

Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко

**МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І  
КОНСТРУКЦІЙ. Частина 1:  
ПРАКТИКУМ  
ДЛЯ НАВЧАННЯ НА ОСНОВІ  
ІНТЕРАКТИВНОГО  
ГРАФІЧНО-ЦИФРОВОГО КОНТЕНТУ**

*НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК*

*за редакцією проф. Д. В. Бабенка*

Миколаїв

МНАУ

2021

**УДК 539.3/6**

**Б12**

Авторський колектив:

Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко

Друкується за рішенням вченої ради Миколаївського національного аграрного університету від 15.06.21 р., протокол №10.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

Р. М. Тріщ – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри охорони праці, стандартизації та сертифікації, Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків);

Г. І. Канюк – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри теплоенергетики та енергозберігаючих технологій, Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків).

**Бабенко Д. В.**

**Б12** Механіка матеріалів і конструкцій. Частина 1: практикум для навчання на основі інтерактивного графічно-цифрового контенту: навчальний посібник / Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко, О. А. Горбенко. – Миколаїв: МНАУ, 2021. – 176 с.

ISBN 978–617–7149–56–8

Застосування інтерактивного графічно-цифрового контенту є необхідною умовою досягнення цілей інформатизації освіти. У навчальному посібнику висвітлено основні питання курсу механіки матеріалів і конструкцій, а саме: геометричні характеристики плоских перерізів та основні типи деформацій: центральний розтяг та стиск, кручення, зсув, згин. В посібнику представлені завдання, які можна виконати, використовуючи інтерактивний графічно-цифровий контент: мультимедійні презентації та відеолекції, інтерактивні навчальні тренажери, графічно-цифрові пояснення до виконання практичних робіт тощо. Розроблений для закладів вищої освіти III і IV рівнів акредитації, науково-педагогічних працівників та здобувачів вищої освіти інженерних спеціальностей.

**УДК 539.3/6**

© Миколаївський національний аграрний університет, 2021

©Бабенко Д. В., Доценко Н. А., Горбенко О. А., 2021

ISBN 978–617–7149–56–8

## *ВСТУП*

Механіка матеріалів і конструкцій вивчає інженерні методи розрахунку та їх застосування для визначення несучої здатності елементів конструкцій, оцінки та оптимізації їх геометричних параметрів, а також обґрунтування інженерних рішень прийнятих у ході створення нових та удосконалення існуючих конструкцій. Нерозривний зв'язок з іншими науками, їх постійний розвиток дозволяють використовувати можливості обчислювальної техніки, а також розширити коло загальних питань, необхідних для підготовки сучасних спеціалістів інженерного профілю. Розвитку набуває інформатизація навчання, технології дистанційного та змішаного навчання вимагають належного рівня підготовки освітнього контенту.

В навчальному посібнику за допомогою QR кодів представлені завдання на основі інтерактивного графічно-цифрового контенту, які розміщені в інформаційно-освітньому середовищі MOODLE. Тому необхідно увійти на платформу дистанційного навчання MOODLE, ввести свій логін та пароль, зайти на свою сторінку користувача та зареєструватися на курс «Механіка матеріалів і конструкцій». Також на смартфоні повинен бути завантажений додаток для читання QR-кодів. Наступним кроком є сканування зображення QR-коду та ознайомлення з теорією та методикою виконання завдання до пройденого матеріалу. Для теоретичного опанування дисципліни представлені матеріали мультимедійних презентацій та відеолекції. У процесі формування практичних завдань використовувалися приклади розрахунку задач та інтерактивні пояснення до виконання практичних робіт. Модульний контроль з дисципліни здійснюється за допомогою виконання практичних завдань та інтерактивних тестових тренажерів.

У навчальному посібнику викладено загальні положення курсу механіки матеріалів і конструкцій, а саме: поняття геометричних характеристик плоских перерізів та їх знаходження, розрахунок інженерних об'єктів на центральний розтяг та стиск, кручення, згин.

Матеріал навчального посібника може використовуватися здобувачами вищої освіти для самостійної роботи по вивченню курсу та вирішення практичних задач, для виконання навчальних завдань, при підготовці до екзаменів.

## **Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА**

### **Модуль «Вступ»**

#### ***1.1. Мультимедійна презентація «Вступ. Основні гіпотези курсу механіки матеріалів і конструкцій»***

1.1.1. Завдання курсу «Механіки матеріалів і конструкцій» і його значення для інженерної освіти.

1.1.2. Види навантажень. Поняття про розрахункову схему.

1.1.3. Об'єкти, що вивчаються в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій».

1.1.4. Основні властивості твердого деформованого тіла.

1.1.5. Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій».

#### ***1.2. Мультимедійна презентація «Основні поняття курсу механіки матеріалів і конструкцій»***

1.2.1. Внутрішні сили в стрижнях та їх визначення. Метод перерізів.

1.2.2. Види простої деформації стрижня.

1.2.3. Поняття про напруження і деформацію в точці.

#### ***1.3. Відеолекція «Вступ. Основні гіпотези курсу механіки матеріалів і конструкцій»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції (частина 1 та 2). Посилання на ресурс наведено нижче.





*Відеолекція «Вступ (частина 1)»*



*Відеолекція «Основні гіпотези курсу механіки матеріалів і конструкцій (частина 2)»*

***1.4. Відеолекція «Основні поняття та положення курсу механіки матеріалів і конструкцій»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Основні поняття та положення курсу механіки матеріалів і конструкцій»*

*1.5. Слайди до мультимедійної презентації «Основні положення та завдання курсу механіки матеріалів і конструкцій»*

**Механіка матеріалів і конструкцій** – це наука про інженерні методи розрахунку деталей машин та елементів конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

**Міцність** – це здатність конструкції, її частин та деталей витримувати зовнішні навантаження не руйнуючись.

**Жорсткість** – це здатність конструкції, її частин та деталей протидіяти зовнішнім навантаженням відносно деформацій.

**Стійкість** – це здатність конструкції витримувати зовнішні навантаження, зберігаючи при цьому початкову форму пружної рівноваги.

**Завдання інженера:** для того, щоб конструкція у цілому відповідала вимогам надійності, необхідно надати її елементам найбільш раціональної форми, і знаючи властивості матеріалу, з якого вона буде виготовлятися, визначити відповідні розміри залежно від величини і характеру сил, що діють на неї.

# Зовнішні навантаження

## а) за характером прикладання:

**Зосереджена сила** – якщо площа її прикладання досить мала і вважають, що вона прикладена в точці (рис.а), має розмірність – (Н, кН).

**Розподілене навантаження** – рівномірно (рис.б) та нерівномірно розподілене (рис.в), яке може бути розподілене по поверхні, довжині і по об'єму.

Навантаження розподілене по об'єму – це і є власна вага тіла, сила магнітних полів і т.д.

## в) за тривалістю дії:

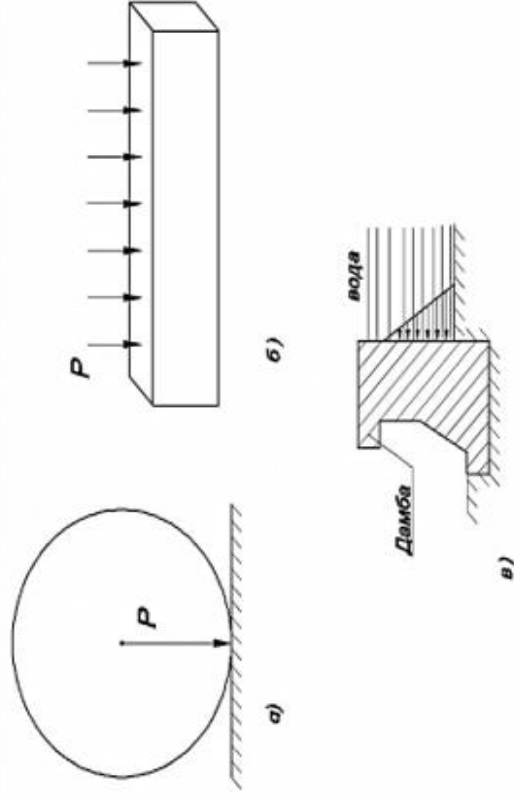
**Постійної дії** (сталі).

**Тимчасової дії**: можуть бути тривалої дії і короткотривалі.

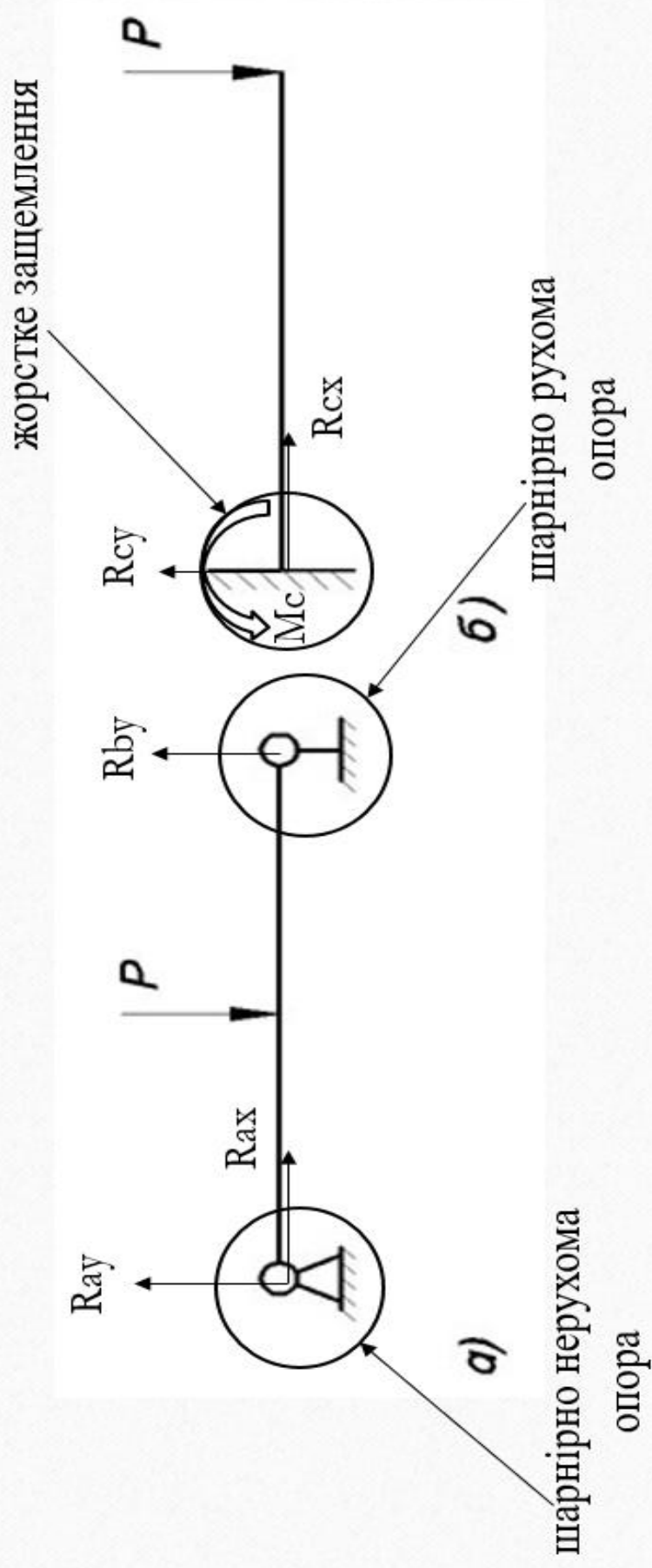
## б) за характером зміни:

**Статичне навантаження** – швидкість прикладання незначна і не призводять до появи інших побічних навантажень.

**Динамічні навантаження** – швидкість прикладання яких значна і вони приводять до появи інерційних сил.

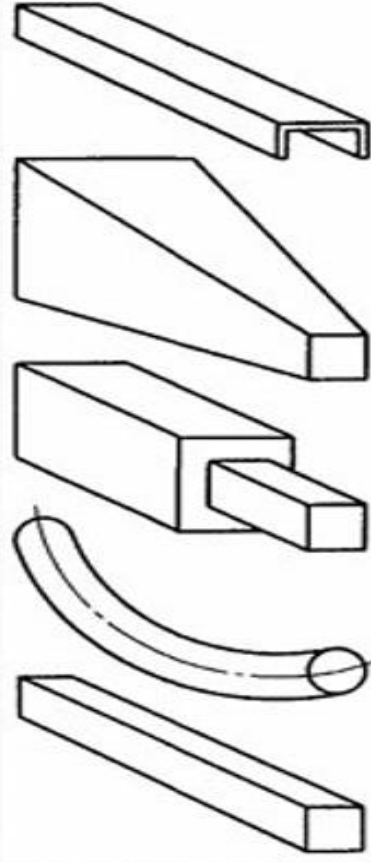


# Розрахункова схема



# Об'єкти розрахунку механіки матеріалів і конструкцій

а) **стрижень** (брус) – це геометричне тіло, два розміри якого малі порівняно з третім – довжиною. Розрізняють такі види стрижнів: прямолінійні, криволінійні, призматичні, постійного і змінного поперечного перерізу



б) **пластина** – це геометричне тіло, два розміри якого досить великі порівняно із третім – товщиною.

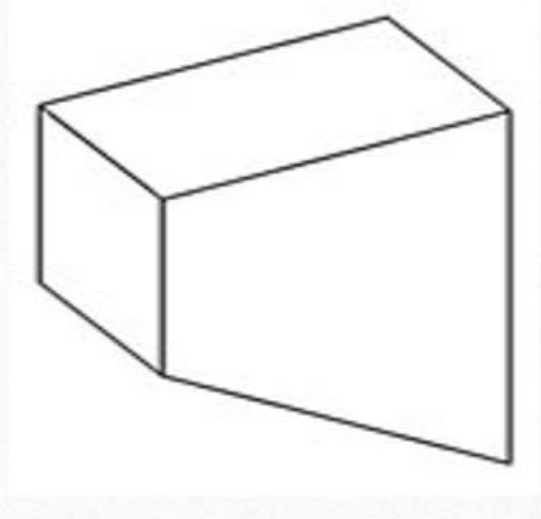
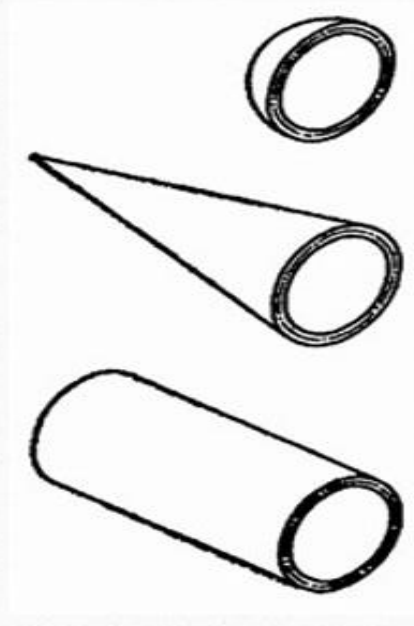
Пластинами можна вважати плоскі дніща й кришки резервуарів, перекриття інженерних споруд та інше.



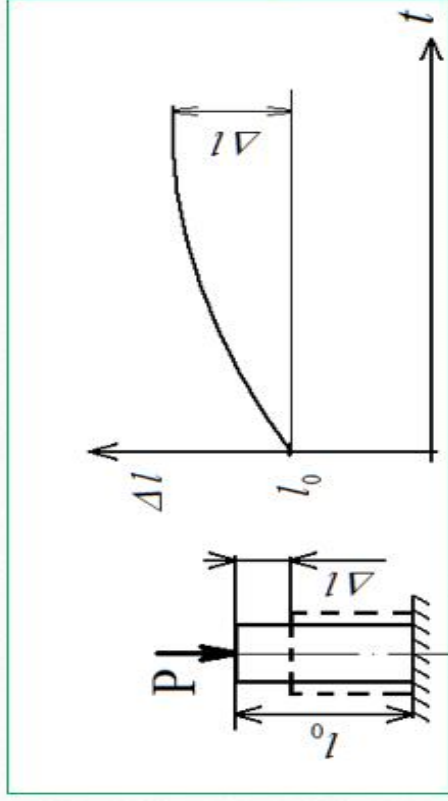


# Об'єкти розрахунку механіки матеріалів і конструкцій

- **в) оболонка** – це тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій поверхні одна від одної. За формою середньої поверхні розрізняють оболонки циліндричні, конічні, сферичні та ін. До оболонок належать неплоскі стінки резервуарів, котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу літаків та інше.
- **г) масивне тіло** – якщо всі три розміри тіла (об'єкта) одного порядку. До них належать фундаменти споруд, підпірні стіни тощо.

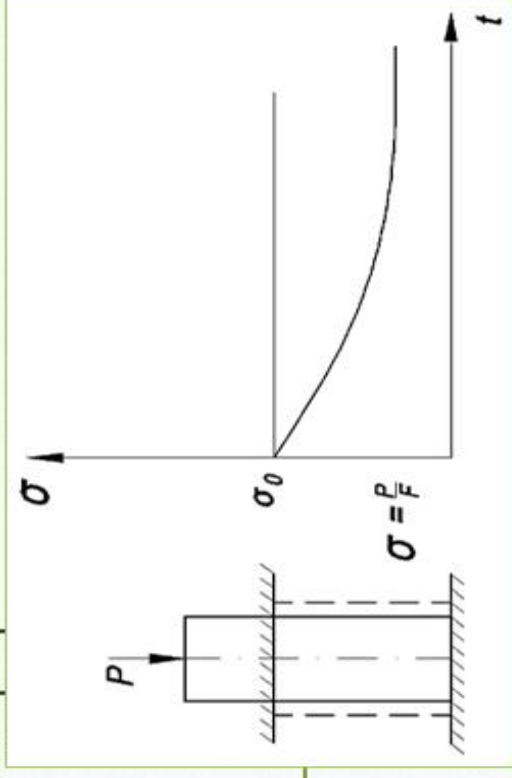


## Основні властивості твердого деформованого тіла



Графічне зображення повзучості.

- **Пружність** – здатність матеріалу деформуватись під дією зовнішнього навантаження і поновлювати свою форму і розміри після його зняття.
- **Пластичність** – здатність тіла деформуватися і залишатися в деформованому стані після зняття навантаження.
- **Крихкість** – здатність матеріалу до руйнування при малих деформаціях (прикладом такого матеріалу є скло).
- **Оаноріадність** – якщо механічні властивості матеріалу однакові у всіх його точках.

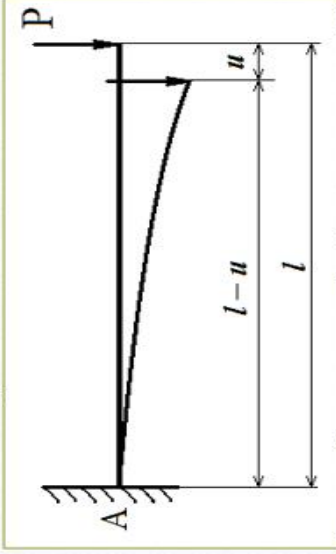


Графічне зображення релаксації.

- **Ізотропність** – якщо властивості матеріалу не залежать від напрямку дії навантаження (прикладом такого матеріалу є сталь, чавун, крeйдa).
- **Анізотропність** – якщо властивості матеріалу залежать від напрямку дії стислого навантаження (прикладом такого матеріалу є дерево).
- **Повзучість** – це здатність матеріалу до деформування за умови тривалої дії навантаження.
- **Релаксація напружень** – це зменшення напружень у матеріалі з часом за умови обмеження деформації.



## Гіпотези, принципи та основні припущення в курсі «Механіки матеріалів і конструкцій»

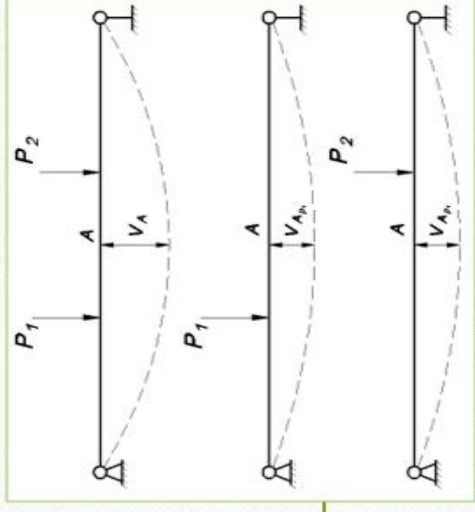


Графічне зображення гіпотези незначності деформацій.

### Гіпотези про:

- 1. **однорідність матеріалу:** у всіх точках тіла властивості однакові;
- 2. **ізотропність матеріалу:** для деяких матеріалів їх властивості не залежать від напрямку дії сили;
- 3. **абсолютну пружність матеріалу:** після зняття навантаження деталь повністю відновлює свою форму;
- 4. **суцільність матеріалу:** матеріал повністю заповнює форму без порожот та тріщин;
- 5. **незначність деформацій щодо розмірів тіла:** деякі деформації надто малі щодо розмірів тіла значить ними можна нехтувати. Ця гіпотеза дає можливість застосування умов рівноваги для деформованих систем.

$$M_A = P(l - u) \quad M_A = Pl$$



Графічне зображення принципу суперпозиції.

- 6. **лінійну залежність між деформацією і зусиллям (закон Гука):**  

$$\Delta l = kP$$
- 7. **принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції):** величина будь-якого зусилля чи деформації від дії кількох зовнішніх сил може бути знайдена як алгебраїчна сума цих величин від дії кожної сили окремо  

$$V_A = V_{AP_1} + V_{AP_2}$$
- Тобто прогин в точці А від дії двох сил P1 і P2 знайдемо:  
де:  $V_{AP_1}$  – прогин від дії сили P1;  
 $V_{AP_2}$  – прогин від дії сили P2.
- 8. **плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі),** згідно з якою поперечний переріз, плоский і нормальний до осі перед деформацією і залишається таким же і після деформації.



1.6. Слайди до мультимедійної презентації «Основні поняття курсу механіки матеріалів і конструкцій»

## Внутрішні зусилля в стрижнях

Спроектвавши головний вектор і головний момент на координатні осі отримаємо *шість внутрішніх зусиль*:

$N_z$  – поздовжня сила;

$Q_x, Q_y$  – поперечні сили;

$M_x, M_y$  – згинальні моменти;

$M_z$  – крутний момент.

Внутрішні зусилля знаходять із рівнянь рівноваги:

$$\sum X = 0, \Rightarrow Q_x$$

$$\sum Y = 0, \Rightarrow Q_y$$

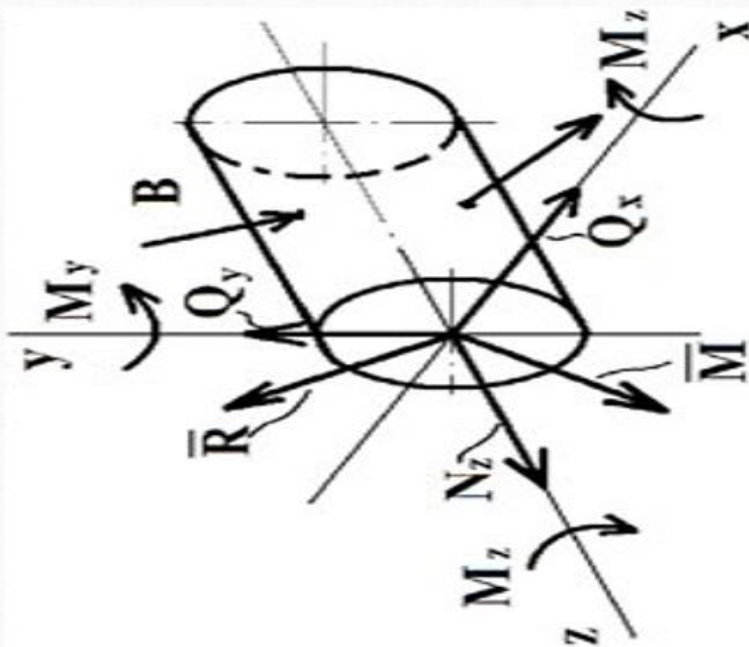
$$\sum Z = 0, \Rightarrow N_z$$

$$\sum M_x = 0, \Rightarrow M_x$$

$$\sum M_y = 0, \Rightarrow M_y$$

$$\sum M_z = 0, \Rightarrow M_z$$

Тобто із шести рівнянь статички знаходимо шість внутрішніх зусиль.



Рівновага залишеної частини стрижня

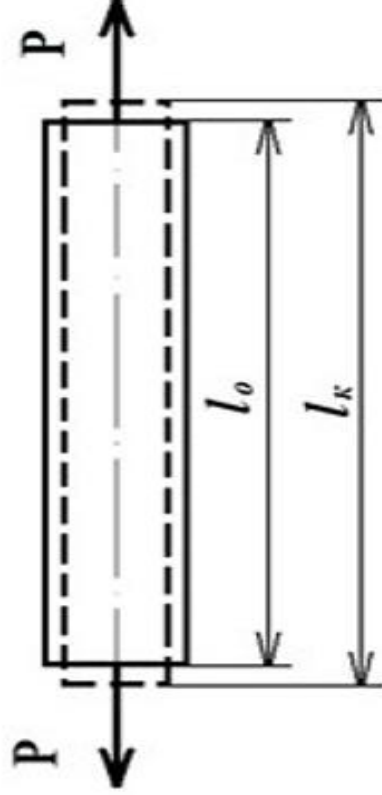
# Види простої деформації стижня

$\Delta l = l_k - l_0$  – абсолютне подовження при розтягу;

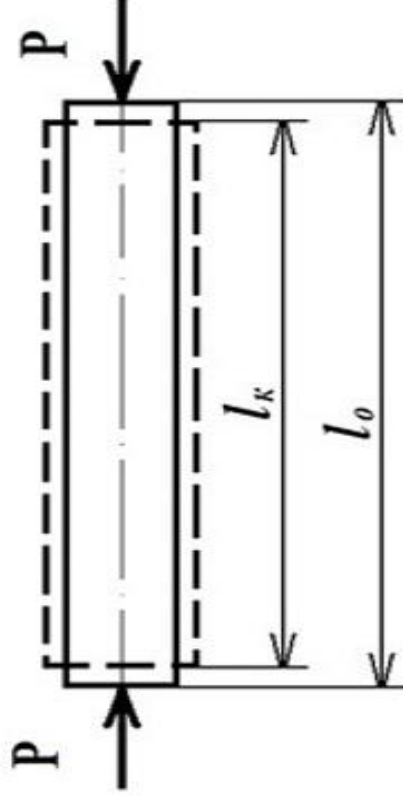
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \text{ – відносне подовження при розтягу.}$$

$\Delta l = l_k - l_0$  – абсолютне укорочення при стиску

$$\varepsilon = -\frac{\Delta l}{l_0} \text{ – відносне укорочення при стиску}$$



Центральний розтяг



Центральний стиск

# Види простої деформації стрижня

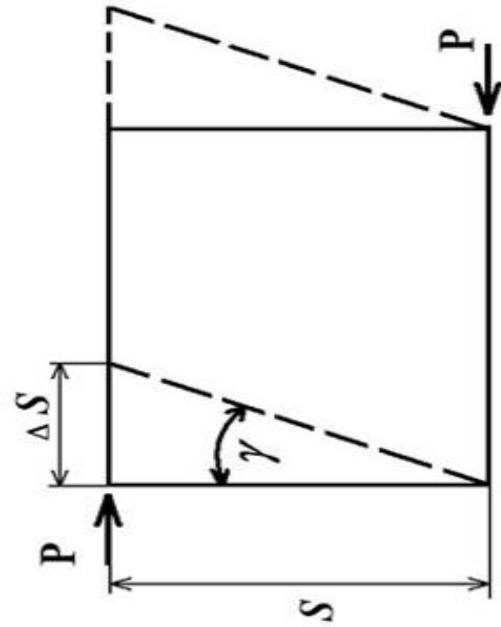
$\Delta S$  – абсолютний зсув;

$$\frac{\Delta S}{S} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma - \text{відносний зсув (кут зсуву)}.$$

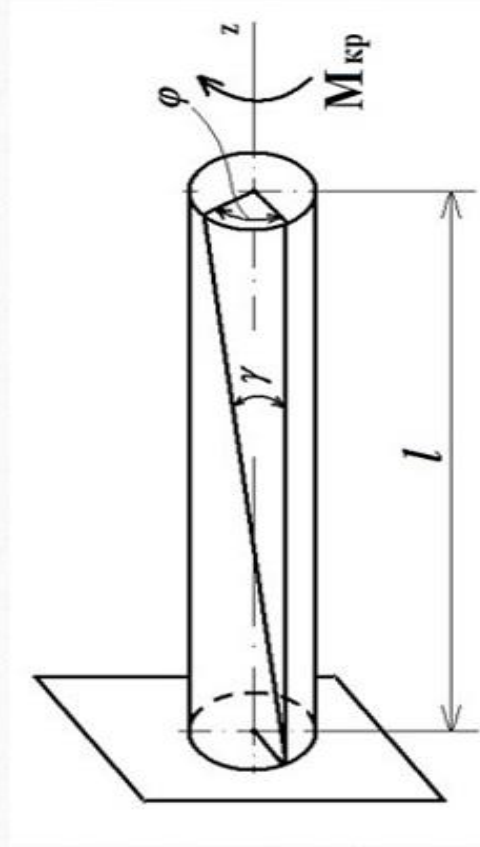
$\gamma$  – кут зсуву;

$\varphi$  – кут повороту перерізу;

$\theta = \frac{\varphi}{l}$  – відносний кут повороту.



Деформації зсуву



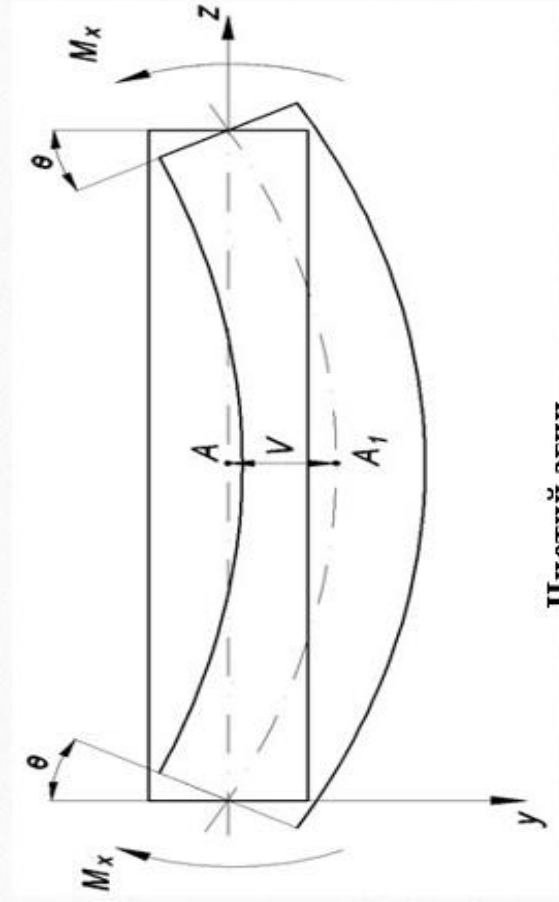
Кручення

# Види простої деформації стрижня

- Основні характеристики при деформаціях чистого згину:

$V(z)$  – прогин;

$\varphi(z)$  – кут повороту перерізу.



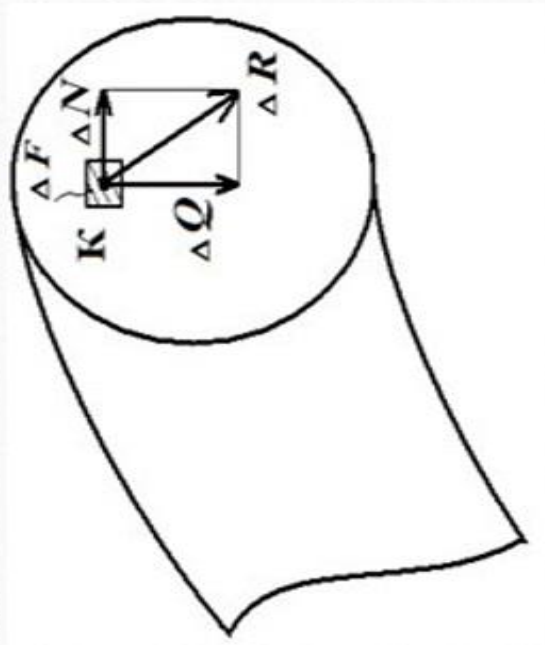
Чистий згин



# Поняття про напруження та деформацію в точці

$\frac{\Delta R}{\Delta F} = P_{\text{ср}}$  – середнє напруження на площадці  $\Delta F$ .

$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = P$  – напруження в точці К.

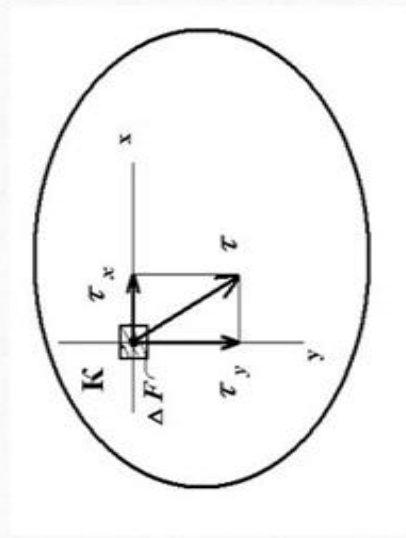


Рівновага внутрішніх зусиль

$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta F} = \sigma$  – нормальне напруження;

$\lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta F} = \tau$  – дотичне напруження.

Оскільки  $\tau$  може мати довільний напрямок, то спроектувавши його на координатні осі, отримаємо  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $\tau_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ .



Дотичні напруження

## **Модуль «Геометричні характеристики плоских перерізів»**

### ***1.7. Мультимедійна презентація «Геометричні характеристики плоских перерізів»***

1.7.1. Поняття геометричних характеристик плоских перерізів.

1.7.2. Моменти інерції простих фігур.

1.7.3. Моменти інерції відносно паралельних осей.

1.7.4. Залежність між моментами інерції при повороті координат осей.

1.7.5. Головні осі та головні моменти інерції.

1.7.6. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості.

### ***1.8. Відеолекція «Геометричні характеристики плоских перерізів»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.

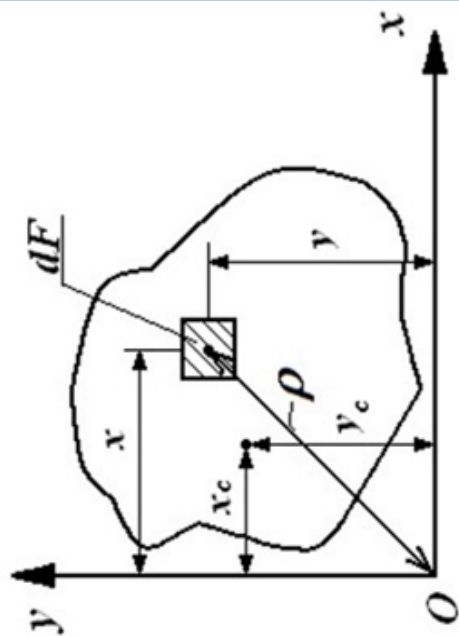


*Відеолекція «Геометричні характеристики плоских перерізів»*

1.9. Слайди до мультимедійної презентації «Геометричні характеристики плоских перерізів»

Геометричні характеристики плоских перерізів

Статичний момент площі



$$S_x = \int_F y \cdot dF$$

$$S_y = \int_F x \cdot dF$$

$$X_c = \frac{S_y}{F};$$

$$Y_c = \frac{S_x}{F};$$

$$S_x = y_c \cdot F$$

$$S_y = x_c \cdot F$$

Одиниця виміру (довжина)<sup>3</sup>.

Осьові моменти інерції

$$I_x = \int_F y^2 dF$$

$$I_y = \int_F x^2 dF$$

$$I_x > 0$$

Одиниця виміру (довжина)<sup>4</sup>.

Відцентровий момент інерції

$$I_{xy} = \int_F xy dF$$

Одиниця виміру (довжина)<sup>4</sup>.

## Геометричні характеристики плоских перерізів

### Полярний момент інерції

$$I_{\rho} = \int_{F} \rho^2 \cdot dF = \int_{F} (x^2 + y^2) \cdot dF = I_x + I_y$$

$$I_{\rho} > 0.$$

Одиниці виміру (довжина)<sup>4</sup>.

### Момент опору перерізу

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$$

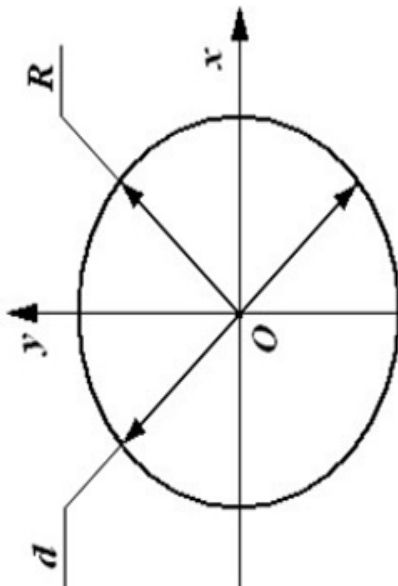
$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}$$

Одиниці виміру (довжина)<sup>3</sup>



## Осьові моменти інерції простих фігур

**Коло**

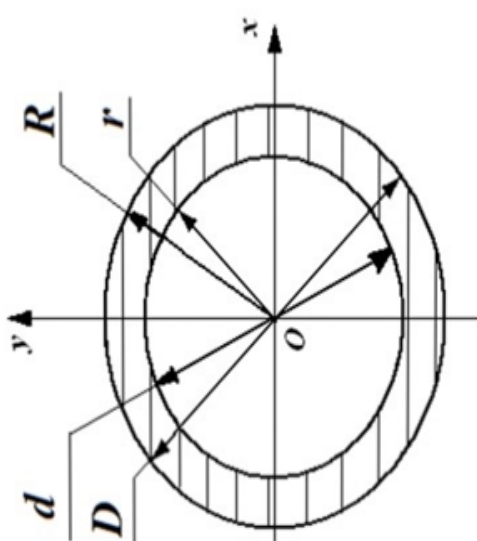


$$I_{\rho} = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_{\rho}}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{R} = \frac{\pi d^4}{64} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi d^5}{32}$$

**Кільце**



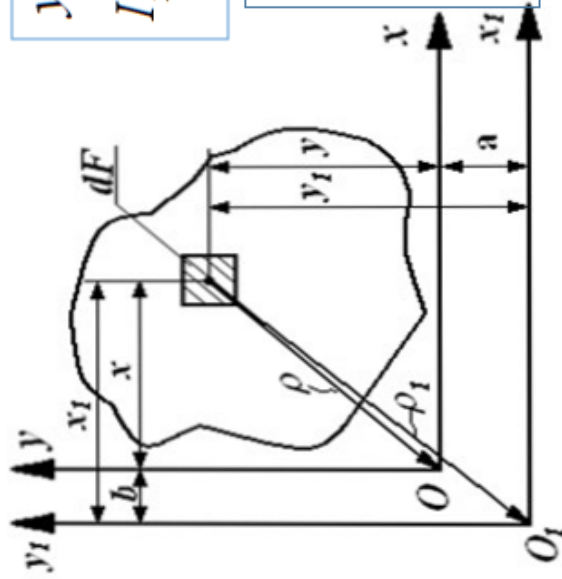
$$I_x = I_y = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$$

де  $\alpha = \frac{D}{d}$ .

$$I_{\rho} = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4).$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$$

## Моменти інерції відносно паралельних осей



$$y_1 = y + a, \quad x_1 = x + b.$$

$$I_{x_1} = \int_F y_1^2 \cdot dF = \int_F (y+a)^2 dF = \int_F y^2 \cdot dF + 2a \int_F y \cdot dF + a^2 \int_F dF$$

$$I_{x_1} = I_x + 2aS_x + a^2 F \quad I_{y_1} = I_y + 2bS_y + b^2 F$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x+b)(y+a) dF = \dots = I_{xy} + aS_y + bS_x + ab$$

$$I_{x_1} = I_x + a^2 F$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2 F$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abF$$

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y + (a^2 + b^2) F$$

$$I_{\rho_1} = I_{\rho} + (a^2 + b^2) F$$

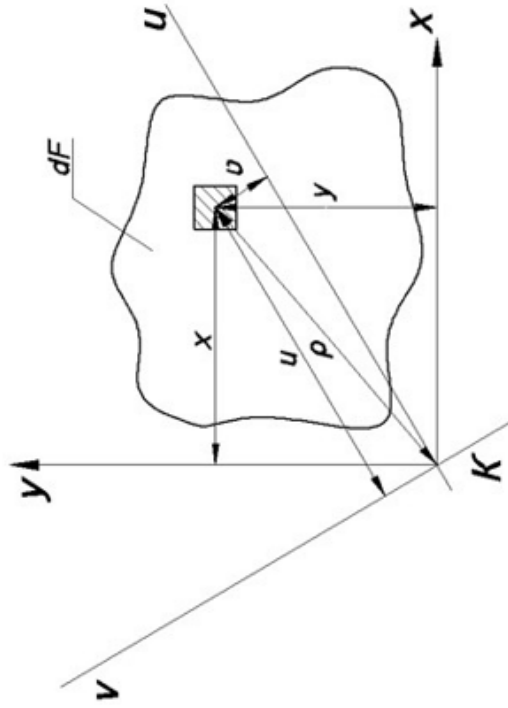
Якщо припустити, що відомі осьові моменти інерції відносно довільних осей, то можемо знайти їх значення відносно центральних осей, паралельних даним.

$$I_x = I_{x_1} - a^2 F$$

$$I_y = I_{y_1} - b^2 F$$

Момент інерції буде найменшим відносно центральної вісі.

## Залежність між моментами інерції при повороті осей



$$\vartheta = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

$$u = y \cdot \sin \alpha + x \cdot \cos \alpha$$

$$I_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dF =$$

$$= \cos^2 \alpha \cdot \underbrace{\int_F y^2 dF}_{I_y} + \sin^2 \alpha \cdot \underbrace{\int_F x^2 dF}_{I_x} - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \underbrace{\int_F xy dF}_{I_{xy}}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

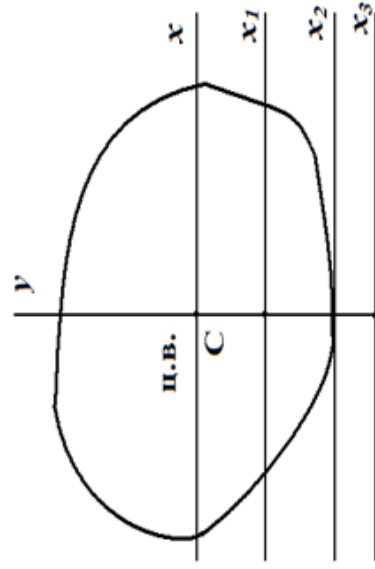
$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$I_{uv} = \int_F v u dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \cdot (y \sin \alpha + x \cos \alpha) dF = \dots$$

$$\dots = -\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

$$I_u = I_v = I_x + I_y = \text{const}$$



$$I_x = \min < I_{x1} < I_{x2} < I_{x3}$$

# Головні вісі та головні моменти інерції

Кут, що визначає положення головних осей:

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Існує дві перпендикулярні вісі, відносно яких осьові моменти інерції набувають екстремального значення. Ці вісі називаються головними, а моменти інерції відносно них – **головними моментами інерції** перерізу.

