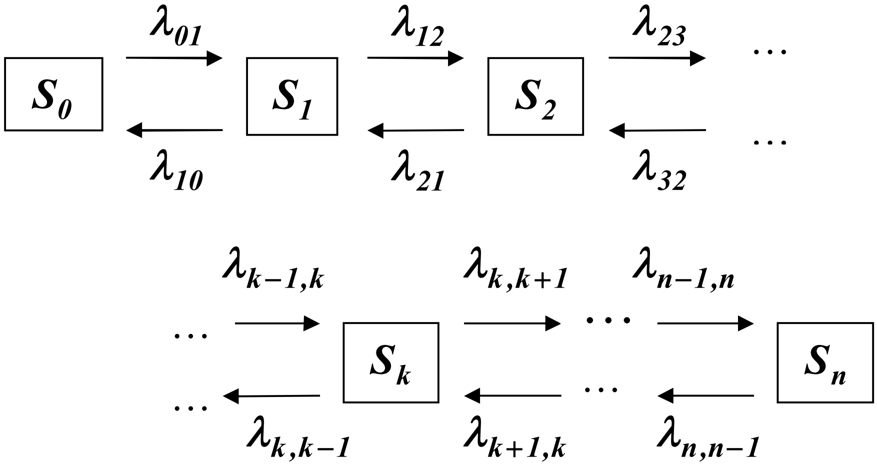

Рис. 12.1. Граф процесу загибелі та розмноження

Розглянемо упорядковану множину станів системи $S_0, S_1, S_2, \ldots S_k$. Переходи можуть здійснюватися з будь-якого стану тільки в стан із сусідніми номерами, тобто зі стану S_k можливі переходи тільки або в стан S_{k-1} або в стан S_{k+1}.

Припустимо, що всі потоки подій, що переводять систему по стрілках графа, найпростіші з відповідними інтенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ або $\lambda_{k+1,k}$.

За графом (рис. 12.1) складемо і розв'яжемо алгебраїчне рівняння для граничних ймовірностей станів. Відповідно до правила складання таких рівнянь одержимо:

– для стану S_0: $\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1$;

– для стану S_1: $(\lambda_{12} + \lambda_{10}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{21} p_2$,

що з урахуванням $\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1$ приводиться до вигляду

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2$$

Аналогічно, записуючи рівняння для граничних ймовірностей інших станів, одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{12}p_1 = \lambda_{21}p_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{k-1,k}p_{k-1} = \lambda_{k,k-1}p_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n.n-1}p_n, \end{cases}$$

до якої додамо нормувальну умову $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = p_n = 1$.

Розв'яжемо одержану систему рівнянь:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n\ldots}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1\ldots}\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0,\ p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\lambda_{n-1,n\ldots}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1\ldots}\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0.$$

У формулах для $p_1, p_2, \ldots, p_n$ коефіцієнти при p_0 є елементи, що стоять після одиниці у попередній формулі. Чисельники цих коефіцієнтів є добутком усіх інтенсивностей, що розміщені над стрілками і ведуть зліва направо до цього стану S_k $(k = 1,2,\ldots,n)$, а знаменники – добутком усіх інтенсивностей, що розміщені під стрілками і ведуть справа наліво до стану S_k.

Приклад 12.1

Процес загибелі і розмноження поданий графом на рис. 12.2. Знайти граничні ймовірності станів.

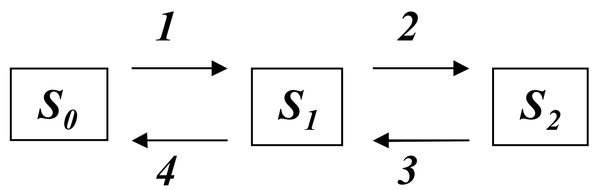

Рис. 12.2. Граф процесу загибелі та розмноження

Розв'язання

За формулою

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n\ldots}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1\ldots}\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}$$

обчислимо значення $p_0 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4}\right)^{-1} = 0{,}706$.