Значення головних осьових моментів інерції визначається:

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

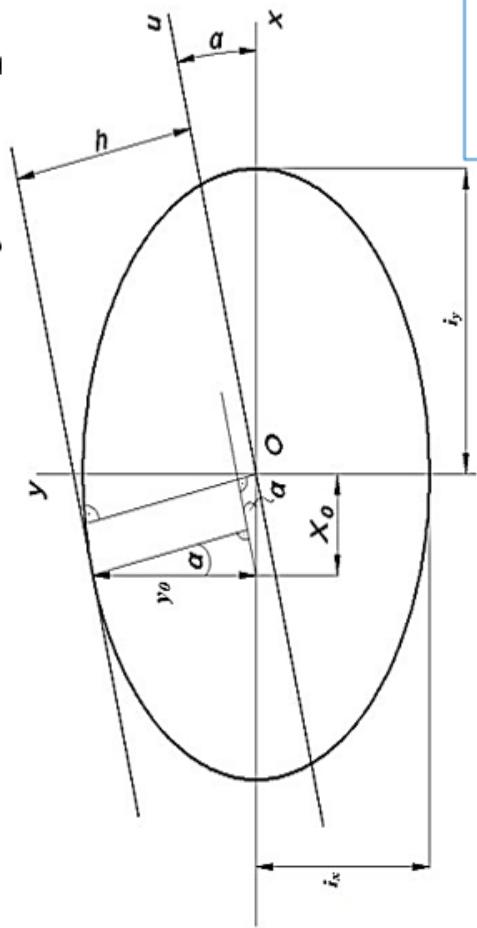
Формула для визначення положення осей **max** та **min**:

$$tg2\alpha_1 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\max}};$$

$$tg2\alpha_2 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_{\min}}$$

# Радіус інерції

Припустимо, що вісі  $x$  і  $y$  – головні вісі. Знайдемо значення осьового моменту інерції відносно вісі  $u$ , повернутої на кут  $\alpha$ , відносно на вісі  $x$ .



$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} \quad \rightarrow \quad I_x = i_x^2 \cdot F$$

$$i_u^2 = i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha$$

$$\frac{y^2}{i_x^2} + \frac{x^2}{i_y^2} = 1$$

$$\frac{y_0 \cos \alpha}{h} + \frac{x_0 \sin \alpha}{h} = 1$$

$$\frac{y}{i_x^2} = \frac{\cos \alpha}{h}; \quad \frac{x}{i_y^2} = \frac{\sin \alpha}{h}$$

$$\frac{y^2}{i_x^2} = \frac{i_x^2 \cos^2 \alpha}{h^2}; \quad \frac{x^2}{i_y^2} = \frac{i_y^2 \sin^2 \alpha}{h^2}$$

$$\frac{i_x^2 \cos^2 \alpha}{h^2} + \frac{i_y^2 \sin^2 \alpha}{h^2} = 1$$

$$i_x^2 \cos^2 \alpha + i_y^2 \sin^2 \alpha = h^2$$

$$i_u = h$$

$$I_u = h^2 F$$

Це дає нам можливість графічним шляхом знаходити значення осьових моментів інерції відносно будь-якої осі, паралельної головній осі.

## **Модуль «Центральний розтяг та стиск стрижнів»**

### ***1.10. Мультимедійна презентація «Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів»***

1.10.1. Поздовжні сили та їх епюри. Диференціальні залежності між навантаженням та поздовжньою силою. Моменти інерції простих фігур.

1.10.2. Напруження та деформації при розтязі і стиску. Закон Гука при розтязі-стиску.

1.10.3. Переміщення перерізів стрижня та епюра переміщень. Головні осі та головні моменти інерції.

1.10.4. Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня.

### ***1.11. Мультимедійна презентація «Розрахунок при центральному розтягу-стиску»***

1.11.1. Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості.

1.11.2. Перевірка міцності та визначення необхідних розмірів стрижня при розтязі-стиску. Випробування матеріалів на стиск.

1.11.3. Статично-невизначені системи (СНС) при розтягу-стиску.

1.11.4. Вплив неточності виготовлення деталей і температури на величини зусиль у них.

### ***1.12. Мультимедійна презентація «Механічні властивості матеріалів»***

1.12.1. Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості.

1.12.2. Дійсна діаграма розтягу.

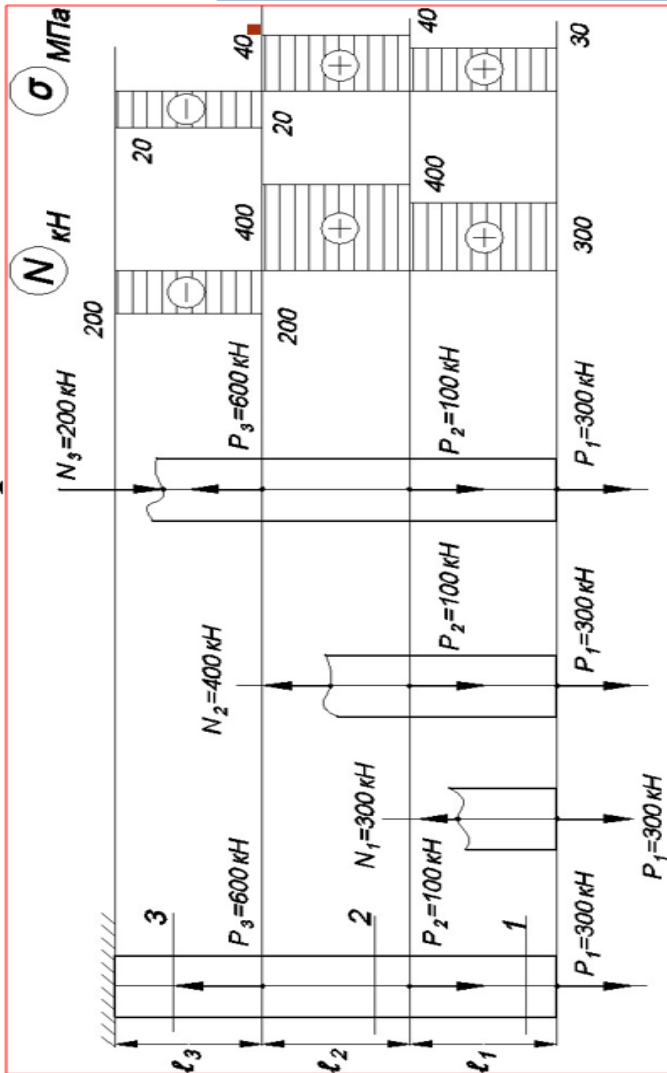
1.12.3. Випробування матеріалів на стиск.

1.12.4. Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів.

1.12.5. Потенціальна енергія при розтязі-стиску.

# 1.13. Слайди до мультимедійної презентації «Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів»

## Поздовжені сили та їх епюри.



- $N_1 = P_1 = 300 \text{ кН}$
- $N_2 = P_1 + P_2 = 400 \text{ кН}$
- $N_3 = P_1 + P_2 - P_3 = -200 \text{ кН}$

**Правило знаків:**  $N_z > 0$  – коли вона напрямлена від перерізу, і викликає розтяг стрижня, і навпаки – «від'ємна», викликаючи стиск. Для наочного представлення характеру зміни  $N_z$  по довжині стрижня будують епюру  $N_z$  – графік, кожна ордината якого показує значення  $N_z$  в поперечному перерізі (графічний закон зміни  $N_z$ ).

➤ Для прикладу побудуємо епюру  $\sigma$  при  $F = 10 \text{ см}^2$

- $N_{1-1} = P_1 = 300 \text{ кН} = N_{2-2}$
- $N_{3-3} = P_1 + P_2 = 400 \text{ кН} = N_{4-4}$
- $N_{5-5} = P_1 + P_2 - P_3 = -200 \text{ кН} = N_{6-6}$
- $\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = \frac{N_{1-1}}{F} = \frac{300}{10} = 30 \text{ МПа}$
- $\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{N_{3-3}}{F} = \frac{400}{10} = 40 \text{ МПа}$
- $\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{N_{5-5}}{F} = \frac{-200}{10} = -20 \text{ МПа}$

## Закон Гука при розтягу-стиску

Очевидно що  $\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}$

$$\Delta dz = \varepsilon \cdot dz$$

$$\Delta l = l_k - l_0$$

Враховуючи гіпотезу плоских перерізів, маємо:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon \cdot dz = \varepsilon \cdot l$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

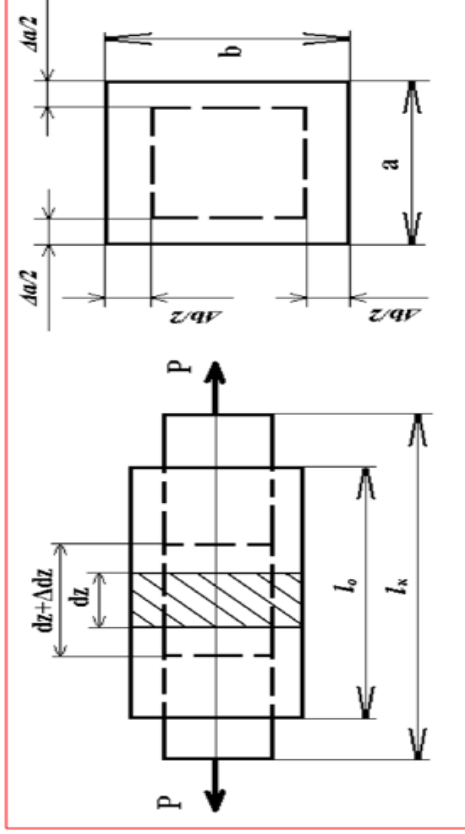
Відносне подовження стрижня (деформація)

$$\varepsilon'_a = -\frac{\Delta a}{a}$$

$$\varepsilon'_b = -\frac{\Delta b}{b}$$

Поперечна деформація

$$\varepsilon'_a = \varepsilon'_b = \varepsilon'$$



Експериментально встановлено, що відношення відносних поперечних деформацій до поздовжніх (в межах пружних деформацій) є величиною сталою і називається її коефіцієнтом Пуассона (коефіцієнт поперечної деформації).

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$



► Закон Гука

Відомо з курсу фізики, що:

$$\Delta l = k \cdot P$$

$$\frac{\Delta l \cdot l}{l \cdot F} = \frac{k \cdot P}{F}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$$

$$\frac{P}{F} = \sigma$$

$$\frac{\varepsilon \cdot l}{F} = k \cdot \sigma$$



$$\sigma = \frac{l}{k \cdot F} \cdot \varepsilon$$

$$\frac{l}{kF} = E$$

— модуль пружності першого роду (або модуль Юнга) при розтязі, E(Па;МПа)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

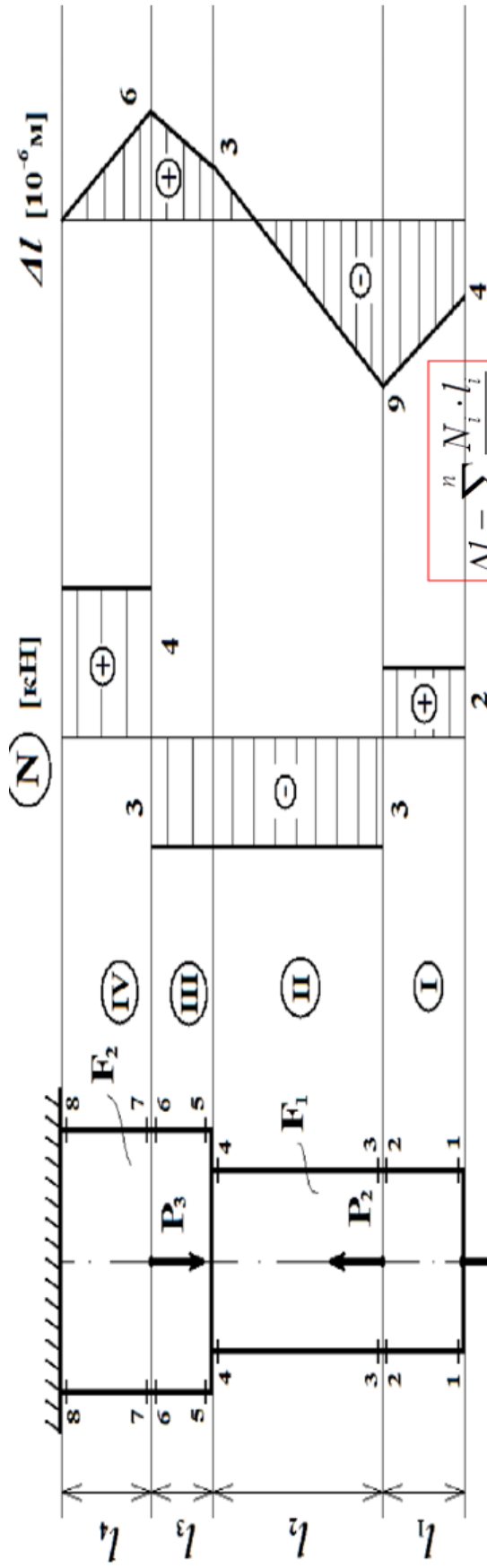
— закон Гука при розтязі-стиску

$$\frac{N}{F} = \frac{E \cdot \Delta l}{l}$$



$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$$

де добуток: E · F — жорсткість при розтязі-стиску



$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot F_i}$$

Дано:  $P_1 = 2 \text{ кН}; P_2 = 5 \text{ кН}; P_3 = 7 \text{ кН}$   
 $F_1 = 10 \text{ см}^2; F_2 = 20 \text{ см}^2;$   
 $l_1 = 0,5 \text{ см}; l_2 = 0,8 \text{ см}; l_3 = 0,4 \text{ см}; l_4 = 0,6 \text{ см}.$

Результат:  $N_{1-1} = N_{2-2} = 2 \text{ кН}$   
 $N_{3-3} = N_{4-4} = N_{5-5} = N_{6-6} = 2 - 5 = -3 \text{ кН};$   
 $N_{7-7} = N_{8-8} = 4 \text{ кН}$

$$\Delta L_I = \frac{N_{1-1} \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,001} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta L_{II} = \frac{N_{3-3} \cdot l_2}{E \cdot F_1} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,001} = -12 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

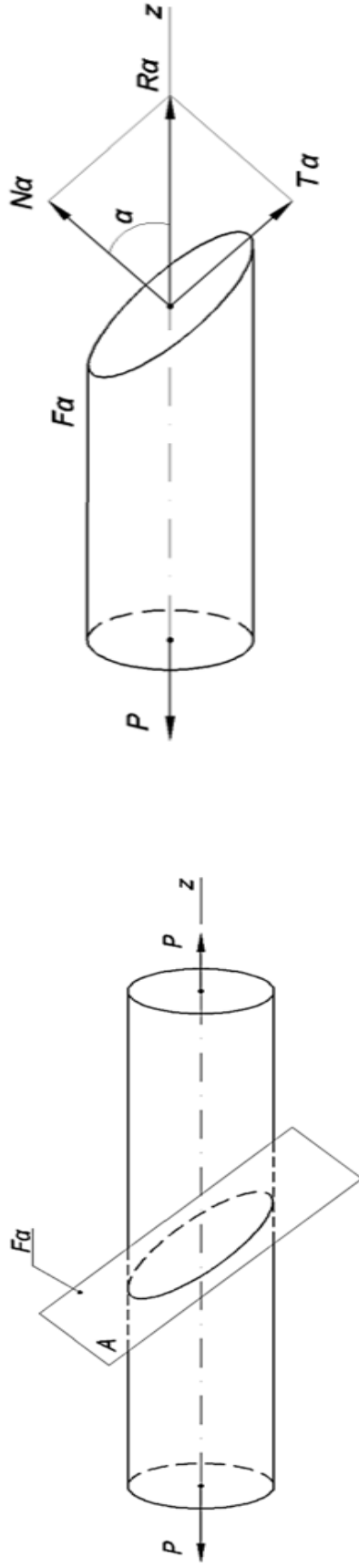
$$\Delta L_{III} = \frac{N_{5-5} \cdot l_3}{E \cdot F_2} = \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = -3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta L_{IV} = \frac{N_{7-7} \cdot l_4}{E \cdot F_2} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta L = \Delta L_I + \Delta L_{II} + \Delta L_{III} + \Delta L_{IV} = (5 - 12 - 3 + 6) \cdot 10^{-6} = -4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

## Напруження в перерізах, нахилених до осі стрижня

- Розітнемо стрижень площиною  $A$ , нахиленою до поперечного перерізу під кутом і розглянемо рівновагу лівої частини стрижня, знайшовши напруження в нахиленому перерізі.



$$F_\alpha = \frac{F_0}{\cos \alpha} \quad R_\alpha = P$$

$$\left. \begin{aligned} N_\alpha &= R_\alpha \cos \alpha = P \cos \alpha \\ T_\alpha &= R_\alpha \sin \alpha = P \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha}{F_\alpha} = \frac{P \cos \alpha}{F_0 / \cos \alpha} = \sigma_0 \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{T_\alpha}{F_\alpha} = \frac{P \sin \alpha}{F_0 / \cos \alpha} = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\alpha$$

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$$

$$\alpha = 0 \quad \sigma_{\alpha=0} = \sigma_0 = \sigma_{\max} \quad \tau_{\alpha=0} = 0$$

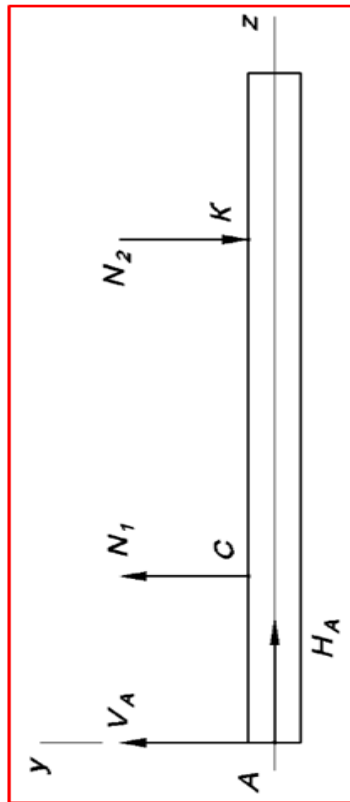
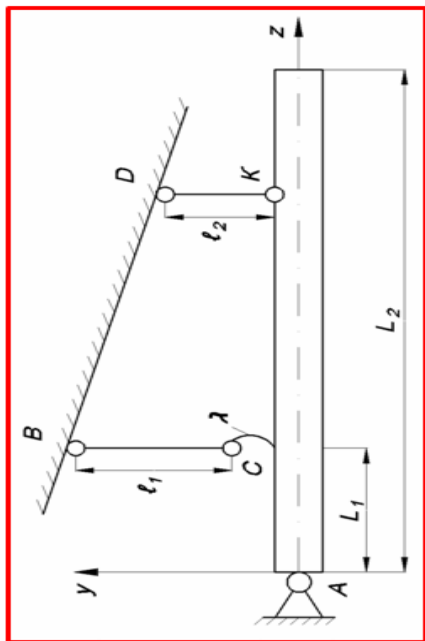
$$\alpha = 45^\circ \quad \sigma_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2} \quad \tau_{\alpha=45^\circ} = \frac{\sigma_0}{2} = \tau_{\max}$$

$$\alpha = 90^\circ \quad \sigma_{\alpha=90^\circ} = 0 \quad \tau_{\alpha=90^\circ} = 0$$

У поздовжніх перерізах відсутні нормальні й дотичні напруження;  $\sigma_{\max}$  виникають у поперечних перерізах, а  $\tau_{\max}$  – в перерізах, нахилених до поперечного перерізу під кутом  $45^\circ$ .

1.14. Слайди до мультимедійної презентації «Розрахунок при центральному розтягу-стиску»

Статично невизначені системи при розтягу-стиску. Приклад 1



Жорсткий брус необхідно шарнірно закріпити в точці А і підвісити за допомогою двох стержнів. Під час виготовлення стрижня ВС допущено технологічну неточність – його зроблено коротшим на величину  $\lambda$ . Під час монтажу система довелось витягнути цей стрижень, що викликало зусилля в іншому. Знайти зусилля у стрижнях ВС і DK.

**а) Статична сторона задачі.**

Виділяємо абсолютно жорсткий брус і докладаємо до нього зусилля реакцій відкиннутих зв'язків (план сил)

Рівняння статикі:

- 1)  $\sum Z=0; H_A=0;$
- 2)  $\sum y = 0; \sum y = V_A + N_1 - N_2 = 0;$
- 3)  $\sum M_0 = 0; N_1 \cdot L_1 + N_2 \cdot L_2 = 0.$

Система один раз статично невизначена (чотири невідомих зусилля і три рівняння статикі).

### б) Геометрична сторона задачі.

Із подібності трикутника маємо:

$$\frac{KK_1}{AK} = \frac{CC_1}{AC}, \text{ або } \frac{\Delta l_2}{L_2} = \frac{\lambda - \Delta l_1}{L_1}$$

Звідси маємо:

$$\Delta l_2 L_1 = (\lambda - \Delta l_1) L_2$$

**в) Фізична сторона задачі:** розпишемо деформації за допомогою закону Гука.

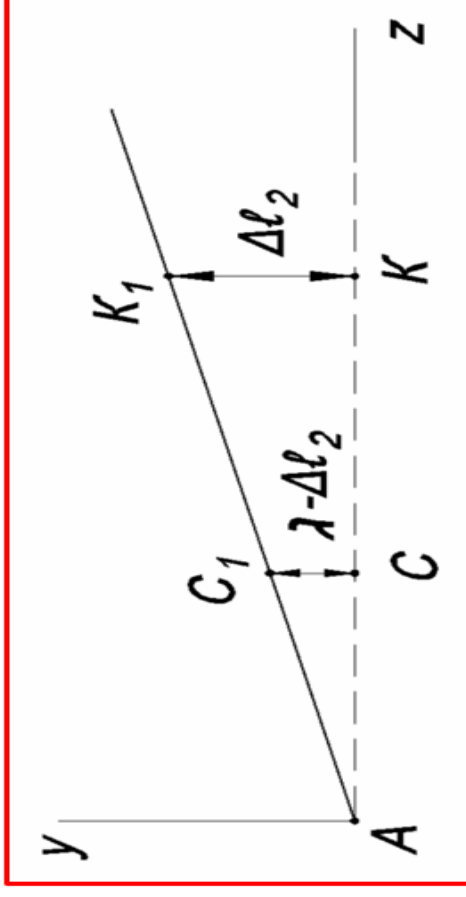
$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} \cdot L_1 = \left( \lambda - \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} \right) \cdot L_2$$

### г) Синтез різних сторін задачі:

Розв'язавши сумісно рівняння маємо:

$$N_1 = \lambda \cdot \frac{L_2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot E}{l_2 \cdot L_1^2 \cdot F_1 + l_1 \cdot L_2^2 \cdot F_2}$$

$$N_2 = \lambda \cdot \frac{L_1 \cdot L_2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot E}{l_2 \cdot F_1 \cdot L_1^2 + l_1 \cdot F_2 \cdot L_2^2}$$



**Висновок:** у статично невизначених системах наявність зусилля в одному із стержнів викликає зусилля у всіх інших, тобто відбувається перерозподіл зусиль на всі стержні системи.

**Приклад 2.** Визначити напруження від рівномірного нагрівання призматичного стрижня, затисненого обома кінцями

Система статично невизначена один раз.

Відкинемо праве затиснення.

Рівняння сумісності деформацій:

$$\Delta l = 0 \text{ або ж: } \Delta l = \Delta l_N$$

Розпишемо деформації:

а) від нагрівання стрижня:

$$\Delta l_t = l \cdot \alpha \cdot t^0,$$

де:  $\alpha$  — коефіцієнт лінійного розширення

$t^0$  — температура, на яку нагріто стрижень,

$$\Delta l_N = \frac{Nl}{EF} \text{ — закон Гука}$$

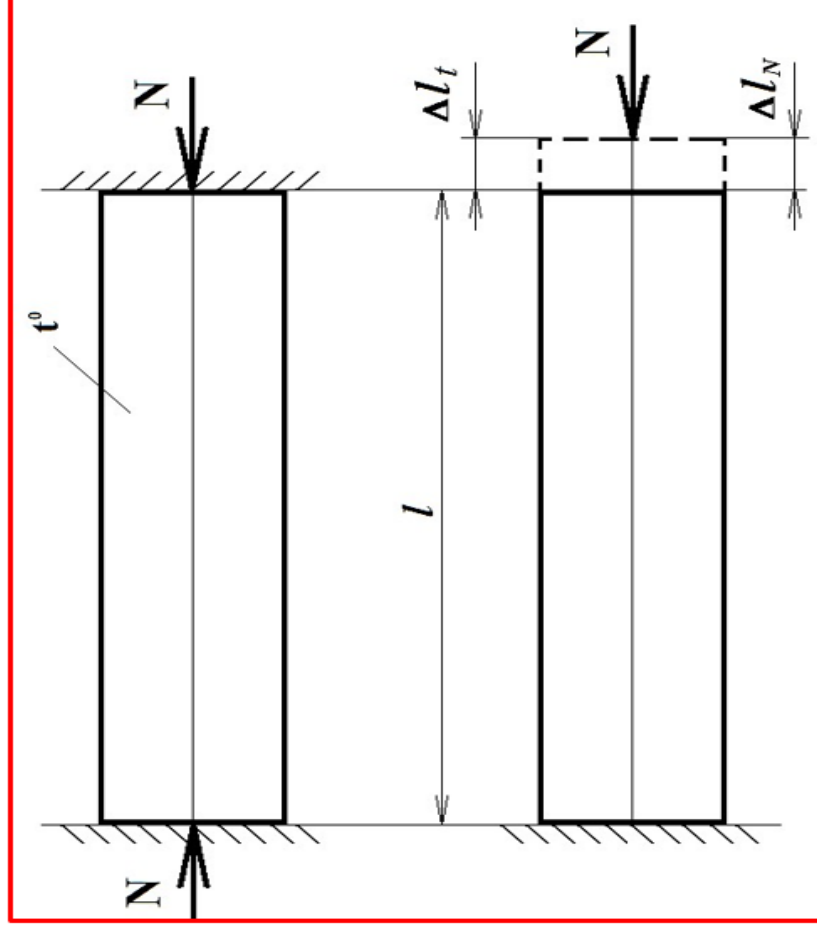
$$\text{Отримуємо: } \frac{Nl}{EF} = l \cdot \alpha \cdot t^0$$

Звідки:

$$N = E \cdot F \cdot \alpha \cdot t^0$$

Напруження визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} = E \cdot \alpha \cdot t^0.$$



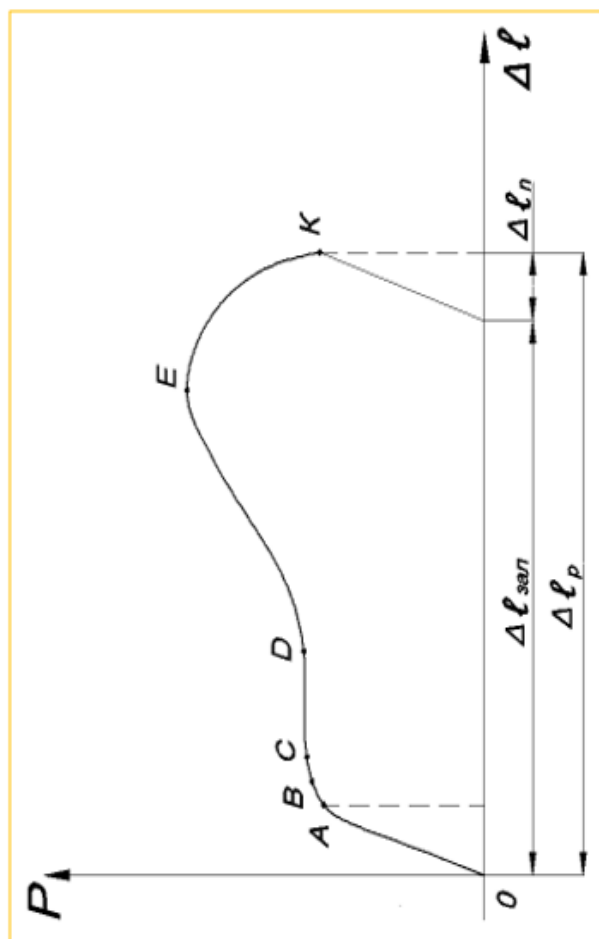
### 1.15. Слайди до мультимедійної презентації «Механічні властивості матеріалів»

#### Випробування матеріалів на розтяг. Діаграма розтягу. Характеристики міцності, пластичності, в'язкості

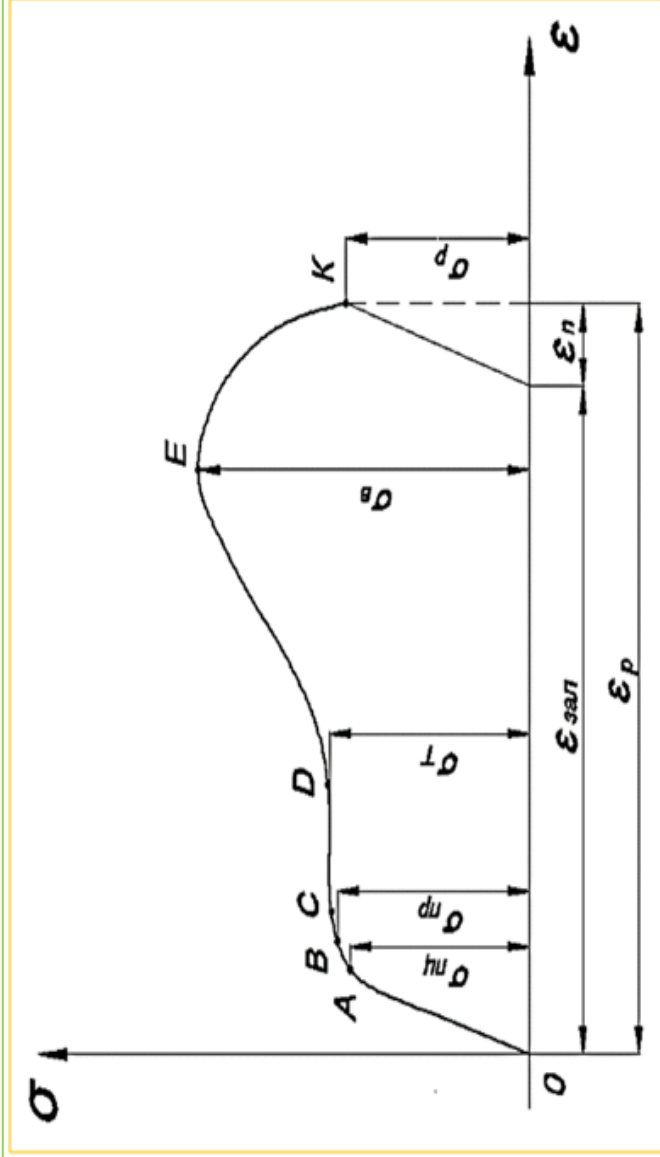
Найбільш розповсюдженим є випробування на розтяг, оскільки найбільш просто та повно отримують механічні властивості матеріалів. Під час випробування на розтяг приймають круглі та плоскі зразки.

Круглий зразок з параметрами:  $\varnothing = 20$  мм,  $l = 10 \cdot d$  називають **нормальними**. Решту – **пропорційними**. Зразки бувають довгими і короткими:  $l = 10 \cdot d$  – довгий зразок;  $l = 5 \cdot d$  – короткий зразок.

У результаті випробувань отримують графік залежності  $P=f(\Delta l)$ , який називають діаграмою розтягу; кожен матеріал має свою форму діаграми.



Діаграма випробування на розтяг м'якої сталі.



**Діаграма розтягання м'якої сталі у відносних координатах  $\sigma$ - $\epsilon$ .**

Відповідно до цього отримують такі механічні властивості матеріалу:

**а) характеристики міцності:**

$\sigma_{пл}$  – границя пропорційності (точка A), найбільш напружена точка, де справедливим є (виконується) закон Гука  $\sigma = E\epsilon$ .

$\sigma_{пр}$  – границя пружності (точка B), коли зразок відновлює свої розміри після зняття навантаження (відсутня залишкова деформація).

$\sigma_m$  – границя плинності – матеріал деформується (тече) при сталій величині сили P.

$\sigma_\epsilon$  – тимчасовий опір – це найбільше навантаження, яке витримує зразок.

$\sigma_p$  – напруження в момент руйнування.



**б) характеристики пластичності:**

• відносне подовження після руйнування:

$$\delta = \frac{\Delta l_{\text{зап.}}}{l_0} \cdot 100\%$$

• відносне звуження зразка в точці розриву:

$$\Psi = \frac{F_0 - F_{\text{ш.}}}{F_0} \cdot 100\%$$

де:  $l_{\text{зап.}}$  – залишкова абсолютна деформація;

$F_{\text{ш.}}$  – площа поперечного перерізу в шийці після руйнування.

**в) характеристики в'язкості:**

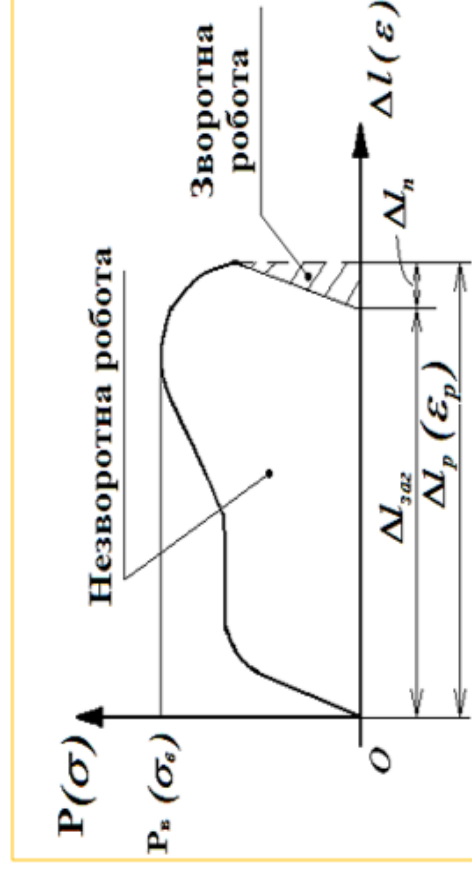
**В'язкість** – це здатність матеріалу поглинати механічну енергію в незворотному вигляді. Вона характеризується питомою роботою деформації.

Повна робота деформації:  $A = \eta \cdot P_{\epsilon} \cdot \Delta l_p$

$\eta$  – коефіцієнт повноти діаграми розтягу.

Питома робота – робота, що затрачена на руйнування одиниці об'єму зразка, визначається:

$$u = \frac{A}{V_0} = \eta \cdot \underbrace{P_{\epsilon}}_{\sigma_B} \cdot \underbrace{\frac{\Delta l_p}{F_0}}_{\epsilon_p} \cdot \underbrace{l_0}_{\epsilon_p}$$



**Графічне відображення роботи**

### Дійсна діаграма розтягу

Розглянута діаграма  $\sigma$ – $\varepsilon$  є умовною. Умовність полягає в тому, що не враховується зміна площі поперечного перерізу  $F_0$  і початкової довжини  $l_0$  та рахуємо їх однаковими на всіх етапах навантаження, що не відповідає дійсності. Для дійсної діаграми справджується ряд залежностей:

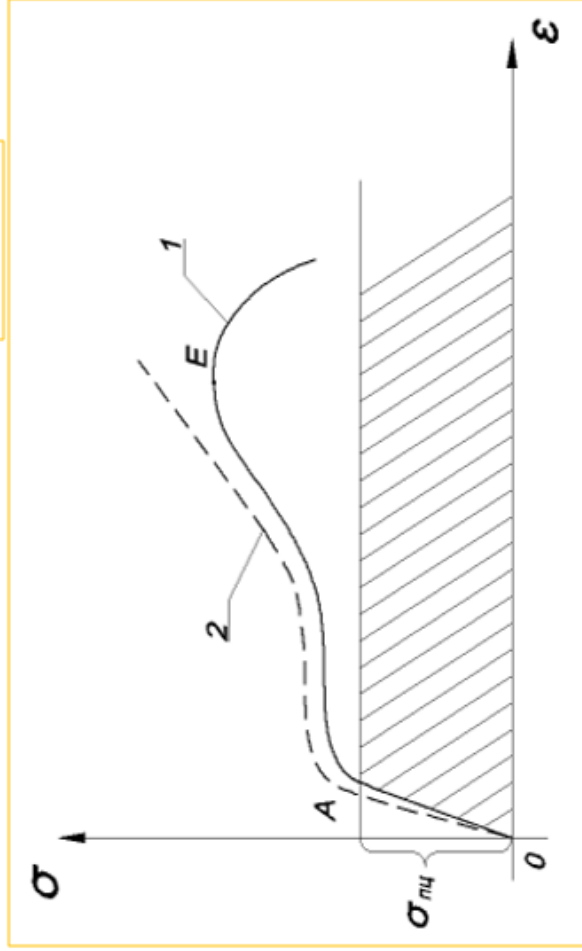
$$\sigma_D = \frac{P}{F_D}$$

$$\Psi = \frac{F_0 - F_D}{F_0} = 1 - \frac{F_D}{F_0}$$

Без виведення отримаємо:

$$F_D = F_0(1 - \Psi)$$

$$\varepsilon_D = \frac{\Psi}{1 - \Psi}$$



Наклавши дійсну діаграму на умовну побачимо, що на початковій стадії (особливо до точки E) розбіжність між ними невелика, вона починається з моменту утворення шийки.

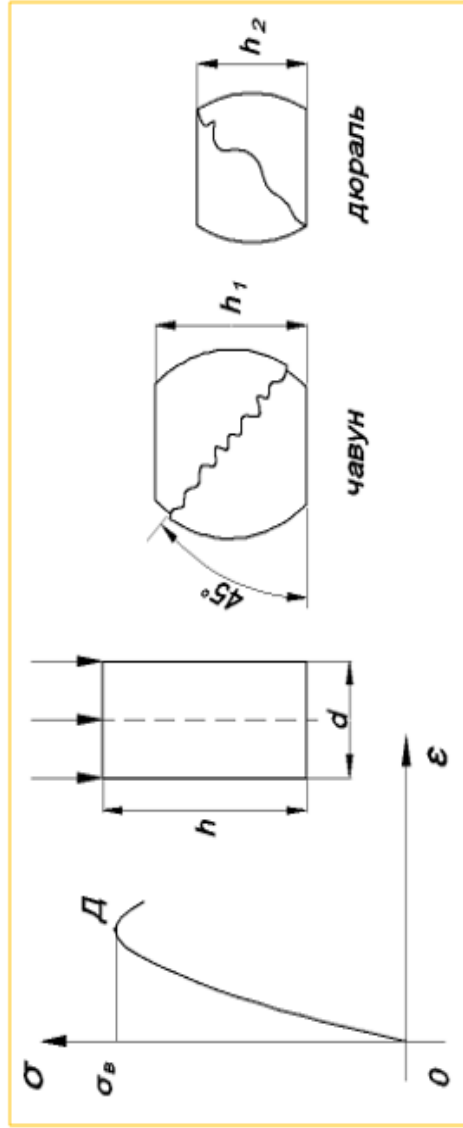
Оскільки нас цікавить напруження в межах пропорційності (заштрихована зона), то дійсна діаграма має чисто теоретичний інтерес і її використовують лише в спеціальних розрахунках.

**Дійсна (2) та умовна (1) діаграми розтягу м'якої сталі.**

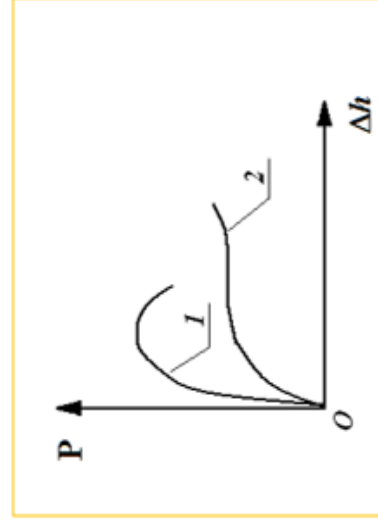
## Випробування матеріалів на стиск

Пластичні матеріали – це такі, у яких діаграма розтягу подібна до діаграми розтягу м'якої сталі. Крихкі – діаграма подібна діаграмі чавуну. Для крихких матеріалів міцність на стискання значно перевищує міцність на розтяг. Чавун – в 10 – 15 разів, бетон – в 15 – 20 разів.

Під час випробувань на стиск для уникнення проблем стійкості випробовують короткі зразки циліндричної або кубічної форми  $h = (2 \div 3)d$ . Для випробування деяких матеріалів використовують циліндричний зразок. У результаті випробування він набуває форми бочки і руйнується по площині під кутом  $45^\circ$  до осі стрижня.



Діаграма «Стиск і характер руйнування зразків крихких матеріалів».



Діаграма стиску дерева:  
1 – вздовж волокон; 2 – впоперек волокон.

## Фактори, які впливають на механічні характеристики матеріалів

**Вплив температури** – з підвищенням температури характеристики міцності зменшуються, а пластичності збільшуються.

**Радіаційне опромінення** – загальна характеристика: характеристики міцності збільшуються; пластичність збільшується.

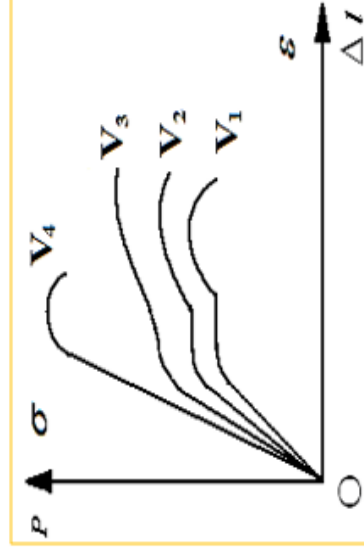
### Термічна обробка:

а) **відпалювання** – виконується для зняття початкових напружень, викликаних холодним обробітком деталей. Відпалювання знижує міцність і збільшує пластичність.

б) **гартування** – підвищує міцність і сильно зменшує пластичність (з'являється крихкість).

в) **відпуск** – виконується для зниження крихкості й збільшення пластичності із зниженням міцності.