Відповідно, маємо:

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0 = \frac{1}{4} \cdot 0{,}706 = 0{,}176,$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0 = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} \cdot 0{,}706 = 0{,}118,$$

тобто у сталому, стаціонарному режимі в середньому 70,6% часу система буде перебувати у стані S_0,17,6% – у стані S_1 і 11,8% – у стані S_2.

3. СМО з відмовленнями

3.1. Основні показники системи з відмовленнями

***A* – абсолютна пропускна спроможність СМО**, тобто середнє число заявок, що обслуговуються в одиницю часу;

***Q* – відносна пропускна спроможність**, тобто середня частка заявок, що надійшли, що обслуговуються системою;

P_{OTK} – імовірність відмовлення, тобто того, що заявка залишить СМО без обслуговування;

$\bar{k}$ – середня кількість зайнятих каналів (для багатоканальних систем).

3.2. Одноканальна система з відмовленнями

Задача. Є один канал, на який надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговування має інтенсивність μ. Знайти граничні ймовірності станів системи і показники її ефективності.

Примітка. Передбачається, що всі потоки подій, що переводять СМО зі стану в стан, будуть найпростішими. До них відноситься і потік обслуговуванні – потік заявок, що обслуговуються одним безперервно зайнятим каналом.

Середній час обслуговування обернений до величини інтенсивності $\bar{t}_{обс.} = \frac{1}{\mu}$.

Інтенсивність навантаження $\rho = \lambda \cdot t_{обс.} = \lambda \cdot \frac{1}{\mu}$ показує ступінь узгодженості вхідного і вихідного потоків заявок каналу обслуговування і визначає стійкість системи масового обслуговування.

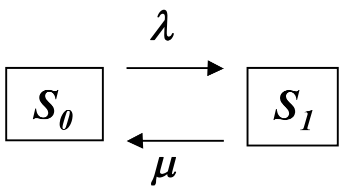

Рис. 12.3. Розмічений граф одноканальної системи

Система $\boldsymbol{S}$ (СМО) має два стани: $\boldsymbol{S_0}$ – канал вільний, $\boldsymbol{S_1}$ – канал зайнятий. Розмічений граф станів наведений на рис. 3.

У граничному, стаціонарному режимі система алгебраїчних рівнянь для ймовірностей станів має вигляд (див. правило складання таких рівнянь):

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_0, \end{cases}$$

тобто система вироджується в одне рівняння.

Враховуючи нормувальну умову $p_0 + p_1 = 1$, знайдемо граничні ймовірності станів:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},\ p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

які виражають середній відносний час перебування системи в стані $\boldsymbol{S_0}$ (коли канал вільний) і $\boldsymbol{S_1}$ (коли канал зайнятий), тобто визначають відповідно ***відносну пропускну спроможність системи*** (ймовірність, що канал вільний) $Q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ та ***імовірність відмовлення*** $P_{OTK} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Абсолютну пропускну спроможність знайдемо, помноживши відносну пропускну спроможність $\boldsymbol{Q}$ на інтенсивність потоку відмовлень

$$A = Q \cdot \lambda = \frac{\mu \cdot \lambda}{\lambda + \mu}.$$

3.3. Багатоканальна система з відмовленнями

Класична задача Ерланга

Є n каналів, на які надходить потік заявок з інтенсивністю λ. Потік обслуговування має інтенсивність μ. Знайти граничні ймовірності станів системи і показники її ефективності.

Система S (СМО) має такі стани (нумеруємо їх за кількістю заявок, що перебувають у системі):

$$S_0, S_1, S_2, \ldots S_k, \ldots, S_n,$$

де S_k – стан системи, коли в ній міститься k заявок, тобто зайнято k каналів. Граф станів СМО відповідає процесові загибелі і розмноження (рис. 12.4).