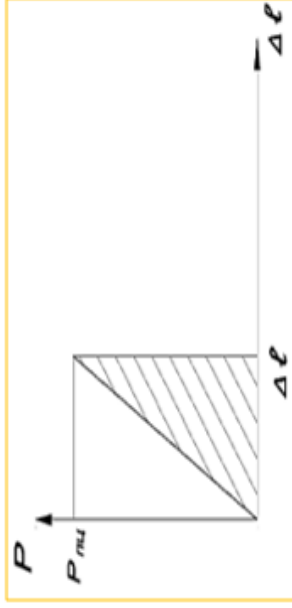
г) **вплив швидкості навантаження** – із збільшення швидкості навантаження деталі характеристики міцності збільшуються, а пластичності зменшуються.



Вплив швидкості навантаження на вид діаграми розтягу  $V_4 > V_3 > V_2 > V_1$ .

## Потенціальна енергія при розтязії-стиску

У результаті розтягу матеріалу сила виконує роботу на викликаних деформаціях. При цьому в середині зразка накопичується потенційна енергія (енергія деформацій), за рахунок якої зразок відновлює розміри та форму після зняття навантаження.



У зоні пружних деформацій робота дорівнює потенціальній енергії і визначається:

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta l$$

**Пружна частина діаграми розтягу-стиску.**

Знаючи, що:  $P = N$ ,  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F}$ , можемо отримати:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2 E \cdot F}$$

Питома потенціальна енергія – це енергія, затрачена на деформацію одиниці об'єму зразка:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P \cdot \Delta l}{F_0 \cdot l_0} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}$$

Враховуючи,  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$

отримаємо:  $u = \frac{\sigma^2}{2E}$ .

## Розрахунок при центральному розтягу-стиску

Актуальною є проблема економії матеріалів. Існують три методи розрахунків: а) за руйнуючими навантаженнями; б) за допустимими напруженнями; в) за граничними станами (спецкурс).

### а) Метод руйнуючих навантажень

Умова міцності цього методу полягає в тому, що величина максимального навантаження на стрижень  $P_{max}$  не повинна перевищувати допустиме значення  $[P]$ , ( $n > 1$ ).

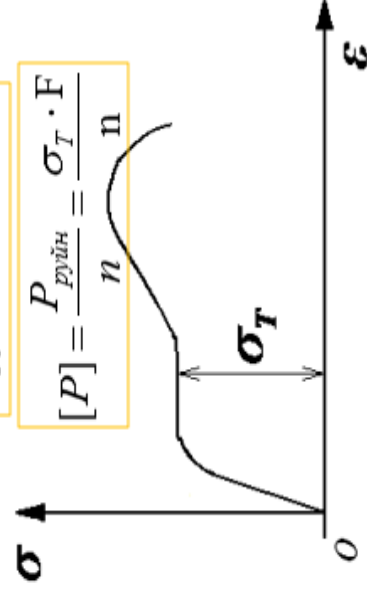
$$P_{max} \leq [P] = \frac{P_{руйін}}{n}$$

Величина допустимого навантаження на руйнування  $[P]$  приймається залежно від виду матеріалу:

а) для пластичних матеріалів

$$P_{руйін} = \sigma_T \cdot F$$

$$[P] = \frac{P_{руйін}}{n} = \frac{\sigma_T \cdot F}{n}$$

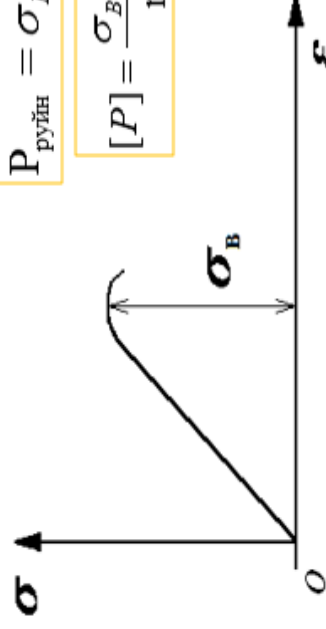


Діаграма розтягу-стиску пластичних матеріалів.

б) для крихких матеріалів

$$P_{руйін} = \sigma_B \cdot F$$

$$[P] = \frac{\sigma_B \cdot F}{n}$$



Діаграма розтягу-стиску крихких матеріалів.

**Недолік:** прийняття однакового  $n$  для пластичних та крихких матеріалів призводить до перевитрат для пластичних матеріалів



## б) Метод допустимих напружень

Умова міцності цього методу полягає в тому, що величина максимальних напружень  $\sigma_{max}$  в небезпечному перерізі не повинна перевищувати допустиме значення напруження  $[\sigma]$  поділеного на  $n$  – коефіцієнт запасу міцності.

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F_{netto}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{необзп}}{n}$$

Можна розв'язати дві інженерні задачі:

1. Визначити необхідну площу поперечного перерізу стрижня при заданому зусиллі та матеріалі:

$$F_{необ} \geq \frac{N}{[\sigma]}$$

2. Визначити допустиме навантаження на стрижень при заданих розмірах і матеріалі.  $N_{дон} \leq [\sigma] \cdot F$

Величина  $[\sigma]$  залежить від матеріалу:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\epsilon}}{n_1}$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_2}$$

– Для крихких матеріалів

– Для пластичних матеріалів

Очевидно, що  $n_1 > n_2$ .

**Коефіцієнт запасу міцності  $n$  вводять з таких причин:**

- а) різниця в дослідних даних  $\sigma_T$  і  $\sigma_{\epsilon}$ ;
- б) неможливість точно визначити навантаження;
- в) недосконалість методик розрахунку;
- г) неточність виготовлення деталей.

**Величина  $n$  залежить:**

- а) від якості та однорідності матеріалу;
- б) від важливості конструкції (умови та термін експлуатації);
- в) рівень розвитку техніки.

### За граничними станами.

Розрахунки проводять за двома групами граничних станів:

- 1) за тримальною здатністю (міцністю);
  - 2) за придатністю до нормальної експлуатації (жорсткість, наявність тріщин).
- При цьому справджується рівність:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq \frac{R}{n}$$

розрахунковий опір матеріалу;

$$R = \frac{R^H}{n}$$

$R^H$  – нормативний опір (приводиться в нормах);

$n$  – коефіцієнт запасу міцності;

$N$  – розрахункове навантаження.

$$N = N_1^H \cdot K_1^H + N_2^H \cdot K_2^H + \dots + N_n^H \cdot K_n^H$$

де:  $N_i^H$  – нормативне навантаження;

$K_i^H$  – коефіцієнт перевантаження.

***1.16. Відеолекція «Центральний розтяг та стиск стрижнів. Приклади розрахунку»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Центральний розтяг та стиск стрижнів. Приклади розрахунку»*

***1.17. Відеолекція «Механічні властивості матеріалів»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Механічні властивості матеріалів»*

## **Модуль «Напружений та деформований стан в точці»**

### ***1.18. Мультимедійна презентація «Поняття напруженого стану в точці»***

1.18.1. Напружений стан в точці.

1.18.2. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані.

1.18.3. Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані.

1.18.4. Головні напруження та головні площини.

1.18.5. Екстремальні дотичні напруження.

### ***1.19. Мультимедійна презентація «Деформований стан у точці»***

1.19.1. Головні деформації.

1.19.2. Аналогія між залежностями напруженого та деформованого стану в точці.

1.19.3. Узагальнений закон Гука при об'ємному та плоскому напружених станах.

1.19.4. Зміна об'єму матеріалу під час деформації.

1.19.5. Питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані.

### ***1.20. Мультимедійна презентація «Теорії міцності»***

1.20.1. Загальні поняття про теорії міцності.

1.20.2. I теорія міцності.

1.20.3. II теорія міцності.

1.20.4. III теорія міцності.

1.20.5. IV енергетична теорія міцності.

1.20.6. Теорія міцності граничних напружених станів.

1.20.7. Поняття про нові теорії міцності.

### ***1.21. Відеолекція «Напружений стан в точці»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Напружений стан в точці»*

### ***1.22. Відеолекція «Деформований стан в точці»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Деформований стан в точці»*

### ***1.23. Відеолекція «Теорії міцності»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Теорії міцності»*

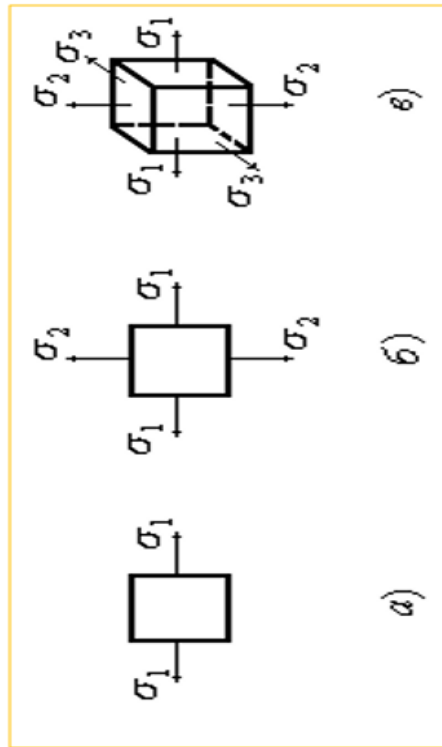


## 1.24. Слайди до мультимедійної презентації «Напружений стан в точці»

### Напружений стан в точці

Напруженим станом в точці називають сукупність  $\sigma$  та  $\tau$  у всіх площинах, що проходять через задану точку.

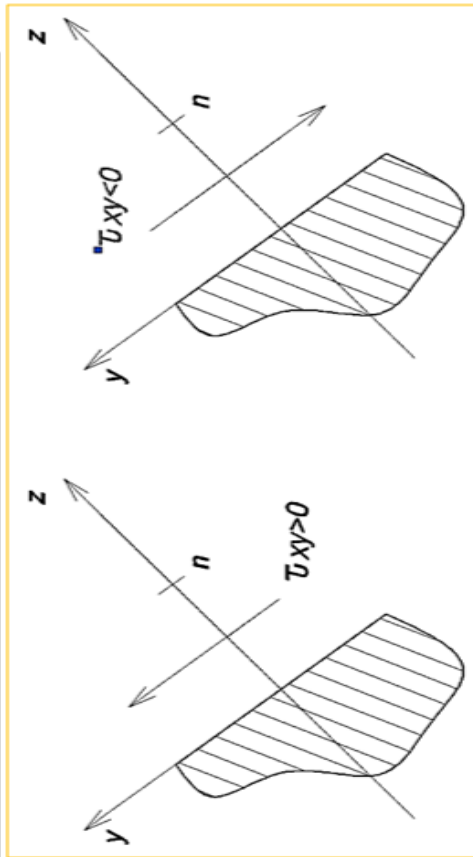
Існує таке положення паралелепіпеда, коли грані вільні від  $\tau$ , а діють тільки  $\sigma$ . При цьому існують три види напруженого стану лінійний, плоский, об'ємний.



Напружені стани в точці:

а – лінійний одноосьовий; б – плоский двоосьовий;

в – об'ємний трьохосьовий.



Правило знаків:

$\sigma > 0$ , коли викликає розтяг;

Знак  $\tau$  визначається за правилом зовнішньої нормалі, якщо нормаль до площини збігається з додатним напрямком осі, то  $\tau > 0$  якщо його напрям відповідає додатному напрямку відповідної осі.

## Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані

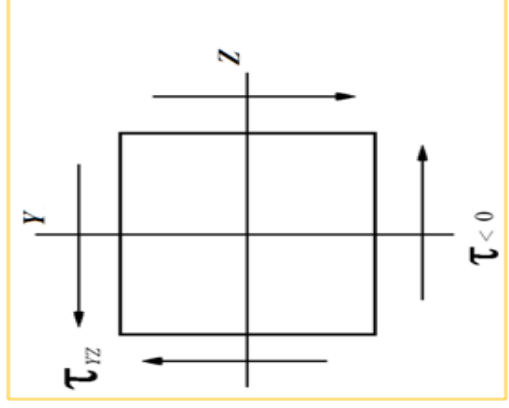
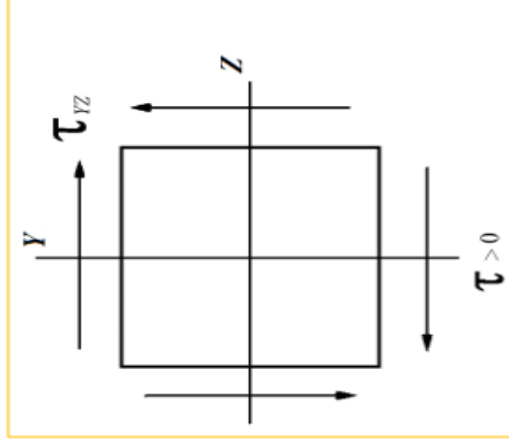
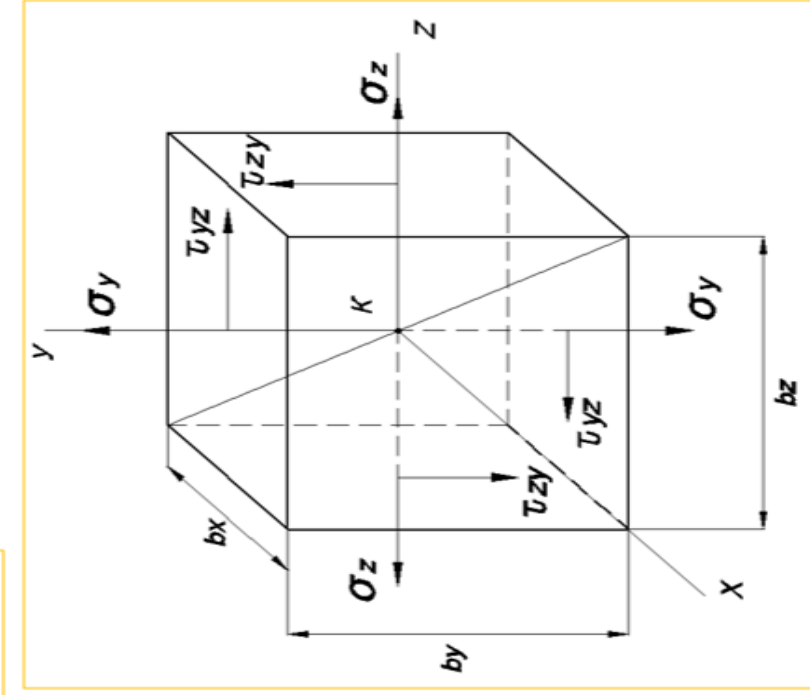
Оскільки об'єкт знаходиться в рівновазі, то маємо суму моментів відносно точки К, яка дорівнює нулю.

$$\sum M_K = 0$$

$$(\tau_{zy} \cdot dy \cdot 1) dz - (\tau_{yz} \cdot dz \cdot 1) dy = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

- закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані.

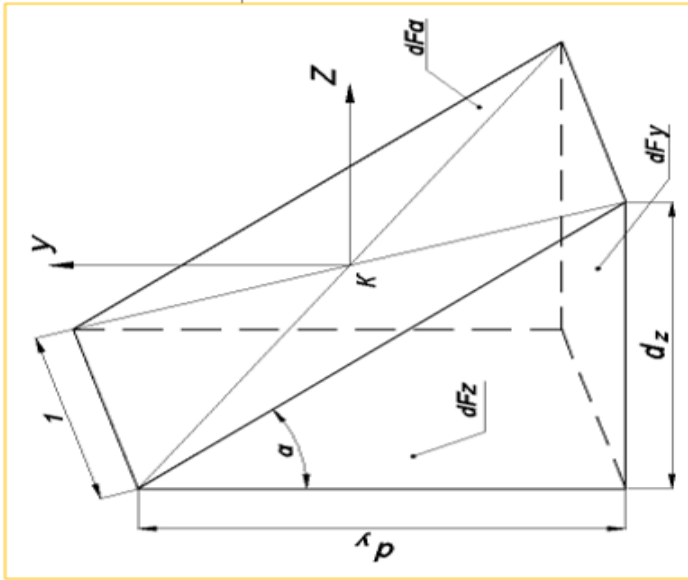


Тобто, у двох взаємно перпендикулярних площадках дотичні напруження рівні за величиною і напрямлені так, що прагнуть обертати площини у різні сторони.

## Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані

Положення нахиленої площини визначається кутом  $\alpha$  – це кут між нормаллю до площини і додатним напрямком осі  $z$ .

**Правило знаків:**  $\alpha > 0$ , якщо відповідає коротшому шляху повертання вісі  $z$  до  $y$  (проти годинникової стрілки).



$$\begin{cases} dF_z = dF_\alpha \cdot \cos \alpha \\ dF_y = dF_\alpha \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

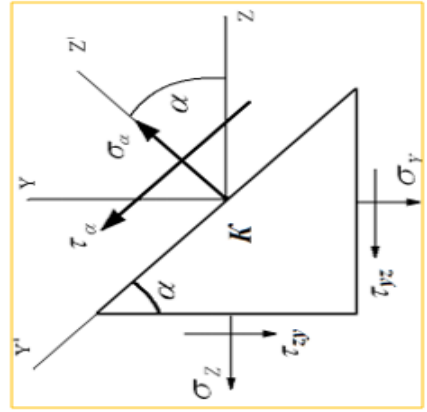
Для знаходження  $\sigma_\alpha$  та  $\tau_\alpha$  спроєкуємо всі зусилля на осі  $z'$  та  $y'$ .

$$\sum Z' = 0 \quad \sigma_\alpha - \sigma_z \cos \alpha - \tau_{yz} \cos \alpha - \tau_{zy} \sin \alpha = 0$$

$$\sum y' = 0 \quad \tau_\alpha - \tau_y \cos \alpha - \tau_{yz} \sin \alpha - \tau_{zy} \cos \alpha = 0$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha$$



## Напруження в нахилених площинах при плоскому напруженому стані

Враховуючи, що:

$$\cos^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

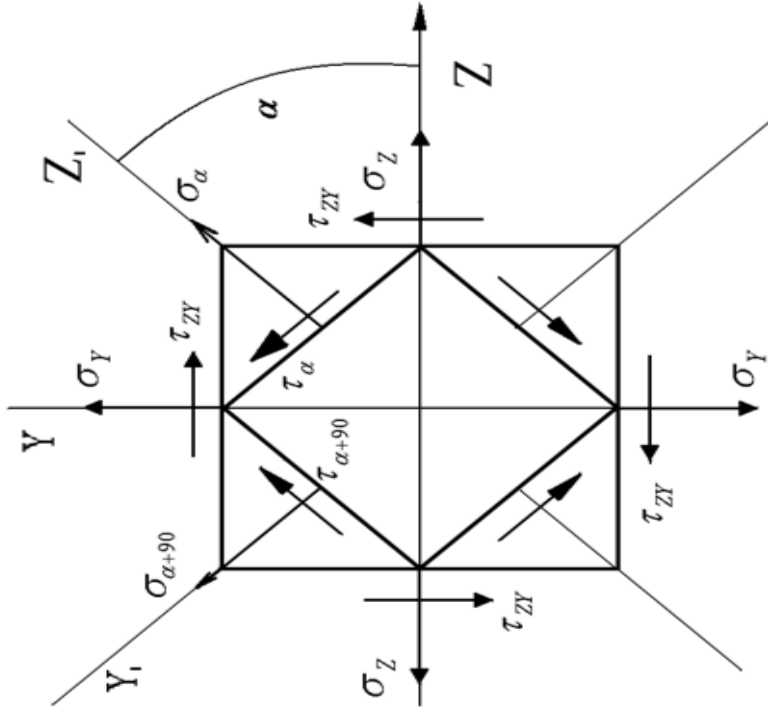
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha$$

Підставивши замість  $\alpha \rightarrow \alpha + 90^\circ$  отримаємо:

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{zy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_z + \sigma_y = \text{const}$$

Властивість інваріантності нормальних напружень при плоскому напруженому стані. Тобто сума нормальних напружень у двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через довільну точку є величиною постійною.



Зображення інваріантності напружень.

## Головні напруження та головні площини

З'ясовано, що в площинах, у яких діють екстремальні нормальні напруження ( $\sigma_{\max}$  або  $\sigma_{\min}$ ), дотичні напруження дорівнюють нулю ( $\tau = 0$ ). Площини, де діють екстремальні напруження  $\sigma$ ,  $\tau = 0$  називають **головними площинами**, а нормальні напруження, що виникають у них –

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_z - \sigma_y}.$$

**головними напруженнями.**

Для визначення положення цих площин отримаємо:

$$\sigma_{\max/\min} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Отримаємо вираз для визначення головних напружень:

$$\operatorname{tg} \theta_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y}$$

Формула для визначення кута повороту головних площин:

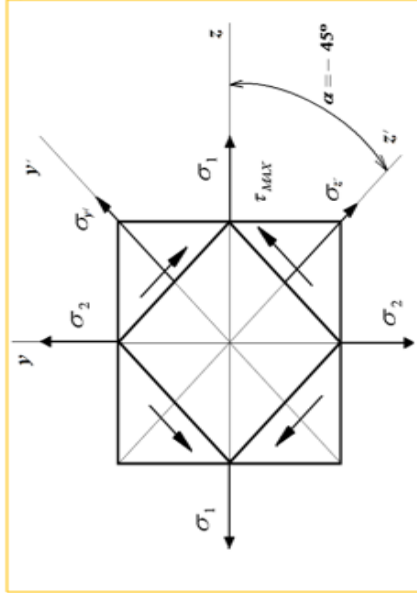
## Екстремальні дотичні напруження

Один і той же напружений стан може бути заданий різними вихідними даними – різними площинами та напруженнями в них. Оскільки на головних площинах відсутні дотичні напруження  $\tau$ , то вони найбільш просто визначають напружений стан у точці.

$$\sigma_1 > \sigma_2$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

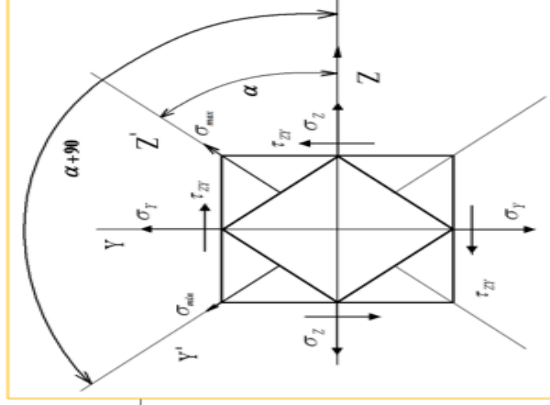
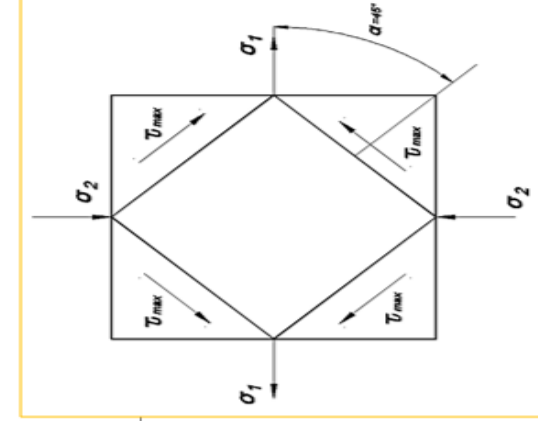
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$



$$\tau_{\max} \text{ буде при } \alpha = -45^\circ \quad \tau_{(\alpha=-45^\circ)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\alpha=-45^\circ} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} = \text{const.}$$



В єдиному випадку, коли  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$  у площинах з екстремальними дотичними напруженнями нормальні напруження відсутні. Це єдиний випадок напруженого стану, який називається **ЧИСТИМ ЗСУВОМ**.

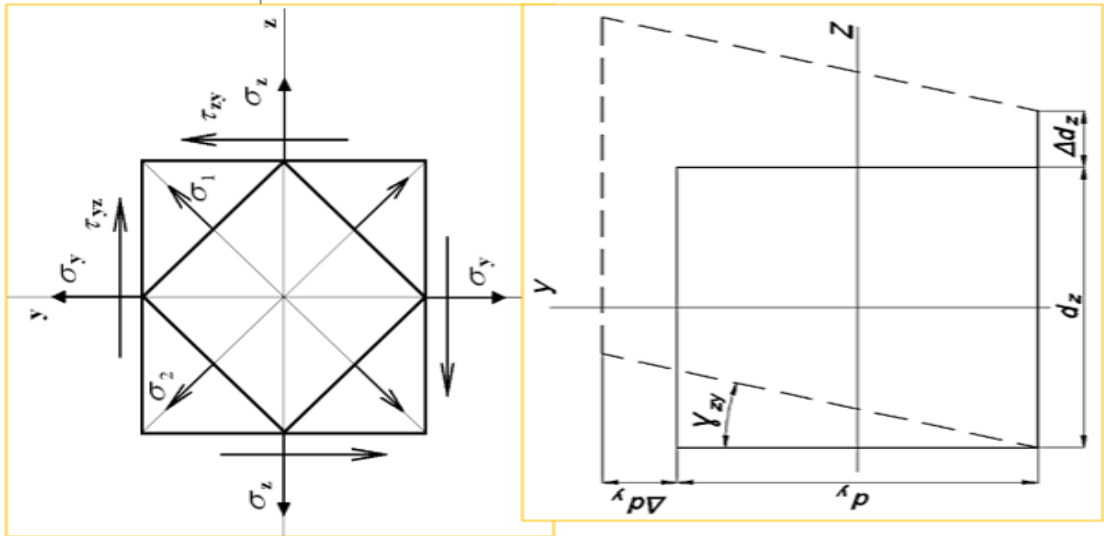
В площинах з екстремальними  $\tau$ ,  $\sigma$  не дорівнюють нулю.



1.25. Слайди до мультимедійної презентації  
 «Деформований стан в точці»

**Деформований стан в точці. Головні деформації**

У загальному випадку плоского напруженого стану виникають  $\sigma$  і  $\tau$ . При цьому напруження  $\sigma$  викликає лінійну деформацію  $\Delta dz$  і  $\Delta dy$ , а напруження  $\tau$  – кутову деформацію  $\gamma_{zy}$  (кут зсуву).



Відносні деформації визначаються:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{d_z},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{d_y}$$

При повороті координатних осей на деякий кут змінюватиметься величина  $\sigma$  і  $\tau$ , а також відповідно  $\varepsilon$  та  $\gamma$ .

Таким чином, деформаційним станом у точці називають сукупність лінійних і кутових деформацій при всіх можливих положеннях координатних осей Z та Y.

З'ясовано, що у головних площинах відсутні дотичні напруження, а значить у таких площинах відбуватимуться тільки лінійна деформація ( $\gamma = 0$ ). При цьому лінійні деформації набувають екстремальних значень, такі деформації називають головними лінійними деформаціями і позначають  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$ . При цьому прийнято, що  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ .

## Аналогія між напруженням та деформованим станом в точці

Відтворимо напружений та деформований стан у точці через головні площини (головні напруження і головні деформації):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\alpha} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \cos \alpha \\ \gamma_{\alpha} &= -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, що між виразами маємо математичну аналогію у зміні напружень і деформацій у точці. Вираз для визначення головних деформацій через довільні деформації має вигляд:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_Z + \varepsilon_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\varepsilon_Z - \varepsilon_Y)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\gamma_{ZY}}{2}\right)^2}$$

Якщо скласти ліву і праву частину виразу, то отримаємо властивість інваріантних лінійних деформацій:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_Z + \varepsilon_Y = \text{const}$$

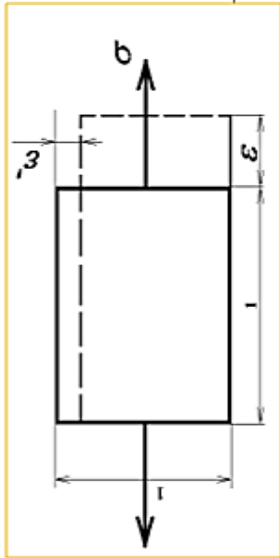
Відповідно до цього, тензор деформації  $T_D$  для плоского напруженого стану має вигляд:

$$T_D = \begin{vmatrix} \varepsilon_Z; & \frac{1}{2} \cdot \gamma_{ZY} \\ \frac{1}{2} \cdot \gamma_{YZ}; & \varepsilon_Y \end{vmatrix}$$

А тензор напружень:

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_Z; & \tau_{ZY} \\ \tau_{YZ}; & \sigma_Y \end{vmatrix}$$

# Узагальнений закон Гука при об'ємному та плоскому напружених станах



$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

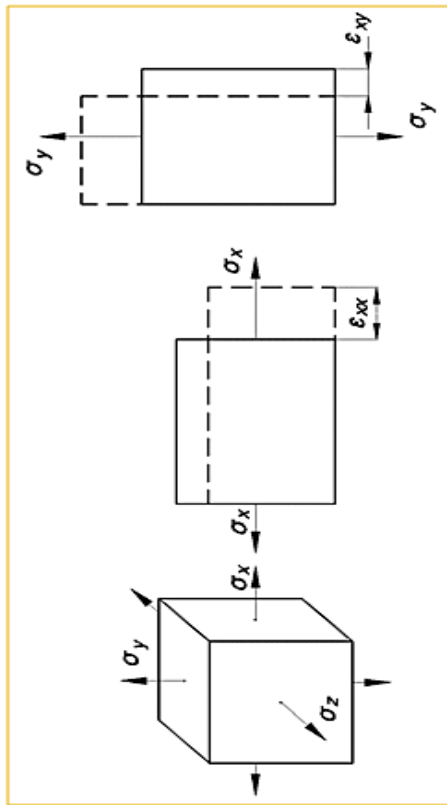
- Закон Гука при лінійному напруженому стані.

Відносна поперечна деформація:

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}$$

$$\left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = \mu \text{ - коефіцієнт Пуансона}$$

Деформації при лінійному напруженому стані



$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xz}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\}$$

узагальнений закон Гука при об'ємному напруженому стані.

Деформації при об'ємному напруженому стані

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_z) \\ \sigma_z &= \frac{E}{1-\mu^2} \cdot (\varepsilon_z + \mu \cdot \varepsilon_y) \end{aligned} \right\}$$

$$\varepsilon_y + \mu \cdot \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu^2 \cdot \sigma_y]$$

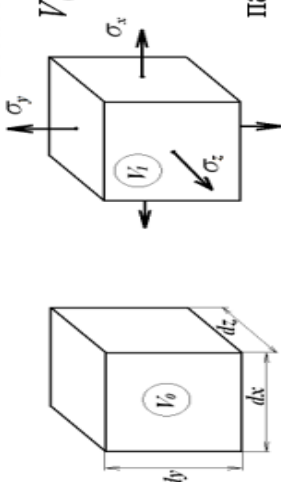
Коли  $\sigma_x = 0$  : лінійна деформація у цьому напрямку не дорівнює

нулю, а визначається:

$$\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E} \cdot [\sigma_y + \sigma_z]$$

Інколи виникає необхідність виразити напруження через деформації.

## Зміна об'єму матеріалу під час деформації



$V_0$  – початковий об'єм;

$V_1$  – об'єм при прикладанні зусилля (після деформації).

Нехай до деформації розміри сторін елементарного паралелепіпеда дорівнювали:  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , а після прикладання

навантажень –  $dx + \Delta dx$ ;  $dy + \Delta dy$ ;  $dz + \Delta dz$ .

Зміна об'єму при об'ємному напруженому стані.

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_1 - V_0 = \\ &= (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz) - \\ &- dx \cdot dy \cdot dz = \\ &= dx \cdot dy \cdot dz \left( 1 + \frac{\Delta dx}{dx} \right) \left( 1 + \frac{\Delta dy}{dy} \right) \left( 1 + \frac{\Delta dz}{dz} \right) - \\ &- dx \cdot dy \cdot dz. \end{aligned}$$

$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$V_1 = (dx + \Delta dx) \cdot (dy + \Delta dy) \cdot (dz + \Delta dz)$$

$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\Delta V = V_0 \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z + \varepsilon_x \cdot \varepsilon_y \cdot \varepsilon_z$$

$$\Delta V = V_0 \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

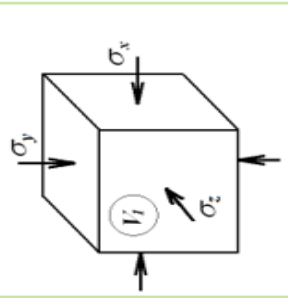
Відносна зміна об'єму матеріалу дорівнює:

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Використовуючи узагальнений закон Гука при об'ємному напруженому стані, виразимо відносну зміну об'єму матеріалу  $\theta$  через напруження:

$$\theta = \frac{(1 - 2 \cdot \mu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$0 \leq \mu \leq 0,5$$

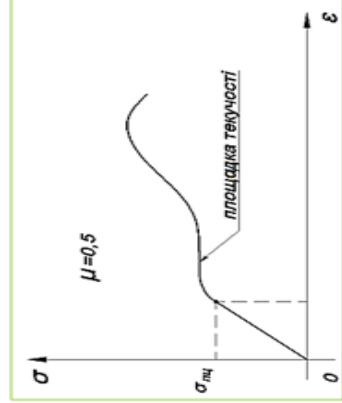


$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$$

$$\theta = 3 \cdot (1 - 2 \cdot \mu) \cdot \frac{\sigma}{E}$$

Якщо  $\mu < 0,5$ , то  $\theta > 0$ , це значить, що відбуватиметься збільшення об'єму матеріалу, що суперечить істині.

При  $\mu = 0,5$  маємо  $\theta = 0$ . Це означає, що в момент текучості матеріалу змінюється тільки форма зразка, а об'єм залишається незмінним.



Всебічний гідростатичний стиск

Діаграма розтягу-стиску пластичного матеріалу

## Питома потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані

Очевидно, що при об'ємному напруженому стані деформації відбуваються в трьох напрямках, а в одиниці об'єму матеріалу накопичується питома потенціальна енергія – питома енергія деформації. За рахунок цієї енергії матеріал відновлює свою форму, розміри та об'єм після зняття напружень.

Питома потенціальна енергія при центральному розтягу-стиску визначається:

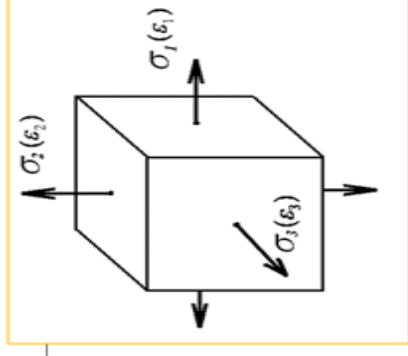
$$U = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon$$

При об'ємному напруженому стані:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \cdot \sigma_3 \cdot \varepsilon_3$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, виразивши деформації через напруження, формула набуде вигляді:

$$U = \frac{1}{2E} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3) \right]$$

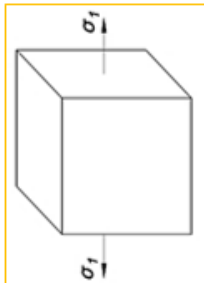


## 1.26. Слайди до мультимедійної презентації «Теорії міцності»

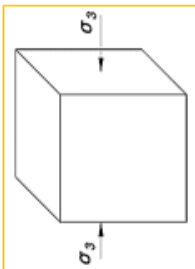
### Загальні поняття про теорії міцності

Основним питанням механіки матеріалів і конструкцій є оцінка міцності матеріалу за заданим напружено-деформованим станом, тобто за головними напруженнями (максимальними напруженнями  $\sigma_{\max}$  та  $\tau_{\max}$ ). Для лінійного (одноосного) напруженого стану, яким є центральний розтяг або стиск, ця задача розв'язується досить просто й умови міцності такі:

При більш складних видах напруженого стану, коли два або три головні напруження не дорівнюють нулю, як підтвердили досліді, небезпечний стан (руйнування) залежить не тільки від  $\sigma_{\max}$  і  $\sigma_{\min}$ , але й від співвідношення між ними, яких може бути безліч.



$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma_+] = \frac{\sigma_{\text{неб}}}{n}$$



$$\sigma_{\min} = \sigma_3 \leq [\sigma_-] = \frac{\sigma_{\text{неб}}}{n}$$

де:  $\sigma_{\text{неб}}$  – небезпечне напруження, що залежить від виду матеріалу;  
 $n$  – коефіцієнт запасу міцності.

Роблять так: вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактору ( $\sigma$ ,  $\tau$ ,  $\epsilon$ ,  $u$ ) і вважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина цього фактору досягне граничного значення, яке встановлюється під час розтягу або стиску. Таким чином, ми встановлюємо еквівалентність складного напруженого стану і лінійного (одноосового). На сьогодні існує декілька таких гіпотез, які отримали назву «Теорії міцності».



## I теорія міцності

I теорія міцності (теорія найбільших нормальних напружень), запропонована Галілео Галілеєм у XVII ст.

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан матеріалу наступить тоді, коли величина максимальних нормальних напружень

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{неб.}}}{n}$$

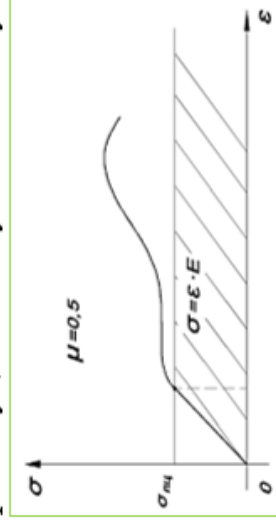
$\sigma_{\max}$  досягне граничного стану  $\sigma_{\text{неб.}}$ , яке встановлюється при простому розтягу, і умова міцності має вигляд:

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія не може застосовуватись (дає великі похибки) практично для всіх матеріалів. Вона дає більш-менш правдиві дані під час розтягу дуже крихких матеріалів (скло, граніт, цегла тощо).

## II теорія міцності

II теорія міцності (теорія найбільшої лінійної деформації), запропонована Едме Маріоттом в 1682 році.

Згідно з якою вважають, що міцність матеріалу буде порушена, коли величина максимальної лінійної деформації  $\varepsilon_{\max}$  досягне граничного значення  $\varepsilon_{\text{неб.}}$ , яке встановлюється під час центрального розтягу (лінійному одноосному стані) і умова міцності має вигляд:



**Недолік:** можливо застосовувати лише в зоні пропорційності і для крихких матеріалів.

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon_{\text{неб.}}}{n}$$

при об'ємному напруженому стані:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

при лінійному напруженому стані:

$$[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E} \quad \varepsilon_{\text{неб.}} = \frac{\sigma_{\text{неб.}}}{E}$$

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

де:  $\mu$  – коефіцієнт поперечної деформації

$$\mu = \left| -\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|$$

### III теорія міцності

Згідно з цією теорією вважають, що небезпечний стан (руйнування) матеріалу відбудеться тоді, коли величина максимального дотичного напруження  $\tau_{\max}$  досягне граничного стану  $\tau_{\text{неб}}$ , який встановлюється при центральному розтягу і умова міцності має вигляд:

Дослідна перевірка підтвердила, що ця теорія спрацьовує для пластичних матеріалів, в яких механічні властивості однакові як на розтяг, так і на стиск. Недолік – вона не враховує середнього напруження  $\sigma_2$ .

### IV теорія міцності

IV енергетична теорія міцності (теорія формозміни). Вона запропонована Губером (Максиміліаном Титусом Губером) в 1904 році. Згідно з цією теорією припускають, що порушення міцності матеріалу відбудеться тоді, коли питомі потенційна енергія формозміни при об'ємному напруженому стані досягне граничного стану, який встановлюється при центральному розтягу в момент настання плинності матеріалу. Момент настання плинності матеріалу при лінійному напруженому стані:

Відомо, що при об'ємному напруженому стані питома потенційна енергія дорівнює:

$$u_{\phi} = \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)].$$

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_H}{n}$$

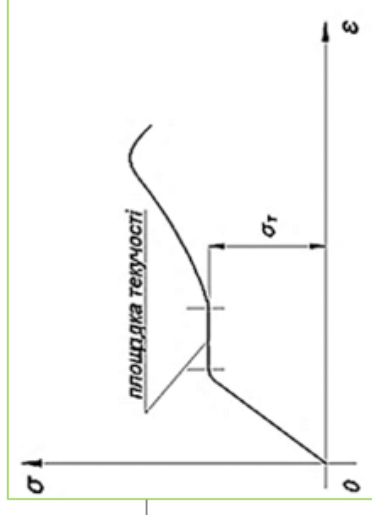
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

При центральному розтягу-стиску:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq (\sigma)$$

$$U_{\phi} \leq [U_{\phi}]_T$$



### IV теорія міцності

При центральному розтягу (лінійному напруженому стані), коли

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \text{ а } \sigma_1 = \sigma_T \text{ матимемо:}$$

$$(U_\phi)_T = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_T^2.$$

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_T$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}$$

Дослідна перевірка підтвердила, що IV теорія міцності успішно застосовується практично для всіх матеріалів.

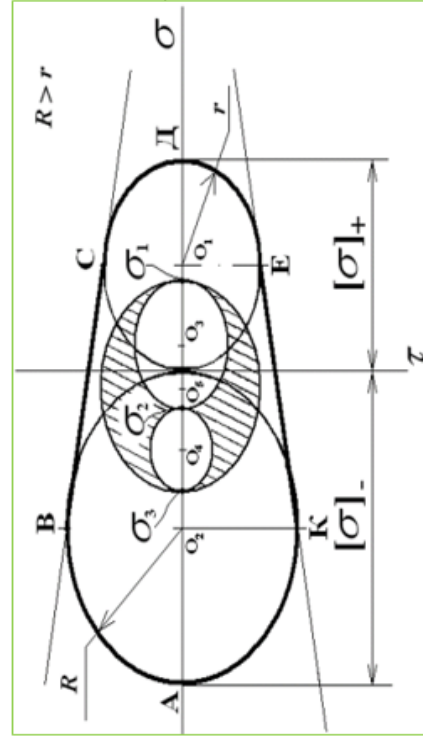
Для плоского напруженого стану, який виникає при згині стрижня, умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\text{max}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

## Теорія міцності граничних напружених станів

Запропонована в XX ст. Отто Мором, згідно з якою вважають, що на міцність матеріалу впливає найбільше –  $\sigma_1$  і найменше –  $\sigma_3$  напруження, а вплив  $\sigma_2$  є несуттєвим. Для цієї теорії будують граничну обгинаючу для кожного матеріалу.

Випробовуючи матеріал на розтяг і стиск знаходять величини допустимих нормальних напружень  $[\sigma]_+$  та  $[\sigma]_-$ . Далі будують граничну обгинаючу АВСДЕК, а потім у тому ж масштабі будують кола Мора по  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  та  $\sigma_3$ . Якщо побудоване коло  $\sigma_1 - \sigma_3$  не виходить за межі обгинаючої, то міцність матеріалу забезпечено. При цьому наочно зрозуміло, що  $\sigma_2$  не може суттєво вплинути на міцність матеріалу, оскільки воно знаходиться в колі  $\sigma_1 - \sigma_3$ .