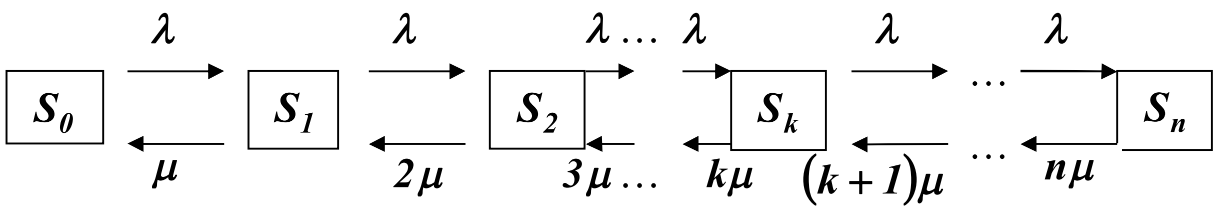

Рис. 12.4. Граф станів

Потік заявок послідовно переводить систему з будь-якого лівого стану в сусідній правий з однією і тією ж інтенсивністю λ. Інтенсивність потоку обслуговування, що переводить систему з будь-якого правого стану в сусідній лівий стан, постійно змінюється залежно від стану. Дійсно, якщо СМО перебуває в стані S_2 (два канали зайняті), то вона може перейти в стан S_1 (один канал зайнятий), коли завершить обслуговування або перший, або другий канал, тобто сумарна інтенсивність їхніх потоків обслуговування буде 2μ. Аналогічно сумарний потік обслуговування, що переводить СМО зі стану S_3 (три канали зайняті) у S_2, буде мати інтенсивність 3μ, тобто може звільнитися кожний із трьох каналів тощо.

Використовуючи

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n\ldots}\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1\ldots}\lambda_{21}\lambda_{10}} \right)^{-1}$$

для схеми загибелі та розмноження, одержимо для граничної ймовірності стану

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda^1}{1!\,\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1},$$

де члени розкладання

$\frac{\lambda^1}{1!\,\mu}; \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2}, \ldots, \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}$ – це коефіцієнти при p_0 у виразах для граничних ймовірностей $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots p_n$.

Величина $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ називається ***приведеною інтенсивністю потоку заявок*** або ***інтенсивністю навантаження каналу***.

Вона виражає середню кількість заявок, що надходить за середній час обслуговування однієї заявки.

Тоді

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}},$$

де

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0, \ldots, \; p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$$

Одержані формули для граничних ймовірностей одержали назви ***формул Ерланга*** на честь засновника теорії масового обслуговування.

Імовірність відмовлення СМО є гранична імовірність того, що всі n каналів системи будуть зайняті, тобто

$$P_{OTK} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Відносна пропускна спроможність – імовірність того, що заявка буде обслугована:

$$Q = 1 - P_{OTK} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0.$$

Абсолютна пропускна спроможність:

$$A = \lambda \cdot Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right)..$$

Середнє число зайнятих каналів $\bar{k}$ є математичне сподівання числа зайнятих каналів: $\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k$, де p_k – гранична ймовірність станів, визначуваних за відповідними формулами.

Проте середнє число зайнятих каналів можна знайти простіше, якщо врахувати, що абсолютна пропускна спроможність системи A є не що інше, як інтенсивність потоку обслужених системою заявок (у одиницю часу).

Оскільки кожен зайнятий канал обслуговує в середньому μ заявок (у одиницю часу), то ***середнє число зайнятих каналів***

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu},$$

або, враховуючи

$$A = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right),$$

маємо:

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0\right).$$

Тема 2.6. Багатокритеріальна оптимізація

План

1. Загальна постановка багатокритеріальної оптимізації.
2. Жорстко формалізовані методи багатокритеріальної оптимізації.
3. Метод «суперцілі».
4. Метод «послідовних поступок».
5. Приклад багатокритеріальної оптимізації.

1. Загальна постановка багатокритеріальної оптимізації

В класичній постановці задачі математичного програмування передбачається одна цільова функція, яка кількісно визначена. Але у реальних економічних системах на роль критерію оптимальності (ефективності) претендують кілька десятків показників.

Наприклад, максимум чистого доходу від реалізації виробленої продукції чи максимум рівня рентабельності, мінімум собівартості виробленої продукції або мінімум витрат дефіцитних ресурсів.

Крім того, бажаним є застосування кількох критеріїв одночасно, причому вони можуть бути взагалі несумісними.