$R > r$  – крихкий матеріал.

Графічне відображення теорії міцності Мора.

### Недоліки:

- 1) складність у побудові граничної обгинаючої.
- 2) не врахування середнього значення напруження.

**Перевага:** теорія, що будується на дослідних даних не потребує теоретичного підтвердження.

## Поняття про нові теорії міцності

Поява пластмасових та композиційних матеріалів виявила в розглянутих теоріях міцності низку невирішених проблем, що стало значним поштовхом у розвитку нових сучасних теорій міцності таких, як:

а) теорія Янга – описує той чи інший напружений стан у точці поліномом різного ступеню (для об'ємного напруженого стану – це циліндрична поверхня). При цьому отримані теоретичні викладки є достатньо громіздким із застосуванням складного математичного апарату;

б) теорія міцності Лебедева-Писаренка (1967 р.) – вважається, що на міцність матеріалу впливає:  $\tau$  – для його руйнування від зсуву та  $\sigma$  – для відриву. Ця теорія є удосконаленням теорії Мора і забезпечує врахування  $\sigma_2$ ;

в) теорія Фрідмана (теорія механічного стану) – базується на використанні діаграм механічного стану.

Але у цілому всі теорії призводять до порівняння напружень  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  та  $\sigma_3$ , а руйнування відбувається через відрив або зсув частинок. При цьому за допомогою виразів  $F(\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3) = 0$  описують граничні поверхні, які для кожної теорії міцності, враховуючи  $\sigma$  – відрив і  $\tau$  – зсув мають свій вигляд.

## **Модуль «Зсув та кручення»**

### ***1.27. Мультимедійна презентація «Зсув»***

- 1.27.1. Зсув.
- 1.27.2. Поняття про чистий зсув.
- 1.27.3. Закон Гука при чистому зсуві.
- 1.27.4. Залежність між модулями пружності при розтягу та зсуві.
- 1.27.5. Потенціальна енергія при чистому зсуві.
- 1.27.6. Практичний розрахунок з'єднань, що працюють на зсув.

### ***1.28. Мультимедійна презентація «Кручення»***

- 1.28.1. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр.
- 1.28.2. Напруження та деформації при крученні круглого валу.
- 1.28.3. Потенціальна енергія при крученні круглого валу.
- 1.28.4. Кручення стрижня прямокутного поперечного перерізу.

### ***1.29. Відеолекція «Зсув»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Зсув»*

### ***1.30. Відеолекція «Кручення»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.

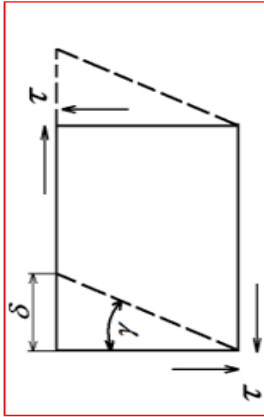


*Відеолекція «Кручення»*



# ПОНЯТТЯ ПРО ЧИСТИЙ ЗСУВ

У деяких випадках міцність і жорсткість конструкції пов'язана з опором матеріалу деформаціям зсуву, які викликані дотичними напруженнями  $\tau$ . Розглянемо найбільш простий випадок зсуву – чистий зсув. Чистий зсув – коли в двох взаємно перпендикулярних площинах діють тільки дотичні напруження  $\tau$ . При цьому подовження сторін відсутнє, а виникає тільки кутова деформація



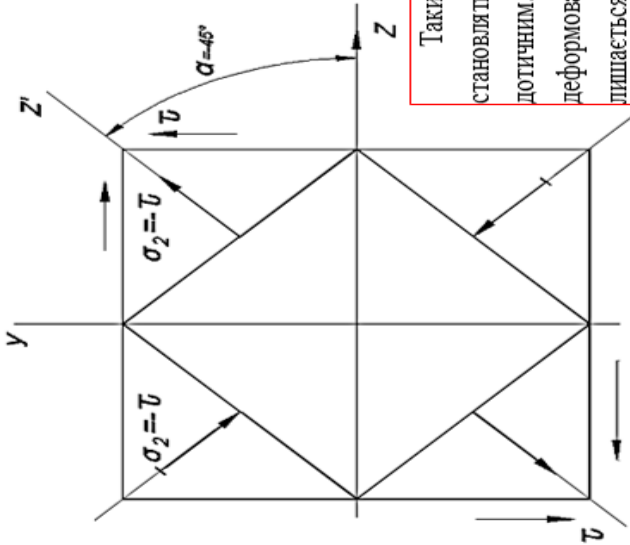
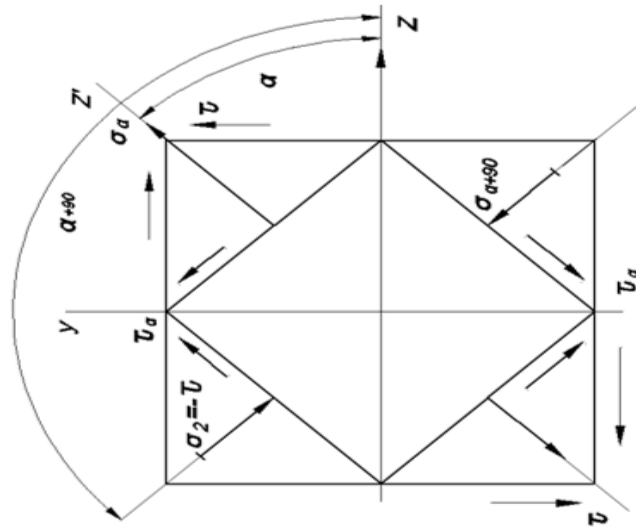
Прийнявши площадки чистого зсуву за вихідні, напруження в інших площинах визначаються:

$$\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha, \quad \tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha.$$

оскільки  $\sin 2(\alpha + 90) = -\sin 2\alpha$ , то

$$\sigma_{\alpha+90} = -\sigma_{\alpha-90} \text{ - закон парності нормальних напружень при чистому зсуві.}$$

Деформація при чистому зсуві.



$$\begin{aligned} \alpha = 0, & \quad \sigma_\alpha = 0, & \quad \tau_\alpha = \tau_{\max}. \\ \alpha = 45^\circ, & \quad \sigma_\alpha = \tau, & \quad \tau_\alpha = 0. \\ \alpha = 135^\circ, & \quad \sigma_\alpha = -\tau, & \quad \tau_\alpha = 0. \end{aligned}$$

Визначення напружень при повороті площин чистого зсуву.

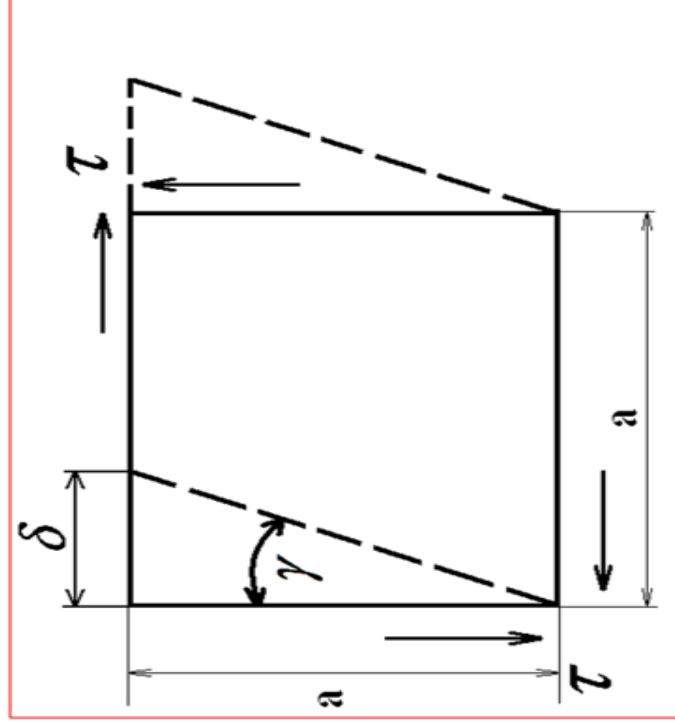
Напруження в площинах при куті  $45^\circ$  щодо площин чистого зсуву.

Таким чином, головні площини із площинами чистого зсуву становлять кут  $45^\circ$ . Головні напруження за модулем дорівнюють дотичним. Чистий зсув – це єдиний випадок напруженого деформованого стану, при якому змінюється форма зразка, а об'єм лишається незмінним. Це зрозуміло із виразу:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3);$$

$$\sigma_3 = 0; \quad \sigma_1 = -\sigma_2 = \tau; \quad \theta = 0.$$

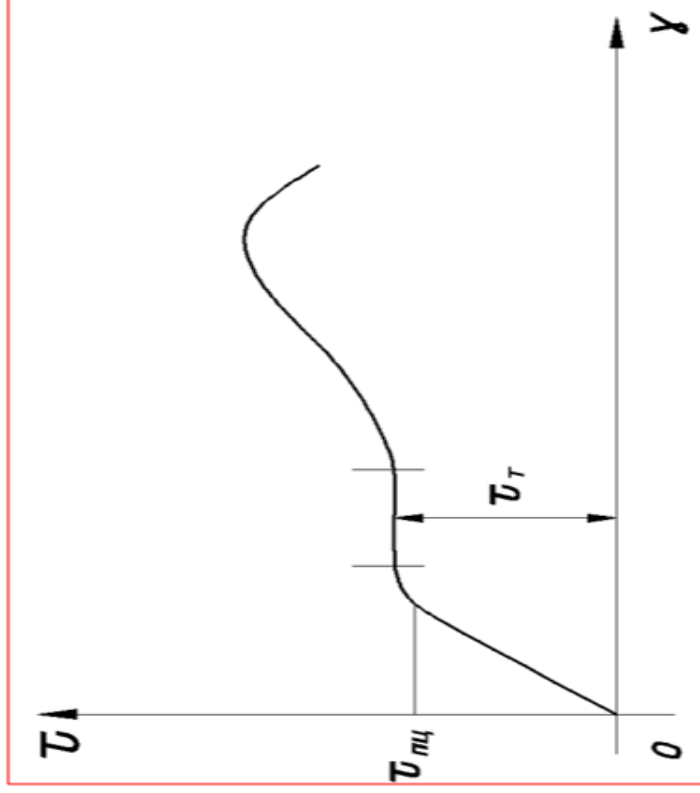
## ЗАКОН ГУКА ПРИ ЧИСТОМУ ЗСУВІ



Деформація при чистому зсуві.

$\delta$  – абсолютний зсув;

$\frac{\delta}{a} = \gamma$  – відносний зсув (кут зсуву).



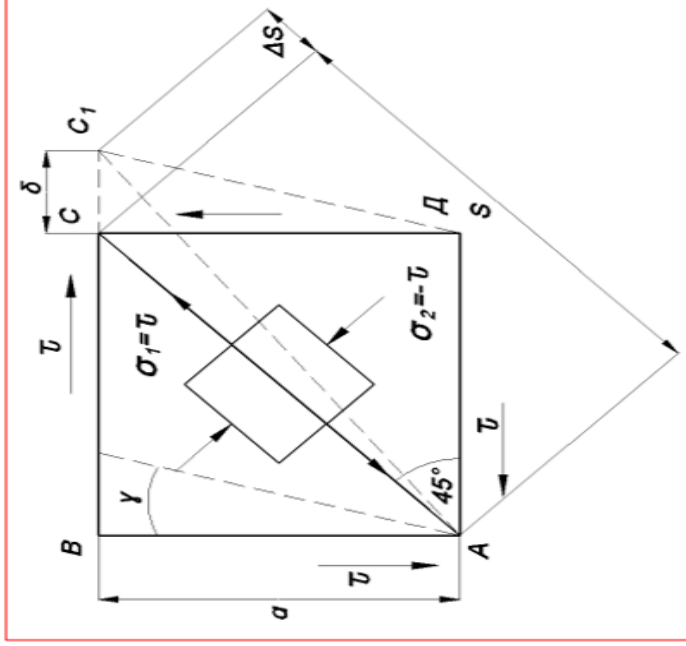
Діаграма  $\tau - \gamma$  для пластичних матеріалів.

У зоні пропорційності між  $\tau$  і  $\gamma$  існує лінійна залежність, яка називається законом Гука при зсуві:

$$\tau = G \cdot \gamma.$$

$G$  – модуль пружності 2-го роду, або модуль пружності при зсуві.

## ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ МОДУЛЯМИ ПРУЖНОСТІ ПРИ РОЗТЯГУ ТА ЗСУВІ



Деформація елемента при чистому зсуві

Деформацію діагоналі елемента можна представити двоюго. З одного боку, вона викликана деформацією зсуву, а значить залежить від дотичних напружень  $\tau$ , пов'язаних з модулем пружності  $G$ . З другого боку, цю діагональ можна уявити як волокно, яке розтягується від напруження  $\sigma_1$  і стискається від напруження  $\sigma_2$ , а значить залежить від модуля пружності  $E$ . Тобто очевидно, що між  $G$  та  $E$  існує залежність.

$$\Delta S = \delta \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \gamma,$$

$$a = S \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot S; \quad \gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Тоді: 
$$\Delta S = \frac{\tau}{2 \cdot G} \cdot S.$$

З іншого боку – від розтягу можна записати:

$$\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2);$$

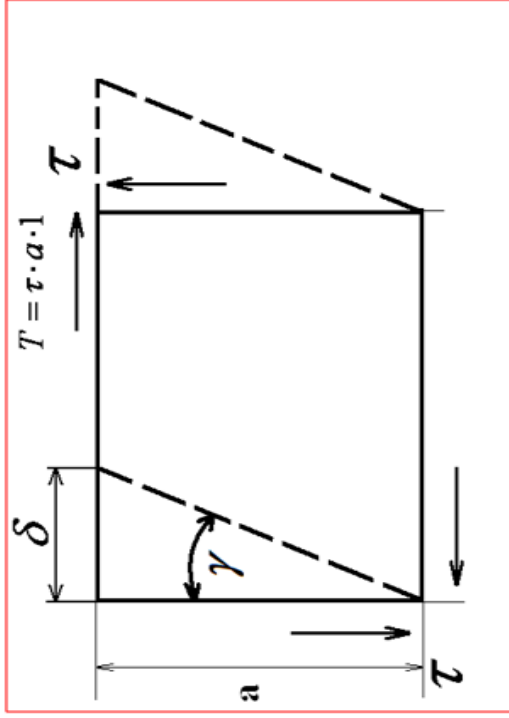
$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau.$$

$$\Delta S = \frac{(1 + \mu)\tau}{E} \cdot S.$$

Маємо теоретичну залежність між модулями пружності при розтягу-стиску  $E$  та зсуві  $G$

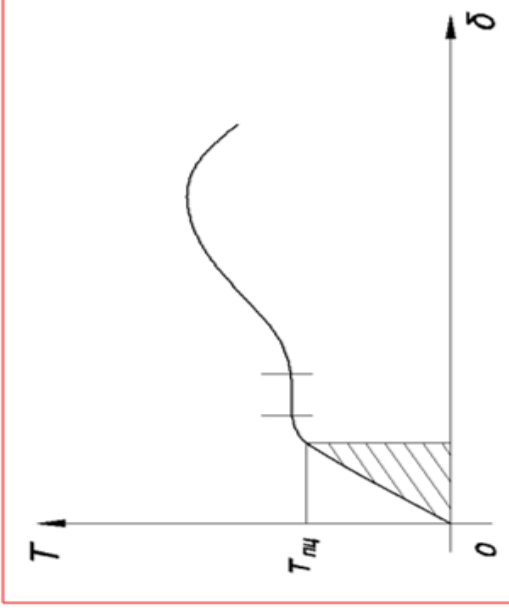
$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}.$$

# ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ПРИ ЧИСТОМУ ЗСУВІ



Дія дотичної сили та викликані деформації.

71



Графічне відображення роботи, що виконує дотична сила

У зоні границі пропорційності робота, яку виконує сила  $T$  дорівнює потенціальній енергії і визначається за формулою:

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot T \cdot \delta.$$

Враховуючи, що  $T = \tau \cdot a \cdot l$ ;  $\delta = \gamma \cdot a$ ;

$$U = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma \cdot a^2 \cdot l$$

Питома потенційна енергія:

$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot \gamma, \text{ де } V_0 = a^2 \cdot l.$$

Замінивши  $\gamma$  у виразі ( $\gamma = \frac{\tau}{G}$ ), матимемо:

$$u = \frac{\tau^2}{2 \cdot G}.$$

Цей вираз аналогічний виразу при центральному розтягу-стиску.



## ПРАКТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК З'ЄДНАНЬ, ЩО ПРАЦЮЮТЬ НА ЗСУВ

Дійсна деформація клепок або зварного з'єднання дуже складна і лише наближено може бути розглянута як деформація чистого зсуву. Тому методика, що розглядатиметься, має умовний характер, але вона досить проста і підтверджується експериментальними даними на практиці, що забезпечує її широке застосування в інженерній практиці.

а) Розрахунок клепок з'єднання. Руйнування з'єднання може відбуватися з двох причин:

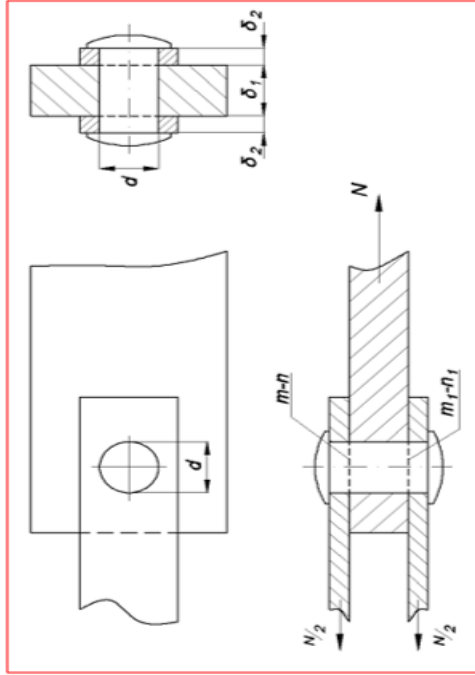


Схема клепок з'єднання.

- 1) від зрізу клепок по площинах  $n - m$  та  $n_1 - m_1$   
Зусилля на зріз визначається за формулою:

$$S_{зр} = F_{зр} \cdot [\tau]_{зр};$$

де площа зрізу:  $F_{зр} = \kappa \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ ;

$\kappa$  – кількість площин зрізу;

$[\tau]_{зр}$  – допустиме дотичне напруження від зрізу тіла клепок.

- 2) від зминання листів або тіла клепок.

- 3) Зусилля на зминання визначається за формулою:

$$S_{зм} = F_{зм}^{min} \cdot [\sigma]_{зм};$$

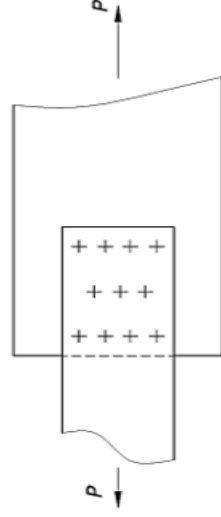
де:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{зм1} = d \cdot \delta_1 \\ F_{зм2} = d \cdot 2 \cdot \delta_2 \end{array} \right\} \text{ площі зминання}$$

$[\sigma]_{зм}$  – допустиме значення напруження на зминання клепок.  
Загальна кількість клепок визначається:

$$n = \frac{N}{S_{min}};$$

де:  $S_{min}$  – мінімальне значення, яке приймається з виразів



Визначення кількості клепок



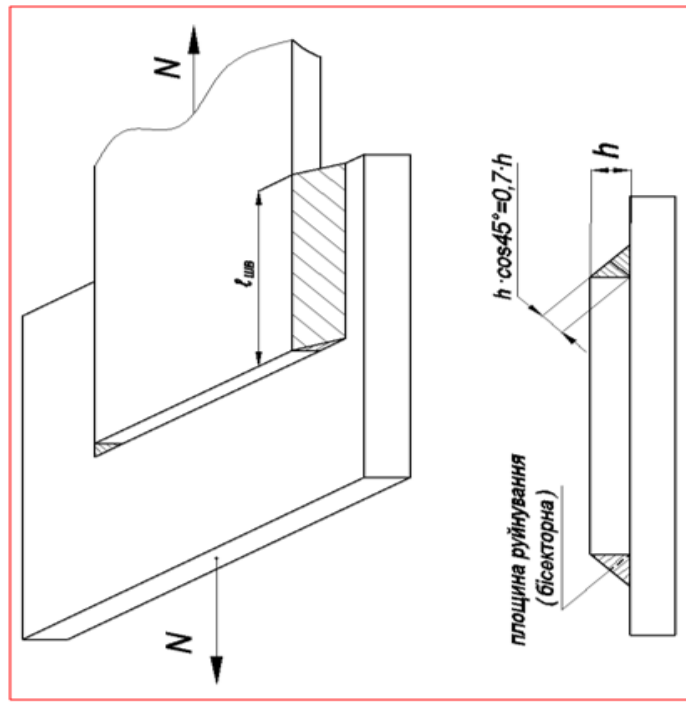
б) Розрахунок зварного шва:

Зварні з'єднання не викликають послаблення тіла деталі та є менш трудомістким, тому знайшли широке застосування в інженерній практиці. Руйнування зварного з'єднання відбувається по найменшій площині – бісекторній площині.

При цьому розрахунковий поперечний переріз шва приймається у вигляді трикутника.

Площу зрізу шва розраховують за формулою:

$$F_{зр} = 2 \cdot l_{шв} \cdot 0,7 \cdot h = 1,4 \cdot h \cdot l_{шв}$$



Зварне з'єднання

Відповідно до цього, умова міцності зварного шва має вигляд:

$$\frac{N}{F_{зр}} = \frac{N}{1,4 \cdot h \cdot l_{шв}} \leq [\tau]_к^{зв}$$

де  $[\tau]_к^{зв}$  – допустиме дотичне напруження матеріалу шва на зріз;

$l_{шв}$  – розрахункова довжина шва, яка приймається на 10 мм меншою фактичної довжини через «непровари» при запалюванні та гасінні дуги.

Матеріал шва не має яскраво вираженої площини плинності (крихкий матеріал), тому в момент руйнування  $\tau$  не вирівнюються.

Тому довжину шва обмежують  $l_{шв} \leq 60h$ . З іншого боку, необхідно щоб  $l_{шв} \geq 40\text{мм}$  або  $l_{шв} \geq 4h$ .

Із наведеної умови міцності можна знайти довжину зварного шва:

$$l_{шв} = \frac{N}{1,4h[\tau]_к^{зв}}$$



## КРУЧЕННЯ. ВИЗНАЧЕННЯ КРУТНИХ МОМЕНТІВ ТА ПОБУДОВА ЇХ ЕПЮР

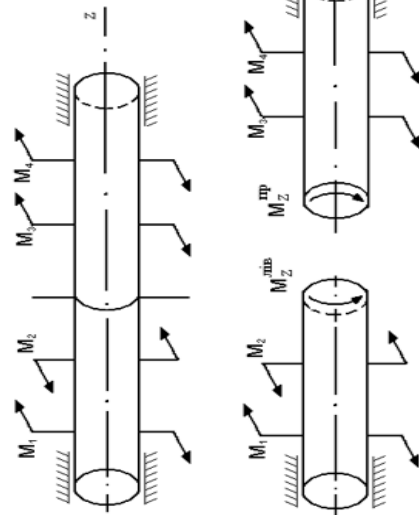


Схема завантаження валу.

**Правило знаків:** крутний момент  $M_{кр}$  вважається додатним, якщо при погляді на поперечний переріз валу з боку зовнішньої нормалі він направлений за ходом годинникової стрілки.

$$\sum M_z = 0; \quad -M_1 + M_2 - M_3 - M_4 = 0;$$

$$\sum M_z^{ліб} - M_1 + M_2; \quad \sum M_z^{пр} M_3 + M_4.$$

Якщо знайти значення крутних моментів в цілій низці поперечних перерізів, то можна побудувати епюру крутних моментів, яка покаже зміну крутного моменту по довжині валу. Епюра  $M_{кр}$  будувється від базисної лінії. Покажемо на конкретному прикладі побудову епюри крутних моментів. Визначимо значення  $M_z$  в характерних перерізах валу, якими є початок і кінець валу, а також точки прикладання зовнішніх зосереджених крутних моментів.

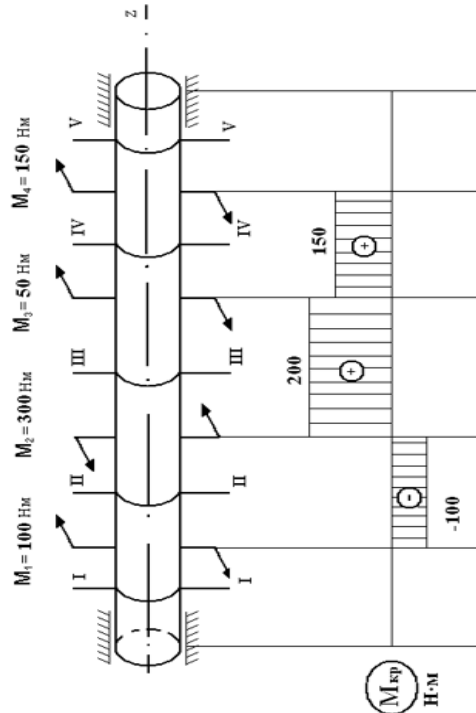


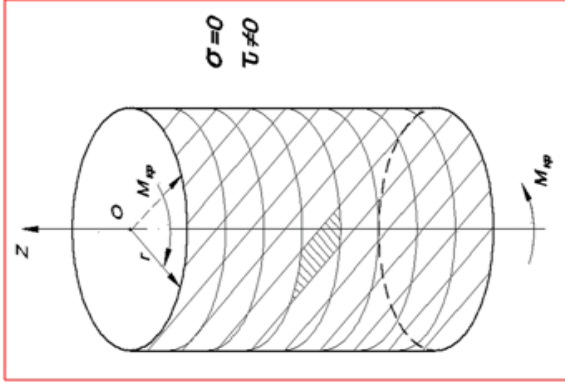
Схема завантаження валу та епюра  $M_{кр}$ .

## 1.32. Слайди до мультимедійної презентації «Кручення»





## НАПРУЖЕННЯ ТА ДЕФОРМАЦІЇ ПРИ КРУЧЕННІ КРУГЛОГО ВАЛУ

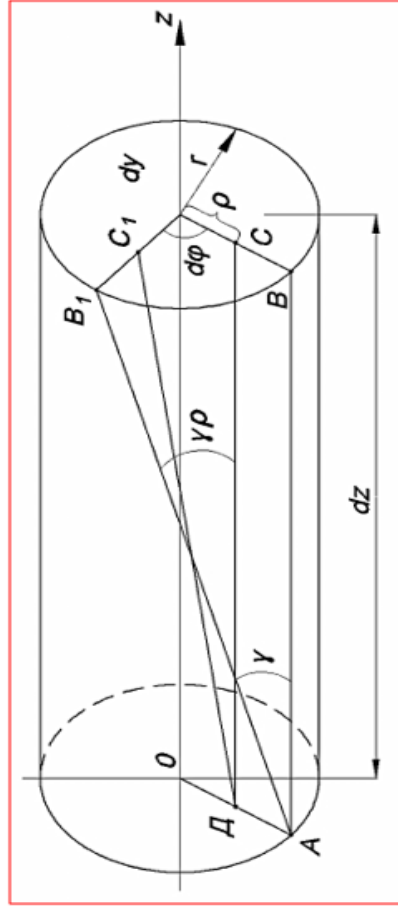


При крученні круглого стрижня справедливою є гіпотеза плоских перерізів (гіпотеза Бернуллі). Радіус, уявно проведений, після деформації залишається прямим. Це дає можливість представити кручення як результат зсуву поперечних перерізів одних відносно інших.

Розглянемо деформацію валу. Деформація характеризується:

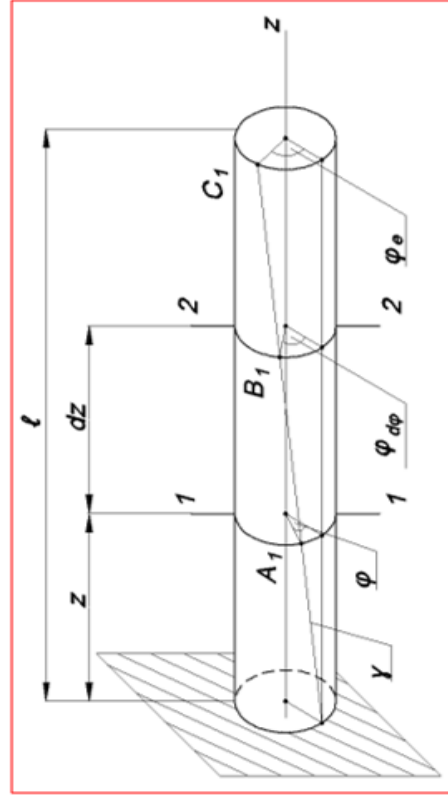
$\gamma$  – кут зсуву;

$\varphi$  – кут закручування.



Деформація відрізка валу довжиною  $dz$ .

Вал з нанесеними рисками



Деформація валу.

Кут зсуву на поверхні валу дорівнює:

$$\gamma = \frac{BB_1}{AB} = \frac{r \cdot d\varphi}{dz};$$

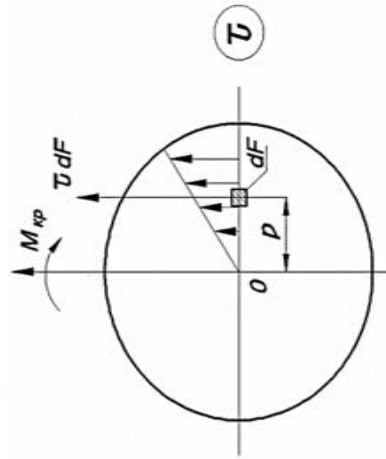
Для довільного волокна на відстані  $\rho$  від центру ваги:

$$\gamma_\rho = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dz}.$$

Використовуючи закон Гука при чистому зсуві, маємо:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot r;$$

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho.$$



Для виключення з виразів та частини  $\frac{d\varphi}{dz}$ , знайдемо внутрішній крутний момент.

$$dM_{\text{вп}} = \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho;$$

$$M_{\text{вп}} = \int_F \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho = \int_F G \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho \cdot dF \cdot \rho = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 \cdot dF.$$

Враховуючи, що  $\int_F \rho^2 \cdot dF = I_\rho$  – полярний момент інерції, отримаємо:

$$M_{\text{вп}} = G \frac{d\varphi}{dz} \cdot I_\rho;$$

Звідси матимемо:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\text{вп}}}{G \cdot I_\rho}.$$

$$\tau_\rho = \frac{M_{\text{вп}}}{I_\rho} \cdot G \cdot \rho = \frac{M_z}{I_p} \cdot \rho.$$

Розподілення дотичних напружень по поперечному перерізі валу.

Очевидно, що  $\tau_{\max} = \frac{M_z \cdot r}{I_p} = \frac{M_z}{I_p / r}$ ,

де  $\frac{I_p}{r} = W_\rho$  – полярний момент опору.

Тоді  $\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho}$ .

Умова міцності валу при крученні:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau].$$

де:  $[\tau]$  – допустиме дотичне напруження, що приводиться у нормах.

Із виразу можливе розв'язання задачі за знаходження діаметра валу при заданому навантаженні та матеріалі:

$$W_\rho = \frac{M_z}{[\tau]};$$

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3.$$

Порівнявши вирази, знайдемо діаметр валу:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2 \cdot [\tau]}}$$

Із виразу маємо, що на ділянці валу – кут закручування  $d\varphi$  дорівнює:

$$d\varphi = \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_p},$$

Для всього валу:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{G} \cdot \frac{dz}{I_p}.$$

Для валу із сталим поперечним перерізом і однаковим значенням  $M_z$ :

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{G \cdot I_p}.$$

Для визначення характеристики жорсткості валу, вводиться поняття відносного кута закручування ( $\theta$ ):

$$\theta = \frac{\varphi}{l}.$$

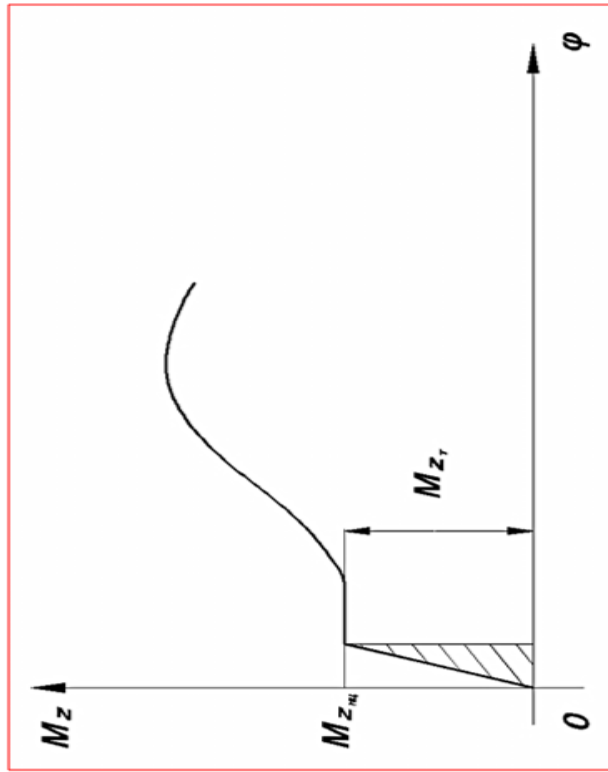
Одиниця виміру (*рад/м*).



## ПОТЕНЦІАЛЬНА ЕНЕРГІЯ ПРИ КРУЧЕННІ КРУГЛОГО ВАЛУ

При крученні крутний момент виконує роботу на викликаних деформаціях (куті закручування). У зоні пружної деформації робота дорівнює потенціальній енергії  $U$  і визначається:

$$A = U = \frac{1}{2} \cdot Mz \cdot \varphi.$$

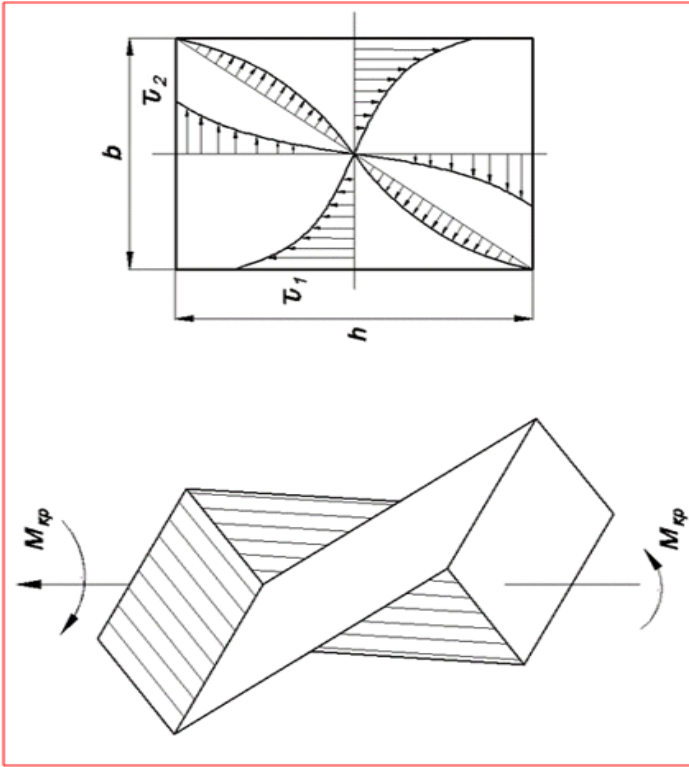


Робота крутного моменту.

Виразивши крутний момент через кут  $\varphi$ , або навпаки, маємо:

$$u = \frac{M_z^2 \cdot l}{2G \cdot I_\rho} = \frac{\varphi^2 \cdot G \cdot I_p}{2l}$$

# КРУЧЕННЯ СТРИЖНЯ ПРЯМОКУТНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ



Деформація валу прямокутного поперечного перерізу.

Очевидно, що  $\tau_{\max}$  виникають посередині довшої сторони

прямокутника і визначаються:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{прям}},$$

Напруження в точці 2:  $\tau_2 = \varphi \cdot \tau_1$ ,

Кут закручування:  $\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot I_{\alpha}}$ ;

де:  $W_{прям} = \alpha \cdot h \cdot \epsilon^2$  – момент опору перерізу;

$I_{\alpha} = \beta \cdot h \cdot \epsilon^3$  – полярний момент інерції; перерізу валу.

Коефіцієнти  $\alpha, \beta, \gamma$  залежать від геометричного співвідношення сторін валу  $h$  і  $b$  і приводяться в нормах.

Умова міцності та жорсткості для валу прямокутного поперечного перерізу має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{\alpha \cdot h \cdot \epsilon^2} \leq [\tau].$$

$$\theta_{\max} = \frac{M_{кр}}{G \cdot \beta \cdot h \cdot \epsilon^3} \leq [\theta].$$

## Модуль «Згин»

### ***1.33. Мультимедійна презентація «Плоский згин»***

1.33.1. Основні типи опорних зв'язків. Визначення опорних реакцій.

1.33.2. Внутрішні сили при згині. Диференціальні залежності між  $M_x$ ,  $Q_y$  та  $q$ . Правила спрощеної побудови епюр  $M_x$  та  $Q_y$ .

1.33.3. Приклади побудови епюр  $M_x$  і  $Q_y$ .

### ***1.34. Мультимедійна презентація «Чистий згин»***

1.34.1. Загальні поняття про чистий згин.

1.34.2. Визначення нормальних напружень при чистому згині.

1.34.3. Приклад чистого згину.

### ***1.35. Мультимедійна презентація «Поперечний згин»***

1.35.1. Дотичні напруження при поперечному згині. Формула Журавського. Епюра дотичних напружень при поперечному згині.

1.35.2. Поняття про центр згину.

### ***1.36. Мультимедійна презентація «Міцність балок при згині»***

1.36.1. Аналіз напруженого стану при згині.

1.36.2. Перевірка міцності балок при згині.

1.36.3. Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності.

### ***1.37. Мультимедійна презентація «Переміщення при згині»***

1.37.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки, визначення прогинів та кутів повороту шляхом його інтегрування.

1.37.2. Перевірка жорсткості балки при згині.

### ***1.38. Відеолекція «Плоский згин»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Плоский згин»*

### ***1.39. Відеолекція «Чистий згин»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Чистий згин»*



#### ***1.40. Відеолекція «Поперечний згин»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Поперечний згин»*

#### ***1.41. Відеолекція «Міцність балок при згині»***

Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



*Відеолекція «Міцність балок при згині»*

#### ***1.42. Відеолекція «Переміщення при згині»***

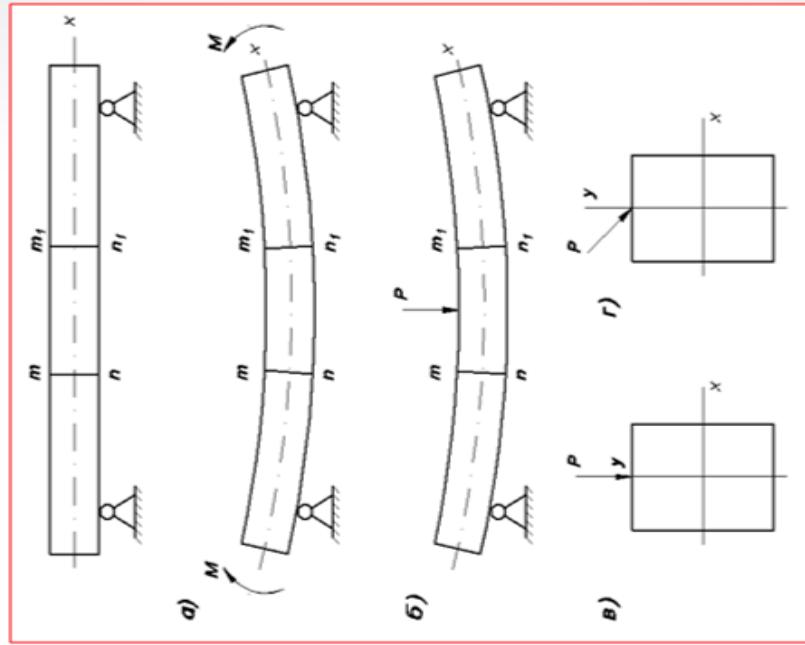
Пропонується переглянути пройдений матеріал курсу на платформі дистанційного навчання та відповісти на питання після лекції. В даному завданні представлено матеріал до відеолекції. Посилання на ресурс наведено нижче.



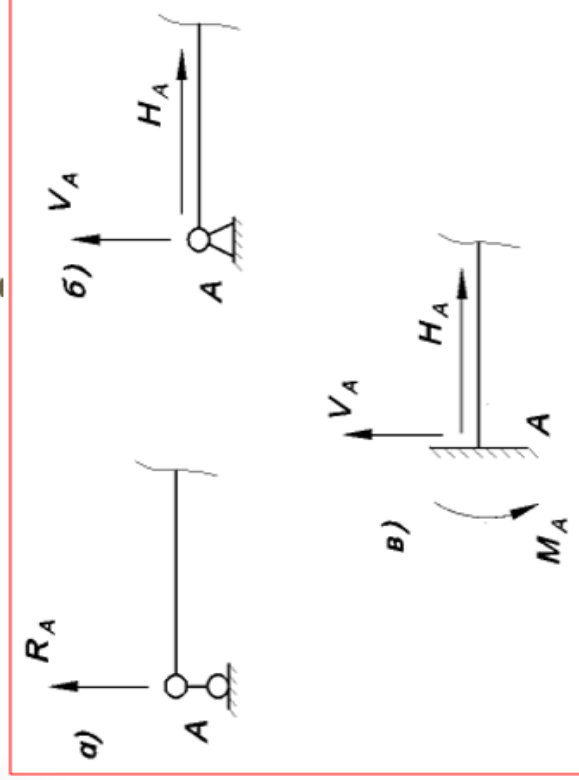
*Відеолекція «Переміщення при згині»*

## Випадки згину

- а) чистий згин – коли в поперечному перерізі виникає тільки згинальний момент  $M_X$  (рис. а).
- б) поперечний згин – коли в поперечному перерізі виникає згинальний момент  $M_X$  і поперечна сила  $Q_y$  (рис. б).
- в) плоский згин – це коли поперечний переріз балки має вертикальну вісь симетрії і силова площина збігається з цією віссю. Деформована вісь балки також лежить у цій площині (рис. в).
- г) косий згин – коли силова площина не збігається з головною віссю (рис. г).



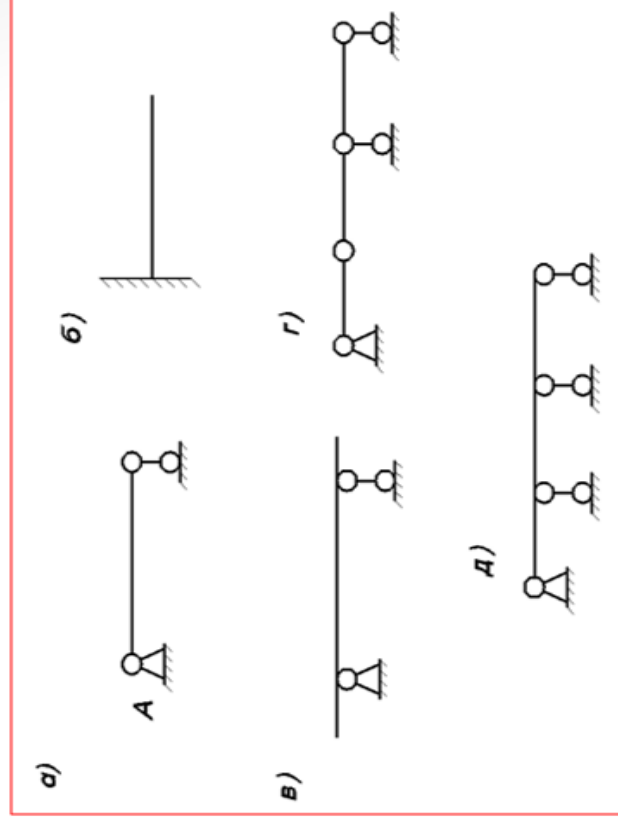
## Види опор



Види опор:

- а) шарнірно рухома опора;
- б) шарнірно нерухома опора;
- в) жорстке затиснення (защемлення).

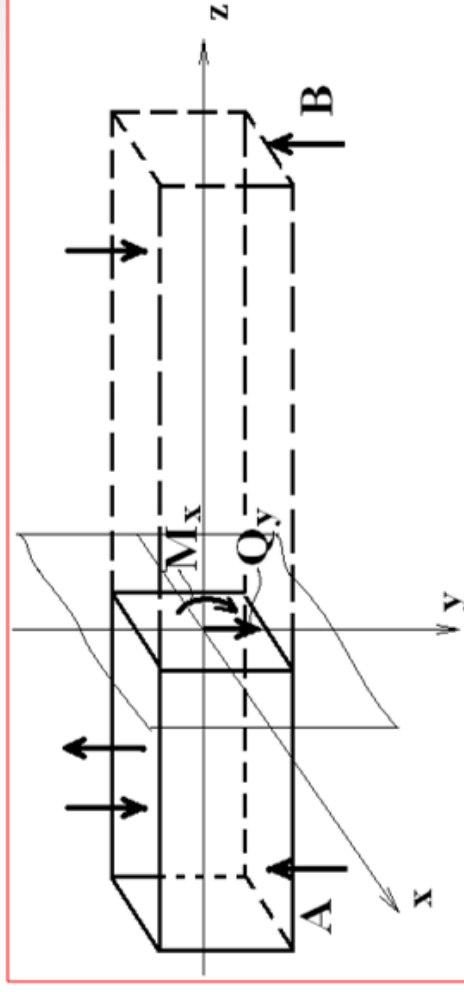
## Види балок



- а) проста однопрогінна балка;
- б) консольна балка;
- в) двохопорна балка з консолями;
- г) розрізна багатопрогінна балка;
- д) нерозрізна багатопрогінна балка.

# Метод перерізів

• Для визначення внутрішніх зусиль при згині використовують метод перерізів, згідно з яким балку розтинають на дві частини і «працюють» з однією із них, а дію відкинутої частини замінюють внутрішніми зусиллями, які при згині зводять до поперечної сили  $Q_y$  і згинального моменту  $M_x$ .



Метод перерізів у графічному відображенні при визначенні  $Q_y$  і  $M_x$ .

- **Робочі правила для обчислення  $Q_y$  та  $M_x$**
- – поперечна сила  $Q_y$  дорівнює сумі проєкцій всіх зовнішніх сил на площину перерізу і обирається із знаком «+», якщо вона повертає відсічену частину відносно перерізу за годинниковою стрілкою, і навпаки;
- – згинальний момент  $M_x$  дорівнює сумі моментів зовнішніх зусиль відносно центру ваги перерізу і обирається із знаком «+», якщо розтягуються нижні волокна, і навпаки.

## Правила спрощення побудови епюр $M_x$ та $Q_y$ .

- На ділянці балки, вільної від розподіленого навантаження ( $q = 0$ ), поперечна сила постійна ( $Q_y = const$ ) і згинальний момент  $M_x$  змінюється за лінійним законом.
- На ділянці балки, що завантажена рівномірно – розподіленим навантаженням ( $q = const$ ):
  - а)  $Q_y$  змінюється за лінійним законом;
  - б)  $M_x$  змінюється за законом квадратної параболи.
- На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ( $q > 0$ ), поперечна сила  $Q_y$  зменшується із зростанням  $Z$  на величину рівнодіючої цієї ділянки.
- На ділянці балки, де поперечна сила більша за нуль ( $Q_y > 0$ ) із збільшенням  $Z$ , епюра  $M_x$  зростає на величину площі епюри  $Q_y$  цієї ділянки.

## Правила спрощення побудови епюр $M_x$ та $Q_y$ .

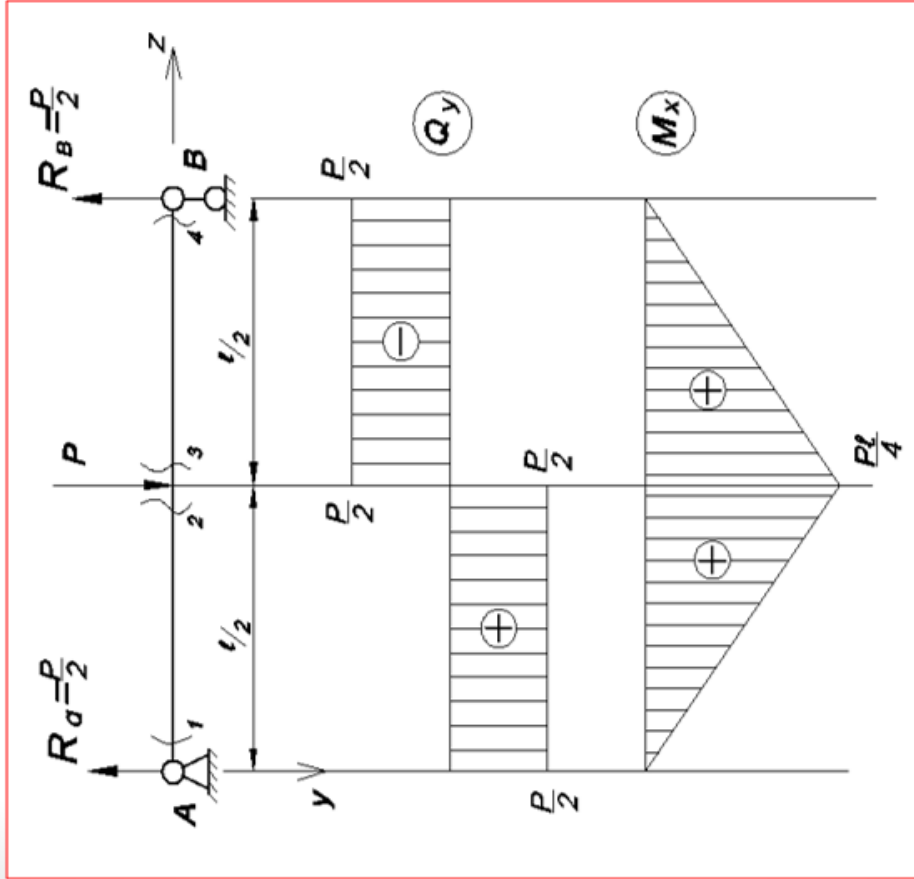
- На ділянці балки, де поперечна сила  $Q_y$  змінюється за лінійним законом та в деякій точці дорівнює нулю, на епюрі згинального моменту  $M_x$  у тій же точці будемо мати екстремальне значення згинального моменту, причому максимальне значення згинального моменту  $M_x$  буде тоді, коли  $Q_y$  змінюється з «+» на «-».
- На ділянці балки, де рівномірно розподілене навантаження більше за нуль ( $q > 0$ ), епюра  $M_x$  має випуклість у бік додатних координат.
- У точках прикладання зовнішніх зосереджених сил на епюрі поперечних сил  $Q_y$  буде стрибок на величину цієї сили.
- У точках прикладання зовнішніх зосереджених моментів згинання на епюрі згинальних моментів  $M_x$  буде стрибок на величину цього зовнішнього моменту.



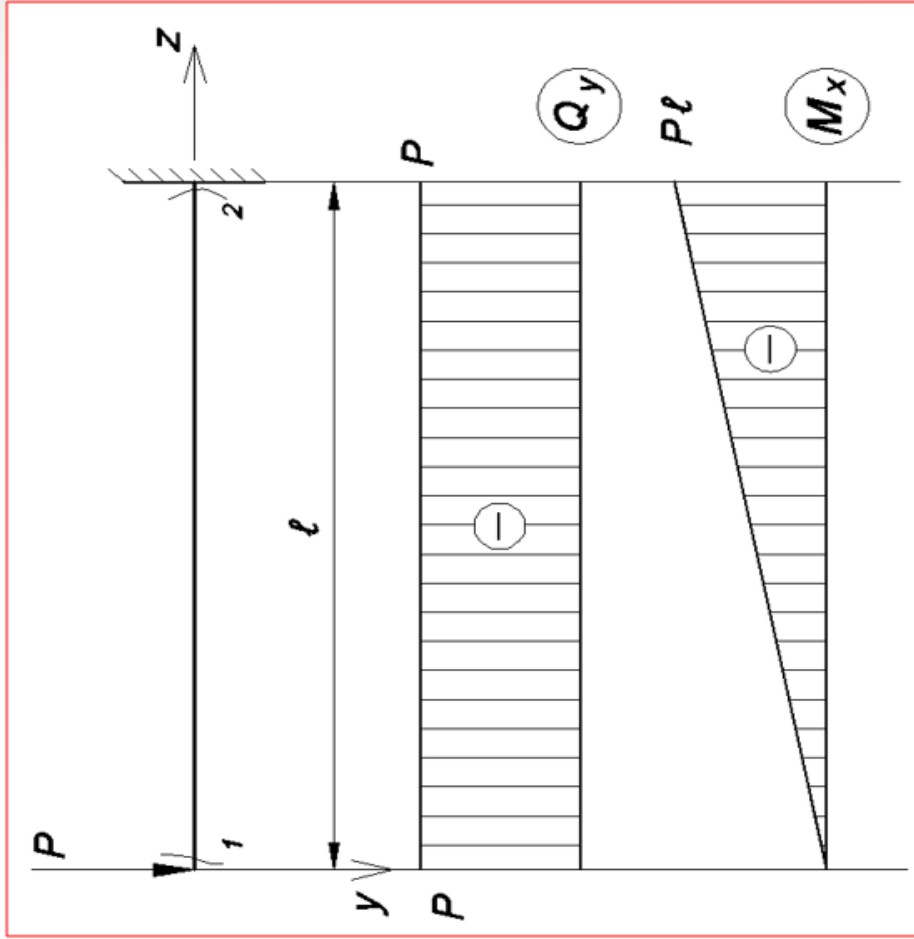
## Етапи розв'язування задач

- 1. Визначення опорних реакцій. Вважаючи балку абсолютно жорстким тілом, замінюючи опори відповідними реакціями і складаючи рівняння рівноваги, визначаємо їх. Обов'язково здійснювати контроль правильності знаходження опорних реакцій.
- 2. Розбивають балку на ділянки. Границями ділянок є: початок і кінець балки; точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження  $q$  та його закінчення.
- 3. Визначаємо величину поперечної сили  $Q_u$  в характерних перерізах і будуємо її епюру.
- 4. Визначаємо величини згинальних моментів  $M_x$  в характерних перерізах і будуємо його епюру.

# Приклади побудови епюр

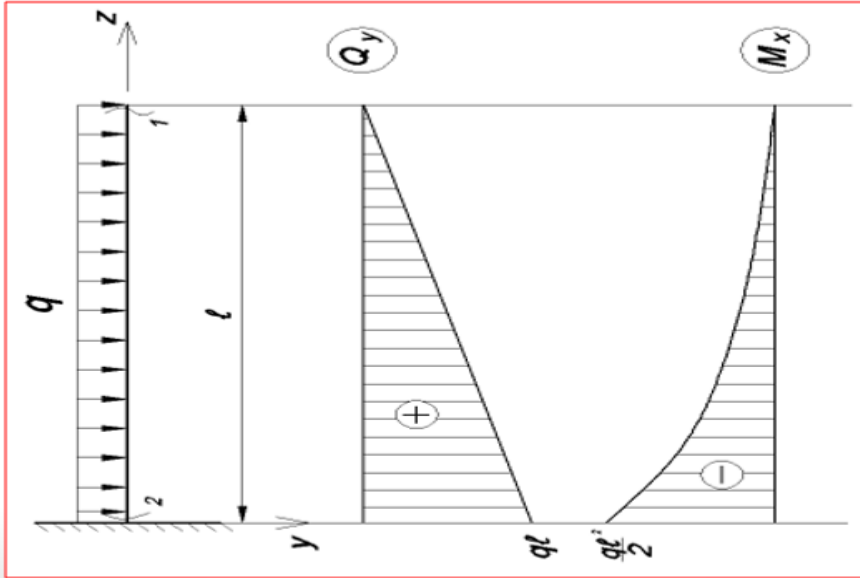


Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$

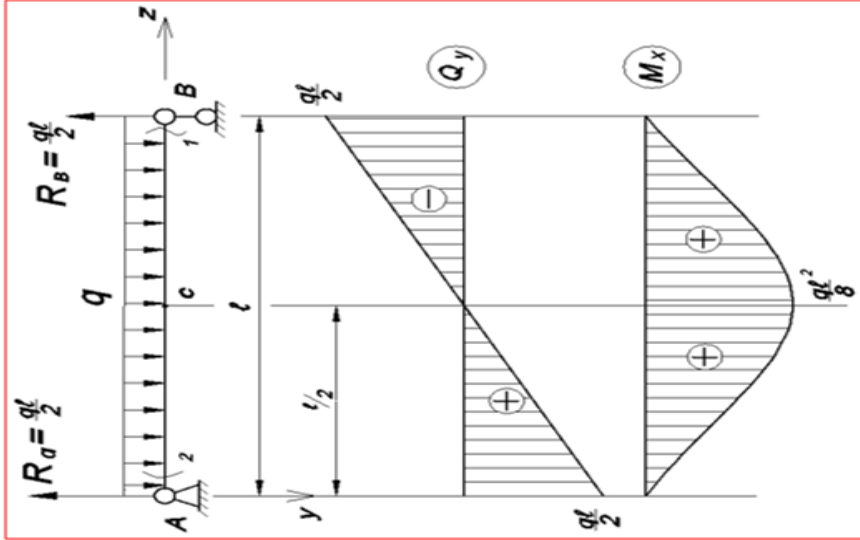


Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$  для консольної балки .

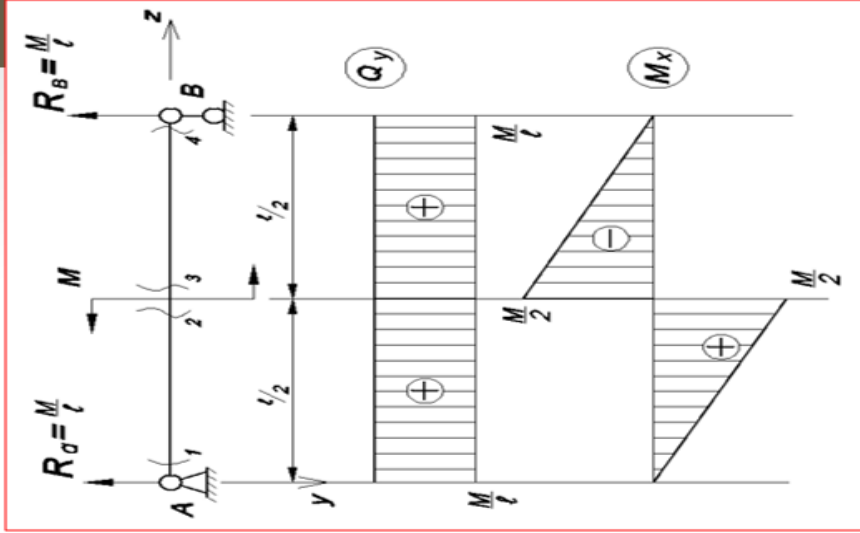
# Приклади побудови епюр



Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$  для консольної балки з рівномірно розподіленим навантаженням.

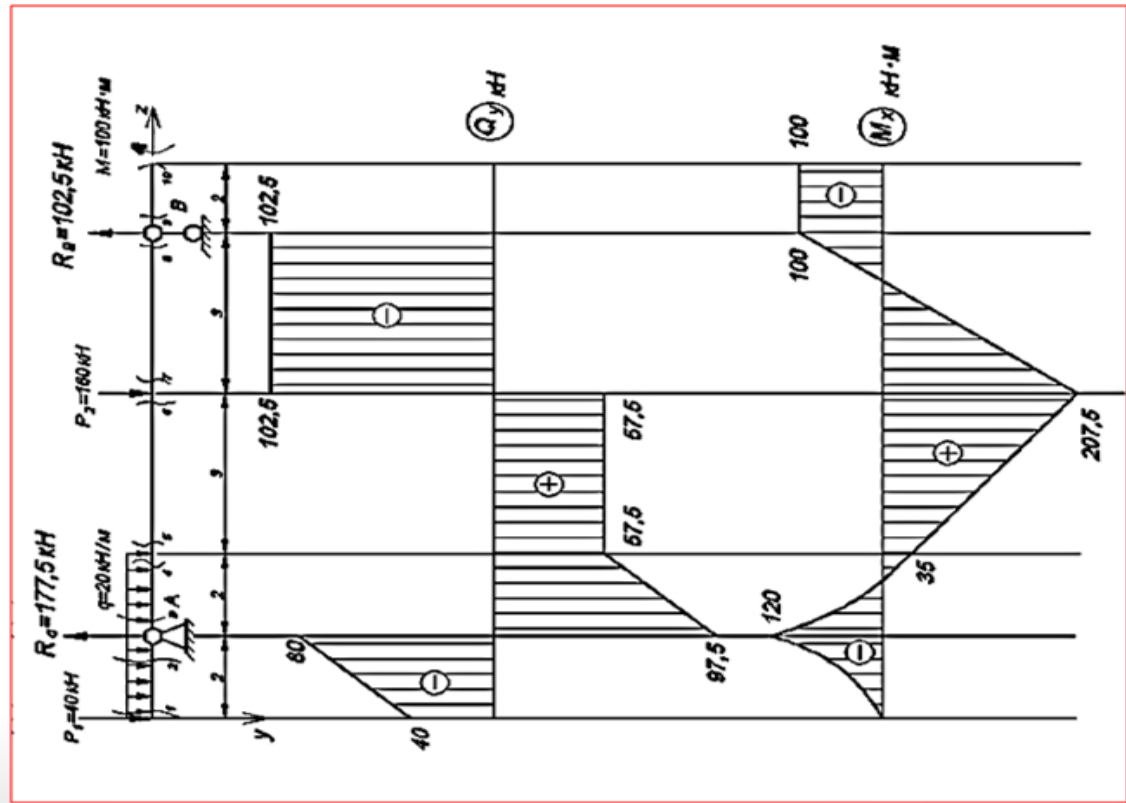


Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$  для балки з рівномірно розподіленим навантаженням.



Побудова епюр  $Q_y$ ,  $M_x$ .

## Приклад



1) Визначаємо опорні реакції. Вважаємо, що балка – абсолютно тверде тіло, складаємо для неї рівняння рівноваги, розв'язуючи які, знаходимо опорні реакції.

$$\sum M_B = 0;$$

$$10 \cdot P_1 + q \cdot 4 \cdot 8 - R_A \cdot 8 + P_2 \cdot 3 - M = 0;$$

$$R_A = 177,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$2 \cdot P_1 - 5 \cdot P_2 + 8 \cdot R_B - M = 0;$$

$$R_B = 102,5 \text{ кН.}$$

Перевірка (спроєктуємо всі сили на вісь Y):

$$\sum Y = 0;$$

$$P_1 + q \cdot 4 - R_A + P_2 - R_B = 0;$$

$$40 + 80 - 177,5 + 160 - 102,5 = 0.$$

2) Розбиваємо балку на ділянки. Границями ділянок є початок і кінець балки, точки прикладання зовнішніх зосереджених зусиль і згинальних моментів, а також точки початку дії розподіленого навантаження  $q$  та його закінчення.

3) Визначаємо величину поперечної сили  $Q_y$  в характерних перерізах і будемо її епюру.

$$Q_{y(1)} = -P_1 = -40 \text{ кН};$$

$$Q_{y(2)} = -P_1 - 2 \cdot q = -80 \text{ кН};$$

$$Q_{y(3)} = -P_1 - 2 \cdot q + R_A = 97,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(4)} = Q_{y(3)} = -P_1 - 4 \cdot q + R_A = 57,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(6)} = -R_B + P_2 = 57,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(7)} = Q_{y(6)} = -R_B = -102,5 \text{ кН};$$

$$Q_{y(9)} = Q_{y(10)} = 0.$$

4) Визначаємо величини згинальних моментів  $M_x$  в характерних перерізах і будемо епюру.

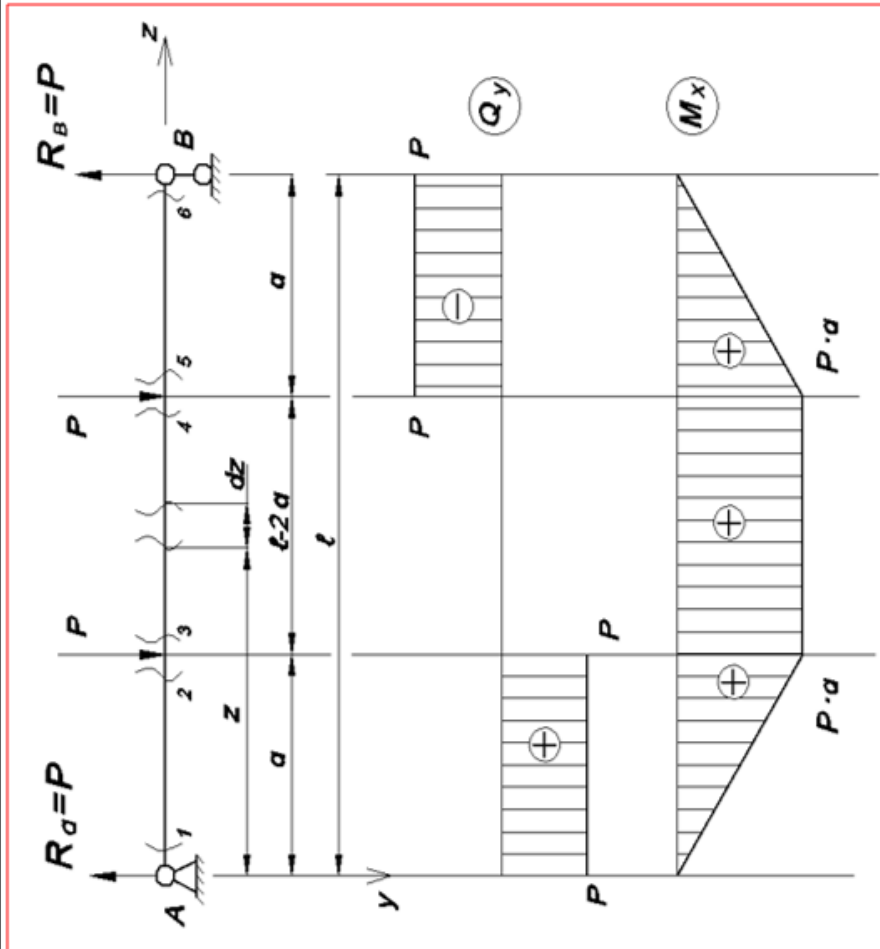
$$M_{x(1)} = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x(2)} = M_{x(3)} = -2 \cdot P_1 - 2 \cdot q = -120 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(4)} = M_{x(5)} = -4 \cdot P_1 - 4 \cdot 2 \cdot q + 2 \cdot R_A = 35 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(6)} = M_{x(7)} = -M + 3 \cdot R_B = 207,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(8)} = M_{x(9)} = M_{x(10)} = -M = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

## ЧИСТИЙ ЗГИН



$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \underbrace{y_{\max}}_{W_x} = \frac{M_x}{W_x}$$

У цілому при плоскому згині в поперечному перерізі балки виникають поперечна сила  $Q_y$  та згинальний момент  $M_x$ . Якщо в поперечному перерізі балки відсутня поперечна сила  $Q_y$ , а діє тільки згинальний момент  $M_x$ , то балка знаходиться в умовах чистого згину.

## Приклад чистого згину

Для найбільш напруженого поперечного перерізу балки необхідно побудувати епюру  $\sigma$ , прийнявши  $e = 15$  см,  $h = 24$  см. Максимальний момент  $M_{x(1-7)} = 207,5$  кН·м.

Для точки 1.

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{b \cdot h^3} \cdot y = \frac{207,5 \cdot (-0,12)}{0,15 \cdot (0,24)^3} = -144 \text{ МПа}$$

Для точки 2.

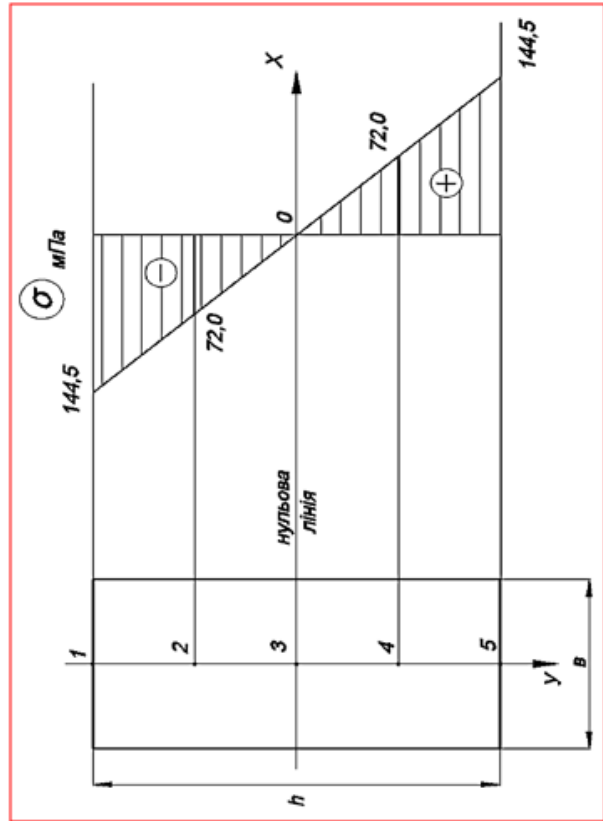
$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{M_x}{b \cdot h^3} \cdot y = \frac{207,5 \cdot (-0,06)}{0,15 \cdot (0,24)^3} = -72 \text{ МПа}$$

Для точки 3:  $\sigma_{(3)} = 0$ .

За аналогією для точок 4 і 5 маємо:

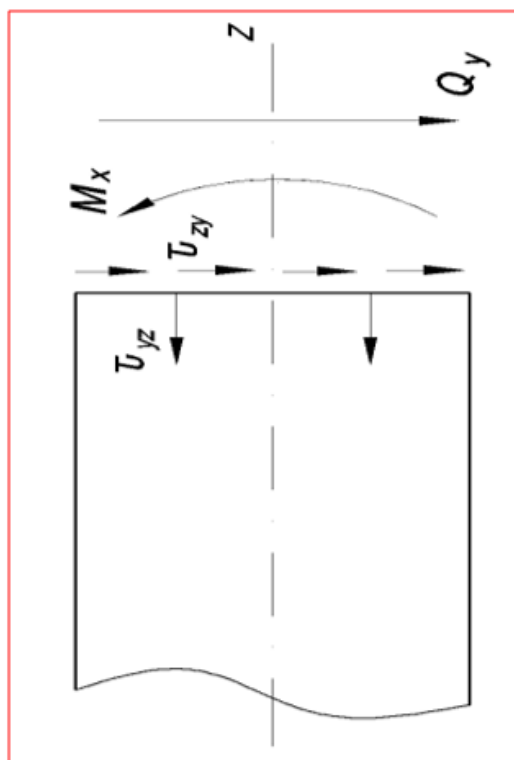
$\sigma_{(4)} = 72$  МПа.

$\sigma_{(5)} = 144$  МПа.





## Поперечний згин. Формула Журавського.



На відміну від чистого згину, при поперечному згині в перерізі балки поряд з моментом згинання виникає поперечна сила

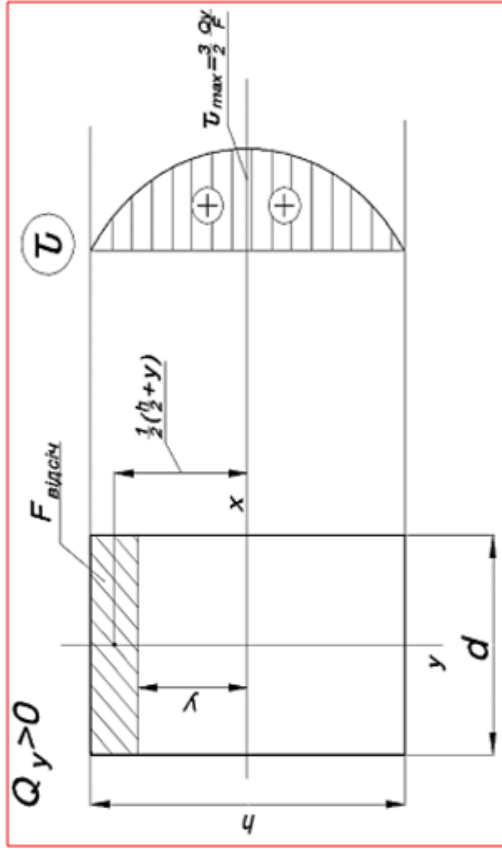
Дотичні напруження при поперечному згині.

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot b_y}$$

**-Формула Журавського,**

де  $I_x$  – момент інерції відносно нейтральної осі всього поперечного перерізу.

Дотичні напруження в прямокутному поперечному перерізі



$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{вiдсiч}}}{I_x \cdot b_y}$$

$$S_x^{\text{вiдсiч}} = F_{\text{вiдсiч}} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right) = b \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{h}{2} + y \right)$$

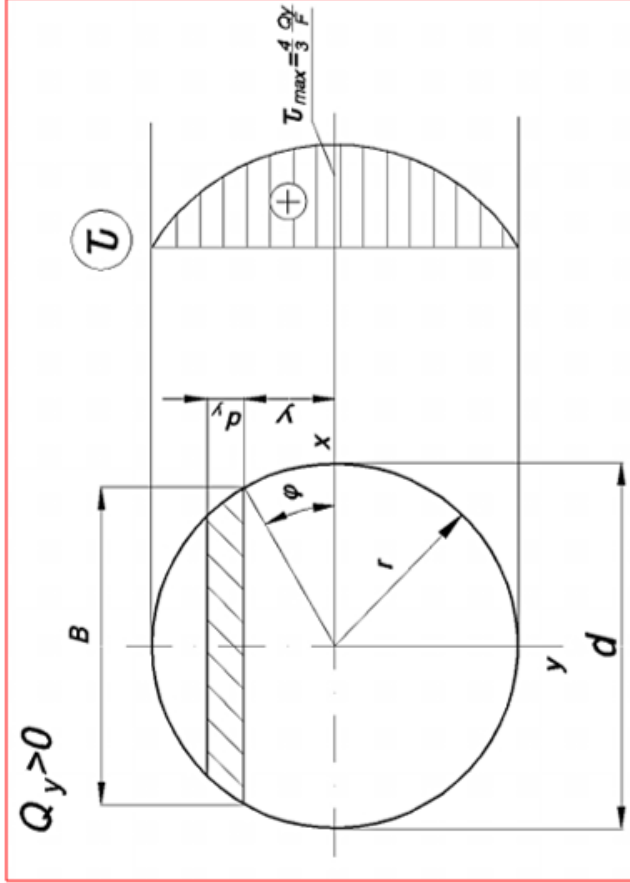
$$S_x^{\text{вiдсiч}} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot h^3 \cdot \frac{b}{12}}.$$

Коли  $y = \frac{h}{2}$  або  $y = -\frac{h}{2}$ , то  $\tau_y = 0$

Коли  $y=0$ , то  $\tau_y = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F}$

### Дотичні напруження в круглому поперечному перерізі



$$e = 2 \cdot r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$dy = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$S_x^{\text{еііііі}} = \int_F y \cdot dF$$

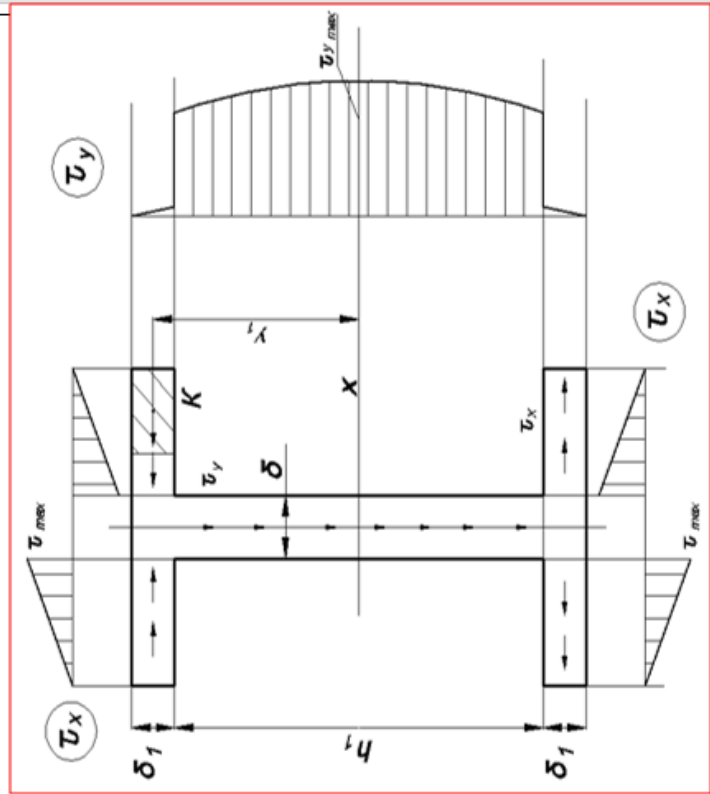
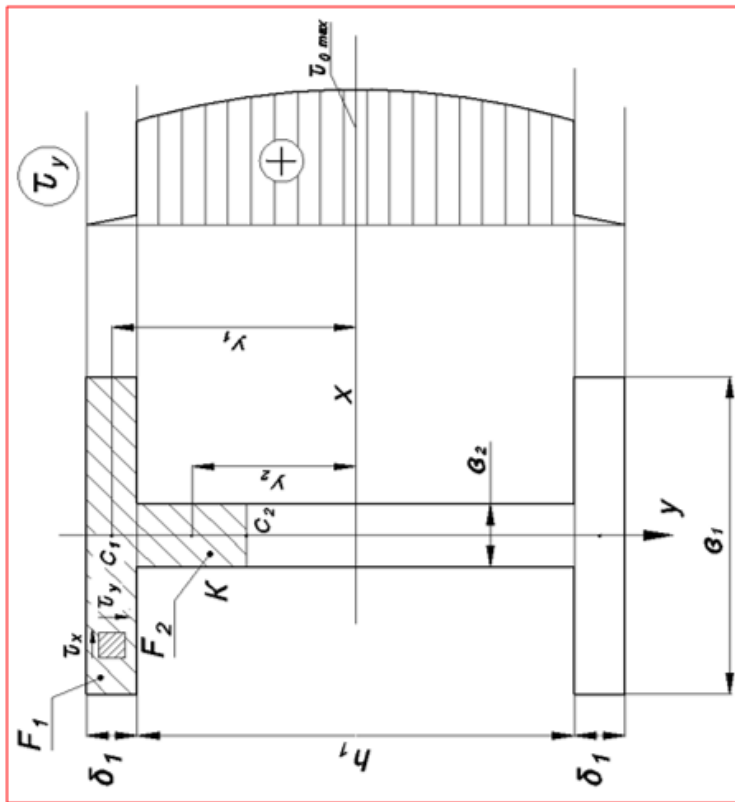
$$dF = e \cdot dy = 2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot d\varphi$$

$$S_x^{\text{еііііі}} = \int_F y \cdot dF = \int_F 2 \cdot r^3 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = \frac{2 \cdot r^3}{3}$$

Коли  $y=r$  або  $y=-r$ , то  $\tau_y = 0$

Коли  $y=0$ , то  $\tau_y = \frac{Q_y \cdot 2 \cdot r^3 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{\pi \cdot r^2}$  де  $F = \pi \cdot r^2$

## Дотичні напруження в двотавровому поперечному перерізі



Дотичні напруження в двотавровому поперечному перерізі

$$\text{Для точки К } S_x^{\text{відсіч}} = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2;$$

Через значну ширину полиці  $\tau_y$  розподіляється нерівномірно, тому для полиці користуватися формулою не коректно, її застосовують лише, коли  $y \leq \pm \frac{h}{2}$ .

Тому в цьому разі роблять двояко:

1. Не враховують  $\tau_y$  в полицях (через незначність);

2. Обчислюють за формулою:  $\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot e_1}$ , при цьому на

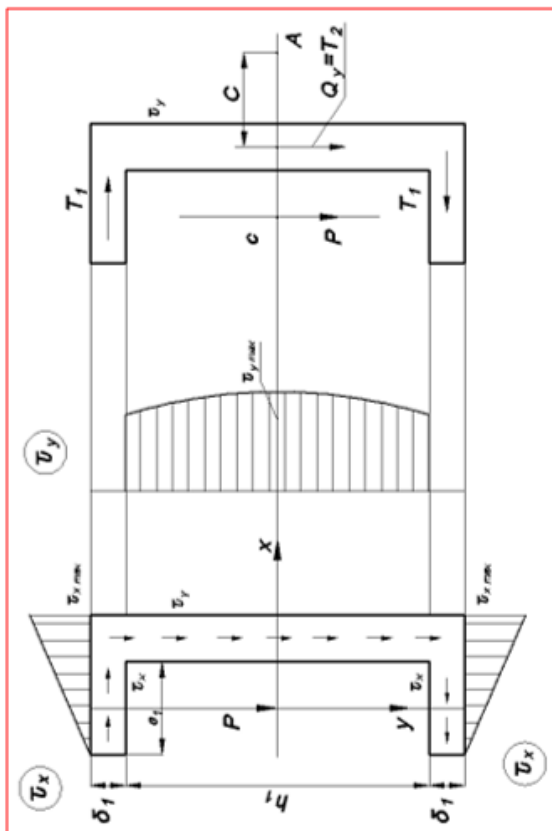
епюрі в точках переходу полиці у стійку є суттєві стрибки.

У двотавровому перерізі в полиці також виникають напруження  $\tau_x$ , які визначаються за формулою:

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відсіч}}}{I_x \cdot \delta_1}$$

$$S_x^{\text{відсіч}} = F_{\text{відсіч}} \cdot y_1$$

# Поняття про центр згину



Найбільш догичні напруження в полиці швелера:

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot S^{\text{еіdсіч}}}{I_x \cdot \delta_1} ;$$

$$\text{де: } S^{\text{еіdсіч}} = \frac{\delta_1 \cdot h_1 \cdot e_1}{2} .$$

$$\tau_x^{\max} = \frac{Q_y \cdot e_1 \cdot \delta_1 \cdot \frac{h}{2}}{I_x \cdot \delta_1} = \frac{Q_y}{2 I_x} b h_1 .$$

Сумарна горизонтальна сила зсуву  $T_1$  дорівнює:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \tau_x^{\max} \cdot \delta_1 \cdot e_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1 \cdot e_1^2 .$$

Дві сили  $T_1$  призводять до виникнення моменту, який визначають:

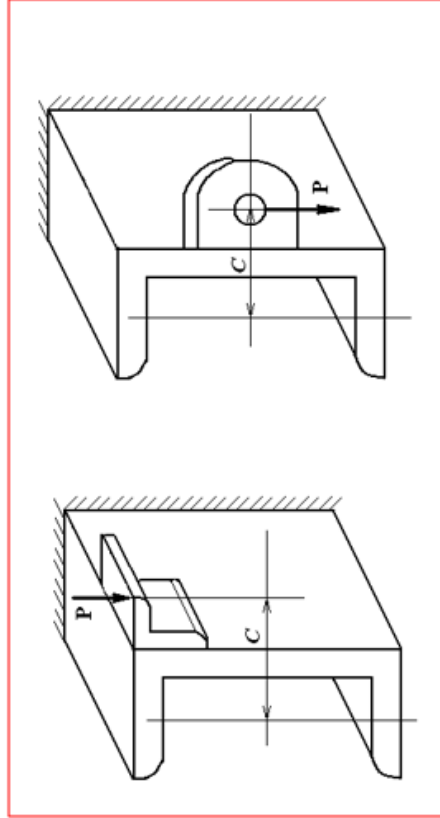
$$M_1 = T_1 \cdot h_1 = \frac{Q_y}{4 \cdot I_x} \cdot \delta_1 \cdot h_1^2 \cdot e_1^2$$

## Поняття про центр згину

Звідси очевидно, що поряд із згином відбувається і закручування поперечного перерізу, що знижує міцність. Очевидно, що на осі  $x$  є така точка  $A$ , відносно якої момент закручування дорівнює нулю. Цю точку називають **центром згину**. Відповідно, необхідно намагатися прикладати зосереджену силу в цій точці, яка визначається:

$$\sum M_A = 0; M_1 - Q_y \cdot c = 0.$$

$$c = \frac{M_1}{Q_y} = \frac{\delta_1 \cdot h_1^2 \cdot \epsilon_1^2}{4I_x}.$$



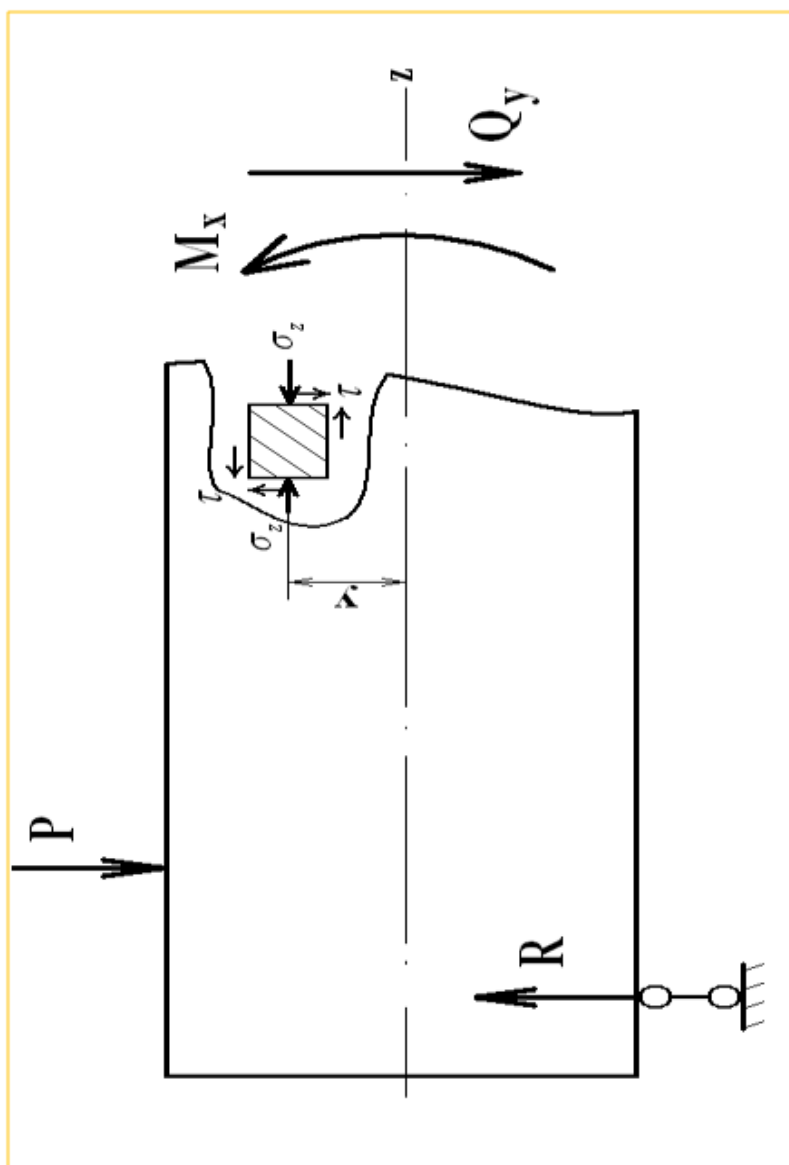
Способи прикладання зовнішньої сили.