Наприклад, вимога досягти максимальної ефективності виробництва за мінімальних витрат ресурсів з погляду постановки математичної задачі є некоректною. Мінімальні витрати ресурсів – це нульові витрати, що мають місце за повної відсутності будь-якого процесу виробництва. Аналогічно максимальна ефективність може бути досягнута лише у разі використання певних обсягів (звичайно не нульових) ресурсів.

Тому коректними є постановки задач такого типу: досягти максимальної ефективності при заданих витратах чи досягти заданого ефекту за мінімальних витрат.

Оскільки не існує єдиного універсального критерію економічної ефективності, то досить часто вдаються до розгляду багатокритеріальної оптимізації. Хоча задача математичного програмування передбачає одну цільову функцію, розроблено математичні методи, що дають змогу будувати ***компромісні плани***, тобто здійснювати багатокритеріальну оптимізацію.

Поняття оптимального розв’язку замінюється поняттям ефективного або компромісного розв’язку.

Означення. $\overline{x_0}$ є ***ефективним розв'язком*** багатоцільової задачі, якщо не існує іншого розв'язку, який би не поступався $\overline{x_0}$ по всіх показниках і переважав його хоча б одному з них.

Множина ефективних розв'язків $\left\{\overline{x_0}\right\}$ називається ***ефективною множиною***, а область значень показників $F_i\left(\overline{x}\right)$, що відповідають ефективній множині – ***множиною Парето.***

Розглянемо методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації.

2. Жорстко формалізовані методи багатокритеріальної оптимізації

2.1. Нехай у задачі обрано m критеріїв оптимальності $F_i\ \left(i = \overline{1,m}\right)$. Загальний критерій може мати вигляд суми окремих показників ефективності з відповідними коефіцієнтами:

$$F^* = k_1F_1 + k_2F_2 + ... + k_mF_m,$$

де $k_1,...,k_m$ – додатні чи від'ємні коефіцієнти.

Додатні коефіцієнти відповідають тим критеріям, які потрібно максимізувати, а від'ємні – тим, які мінімізуються. Абсолютні значення коефіцієнтів $k_1,...,k_m$ відповідають пріоритету (важливості) того чи іншого показника.

Наприклад, якщо розв'язується виробнича задача, то з додатними коефіцієнтами ввійдуть такі величини, як обсяг прибутку, отриманого від реалізації товарів та послуг, з від'ємними – витрати ресурсів (часу, праці), собівартість одиниці продукції.

2.2. Узагальнений критерій може подаватись у вигляді дробу, де в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно максимізувати, припустимо $F_1,...,F_n$, а в знаменнику — добуток тих, які потрібно мінімізувати $F_{n+1},...,F_m$:

$$F^* = \frac{\prod_{i=1}^{n} F_i}{\prod_{i=n+1}^{m} F_i}.$$

Загальним недоліком даних критеріїв (1,2) є те, що існує можливість недостатню ефективність одного критерію компенсувати іншим. Наприклад, зниження значення виконання попередніх замовлень (в (2) буде в чисельнику) може компенсуватися зменшенням використання ресурсів (знаменник дробу (2)). Оскільки окремі величини в чисельнику та знаменнику пропорційно зменшилися, то значення дробу не змінюється, проте складені на основі таких розрахунків плани можуть призвести до негативних наслідків.

2.3. Метод І. Никовського. Оптимальний план знаходять окремо за кожним з вибраних критеріїв, після чого отримують множину значень цільової функції $F_i^* \left(i = \overline{1,m}\right)$. На останньому етапі розв'язується початкова задача з одним критерієм виду:

$$minF = \left|\frac{F_1^* - \overline{F}_1}{F_1^*}\right| = \left|\frac{F_2^* - \overline{F}_2}{F_2^*}\right| = ... = \left|\frac{F_m^* - \overline{F}_m}{F_m^*}\right|,$$

де $\overline{F}_i(i = \overline{1,m}) -$ значення $i - го$ критерію оптимальності в оптимальному компромісному плані.

За такого підходу розв'язок задачі визначається за критерієм, що дорівнює мінімальному значенню модулів часток відхилень значень кожної цільової функції у компромісному плані від їх оптимальних значень у їх же оптимальних значеннях, що робить всі критерії однаково важливими.