Для запобігання виникнення додаткових зусиль у поперечному перерізі зовнішню силу необхідно докласти в центрі згину.



1.46. Слайди до мультимедійної презентації «Міцність балок при згині»

АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРИ ЗГІНІ



$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y$$

$$\tau_x = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{відс.}}}{I_x \cdot b_y}$$



Загальний випадок плоского напруженого стану при згині.

## АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРИ ЗГІНІ

При цьому в будь-якій точці має місце плоский напружений стан, для якого головні напруження і головні площадки визначаємо за формулами:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z + \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}.$$

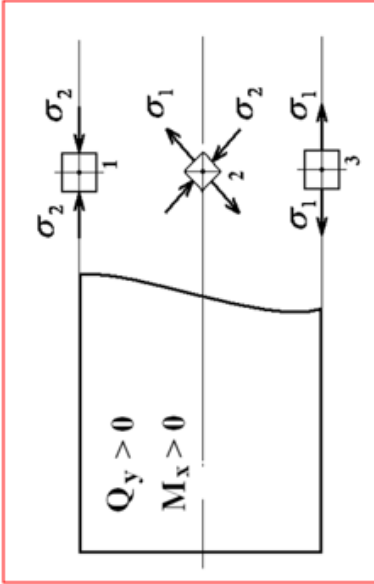
У нашому випадку, враховуючи, що поздовжні волокна не тиснуть одне на одне  $\sigma_y = 0$  і  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$  то формули будуть такими:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau}{\sigma}.$$

При цьому дослідимо напружений стан у трьох точках по висоті перерізу балки; у верхньому стиснутому волокні; у нижньому розтягнутому волокні; на нейтральній лінії.

## Аналіз напруженого стану при згині



Дослідження напруженого стану по висоті перерізу

Точка 1:  $\tau = 0$ ;  $\sigma_z = -\sigma$ .

$$\sigma_1 = -\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = 0;$$

$$\sigma_2 = -\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(-\sigma)^2} = -\sigma;$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{-\sigma} = 0; \Rightarrow \alpha'_0 = 90^\circ; \quad \alpha''_0 = 0^\circ.$$

Точка 3:  $\tau = 0$ ;  $\sigma_z = \sigma$ .

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2 + 4 \cdot 0} = \sigma;$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma)^2} = 0;$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 0}{\sigma} = 0; \Rightarrow \alpha'_0 = 0^\circ; \quad \alpha''_0 = 90^\circ.$$

Точка 2:  $\tau = \tau_{\max}$ ;  $\sigma_z = 0$ .

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = \tau_{\max};$$

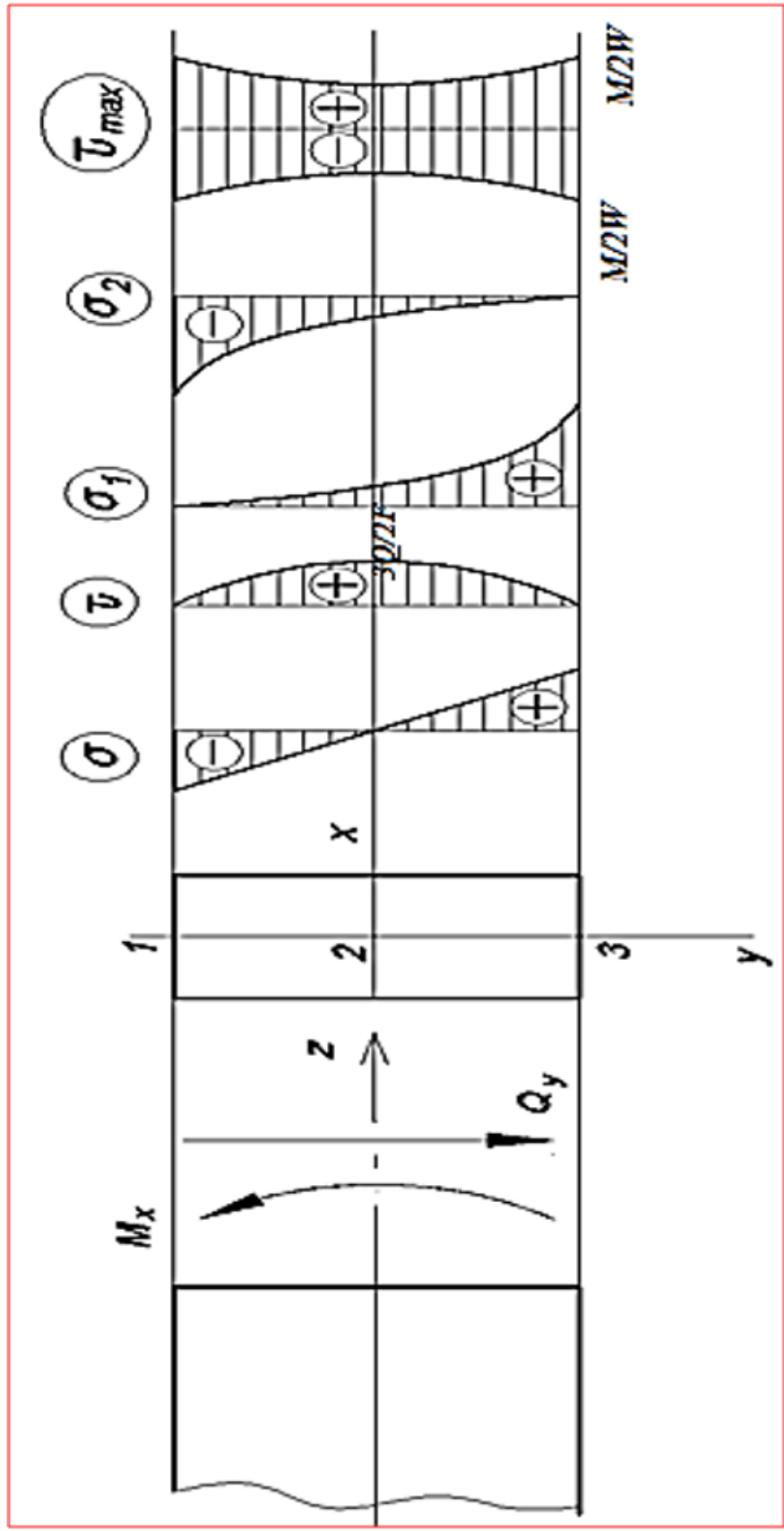
$$\sigma_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \tau_{\max}^2} = -\tau_{\max};$$

$$tg2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{\max}}{0} = \infty; \Rightarrow \alpha'_0 = 45^\circ; \quad \alpha''_0 = 135^\circ.$$

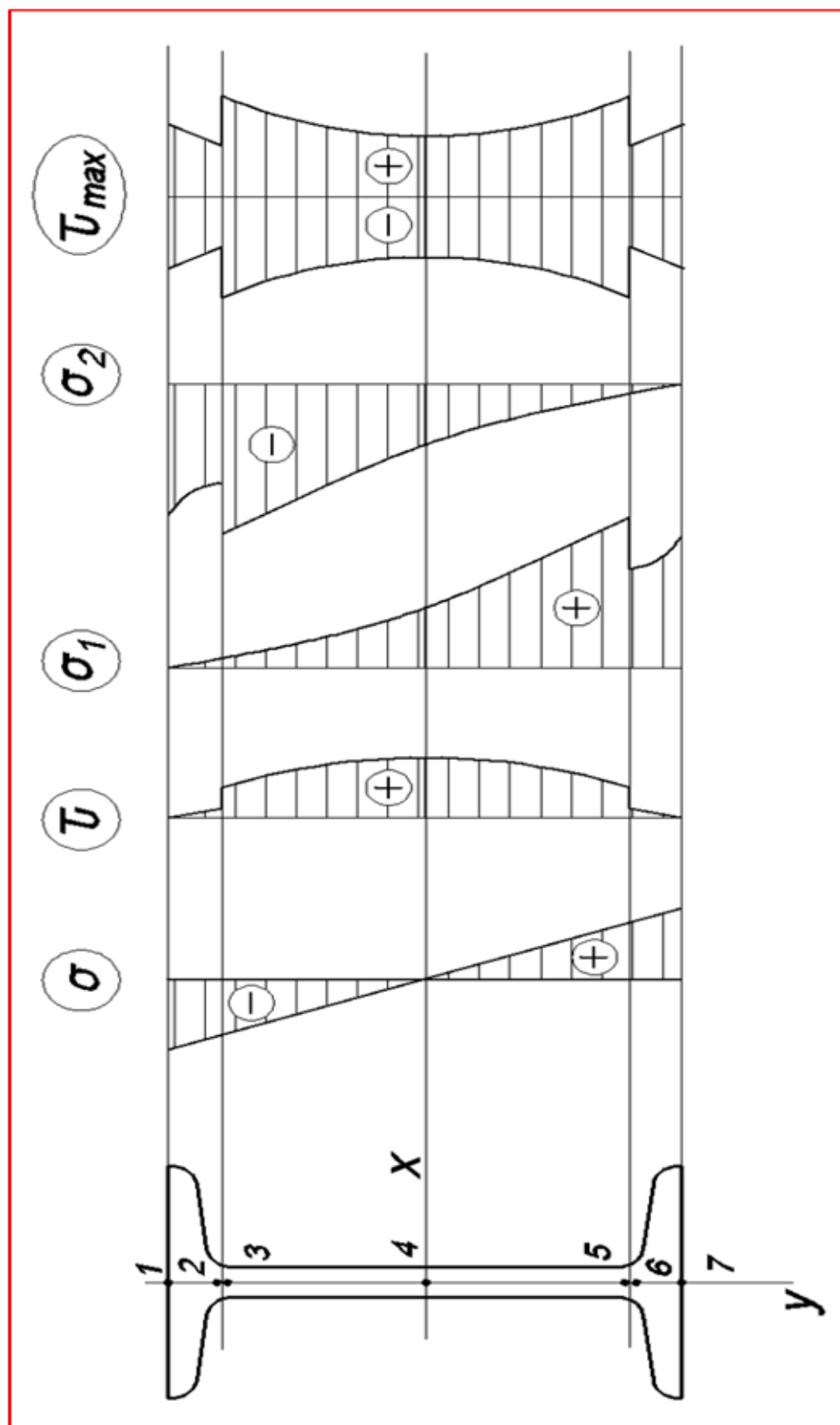
При цьому максимальні та мінімальні дотичні напруження виникають у площинах нахилених до головних площин під кутом  $45^\circ$  і визначаються за формулою:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

# Епюри напружень у прямокутному поперечному перерізі



Напруження в двотавровому поперечному перерізі



Перевірка міцності балок при згині

Очевидно, що максимальні нормальні напруження  $\sigma$  виникають у крайніх волокнах, і не враховуючи знаку визначаються:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}.$$

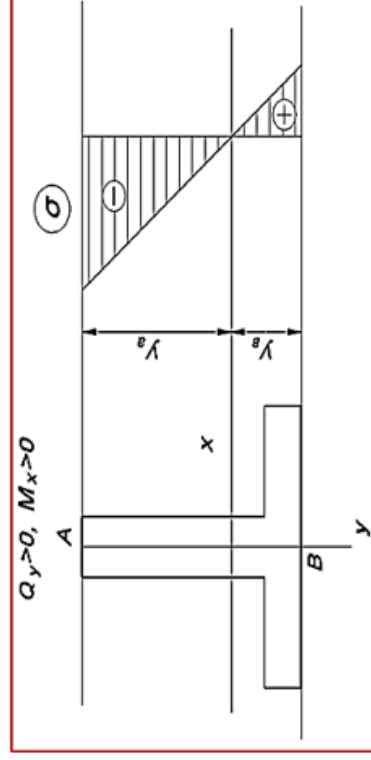
де:  $W_x$  – момент опору, що характеризує опір поперечного перерізу.

При цьому знаючи максимальний згинальний момент  $M_x$ , а також розмір поперечного перерізу, можна перевірити умову міцності балки за нормальними напруженнями. Вона має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

Із виразу можна розв'язати і зворотну задачу, тобто при заданому навантаженні і знаючи матеріал, визначити розміри поперечного перерізу:

$$W_x = \frac{M_x}{[\sigma]}.$$



Переріз, що не має горизонтальної вісі симетрії

## Перевірка міцності балок при згині

Для перерізу, який не має горизонтальної вісі симетрії, виразом можна користуватися лише для найбільш віддалених волокон. При цьому, якщо балку виготовлено із крихкого матеріалу, то перевіряють умови міцності як на стиск, так і розтяг:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A \leq [\sigma]_{\text{стиск}} ;$$

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_B \leq [\sigma]_{\text{розтяг}} .$$

Для балки двотаврового поперечного перерізу виконують перевірку умов міцності: для точки 1 перевіряють умову міцності нормальними напруженнях; для точки 4 перевірку міцності здійснюють за дотичними напруженнями (формула Журавського); для точок з'єднання полиці і стійки (але належить стійці (точка 3)) перевіряють міцність за головними нормальними напруженнями:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] ;$$

або для цих точок виконують перевірку міцності, за 4 енергетичною теорією міцності, тобто:

$$\sigma_{\text{еквівал}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] .$$



## Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності

Формули для визначення нормальних та дотичних напружень (формула Журавського) справедливі тоді, коли матеріал деформується в пружній стадії. Досягнення в найбільш напружених волокнах напруження  $\sigma_T$  не означає руйнування балки, а лише те, що вона здатна сприймати зовнішнє навантаження додаткове.

При цьому зона пружної деформації поперечного перерізу балки зменшується (епюра трансформується).

І тільки в тому разі, коли у всіх волокон поперечного перерізу напруження будуть сягати величини границі плинності, то балка вичерпає свою міцність і зруйнується в перерізі так званого *пластичного шарніра*.

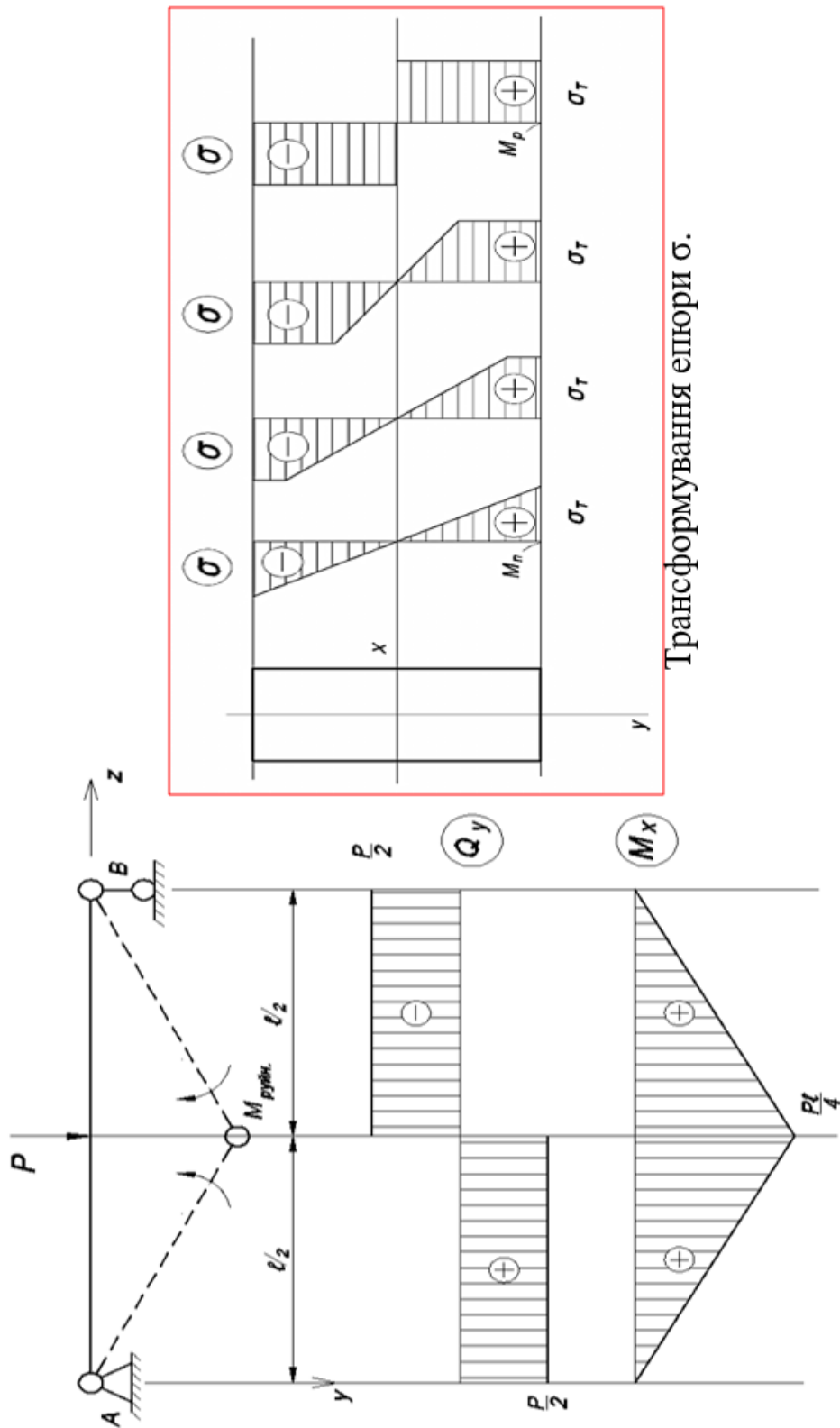
$$M_{руйн} = \frac{P \cdot l}{4};$$

Очевидно, що:

$$P = \frac{4M_{руйн}}{l}.$$

Звідси:

Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності



Трансформування епюри  $\sigma$ .

Завантаження балки за межами границі пружності.

Визначення навантаження руйнування при згині балки за межами пружності

Для прямокутного поперечного перерізу визначають:

$$\begin{aligned} M_{руїн} &= \int_{F_{ст}} \sigma_T dF \cdot y + \int_{F_p} \sigma_T dF \cdot y = \\ &= \sigma_T \left( \int_F y \cdot dF + \int_F y \cdot dF \right) = \sigma_T (S_x^{ст} + S_x^p) = \\ &= \sigma_T \cdot W_p. \end{aligned}$$

де:  $W_n = S_x^{ст} + S_x^p$  – пластичний момент опору.

$$M_{руїн} = \sigma_m \cdot W_n; \quad M_x = \sigma_T \cdot W_x.$$

Знайдемо геометричні характеристики:

$$W_x = \frac{e \cdot h^2}{6};$$

$$W_n = \frac{e \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} + \frac{e \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{e \cdot h^2}{4}.$$

$$\text{Знайдемо: } \beta = \frac{M_{руїн}}{M_1} = \frac{W_{\sigma_T}}{W_x \sigma_T} = \frac{W_2}{W_x}$$

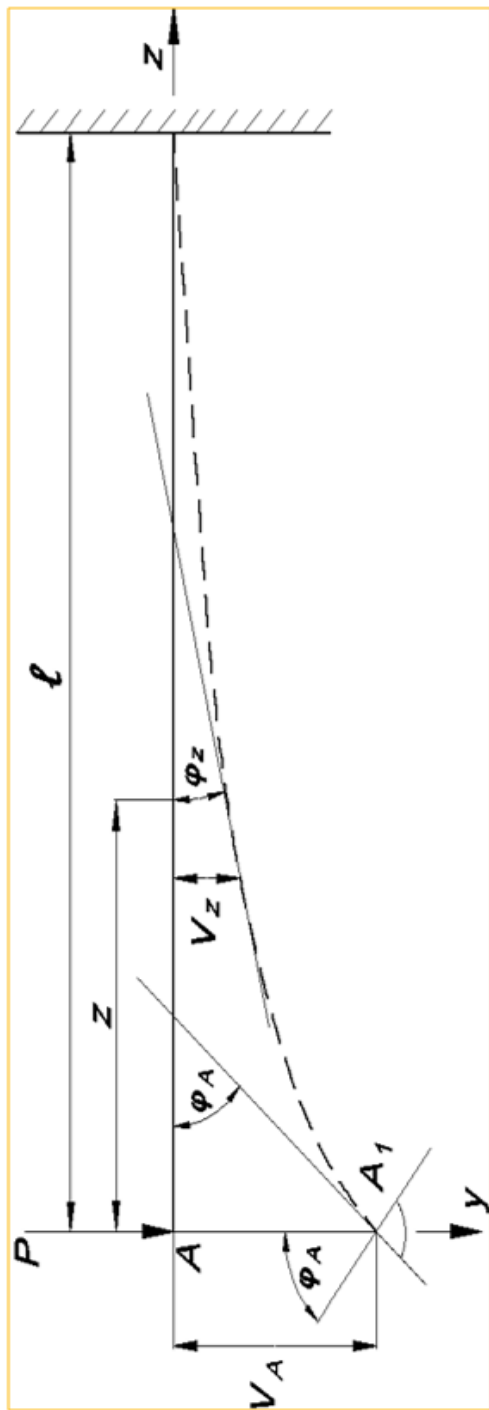
$$\beta = \frac{e \cdot h^2 / 4}{e \cdot h^2 / 6} = 1,5.$$

Таким чином, для балки з прямокутним поперечним перерізом руйнуючий момент в півтора рази більше моменту, який викликає появу текучості найбільш віддалених від нейтральної лінії волокон у найбільш навантаженому поперечному перерізі балки. Значення коефіцієнту  $\beta$  залежить від форми поперечного перерізу балки. Необхідно також мати на увазі, що для поперечних перерізів балки, які не мають горизонтальної осі симетрії у момент утворення пластичного шарніра нейтральна лінія не проходить через центр ваги перерізу, вона зміщується.

## 1.47. Слайди до мультимедійної презентації «Переміщення при згині»

### Переміщення при згині

У результаті дії зовнішнього навантаження вісь балки викривляється, набуваючи форму кривої, яка називається пружною лінією (пружна вісь балки).



Деформації при згині характеризуються двома величинами:

$V(z)$  – прогин (переміщення центру ваги поперечного перерізу по вертикалі або лінійна деформація);

$\phi(z)$  – кут повороту перерізу (кут нахилу поперечного перерізу відносно свого попереднього положення, або кут нахилу дотичної до деформованої вісі в цьому перерізі до горизонтальної координатної вісі  $z$ ). Її ще називають кутовою деформацією.

Враховуючи, що в зоні пружної деформації  $\phi(z) \leq 0,0017$  рад, то:

Переміщення при згині та можуть бути знайдені, коли буде відомо рівняння пружної лінії:

$$V_{(z)} = f(z)$$

$$tg \phi = \frac{dV}{dz} \approx \phi.$$

У разі чистого згину рівняння кривизни набуває вигляду:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M}{E \cdot I}.$$

З курсу математичного аналізу відомо, що кривизна плоскої кривої знаходиться за формулою:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2V}{dz^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]^3}}.$$

Знехтувавши виразом  $\left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \approx 0$ , вираз набуває вигляду:

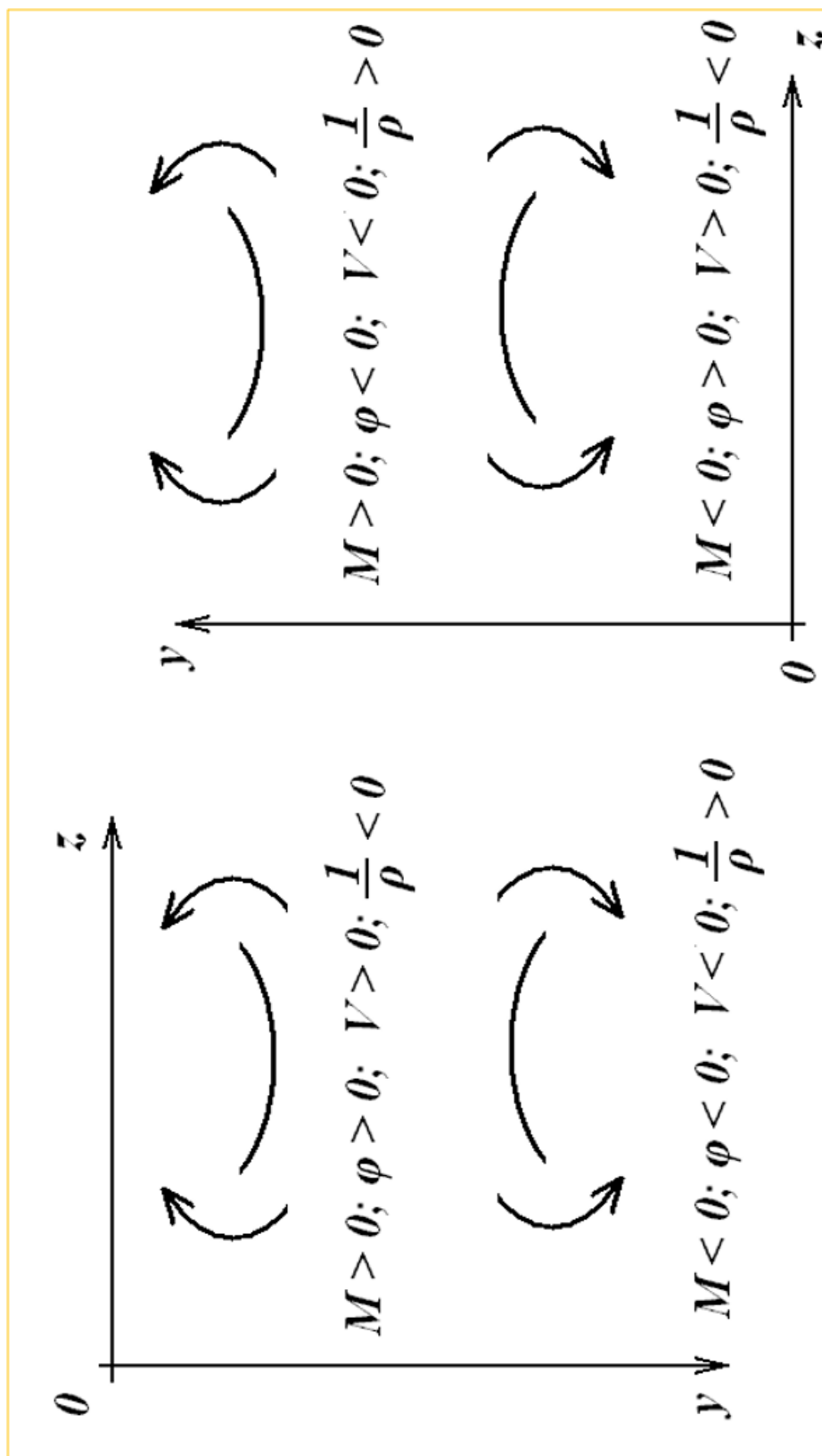
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2V}{dz^2}.$$

Прирівнявши праві частини виразів, отримуємо:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \pm \frac{M}{E \cdot I}$$

- диференціальне  
рівняння зігнутої вісі  
балки

*Залежність знаку у диференціальному рівнянні зігнутої вісі балки від вибору системи координат.*



Правило знаків для кута повороту  $\varphi_{(z)}$  :

$\varphi_{(z)} > 0$  , якщо він відповідає коротшому шляху повороту вісь  $z$  до  $y$ .  
Враховуючи викладене, очевидно, що у разі, коли вісь  $y$  напрямлена  
вниз в рівнянні буде знак «мінус», тобто:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{E \cdot I}.$$

Для визначення кута повороту та прогину проінтегруємо вираз по  $z$ :

$$\frac{dV}{dz} = \varphi(z) = -\frac{1}{E \cdot I} \cdot \left[ \int M_x \cdot dz + C \right]$$

В результаті другого інтегрування:

$$V(z) = -\frac{1}{EI} \left[ \int dz \int M_x \cdot dz + Cz + D \right]$$

При цьому отримуємо сталі інтегрування  $C$  і  $D$ , які  
визначаються із граничних умов на кінцях ділянки балки. Кожен  
випадок матиме свої граничні умови.



### Приклад №1

Для консольної балки записати рівняння зігнутої осі та знайти максимальний кут повороту і прогин.

$$\text{Вираз має вигляд: } EI \cdot \frac{d^2V}{dz^2} = -M_x.$$

Оскільки балка має одну ділянку завантаження, то маємо:

$$M_x = -P \cdot z;$$

$$EI \cdot \frac{d^2V}{dz^2} = -(-M) = -(-P \cdot z) = P \cdot z;$$

$$EI \cdot \frac{d^2V}{dz^2} = P \cdot z.$$

Інтегруючи двічі, отримуємо вирази для  $\varphi$  і  $V$ :

$$EI \cdot \varphi(z) = P \cdot \frac{z^2}{2} + C;$$

$$EI \cdot V(z) = P \cdot \frac{z^3}{6} + C \cdot z + D.$$

а)

б)

Сталі інтегрування  $C$  і  $D$  знаходимо з граничних умов:

*Перша гранична умова:*

$$z=l, \quad \varphi_{(z=l)}=0. \quad (\text{в})$$

Підставимо граничні умови у вираз (а).

$$P \cdot \frac{l^2}{2} + C = 0;$$

$$C = -\frac{P \cdot l^2}{2}.$$

Вираз (б) для прогинів має вигляд:

$$EI \cdot V(z) = P \cdot \frac{z^3}{6} - P \cdot \frac{l^2}{2} \cdot z + D = 0. \quad (\text{г})$$

*Друга гранична умова:*

$$z=0; \quad V_{(z=0)}=0; \quad (\text{д})$$

$$P \cdot \frac{l^3}{6} - P \cdot \frac{l^3}{2} + D = 0;$$

$$D = \frac{P \cdot l^3}{3}.$$

Визначивши сталі С і D інтегрування, можна остаточно записати вирази для кута повороту і прогину. Відповідно до цього вирази для кута повороту і прогину мають вигляд:

$$EI \cdot \varphi_{(z)} = P \cdot \frac{z^2}{2} - P \cdot \frac{l^2}{2};$$

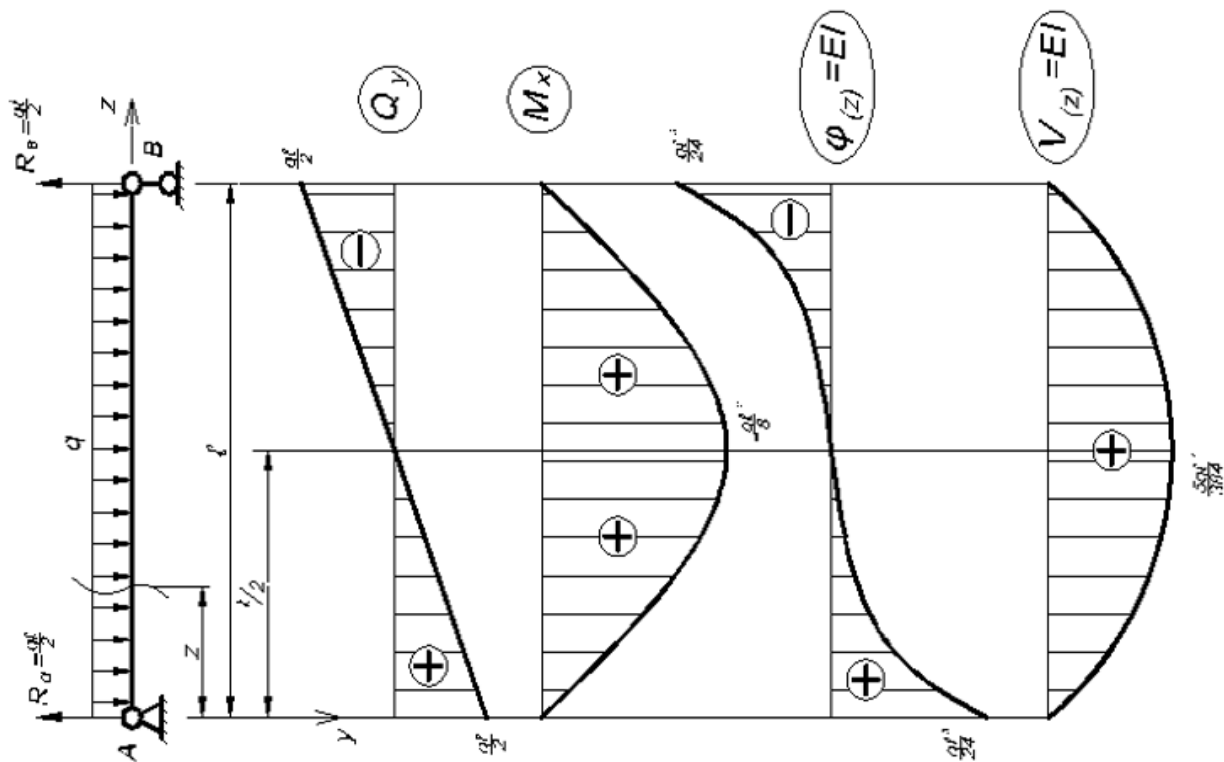
$$EI \cdot V_{(z)} = P \cdot \frac{z^3}{6} - P \cdot \frac{l^2}{2} \cdot z + P \cdot \frac{l^3}{3}.$$

З рівняння очевидно, що максимальні значення  $\varphi$  і  $V$  набудуть, коли  $z=0$ :

$$EI \cdot \varphi_{\max} = -\frac{P \cdot l^2}{2};$$

$$EI \cdot V_{\max} = \frac{P \cdot l^3}{3}.$$

Сталі інтегрування С і D називають *початковими геометричними параметрами*.



### Приклад №2

Для однопрогінної балки, завантаженої рівномірно-розподіленим навантаженням, записати рівняння зігнутої осі, знайти максимальне значення кута повороту  $\varphi(z)$  та прогину  $V(z)$ .

1. Визначимо опорні реакції та будемо епюри  $Q_y$  і  $M_x$ .
2. Вираз моменту згину для довільного перерізу балки має вигляд:

$$M_x = \frac{q \cdot l}{2} \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}.$$

3. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки:

$$EI \cdot \frac{d^2 V}{dz^2} = -M(x) = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot z + \frac{q \cdot z^2}{2}.$$

Намітимо три перерізи по довжині балки:

$$z=0; \quad z=\frac{l}{2}; \quad z=l.$$

$$\underline{z=0};$$

$$EI \cdot \varphi_{(z=0)} = \frac{q \cdot l^3}{24}$$

$$EI \cdot V_{(z=0)} = 0;$$

$$\underline{z=\frac{l}{2}};$$

$$EI \cdot \varphi_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{q}{6} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{q \cdot l^3}{24} = 0;$$

$$EI \cdot V_{(z=\frac{l}{2})} = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 + \frac{q}{24} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^4 + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{384} \cdot q \cdot l^4.$$

$$\underline{z=l};$$

$$EI \cdot \varphi_{(z=l)} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot z^2 + \frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q \cdot l^3}{24} = -\frac{q \cdot l^3}{24};$$

$$EI \cdot V_{(z=l)} = 0$$

Під час побудови епюр використовуємо диференціальні залежності:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q;$$

$$\frac{dM}{dz} = Q_y;$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{E_y};$$

$$\frac{dV}{dz} = \varphi_{(z)}.$$

4. Інтегруючи рівняння, двічі отримуємо вирази для  $\varphi$  і  $V$  відповідно:

$$EI \cdot \varphi(z) = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot z^2 + \frac{q \cdot z^3}{6} + C;$$

$$EI \cdot V(z) = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot z^3 + \frac{q \cdot z^4}{24} + C \cdot z + D.$$

5. Із граничних умов визначаємо сталі інтегрування  $C$  і  $D$ :

$$1. \quad z = 0; \quad EI \cdot V(z) = 0; \quad D = 0.$$

$$2. \quad z = l; \quad EI \cdot V(z) = -\frac{q \cdot l^4}{12} + \frac{q \cdot l^4}{24} + C \cdot l = 0 \quad C = \frac{q \cdot l^3}{24}.$$

6. Виходячи з цього, вирази для  $\varphi$  і  $V$  набувають вигляду:

$$EI \cdot \varphi(z) = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot z^2 + \frac{q \cdot z^3}{6} + \frac{q \cdot l^3}{24};$$

$$EI \cdot V(z) = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot z^3 + \frac{q \cdot z^4}{24} + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot z.$$

У рівняння підставляємо координати характерних перерізів, визначаємо  $\varphi$  і  $V$  та будемо їх епюри

## Перевірка жорсткості балки при згині

- В інженерній практиці відомі випадки, коли для балки, поперечний переріз якої підібрано із умов міцності, переміщення досягають значної величини і не дають можливість нормально експлуатувати таку конструкцію. При цьому величина максимального прогину  $f$  (стріла прогину) не повинна перевищувати допустиме значення, що приводиться в нормах:

$$V_{\max} = f \leq [f].$$

Величина допустимого значення, залежить від призначення конструкції і може коливатись:

$$[f] = \left( \frac{1}{150} \div \frac{1}{1000} \right) \cdot l.$$

## Розділ 2. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

### 2.1. Практична робота №1 «Геометричні характеристики плоских перерізів»

#### 2.1.1. Задача 1 «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі»

На рис. 2.1 зображено плоский переріз конструкції, яка складається з двотаврової балки №20 (позиція 5) та чотирьох нерівносторонніх кутників 70x45x5 (позиції 1, 2, 3 та 4). Необхідно знайти осьові моменти інерції  $I_{xc}$ ,  $I_{yc}$  для даного перерізу, моменти опору перерізу  $W_{xc}$ ,  $W_{yc}$  та радіуси інерції  $i_x$ ,  $i_y$ .

1. Виконуємо креслення перерізу на міліметровому папері, вказуємо розміри та вибираємо осі координат з початком в центрі ваги кожного елемента конструкції (рис. 2.1).

2. Випишуємо дані з таблиці сортаменту (додаток 1). Переводимо значення всіх параметрів із мм в см. Необхідно пам'ятати про приведення всіх показників до однакових одиниць виміру.

Таблиця 2.1. Вихідні дані до задачі 1

Двотаврова балка №20	Кутник нерівносторонній 70x45x5
$h=200\text{мм}=20\text{см}$	$B=70\text{мм}=7\text{см}$
$b=100\text{мм}=10\text{см}$	$b=45\text{мм}=4,5\text{см}$
$I_x=1840\text{см}^4$	$x_0=1,05\text{см}$
$I_y=115\text{см}^4$	$y_0=2,28\text{см}$
$F=26,8\text{см}^2$	$F=5,59\text{см}^2$
	$I_x=27,8\text{см}^4$
	$I_y=9,05\text{см}^4$

**Знайти:**  $I_{xc}$ ;  $I_{yc}$ ;  $W_{xc}$ ;  $W_{yc}$ ;  $i_x$ ;  $i_y$ .

1. Розрахуємо центри ваги кожної із складових частин конструкції:

$$C_5 = C_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad C_1 \begin{cases} x_1 = -x_0 = -1,05 \text{ см} \\ y_1 = \frac{h_5}{2} + y_{0_1} = \frac{20}{2} + 2,28 = 12,28 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} x_2 = 1,05 \text{ см} \\ y_2 = 12,28 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} x_3 = 1,05 \text{ см} \\ y_3 = -12,28 \text{ см} \end{cases}$$

$$C_4 \begin{cases} x_4 = -1,05 \text{ см} \\ y_4 = -12,28 \text{ см} \end{cases}$$

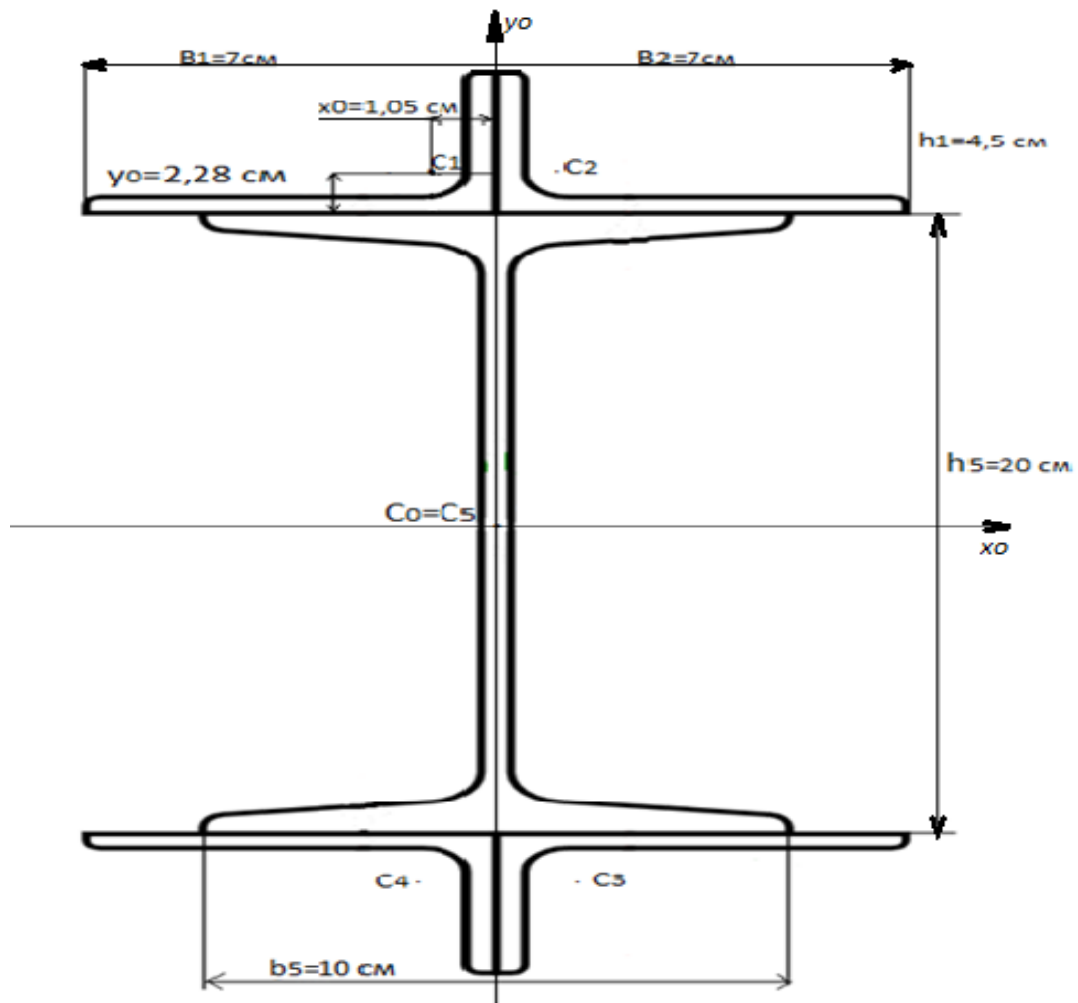


Рис.2.1. Рисунок до задачі 1 «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі»

2. Знаходимо момент інерції відносно осей

$$I_{xc} = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} + I_{x_4} + I_{x_5} + F_1 y_1^2 + F_2 y_2^2 + F_3 y_3^2 + F_4 y_4^2 + F_5 y_5^2 =$$

$$27,8 + 27,8 + 27,8 + 27,8 + 1840 + 5,59 \cdot 12,28^2 + 5,59 \cdot 12,28^2 + 5,59 \cdot (-12,28)^2 +$$

$$5,59 \cdot (-12,28)^2 + 26,8 \cdot 0^2 = 5323 \text{ см}^4 \quad (2.1)$$

$$I_{yc} = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3} + I_{y_4} + I_{y_5} + F_1 x_1^2 + F_2 x_2^2 + F_3 x_3^2 + F_4 x_4^2 + F_5 x_5^2 =$$

$$9,05 + 9,05 + 9,05 + 9,05 + 115 + 5,59 \cdot (-1,05)^2 + 5,59 \cdot (-1,05)^2 +$$

$$5,59 \cdot 1,05^2 + 5,59 \cdot 1,05^2 + 26,8 \cdot 0^2 = 175,85 \text{ см}^4 \quad (2.2)$$



3. Знаходимо моменти опору перерізу:

$$W_{xc} = \frac{I_{xc}}{y_{max}} = \frac{5323}{\frac{h_5 + b_1}{2}} = \frac{5323}{10 + 4,5} = \frac{5323}{14,5} = 367,1 \text{ см}^3 \quad (2.3)$$

$$W_{yc} = \frac{I_{yc}}{x_{max}} = \frac{175,85}{B_1} = \frac{175,85}{7} = 25,12 \text{ см}^3 \quad (2.4)$$

4. Розраховуємо радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{xc}}{\Sigma F}} = \sqrt{\frac{5323}{51,26}} = 10,41 \text{ см} \quad (2.5)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{yc}}{\Sigma F}} = \sqrt{\frac{175,85}{51,26}} = 1,89 \text{ см} \quad (2.6)$$

$$\Sigma F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 5,59 + 5,59 + 5,59 + 5,59 + 26,8 = 49,16 \text{ см}^2 \quad (2.7)$$

**Відповідь:**

$$I_{xc} = 5323 \text{ см}^4; I_{yc} = 175,85 \text{ см}^4;$$

$$W_{xc} = 367,1 \text{ см}^3; W_{yc} = 25,12 \text{ см}^3;$$

$$i_{xc} = 10,19 \text{ см}; i_{yc} = 1,85 \text{ см}$$

### **2.1.2. Задача 2 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів»**

На рис. 2.2 зображено плоский несиметричний переріз із зміщеним центром ваги. Переріз складається з круга діаметром  $a=8$  см і вирізаного а ньому отвору круглої форми діаметром  $b=2$  см. Необхідно знайти координати центру ваги конструкції  $X_c$ ;  $Y_c$ , осьові моменти інерції  $I_{xc}$ ;  $I_{yc}$  моменти опору перерізу  $W_{xc}$ ;  $W_{yc}$  та радіуси інерції  $i_{xc}$ ;  $i_{yc}$ .

**Дано:**  $a=8$  см;  $b=2$  см.

**Знайти:**  $X_c$ ;  $Y_c$ ;  $I_{xc}$ ;  $I_{yc}$ ;  $W_{xc}$ ;  $W_{yc}$ ;  $i_{xc}$ ;  $i_{yc}$ .

1. Знайти площі кожної з фігур. Т.я. площа фігури  $F_2$  є вирізаною, то її приймаємо зі знаком “-”

$$F_1 = \pi R^2 \quad F_1 = 3,14 \cdot 4^2 = 50,24 \text{ см}^2 \quad (2.8)$$

$$F_2 = \pi R^2 \quad F_2 = -3,14 \cdot 1^2 = -3,14 \text{ см}^2 \quad (2.9)$$

2. Центр першої фігури приймаємо за початковий центр ваги конструкції:

$$C_1 \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -1 \end{cases}$$

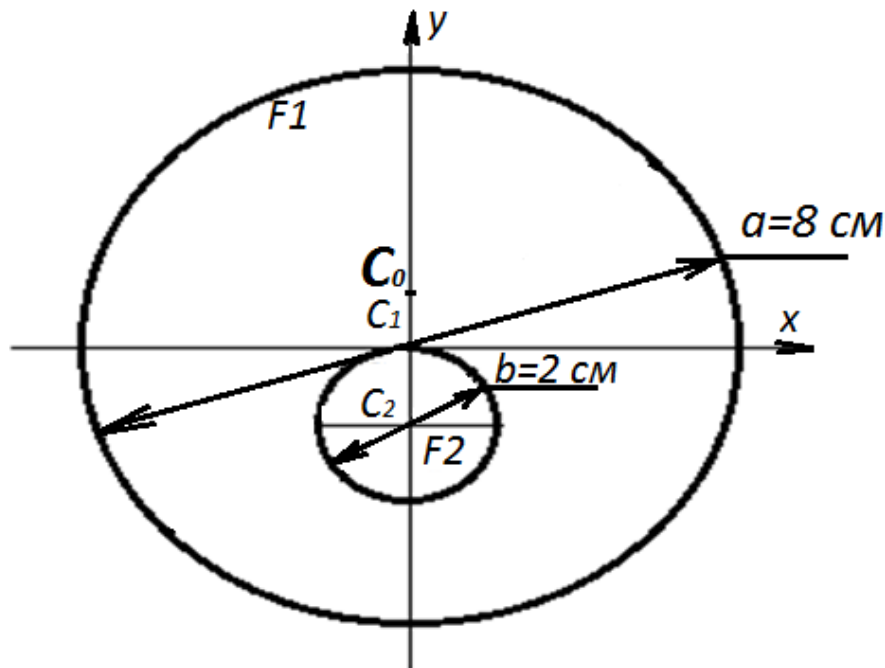


Рис.2.2. Рисунок до задачі 2 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів»

3. Знаходимо центри ваги конструкції

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{3,14}{47,1} = 0,07 \text{ см} \quad (2.10)$$

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum F} = \frac{0}{47,1} = 0 \text{ см} \quad (2.11)$$

$$\sum F = F_1 + (-F_2) = 47,1 \text{ см}^2 \quad (2.12)$$

$$S_{x_1} = F_1 \cdot y_1 = 50,24 \cdot 0 = 0 \quad (2.13)$$

$$S_{x_2} = F_2 \cdot y_2 = -3,14 \cdot (-1) = 3,14 \quad (2.14)$$

$$S_{y_1} = F_1 \cdot x_1 = 0 \quad (2.15)$$

$$S_{y_2} = F_2 \cdot x_2 = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{Координати центра ваги в точці } C_0 = \begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = 0,07 \text{ см} \end{cases}$$

4. Знаходимо моменти інерції відносно осей:

$$I_{x1} = I_{y1} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{64} = 200,96 \text{ см}^4 \quad (2.17)$$

$$I_{x2} = I_{y2} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{64} = 0,79 \text{ см}^4 \quad (2.18)$$

5. Знаходимо координати центрів ваги кожної із складових частин конструкції по відношенню до центру ваги всієї конструкції:

$$C_1 \begin{cases} x_1 = x_1 - x_c = 0 \\ y_1 = y_1 - y_c = -0,07 \end{cases} \quad (2.19)$$

$$C_2 \begin{cases} x_2 = x_2 - x_c = 0 \\ y_2 = y_2 - y_c = -1 - 0,07 = -1,07 \end{cases} \quad (2.20)$$

6. Знаходимо моменти інерції всієї конструкції:

$$I_{x_c} = I_{x1} - I_{x2} + F_1(y_1)^2 - F_2(y_2)^2 = 200,96 - 0,79 + 50,24 \cdot (0,07)^2 - 3,14 \cdot (-1,07)^2 = 196,83 \text{ см}^4 \quad (2.21)$$

$$I_{y_c} = I_{y1} - I_{y2} + F_1(x_1)^2 - F_2(x_2)^2 = 200,96 - 0,79 + 50,24 \cdot (0)^2 - 3,14 \cdot (0)^2 = 200,17 \text{ см}^4 \quad (2.22)$$

7. Знаходимо моменти опору перерізу:

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{max}} = \frac{196,83}{4,07} = 48,36 \text{ см}^3 \quad (2.23)$$

$$W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{x_{max}} = \frac{200,17}{4} = 50,04 \text{ см}^3 \quad (2.24)$$

8. Знаходимо радіуси інерції:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_{x_c}}{\sum F}} = \sqrt{\frac{196,825}{47,1}} = 2,05 \text{ см} \quad (2.25)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_{y_c}}{\sum F}} = \sqrt{\frac{200,175}{47,1}} = 2,06 \text{ см} \quad (2.26)$$

$$\sum F = F_1 - F_2 = 50,24 - 3,14 = 47,1 \text{ см}^2 \quad (2.27)$$

**Відповідь:**  $X_c=0$ ;  $Y_c=0,07$  см;  $I_{x_c} = 196,83 \text{ см}^4$ ;  $I_{y_c} = 200,17 \text{ см}^4$ ;  
 $W_{x_c} = 48,36 \text{ см}^3$ ;  $W_{y_c} = 50,04 \text{ см}^3$ ;  $i_x = 2,05$  см;  $i_y = 2,06$  см

### 2.1.3. Задача 3 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів»

Для поперечного перерізу, що складається із декількох фігур, необхідно:

- 1) накреслити переріз в відповідному масштабі, вказати всі необхідні розміри і вибрати осі (при розрахунку всі необхідні дані потрібно брати із таблиці сортаменту);
- 2) визначити координати центра ваги;
- 3) обчислити осьові і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей;
- 4) зробити перевірку правильності виконання.

**Дано:**

- 1) кутник нерівносторонній № 70x45x5;
- 2) швелер №14;
- 3) лист №16.

Схема розташування фігур зображена на рис. 2.3.



Рис.2.3. Схема розташування фігур

**Примітка:** площа та момент інерції для листа знаходиться як для прямокутника. За схемою висоту листа приймаємо рівною висоті швелера, за умовою його товщини  $b = 16\text{мм} = 1,6\text{ см}$ . Розрахуємо параметри листа.

$$F_3 = h \cdot b = 14 \cdot 1,6 = 22,4 \text{ см}^2 \quad (2.28)$$

$$I_{x3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 14^3}{12} = 365,87 \text{ см}^4 \quad (2.29)$$

$$I_{y3} = \frac{hb^3}{12} = \frac{1,6^3 \cdot 14}{12} = 4,78 \text{ см}^4 \quad (2.30)$$

Таблиця 2.2. Вихідні дані до задачі 3

<b>№1. Кутник нерівносторонній № 70x45x5</b>	<b>№2. Швелер №14</b>	<b>№3. Лист №16</b>
$B_1=70\text{мм}=7\text{см}$ $b_1=45\text{мм}=4,5\text{см}$ $x_{01}=1,05\text{см}$ $y_{01}=2,28\text{см}$ $F_1=5,59\text{см}^2$ $I_{x1}=27,8\text{см}^4$ $I_{y1}=9,05\text{см}^4$ $\text{tg}\alpha=0,404$	$h_2=140\text{мм}=14\text{см}$ $b_2=58\text{мм}=5,8\text{см}$ $d_2=4,9\text{мм}=0,49\text{см}$ $t_2=8,1\text{мм}=0,81\text{см}$ $F_2=15,6\text{см}^2$ $I_{x2}=491\text{см}^4$ $I_{y2}=45,4\text{см}^4$ $Z_{02}=1,67\text{см}$	$b_3=16\text{мм}=1,6\text{см}$ $h_3=140\text{мм}=14\text{см}$ $F_3=22,4\text{см}^2$ $I_{x3}=365,86\text{см}^4$ $I_{y3}=4,778\text{см}^4$

**Знайти:**  $I_{xc}$ ;  $I_{yc}$ ;  $W_{xc}$ ;  $W_{yc}$ ;  $i_{xc}$ ;  $i_{yc}$ .

1. Одну із фігур приймаємо з нульовими координатами за початок відліку. В нашому випадку це лист.

$$C_3 \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$C_1 \begin{cases} x_1 = -\left(\frac{1}{2}b_3 + b_2 + (B_1 - x_{01})\right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 + 5,8 + (7 - 1,05)\right) = -12,55 \\ y_1 = \frac{1}{2}h_2 - y_{01} = \frac{14}{2} - 2,28 = 4,72 \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} x_2 = -\left(\frac{1}{2}b_3 + Z_{02}\right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot 1,6 + 1,67\right) = -2,47 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

2. Знайти центр ваги всієї конструкції.

$$x_c = \frac{\sum S y}{\sum F} = \frac{-70,16 - 38,53 + 0}{43,59} = -2,49 \quad (2.31)$$

$$S_{y_1} = F_1 \cdot x_1 = 5,59 \cdot (-12,55) = -70,16 \text{ см}^3 \quad (2.32)$$

$$S_{y_2} = F_2 \cdot x_2 = 15,6 \cdot (-2,47) = -38,53 \text{ см}^3 \quad (2.33)$$

$$S_{y_3} = F_3 \cdot x_3 = 22,4 \cdot 0 = 0 \text{ см}^3 \quad (2.34)$$

$$\sum F = F_1 + F_2 + F_3 = 5,59 + 15,6 + 22,4 = 43,59 \text{ см}^2 \quad (2.35)$$

$$S_{x_1} = F_1 \cdot y_1 = 5,59 \cdot (4,72) = 26,39 \text{ см}^3 \quad (2.36)$$

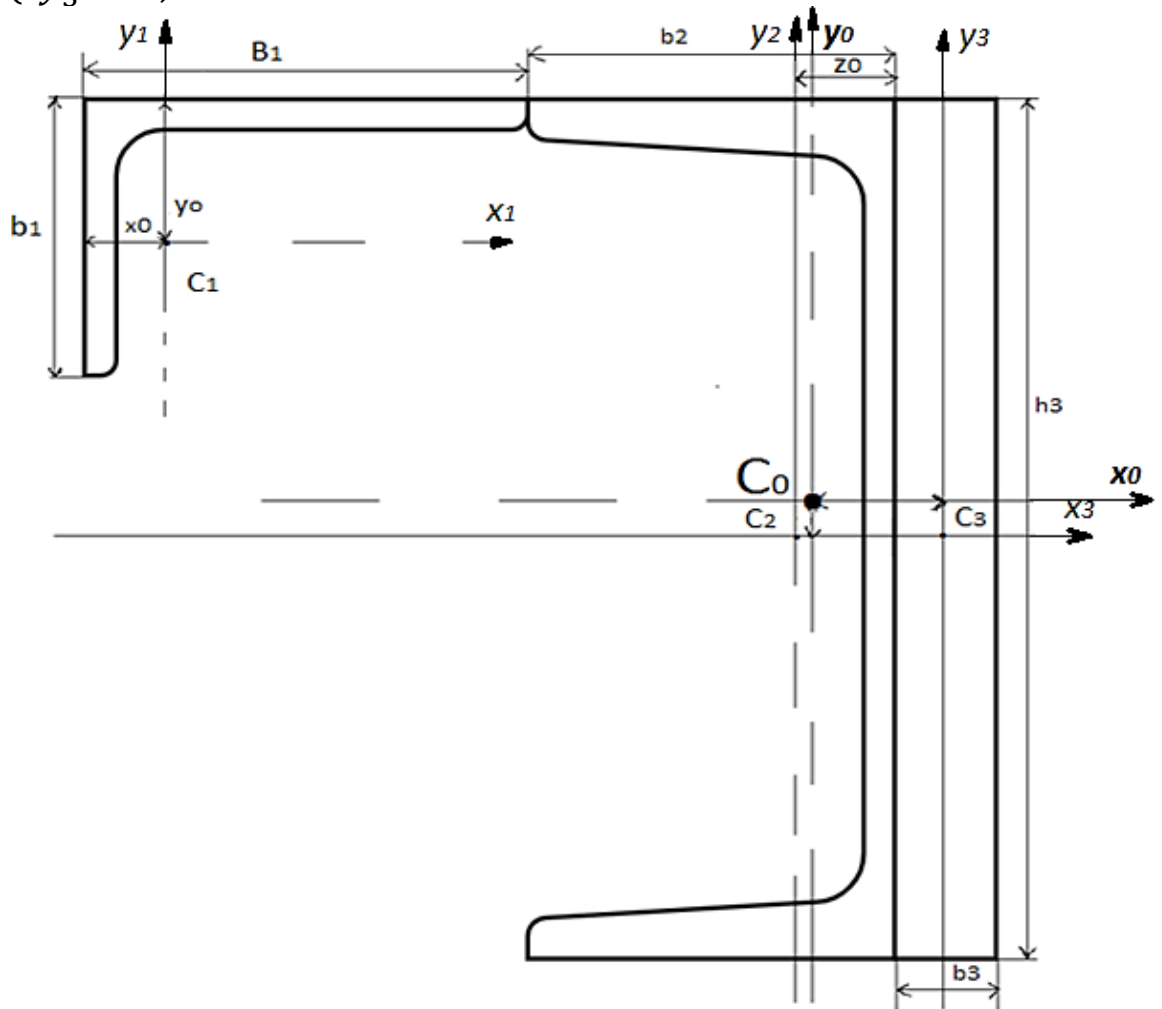
$$S_{x_2} = F_2 \cdot y_2 = 15,6 \cdot 0 = 0 \text{ см}^3 \quad (2.37)$$

$$S_{x_3} = F_3 \cdot y_3 = 22,4 \cdot 0 = 0 \text{ см}^3 \quad (2.38)$$

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{26,39}{43,59} = 0,61 \quad (2.39)$$

Координати центру ваги:

$$C_0 \begin{cases} x_3 = -2,49 \\ y_3 = 0,61 \end{cases}$$



*Рис.2.4. Рисунок до задачі 3 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів»*

3. Знаходимо центр ваги кожної із складових частин конструкції по відношенню до центра ваги всієї конструкції.

$$C_1 \begin{cases} x'_1 = x_1 - x_c = -12,55 - (-2,49) = -10,06 \\ y'_1 = y_1 - y_c = 4,72 - 0,61 = 4,12 \end{cases}$$

$$C_2 \begin{cases} x'_2 = x_2 - x_c = -2,47 - (-2,49) = 0,02 \\ y'_2 = y_2 - y_c = 0 - 0,61 = -0,61 \end{cases}$$

$$C_3 \begin{cases} x'_3 = x_3 - x_c = 0 - 2,49 = -2,49 \\ y'_3 = y_3 - y_c = 0 - 0,61 = -0,61 \end{cases}$$

4. Розрахуємо осьові моменти інерції:

$$I_{x_c} = I_{x_1} + I_{x_2} + I_{x_3} + F_1(y_1')^2 + F_2(y_2')^2 + F_3(y_3')^2 =$$

$$27,8 + 491 + 365,86 + 5,59 \cdot (4,12)^2 + 22,4 \cdot (-0,61)^2 +$$

$$15,6 \cdot (-0,61)^2 = 884,66 + 94,89 + 8,34 + 5,81 = 993,7 \text{ см}^4 \quad (2.40)$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3} + F_1(x_1')^2 + F_2(x_2')^2 + F_3(x_3')^2 =$$

$$9,05 + 45,4 + 4,78 + 5,59 \cdot (-10,06)^2 + 15,6 \cdot (-0,02)^2 +$$

$$22,4 \cdot (2,49)^2 = 59,23 + 565,73 + 0,01 + 138,88 = 763,85 \text{ см}^4 \quad (2.41)$$

5. Знаходимо відцентровий момент інерції всієї конструкції:

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + F_1 x'_1 y'_1 + I_{x_2 y_2} + F_2 x'_2 y'_2 + I_{x_3 y_3} + F_3 x'_3 y'_3 \quad (2.42)$$

6. Для симетричних фігур:

$$I_{x_2 y_2} = I_{x_3 y_3} = 0 \text{ см}^4 \quad (2.43)$$

Для кутника:

$$I_{x_c y_c} = \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \cdot \sin 2\alpha \quad (2.44)$$

Для нерівностороннього кутника:

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_u - I_v}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{27,8 - 9,05}{2} \cdot 2 \cdot 22^\circ = 9,375 \cdot 0,9657 = 9,05 \text{ см}^4 \quad (2.45)$$

$$I_{x_c y_c} = 0 + 0 + 9,05 + 5,59 \cdot (-10,06) \cdot 4,12 + 15,6 \cdot (-0,61) \cdot (0,02) +$$

$$22,4 \cdot (2,49) \cdot (-0,61) = 9,05 - 231,69 - 0,19 - 34,02 = -256,85 \text{ см}^4 \quad (2.42a)$$

7. Виконаємо перевірку:

$$I_{u/v} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + 4(I_{x_c y_c})^2} \quad (2.46)$$

$$I_{u/v} = \frac{993,7 + 763,85}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{993,7 - 763,85}{2}\right)^2 + 4 \cdot (-256,85)^2} = 878,78 \pm$$

$$\sqrt{13208 + 263887} = 878,78 \pm \sqrt{277095} = 878,78 \pm 526,4 \quad (2.46a)$$

$$I_u = 1405,28$$

$$I_v = 352,48$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} I_{xc} + I_{yc} &= I_u + I_v & (2.47) \\ 993,7 + 763,85 &= 1405,28 + 352,48 \\ 1757,76 &= 1756,55 \end{aligned}$$

Обчислимо похибку:

$$\Delta = \left| \frac{\Delta_i - \Delta_2}{\Delta_1} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{1757,76 - 1756,55}{1757,76} \right| \cdot 100\% = 0,07\%$$

Похибка є допустимою:  $\Delta = 0,07\% \leq 5\%$

## ***2.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Геометричні характеристики плоских перерізів»***

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до знаходження центру ваги плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність знаходження центру ваги конструкції (задача 3).



*Графічно-цифрове пояснення до знаходження центру ваги плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів*

## ***2.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Геометричні характеристики плоских перерізів»***








1. Номери профілів вказані в завданні до роботи. Значення розмірів профілів вказані в таблиці сортаменту (див. додаток). Виконати креслення заданого перерізу в масштабі згідно до варіанту.



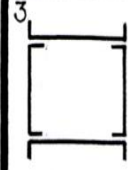
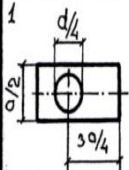
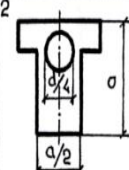
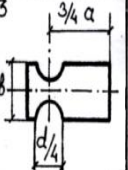


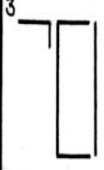


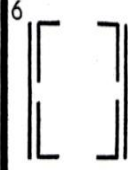
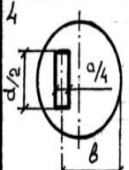
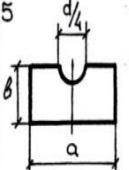
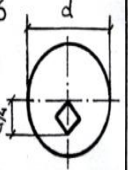

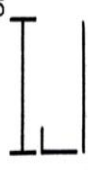
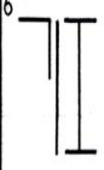

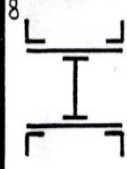
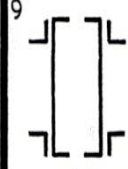

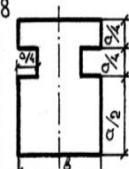
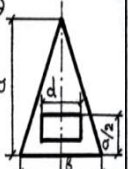





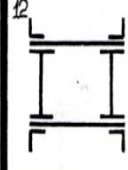
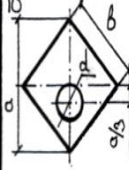
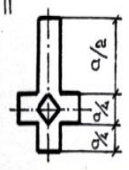
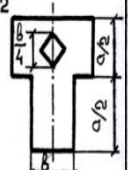




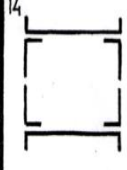
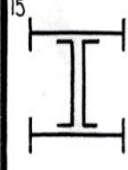
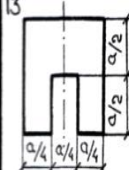
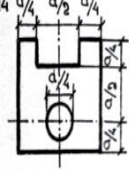
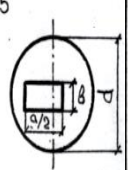

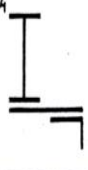


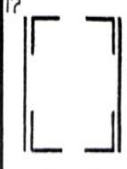

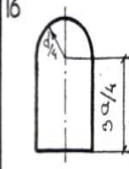
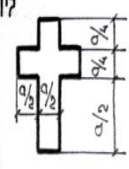
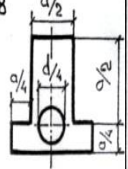

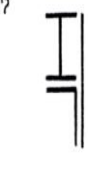

2. Вибрати допоміжні координатні осі.



3. Знайти координати центру ваги перерізу.
4. Визначити геометричні характеристики складових частин перерізу.
5. Визначити осьові та відцентрові моменти інерції площі перерізу відносно допоміжних центральних осей.
6. Визначити положення головних центральних осей інерції перерізу.
7. Визначити величини головних центральних моментів інерції перерізу.
8. Визначити осьові моменти перерізу.
9. Визначити величини головних радіусів інерції перерізу.
10. Виконати перевірку.

Таблиця 2.3.

№	№ профілів							Розміри		
					Лист 			a, мм	b, мм	c, мм
1	24	20	8	18	10	9/9	56x36x5	80	40	20
2	12	14	22	20	20	12,5/12	80x50x6	100	60	40
3	27	18	10	14	14	16/10	63x40x6	60	20	16
4	30	22	24	33	12	20/12	110x70x80	40	30	60
5	10	24a	12	16a	8	11/8	63x40x5	40	40	100
6	18	27	27	24	10	14/10	90x56x6	40	20	100
7	20	16	14	12	16	18/12	70x45x5	30	50	80
8	22	18	30	22	18	20/16	160x100x10	80	60	20
9	18 a	10	16	16	20	5/5	80x50x5	90	60	16
10	16	22a	27	20	14	8/6	180x110x10	60	30	10
11	14	27	22a	24	12	10/7	75x50x8	60	10	20
12	33	18	16a	18	10	16/10	90x56x8	70	24	10
13	24	33	20	20	18	14/12	63x40x6	40	40	20
14	30	20a	18	16a	16	7,5/5	110x63x10	100	80	60
15	24a	40	24	22a	20	11/7	56x36x4	40	10	80
16	36	22	20	27	10	9/9	90x56x6	80	25	60
17	22a	24	16	18	14	6,5/6	160x100x10	88	30	40
18	12	10	22	16	12	7/5	75x50x5	80	40	48
19	16	30	12	14	18	10/6,5	100x63x8	100	80	60
20	22	24a	24	18a	20	9/6	160x100x14	96	48	20
21	18	27	16a	12	16	10/10	110x70x8	80	64	24
22	14	36	33	24	10	5/4	140x90x8	100	40	20
23	20	22	14	10	12	8/8	100x63x6	120	60	40
24	10	18	20	22	18	14/9	80x50x6	60	48	16
25	16	24	18	8	14	9/7	140x90x10	96	60	30

ЗАДАЧА № 1			ЗАДАЧА № 2			ЗАДАЧА № 3		
1 	2 	3 	1 	2 	3 	1 	2 	3 
4 	5 	6 	4 	5 	6 	4 	5 	6 
7 	8 	9 	7 	8 	9 	7 	8 	9 
10 	11 	12 	10 	11 	12 	10 	11 	12 
13 	14 	15 	13 	14 	15 	13 	14 	15 
16 	17 	18 	16 	17 	18 	16 	17 	18 

## 2.4. Практична робота №2 «Центральний розтяг та стиск стрижнів»

### 2.4.1. Задача «Розрахунок ступінчастого стрижня на розтяг-стиск»

Для заданого статично визначеного стрижня необхідно:

- 1) побудувати епюру поздовжніх сил;
- 2) із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня на кожній ділянці;
- 3) побудувати епюру нормальних напружень;
- 4) визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

**Дано:**

$$F=0,002 \text{ м}^2 = 20 \text{ см}^2;$$

$$l_1 = 0,3 \text{ м}; l_2 = 0,3 \text{ м}; l_3 = 0,3 \text{ м}; l_4 = 0,3 \text{ м};$$

$$P_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}; P_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}; P_3 = 20 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

1. Розрахуємо поздовжню силу на кожній ділянці стрижня. Для цього пронумеруємо їх, починаючи з вільного кінця. Якщо дія сили викликає розтяг, то приймаємо знак «+», якщо стиск, то знак «-».

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad N_{1-1} &= N_{2-2} = 0; \\ \text{II.} \quad N_{3-3} &= N_{4-4} = P_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}; \\ \text{III.} \quad N_{5-5} &= N_{6-6} = P_1 - P_2 = 5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3 = 0; \\ \text{IV.} \quad N_{7-7} &= N_{8-8} = P_1 - P_2 - P_3 = (5 - 5 - 20) \cdot 10^3 = \\ &(-15 \cdot 10^3) \text{ Н} \end{aligned}$$

2. Площа поперечного перерізу стрижня:

$$F_1=F=0,002 \text{ м}^2;$$

$$F_2=2F=0,004 \text{ м}^2$$

3. Знаходимо нормальні напруження в перерізах.

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (2.48)$$

$$\sigma_{1-1} = \sigma_{2-2} = \frac{0}{0,002} = 0 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{3-3} = \sigma_{4-4} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,002} = 2500 \cdot 10^3 = 2,5 \cdot 10^6 = 2,5 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{5-5} = \sigma_{6-6} = \frac{0}{0,004} = 0;$$

$$\sigma_{7-7} = \sigma_{8-8} = \frac{(-15 \cdot 10^3)}{0,004} = -3750 \cdot 10^3 = (-3,75) \cdot 10^6 = -3,75 \text{ МПа.}$$

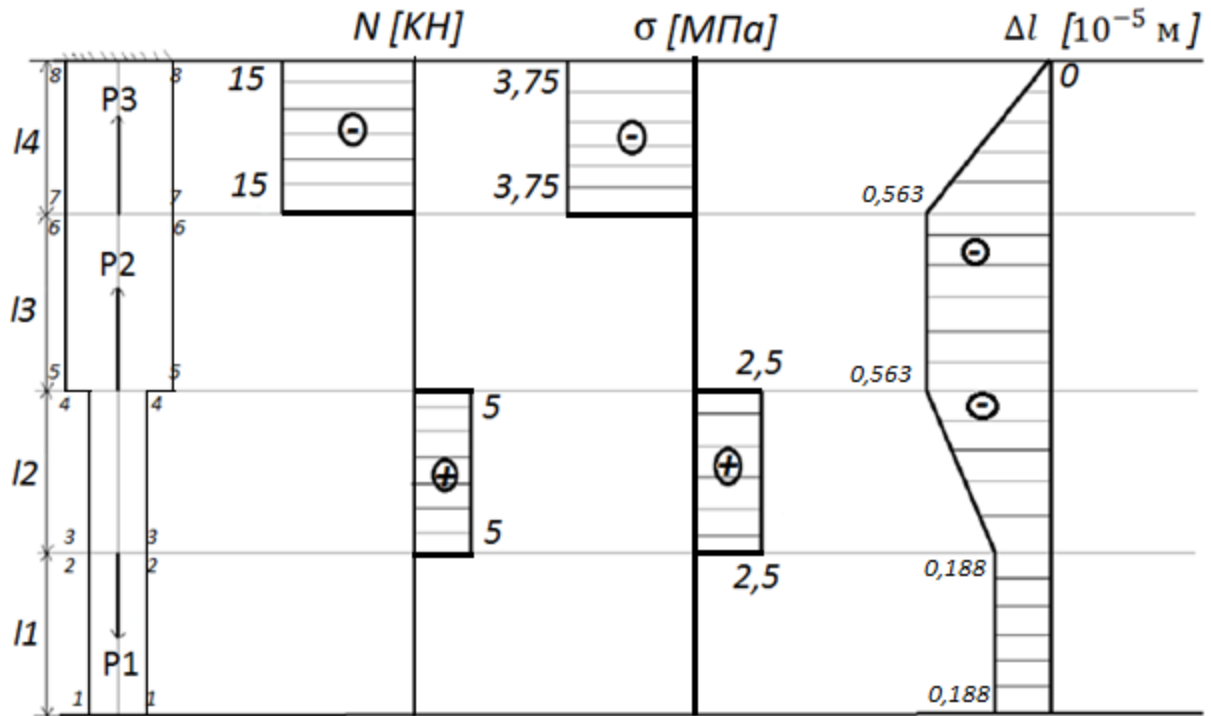


Рис.2.5. Розрахунок ступінчастого стрижня на розтяг-стиск

4. Визначаємо укорочення або подовження на ділянках стрижня. Будуємо епюру  $\Delta l$ , починаючи із защемленого кінця стрижня, додаючи значення деформації на кожній ділянці перерізу.

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (2.49)$$

$$\Delta l_I = \frac{0 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = 0 \text{ м}$$

$$\Delta l_{II} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,002} = \frac{375}{10^8} = 375 \cdot 10^{-8} = 0,375 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\Delta l_{III} = \frac{0 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,004} = 0 \text{ м}$$

$$\Delta l_{IV} = \frac{(-15) \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,004} = -563 \cdot 10^{-8} = (-0,563) \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

5. Знаходимо загальне подовження або укорочення

$$\Delta l = (l_I + l_{II} + l_{III} + l_{IV}) \quad (2.50)$$

$$\Delta L = (0 + 0,375 - 0,563 + 0) = (-0,188) \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

**Відповідь:** відбувається укорочення стрижня.

## **2.5. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Центральний розтяг та стиск стрижнів»**

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до методу перерізів, побудови епюри поздовжньої сили та визначення загального видовження або вкорочення стрижня. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність побудови епюр  $N_z$  та  $\Delta l$ .



*Графічно-цифрове пояснення до використання методу перерізів, побудови епюри поздовжньої сили та визначення загального видовження або вкорочення стрижня*

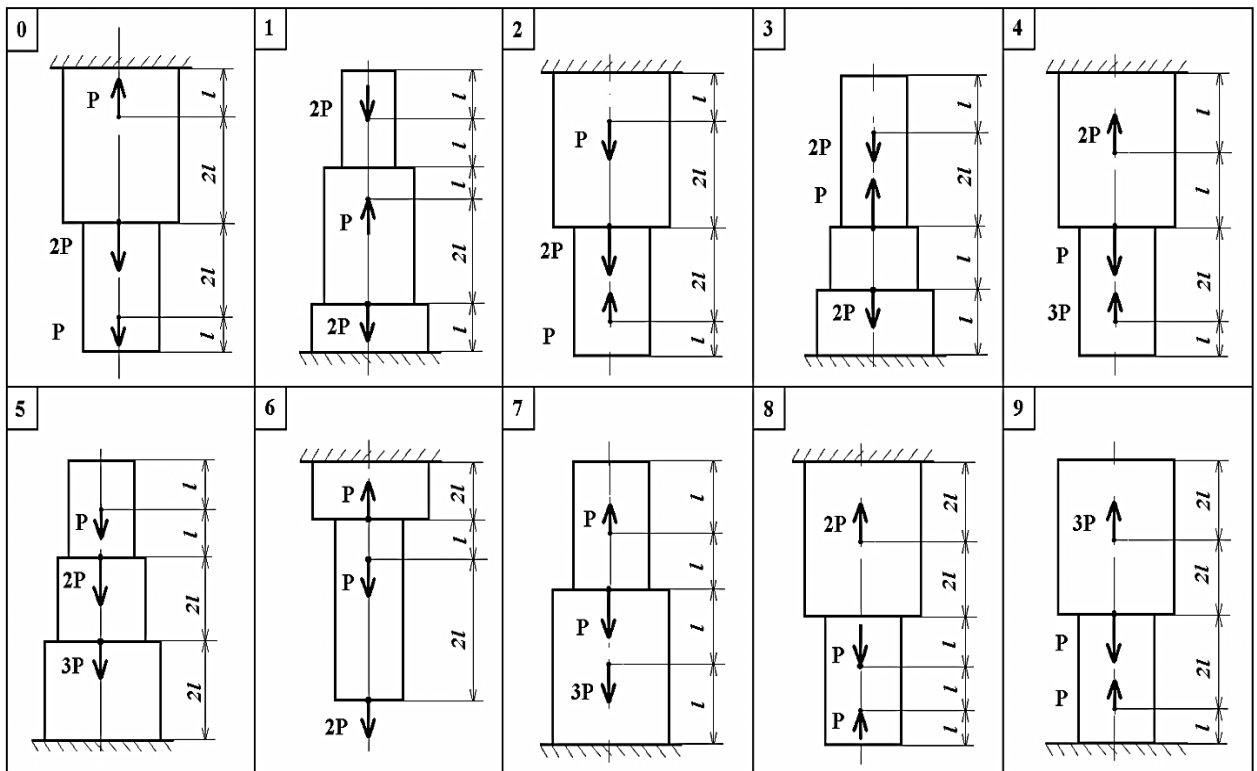
## **2.6. Завдання для самостійного виконання з теми «Центральний розтяг та стиск стрижнів»**

Для заданого статично визначеного стрижня необхідно: побудувати епюру поздовжніх сил; із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати поперечний переріз стрижня; побудувати епюру нормальних напружень; визначити загальне подовження поперечних перерізів, прийнявши  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Таблиця 2.4

Варіанти завдань для виконання задачі

Параметри задачі	Числові варіанти									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_1$ , кН	40	50	65	40	80	55	60	45	50	30
$P_2$ , кН	90	55	70	50	60	70	80	35	55	45
$P_3$ , кН	100	60	35	65	70	90	70	30	70	85
$l$ , м	0,3	0,4	0,5	0,3	0,9	0,1	0,3	0,7	0,8	0,4



### 2.7. Практична робота №3 «Кручення»

На стальний вал діють чотири моменти. Необхідно:

- 1) побудувати епюру моментів кручення;
- 2) при заданому значенні  $[\tau]$  визначити діаметр валу із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;
- 3) побудувати епюру кутів закручування;
- 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м). Модуль зсуву для сталі приймаємо:  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа

**Дано:**

$$M_1 = M_3 = 1700 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_2 = M_4 = 700 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$a = b = c = d = 1,7 \text{ м}$$

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

$$I_p = 0,1 \cdot d^4$$

$$[\tau] = 65 \text{ МПа}$$

1. Визначаємо значення моментів кручення на кожній ділянці валу та будуємо епюру (рис. 2.6). Вважається, що приймаємо крутний момент додатнім, якщо при погляді на переріз зі сторони зовнішньої нормалі він повертає переріз за ходом годинникової стрілки.

$$M_{I-I} = -M_4 = -700 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_{II-II} = -M_4 + M_3 = -700 + 1700 = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_{III-III} = -M_4 + M_3 - M_2 = -700 + 1700 - 700 = 300 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$M_{IV-IV} = -M_4 + M_3 - M_2 + M_1 = -700 + 1700 - 700 + 1700 = 2000 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2. При заданому значенні  $[\tau]$  визначаємо діаметр валу:

$$W = \frac{M_{кр(max)}}{[\tau]} \quad (2.51)$$

$$W = \frac{2000}{65 \cdot 10^6} = 30,8 \cdot 10^{-6} = 30,8 \text{ см}^3$$

Для круглого поперечного перерізу:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 0,2 \cdot d^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{W}{0,2}} \quad (2.52)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{30,8}{0,2}} = 5,36 \text{ см}$$

Приймаємо діаметр валу рівний 50 мм.

Розраховуємо похибку:

$$\Delta = \frac{53,6 - 50}{53,6} \cdot 100\% = 6,7\% > 5\%, \text{ тому приймаємо } \varphi = 60 \text{ мм}$$

Тобто необхідно прийняти вал більшого діаметру із ряду:  $\varnothing = 60 \text{ мм}$ .