2.4. Для врахування переваг одних критеріїв над іншими доцільно застосовувати узагальнений критерій такого виду:

$$minF = k_1\left|\frac{F_1^* - \overline{F}_1}{F_1^*}\right| = k_2\left|\frac{F_2^* - \overline{F}_2}{F_2^*}\right| = ... = k_m\left|\frac{F_m^* - \overline{F}_m}{F_m^*}\right|.$$

Недоліками цих двох способів є, по-перше, жорстке співвідношення між значеннями відхилень критеріїв оптимальності, що значно звужує множину допустимих планів; по-друге, одному значенню деякого критерію може відповідати множина інших, причому таких, за яких оптимальний план з економічного погляду ефективніший; по-третє, відсутня методика об'єктивного визначення коефіцієнтів $k_1,...k_m$.

3. Метод «суперцілі»

Зведення багатокритеріальної задачі до задачі з одним критерієм може також здійснюватися через виділення з вибраного набору показників одного, який вважають найважливішим $-\boldsymbol{F_k}$ і намагаються досягти його максимального значення (якщо необхідно знайти мінімум, то досить змінити знак показника). Всі інші показники (критерії) є другорядними, і на них накладаються обмеження виду: $F_i \geq z_i$, де z_i є нижньою межею значення відповідного показника, або $F_i \leq z_i$, якщо необхідно, щоб значення показника не перевищувало z_i. Для виробничих задач можна виділити як найважливіший показник ефективності прибуток і, максимізуючи його величину, додатково вводити обмеження щодо рентабельності виробництва не нижче або собівартості не вище певного рівня. Такі обмеження входять до системи початкових умов задачі.

4. Метод «послідовних поступок»

Всі обрані критерії необхідно ранжирувати за спаданням їх важливості: спочатку головний, скажімо $\boldsymbol{F_1}$, потім менш важливий $\boldsymbol{F_2}$ і т.д. Вважатимемо, що необхідно досягти максимального значення за всіма критеріями (якщо необхідно знайти мінімум, то змінюють знак показника).

Спочатку розв'язується задача з одним головним критерієм (знаходиться значення $\boldsymbol{max\,F_1}$), потім призначають деяку невелику за абсолютним значенням «поступку» $\boldsymbol{\Delta F_1}$, на яку можна змінити (зменшити) значення критерію $\boldsymbol{max\,F_1}$ задля того, щоб досягти максимального (більшого) значення за наступним критерієм F_2. Величина «поступки» залежить від потрібної точності розрахунків та достовірності початкових даних.

Потім до системи початкових обмежень задачі приєднують обмеження, що встановлює рівень можливого відхилення показника: $\boldsymbol{F_1 \leq (max\,F_1 - \Delta F_1)}$, і розв'язують нову задачу з критерієм оптимальності $\boldsymbol{F_2}$ і т.д. Процес розв'язання задачі у такий спосіб показує, ціною яких «поступок» досягається бажаний результат.

Очевидно, що багатокритеріальні задачі математичного програмування не мають універсального способу розв'язування

Отже, вибір та коректне застосування будь-якого з наведених способів залишається за суб'єктом прийняття рішень. Завдання математичного програмування полягає в забезпеченні потрібною кількістю науково обґрунтованої інформації, на підставі якої здійснюється вибір управлінського рішення.

5. Приклад багатокритеріальної оптимізації

Фабрика виготовляє вироби трьох найменувань, використовуючи для цього відповідні інгредієнти. Технолого-економічні дані наведено в таблиці 13.1. Визначити план виготовлення продукції, при якому максимізується прибуток і мінімізуються витрати на придбання імпортних інгредієнтів: кокоса і ароматизаторів.

Таблиця 13.1

Технолого-економічні дані

Інгредієнти	Продукція			Ціна	Запаси, т
	Печиво	Шоколадні цукерки	Карамель		
Цукор	0,15	0,3	0,6	3,2	20
Рослина олія	0,2	0,4	0,2	2,5	24
Борошно	0,6	0,15	0,1	2	30
Кокос	0,03	0,1	0,06	7	
Ароматизатори	0,02	0,05	0,04	8	
Прибуток (тис.грн)	1	1,2	0,8		
Кількість	x_1	x_2	x_3		

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

Цільові функції:

– максимізація прибутку

$$F_1(\overline{x}) = 1x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3 \rightarrow max;$$

– мінімізація витрат на придбання імпортних інгредієнтів (кокоса і ароматизаторів)

$$F_2(\bar{x}) = 7(0{,}03x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}06x_3) + 8(0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}04x_3) \to min$$
або
$$F_2(\bar{x}) = 0{,}37x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}74x_3 \to min.$$

Система обмежень:

$$\begin{cases} 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}6x_3 \le 20; \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 \le 24; \\ 0{,}6x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}1x_3 \le 30; \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

Застосуємо метод суперцілі.

Нехай значимість функцій (цілей) $\lambda_1=0{,}2$, $\lambda_2=-0{,}3$.

Запишемо відповідну функцію:

$$F_1(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = 0{,}2(x_1 + 1{,}2x_2 + 0{,}8x_3) - 0{,}3(0{,}37x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}74x_3) \to max$$

Остаточно запишемо модель:

$$F_1(\bar{x}, \lambda_1, \lambda_2) = 0{,}085x_1 - 0{,}09x_2 - 0{,}062x_3 \to max;$$
$$\begin{cases} 0{,}15x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}6x_3 \le 20; \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 \le 24; \\ 0{,}6x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}1x_3 \le 30; \\ x_i \ge 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

Розв'язавши задачу симплекс-методом, отримаємо $X^* = (0;0;60)$, тобто необхідно виготовити 60т карамелі. При цьому прибуток становитиме 60 тис.грн і 22,2 тис. грн. складуть витрати на придбання імпортних інгредієнтів.

Якщо ці значення не задовольняють ОПР, тоді необхідно змінити λ_1 та λ_2 і шукати новий розв'язок.

Список рекомендованої літератури

1. Воронков О. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій з курсу. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 110 с.
2. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.
3. Moodle МНАУ: Увійти на сайт. *Moodle МНАУ*. URL: https://moodle.mnau.edu.ua/login/index.php (дата звернення: 24.09.2021).
4. Дослідження операцій в економіці : підруч. / О. І. Черняк та ін. ; ред. О. І. Черняк. Миколаїв : МНАУ, 2020. 398 с.
5. Дослідження операцій : курс лекцій / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 248 с.
6. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізаційні методи та моделі : метод. рек. до практ. занять з навч. дисципліни для студентів напряму підготов. / С. В. Прокопович та ін. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. 52 с.
7. Економіко-математичне моделювання навч. посіб. / В. В. Вітлінський та ін. ; за заг. ред. В. В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2008. 536 с.
8. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. 704 с.
9. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. Клебанова Т.С. та ін. Харків : ВД «Інжек», 2012. 352 с.
10. Єсіна В. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій з дисципліни для студ. всіх форм навч. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 64 с.
11. Мазник Л. В., Гринюк Ю. М. Оптимізації методи та моделі : конспект лекцій для студ. всіх форм навч. Київ : НУХТ, 2014. 56 с.
12. Математичне програмування : метод. реком. з вивч. дисципліни та виконання контрольних робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 132 с.
13. Моделювання економіки : метод. реком. та завдання для практ. занять і самост. роботи здобувачів вищ. освіт / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. 59 с.

14. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2015. 215 с.

15. Оптимізаційні методи та моделі : підруч. / Л. В. Забуранна та ін. Київ : ЦП "Компринт", 2014. 372 с.

16. Оптимізаційні методи та моделі : метод. рек. з вивч. дисципліни та виконання контрол. робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2017. 107 с.

17. Оптимізаційні методи та моделі : конспект лекцій для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 135 с.

18. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання практ. занять і самост. роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 87 с.

19. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання тестових завдань і самост. роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 107 с.

20. Скворчевський О. Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : текст лекцій з курсу «Економіко-математичні методи та моделі». Харків : НТУ «ХПІ», 2014. 76 с.

Навчальне видання

Економіко-математичні моделі в туризмі

Конспект лекцій

Укладачі:

Шебаніна Олена В’ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 8,44.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.