3. Визначаємо кути закручування і будуємо епюру

$$\varphi = \frac{M_i \cdot a}{G \cdot I_p} \quad (2.53)$$

$$\varphi_I = \frac{-700 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = -0,0119 \text{ рад}$$

$$\varphi_{II} = \frac{1000 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = 0,017 \text{ рад}$$

$$\varphi_{III} = \frac{300 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = 0,0051 \text{ рад}$$

$$\varphi_{IV} = \frac{2000 \cdot 1,7}{8 \cdot 10^{10} \cdot (0,1 \cdot (0,06)^4)} = 0,034 \text{ рад}$$

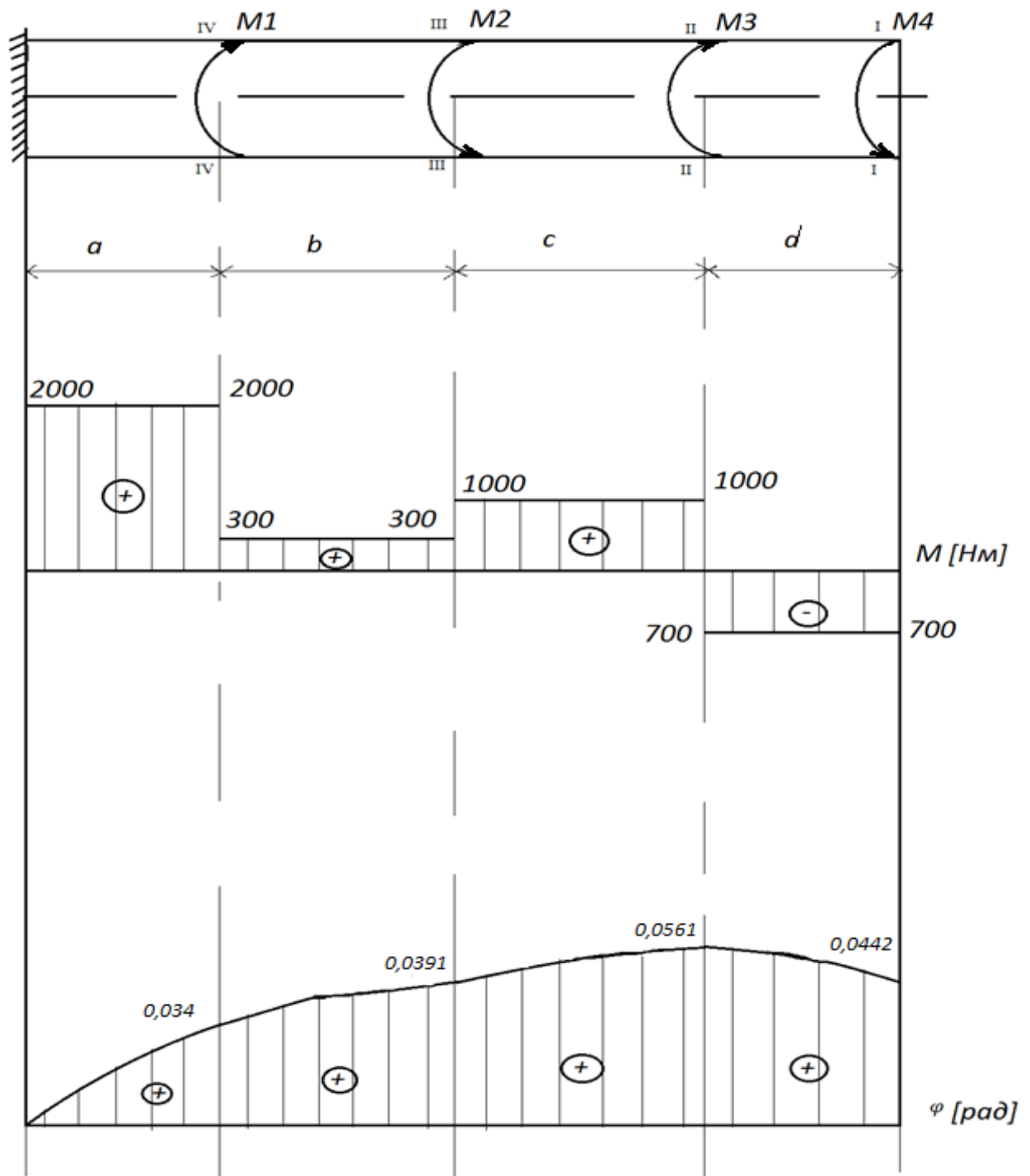


Рис.2.6. Побудова епюр крутних моментів та кутів закручування

Загальний кут закручування складає:

$$\varphi = \varphi_I + \varphi_{II} + \varphi_{III} + \varphi_{IV} \quad (2.54)$$

$$\varphi = -0,0119 + 0,017 + 0,0051 + 0,034 = 0,0442 \text{ рад}$$

Будуємо епюру кутів закручення відносно затиснення валу.



Вона будується від жорсткого защемлення, значення на кожній ділянці додаються.

4. Визначаємо найбільший відносний кут закручення:

$$\theta = \frac{\varphi_{\max}}{l} = \frac{0,034}{1,7} = 0,02 \text{ рад/м} \quad (2.55)$$

**Відповідь:**  $\theta = 0,02$  рад/м

## **2.8. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Кручення валу»**

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до визначення крутних моментів в перерізах та побудови епюри крутних моментів. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність побудови епюри крутних моментів.



*Графічно-цифрове пояснення до визначення крутних моментів в перерізах та побудови епюри крутних моментів*

## **2.9. Завдання для самостійного виконання з теми «Кручення»**

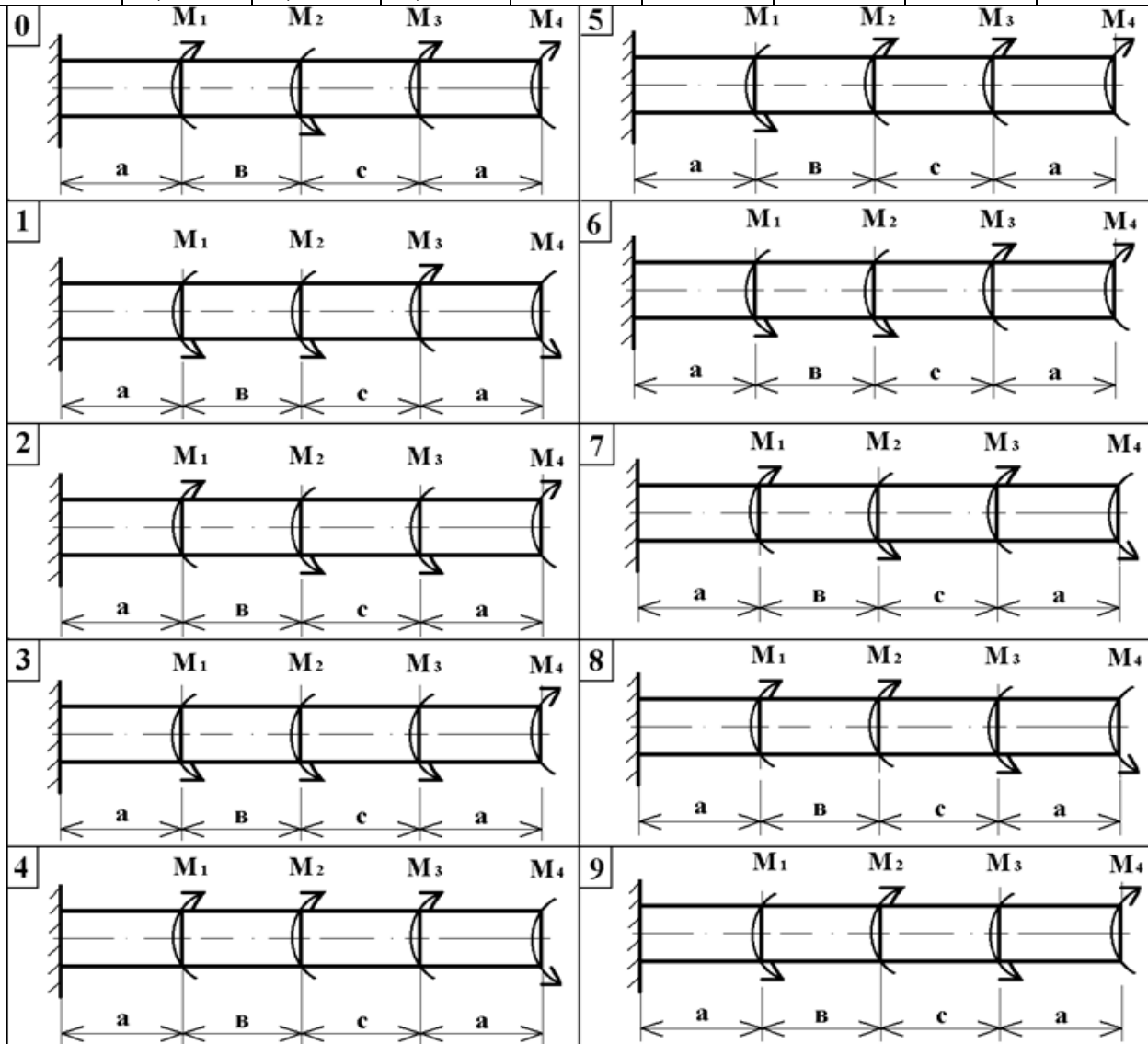
На сталевий вал діють чотири моменти. Необхідно:

- 1) побудувати епюру моментів кручення;
- 2) при заданому значенні  $[\tau]$  визначити діаметр валу із розрахунку на міцність і округлити його величину до ближнього більшого значення, відповідно рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180 і 200 мм;
- 3) побудувати епюру кутів закручування;
- 4) знайти найбільший відносний кут закручування (на 1 пог. м).

Таблиця 2.5

## Завдання для самостійного виконання

№	a, м	b, м	c, м	M <sub>1</sub> , кНм	M <sub>2</sub> , кНм	M <sub>3</sub> , кНм	M <sub>4</sub> , кНм	[τ], МПа
1	1,1	1,1	1,1	110	110	110	110	35
2	1,2	1,2	1,2	120	120	120	120	40
3	1,3	1,3	1,3	130	130	130	130	45
4	1,4	1,4	1,4	140	140	140	140	50
5	1,5	1,5	1,5	150	150	150	150	55
6	1,6	1,6	1,6	160	160	160	160	60
7	1,7	1,7	1,7	170	170	170	170	65
8	1,8	1,8	1,8	180	180	180	180	70
9	1,9	1,9	1,9	190	190	190	190	75
0	2,0	2,0	2,0	200	200	200	200	80



## 2.10. Практична робота №4 «Згин»

Для консольної статично визначеної балки необхідно:

- визначити опорні реакції;
- побудувати епюри поперечних сил і моментів згинання;
- із умови міцності по нормальних напруженнях підібрати:

а) діаметр  $d$  круглого поперечного перерізу;

б) висоту  $h$  і ширину  $b$  прямокутного поперечного перерізу, прийнявши  $b = 0,5h$ ;

в) побудувати епюри нормальних і дотичних напружень в небезпечних перерізах.

Дано: балку розмірами  $a_1=1,5\text{м}$ ;  $a_2=2\text{м}$ ;  $l=5,5\text{м}$ ;

$P=5\text{кН}$ ;  $q=15\text{кН/м}$ ;  $[\sigma]=10\text{МПа}$

1. Визначаємо реакції опор за рівнянням рівноваги. В точці А маємо жорстке защемлення. В точці жорсткого защемлення маємо три складові реакції  $R_A$ ,  $Z_A$  і пару сил з моментом защемлення  $M_A$ .

$$\begin{cases} \Sigma Z_1 = 0; & Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; & -R_A - P + q \cdot a_2 = 0 \\ \Sigma \Sigma M_{iA} = 0; & -q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2} + P \cdot a_1 + M_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma Z_1 = 0; & Z_A = 0 \\ \Sigma Y_1 = 0; & -R_A - 5 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^3 = 0 \\ \Sigma M_{iA} = 0; & -15 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + 5 \cdot 10^3 + M_A = 0 \end{cases}$$

Звідси визначаємо реакції:  $R_A = 25 \cdot 10^3\text{кН}$ ;  $M_A = 22,5\text{кН}\cdot\text{м}$ .

Поперечні сили у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$Q_{(Y)1}=Q_{(Y)2}=Q_{(Y)3}=0;$$

$$Q_{(Y)4}=q \cdot 0,5=15 \cdot 0,5=7,5\text{кН};$$

$$Q_{(Y)5}=q \cdot 0,5 - P=7,5 - 5=2,5\text{кН};$$

$$Q_{(Y)6}=q \cdot 2 - P=15 \cdot 2 - 5=25\text{кН}$$

2. Згинальні моменти у відповідних перерізах балки мають такі значення:

$$M_{(X)1} = M_{(X)2} = M_{(X)3} = 0;$$

$$M_{(X)4} = M_{(X)5} = -\left(q \cdot \frac{a_2}{4} \cdot \frac{a_2}{8}\right) = -(15 \cdot 0,5 \cdot 0,25) = -1,87 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{(X)6} = -\left(q \cdot a_2 \cdot \frac{a_2}{2}\right) + P \cdot a_1 = -(15 \cdot 2 \cdot 1) + 0,5 \cdot 1,5 = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3. Із умови міцності по нормальним напруженням підбираємо:

а) балку круглого перерізу з діаметром  $d$ .

$$W_{кр} = \left| \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} \right| = \frac{22,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 2,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 2250 \text{ см}^3 \quad (2.56)$$

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3 \quad (2.57)$$

$$W_{кр} = 2250 = W_x = 0,1 \cdot d^3 \quad (2.58)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{2250}{0,1}} = \sqrt[3]{22500} = 28,2 \text{ см}$$

б) балку прямокутного поперечного перерізу, прийнявши  $b=0,4 \cdot h$ .

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,4 \cdot h^3}{6} \quad (2.59)$$

$$W_{кр} = 2250 \text{ см}^3;$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{W_{кр} \cdot 6}{b}} = \sqrt[3]{\frac{2250 \cdot 6}{0,4}} = 32,3 \text{ см} \quad (2.60)$$

4. Будуємо епюру нормальних і дотичних напружень в перерізах з максимальним значенням моменту  $M_{\max}$  і максимальним значенням поперечної сили  $Q_{\max}$ . Таким перерізом виявився переріз в точці 6.

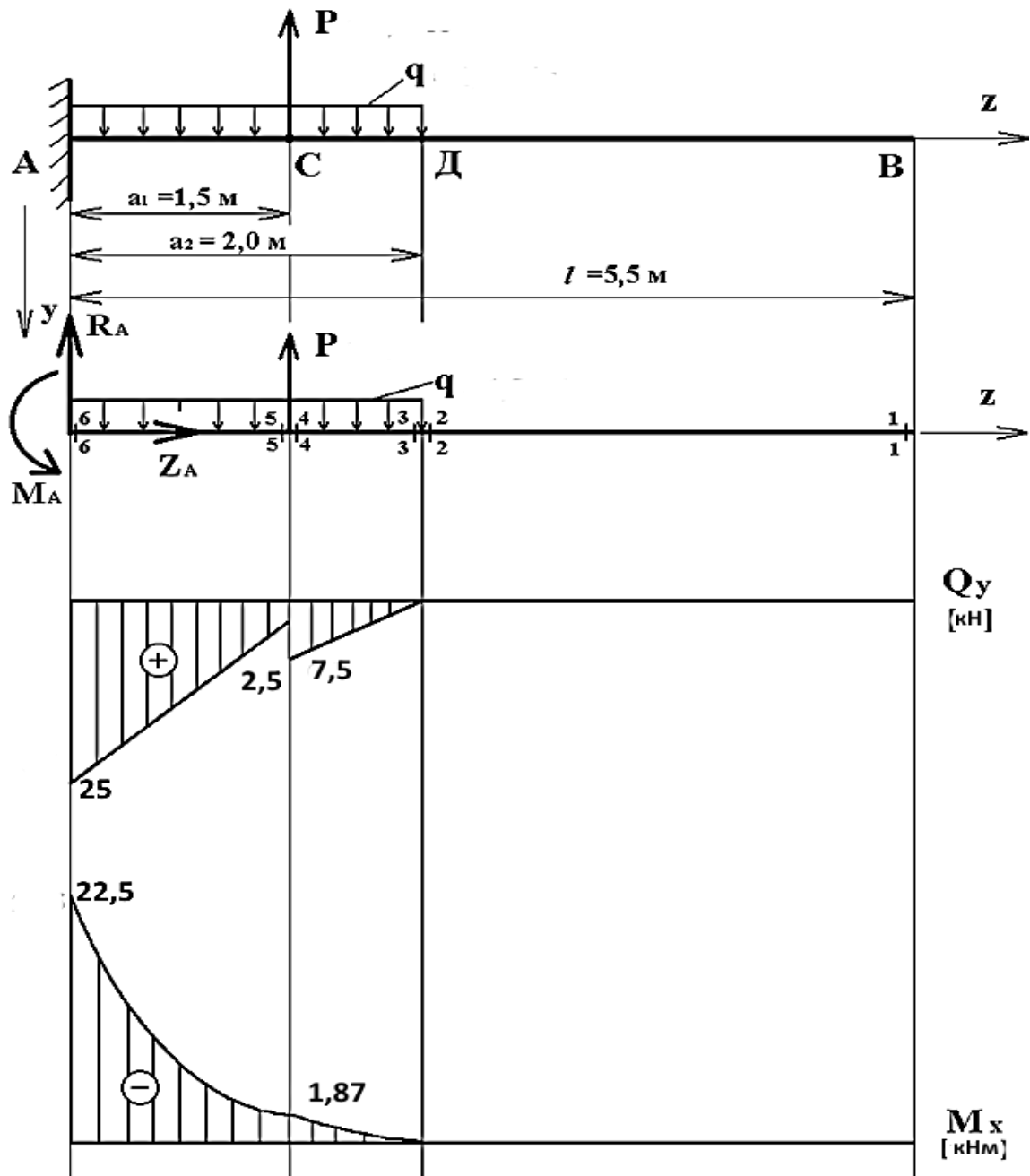


Рис. 2.7. Побудова епюр поперечної сили та згинального моменту

а) для круглого поперечного перерізу:

Нормальні напруження:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot d^3} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot (0,282)^3} = 10 \text{ МПа} \quad (2.61)$$

$$\sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа.}$$

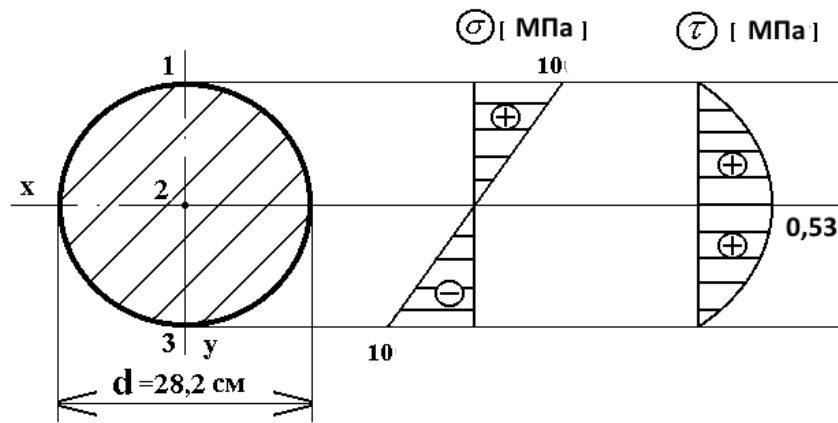


Рис.2.8. Побудова епюр для круглого поперечного перерізу

Дотичні напруження знаходяться за формулою:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot b} \quad (2.62)$$

$$\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0; \quad (2.63)$$

$$\tau_{(2)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (0,141)^2} = 0,53 \text{ МПа} \quad (2.64)$$

б) для квадратного поперечного перерізу:

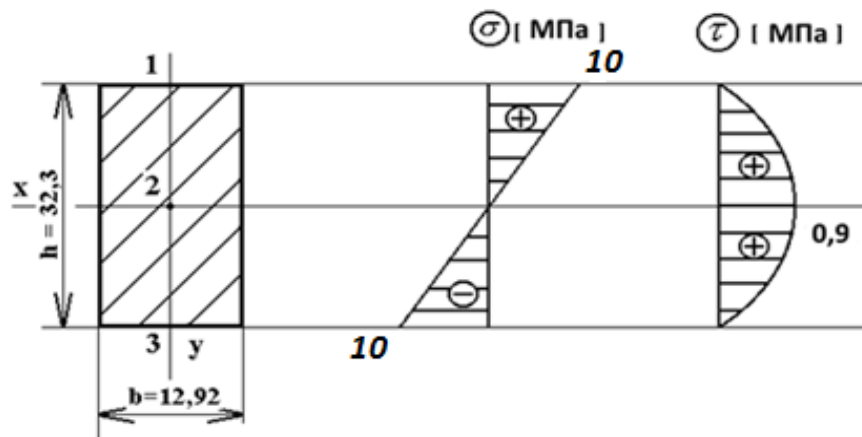


Рис.2.9. Побудова епюр для квадратного поперечного перерізу

Нормальні напруження:

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{M_{\max}}{b \cdot h^2 / 6} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{0,13 \cdot 0,32^2 / 6} = 10 \text{ МПа}; \quad (2.65)$$

$$\sigma_{(2)} = 0;$$

$$\sigma_{(3)} = -10 \text{ МПа}$$

Дотичні напруження :  $\tau_{(1)} = \tau_{(3)} = 0;$

$$\tau_{(2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{Y \max}}{F} = \frac{3}{2} \cdot \frac{25 \cdot 10^3}{b \cdot h} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,1292 \cdot 0,323} = 0,9 \text{ МПа}$$

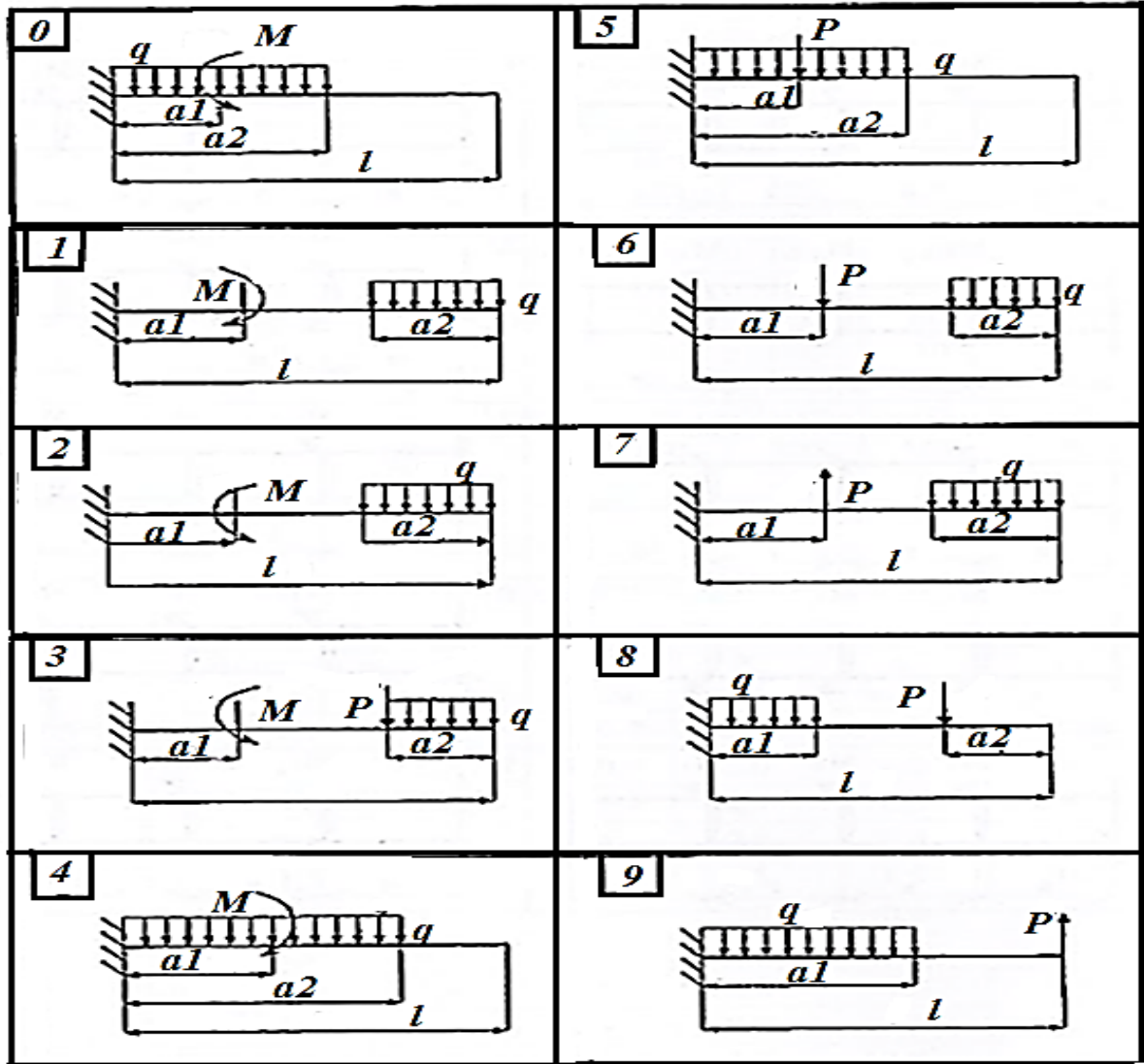
### ***2.11. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Згин балки»***

В даному завданні представлено графічно-цифрове пояснення до методу побудови епюри поперечних сил та згинальних моментів. Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код, після чого здобувач вищої освіти побачить послідовність побудови епюр  $Q_y$  та  $M_x$ .



*Графічно-цифрове пояснення до побудови епюри поперечних сил та згинальних моментів*

2.12. Завдання для самостійного виконання з теми «Згин»



Таблиця 2.6.

Варіанти завдань для самостійного виконання

№	L,m	a <sub>1</sub> ,m	a <sub>2</sub> ,m	M, кН·м	P, кН	Q, кН/м	[σ], МПа
1	5,0	1,0	2,0	10	5	5	12
2	4,0	1,5	1,5	20	10	10	10
3	3,5	1,0	1,5	3	3	3	8
4	4,5	2,0	1,0	4	4	4	12
5	5,5	1,5	2,0	5	5	5	10
6	5,0	2,0	1,5	6	6	6	8
7	4,5	2,0	0,5	7	7	7	12
8	4,0	1,0	1,0	8	8	8	10
9	3,0	1,8	0,9	9	9	9	8
10	4,5	1,5	1,5	10	10	10	12



## **Розділ 3. МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ**

### ***3.1. Інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій»*

### ***3.2. Інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів»*

### ***3.3. Інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів»*

### ***3.4. Інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів»*

### ***3.5. Інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці»*

### ***3.6. Інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув»*

### ***3.7. Інтерактивний тестовий тренажер «Згин»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Згин». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Згин»*

### ***3.8. Підсумковий інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій»***

В даному завданні представлено інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій». Посилання на ресурс наведено нижче. Необхідно відсканувати QR-код та пройти інтерактивний тестовий тренажер, після чого здобувач вищої освіти побачить результат.



*Інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій»*

## ПЕРЕЛІК ПІДСУМКОВИХ ПИТАНЬ КУРСУ

1. Поняття чистого зсуву. Закон Гука при чистому зсуві.
2. Статично невизначені задачі при розтяганні і стисканні. Вплив неточності виготовлення елементів і температури на величину зусиль в них.
3. Четверта теорія міцності. Теорія міцності граничних напружень стану (теорія Мора).
4. Практичний розрахунок з'єднань, які працюють на зсув: а) розрахунок заклепочних та болтових з'єднань; б) розрахунок зварних з'єднань.
5. Закон Гука при плоскому та об'ємному напруженому стані.
6. Поздовжні сили і їх епюри при центральному розтяганні (стисканні). Диференціальні залежності між поздовжніми силами і зовнішнім навантаженням при центральному розтяганні (стисканні).
7. Випробування матеріалів на стискання.
8. Напруження в перерізах, нахилених до осі стержня при центральному розтяганні (стисканні).
9. Види навантажень і схематизація елементів конструкцій. Основні об'єкти, які вивчаються в курсі механіки матеріалів і конструкцій.
10. Задачі науки «Механіка матеріалів і конструкцій» та її значення для інженерної освіти. Зв'язок курсу механіки матеріалів і конструкцій з загальноосвітніми, загально інженерними та спеціальними дисциплінами. Короткі історичні відомості.
11. Напруження і деформації при центральному розтяганні (стисканні). Закон Гука. Переміщення перерізів бруса при центральному розтяганні (стисканні). Епюри переміщень.

12. Екстремальні дотичні напруження при плоскому напруженому стані. Коло Мора при плоскому напруженому стані.

13. Екстремальні дотичні напруження при плоскому напруженому стані. Коло Мора при плоскому напруженому стані.

14. Види найпростіших деформацій стержня. Внутрішні зусилля стержнів та їх визначення. Метод перерізів. Поняття про напруження і деформації в точці.

15. Напруження в нахилених площадках при плоскому напруженому стані. Головні напруження та головні площадки в плоскому напруженому стані.

16. Плоске згинання. Основні типи опорних зв'язків. Визначення опорних реакцій. Внутрішні сили при згинанні. Диференціальні залежності між  $M_x$ ,  $Q_y$  і  $q$ . Правила спрощеної побудови епюр  $M_x$  і  $Q_y$ .

17. Основні властивості твердого деформованого тіла. Основні припущення і принципи в механіці матеріалів і конструкцій.

18. Головні деформації. Аналогія між залежностями для напруженого та деформованого стану в точці.

19. Загальні поняття теорії міцності. Перша, друга, третя теорії міцності.

20. Залежності між модулями пружності при розтяганні та при зсуві. Потенціальна енергія при зсуві.

21. Випробування матеріалів на розтягання. Діаграма розтягання.

22. Визначення крутних моментів та побудова їх епюр. Напруження та деформації при крученні стержня, який має круглий поперечний переріз.

23. Поняття напруженого стану в точці та його види. Закон парності дотичних напружень при плоскому напруженому стані.

24. Дійсна діаграма розтягання.

25. Зміна об'єму матеріалу при деформації. Потенціальна енергія при об'ємному напруженому стані.

26. Дотичні напруження при згинанні. Формула Жуковського. Епюри дотичних напружень.

27. Головні осі і головні моменти інерції. Радіус інерції. Еліпс інерції та його властивості.

28. Методи розрахунку деталей машин та елементів конструкцій:

- за руйнуючим навантаженням;

- за допустимим напруженням.

29. Момент інерції відносно паралельних осей. Залежність між моментами інерції при повороті осей.

30. Геометричні характеристики плоских перерізів. Основні поняття. Моменти інерції найпростіших фігур.

Додаток

Сортамент прокатної сталі

Кутники рівносторонні (за ГОСТ 8509-86)

Позначення:

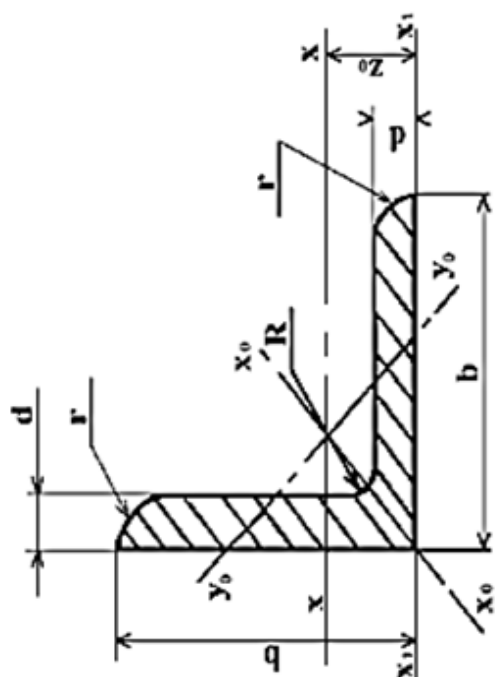
b - ширина полиці;

d - товщина полиці;

J - момент інерції;

i - радіус інерції;

Z<sub>0</sub> - відстань від центра ваги до зовнішньої грані полиці



Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F, см <sup>2</sup>	J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x</sub> , см	J <sub>x<sub>0max</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>x<sub>0max</sub></sub> , см	J <sub>y<sub>0min</sub></sub> , см <sup>4</sup>	i <sub>y<sub>0min</sub></sub> , см	J <sub>x<sub>1</sub></sub> , см <sup>4</sup>	Z <sub>0</sub> , см	Маса 1М, кг
	b	d										
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,80	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,90
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
6,5	65	6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78	5,72
		6	7,52	29,85	1,99	47,38	2,51	12,32	1,28	17,53	1,83	5,91
			9,84	38,13	1,97	60,42	1,27	15,58	2,48	28,29	1,90	7,73



Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу F, см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_{x_{max}}$ см <sup>4</sup>	$i_{x_{max}}$ см	$J_{y_{min}}$ см <sup>4</sup>	$i_{y_{min}}$ см	$J_{x1}$ см <sup>4</sup>	$Z_0$ , см	Маса 1м, кг
	b	d										
7	70	4,5	6,20	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90	5,38
		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,70	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02	8,37
7,5	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,10
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,34	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
		6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43	8,33
9	90	7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,96	48,6	1,77	219	2,55	12,2

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_{\text{о max}}}, \text{см}^4$	$i_{x_{\text{о max}}}, \text{см}$	$J_{y_{\text{о min}}}, \text{см}^4$	$i_{y_{\text{о min}}}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}$	$Z_0, \text{см}$	Маса 1м, кг
	b	d										
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	2,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
11	110	16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	23,3
		7	15,7	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00	13,5
		8	19,7	294	3,37	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22,0	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
12,5	125	12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78	19,4
		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90	25,5
14	140	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
16	160	20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4

Номер профілю	Розміри, мм		Площа перерізу $F, \text{см}^2$	$J_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$J_{x_{\text{опак}}}, \text{см}^4$	$i_{x_{\text{опак}}}, \text{см}$	$J_{y_{\text{о min}}}, \text{см}^4$	$i_{y_{\text{о min}}}, \text{см}$	$J_{x1}, \text{см}^4$	$Z_0, \text{см}$	Маса $1\text{м}, \text{кг}$
	b	d										
18	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
20	200	12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13	50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
		16	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
22	220	20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		330	111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
		14	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
25	250	16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20	97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
25	250	22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30	142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	14753	7,31	111,4

### Кутники нерівнобокі (за ГОСТ 8510-86)

Позначення:

$B$ — ширина більшої полиці;

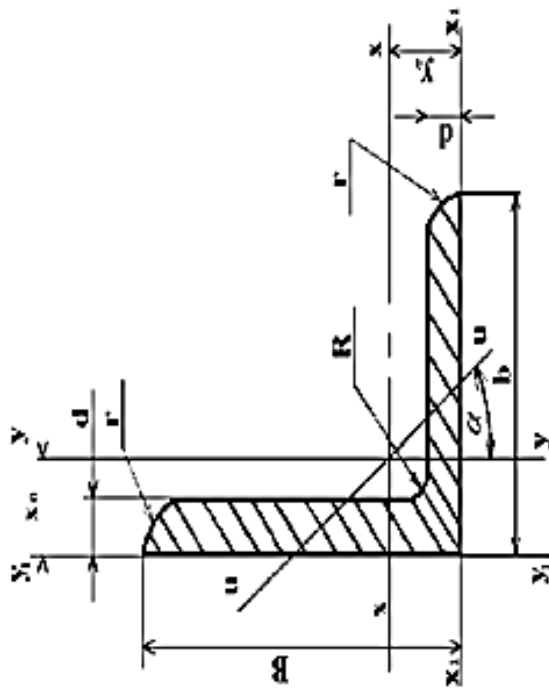
$b$ — ширина меншої полиці;

$d$ — товщина полиці;

$J$ — момент інерції;

$i$ — радіус інерції;

$x_0, y_0$  — відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць



Номер про-філю	Розміри, мм		Пло-ща F, см <sup>2</sup>	$J_{x_1}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_1}$ , см	$J_{y_1}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_1}$ , см	$J_{U_{min}}$ , см <sup>4</sup>	$i_{U_{min}}$ , см	Кут нахил у осі $u, tg\alpha$	$J_{X_1}$ , см <sup>4</sup>	$J_{Y_1}$ , см <sup>4</sup>	$x_0$ , см	$y_0$ , см	Маса 1м, кг
	$B$	$b$													
5,6/3, 6	6	6	4	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81
			5	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46
6,3/4	63	40	4	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33,0	8,51	0,91	2,03	3,17
			5	19,9	2,00	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91
			6	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63
7/4,5	70	45	8	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03
			5	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39
7,5/5	75	50	5	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79
			6	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69
			8	52,4	2,35	18,5	1,40	10,9	1,07	0,430	112	34,2	1,29	2,52	7,43



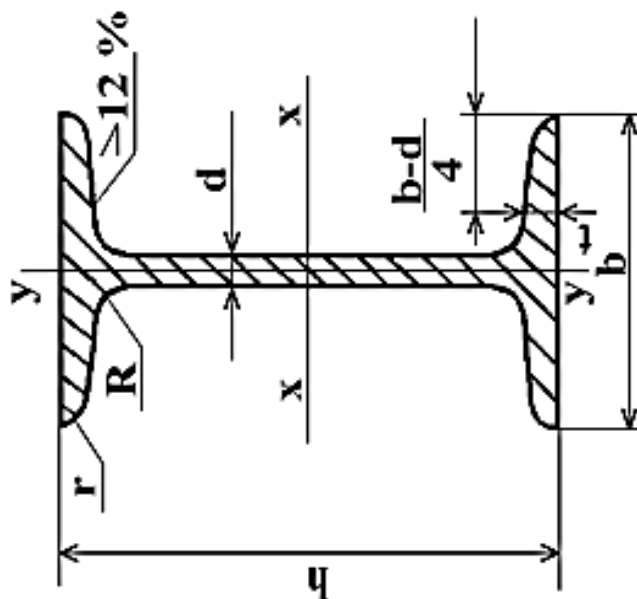
Номер про-філо	Розміри, мм			Площа $F, \text{см}^2$	$J_{x,}$ $\text{см}^4$	$i_{x,}$ $\text{см}$	$J_{y,}$ $\text{см}^4$	$i_{y,}$ $\text{см}$	$J_{U \min}$ $\text{см}^4$	$i_{U \min}$ $\text{см}$	Кут нахил у осі $u, \text{tg} \alpha$	$J_{x,}$ $\text{см}^4$	$J_{y,}$ $\text{см}^4$	$x_0$ $\text{см}$	$y_0$ $\text{см}$	Маса $1\text{м},$ $\text{кг}$
	B	b	d													
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,60	4,99
			6	7,55	49,0	2,55	14,8	1,40	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	35,2	1,28	2,95	6,70
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,380	194	47,8	1,36	3,04	8,77
10/ 6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53
			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,70
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,50	3,32	9,87
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,40	12,1
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2,00	26,9	1,53	0,402	285	74,3	1,58	3,55	8,98
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,400	353	92,3	1,64	3,61	10,9
			7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,80	4,01	11,0
12,5/ 8	125	80	8	16,0	256	4,00	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,400	781	210	2,00	4,22	18,3
14/9	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	104	2,03	4,49	14,1
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	911	245	2,12	4,58	17,5
16/10	60	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	1221	300	2,23	5,19	18,0
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	1359	335	2,28	5,23	19,8
			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6
			14	34,7	897	5,08	272	2,80	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,40	27,3

Номер про-філю	Розміри, мм			Площа $F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$J_{U^{min}}$ , см <sup>4</sup>	$i_{u^{min}}$ , см	Кут нахил у осі $u$ , tg $\alpha$	$J_{X_1}$ , см <sup>4</sup>	$J_{Y_1}$ , см <sup>4</sup>	$x_0$ , см	$y_0$ , см	Маса $M$ , кг
	$B$	$b$	$d$													
18/11	180	110	10	18,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2
			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	2342	537	2,52	5,97	26,4
20/ 12,5	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,50	27,4
			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7
			14	43,9	1801	6,41	551	3,59	327	2,73	0,390	3726	922	2,91	6,62	34,4
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1
25/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,410	6212	1634	3,53	7,97	37,9
			16	63,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,50	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9
			18	71,1	4545	7,99	1475	4,56	896	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7

### Балки двогаврові (за ГОСТ 8239-89)

Позначення:

- $h$  – висота балки
- $b$  – ширина полиці
- $d$  – товщина стінки
- $t$  – середня товщина полиці
- $J$  – момент інерції
- $W$  – момент опору
- $i$  – радіус інерції
- $S$  – статичний момент площі



Номер профілю	Розміри, мм				Площа $F, \text{ см}^2$	$J_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$J_x, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	Маса 1м, кг
	$h$	$b$	$d$	$t$									
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18 <sup>a</sup>	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20 <sup>a</sup>	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7

Номер профілю	Розміри, мм				Площа $F$ , см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t									
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22 <sup>a</sup>	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24 <sup>a</sup>	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27 <sup>a</sup>	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30 <sup>a</sup>	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108



## Швелери (за ГОСТ 8420-89)

Позначення:

$h$  – висота балки

$b$  – ширина полиці

$d$  – товщина стінки

$t$  – середня товщина полиці

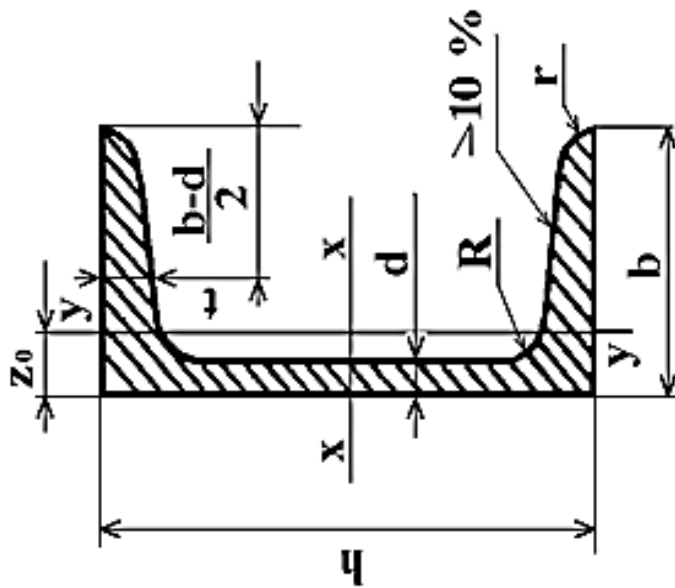
$J$  – момент інерції

$W$  – момент опору

$i$  – радіус інерції

$S$  – статичний момент площі

$Z_0$  – відстань від осі  $y$  до зовнішньої грані стінки



Номер профілю	Розміри, мм				Площа $F$ , $\text{см}^2$	$J_x$ , $\text{см}^4$	$W_x$ , $\text{см}^3$	$i_x$ , $\text{см}$	$S_x$ , $\text{см}^3$	$J_x$ , $\text{см}^4$	$W_y$ , $\text{см}^3$	$i_y$ , $\text{см}$	$Z_0$ , $\text{см}$	Маса $l_m$ , $\text{кг}$
	$h$	$b$	$d$	$t$										
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24	5,90
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3

Номер профілю	Розміри, мм				Площа F, см <sup>2</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$Z_0$ , см	Маса 1м, кг
	h	b	d	t										
14 <sup>a</sup>	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80	14,2
16 <sup>a</sup>	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3
18 <sup>a</sup>	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13	17,4
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07	18,4
20 <sup>a</sup>	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21,0
22 <sup>a</sup>	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42	24,0
24 <sup>a</sup>	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68	41,9
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ ПОКАЖЧИК

анізотропність	11	момент	13
балка	8	момент опору перерізу	20
брус	9	нормальні напруження	20
відцентровий момент інерції	22	пластичність	11
геометричні характеристики плоских перерізів	19	повзучість	11
гіпотези	12	поздовжня сила	14
головні вісі	24	полярний момент інерції	20
головні моменти інерції	24	нормальні напруження	17
головні напруження	17	плоский згин	84
деформація	17	поздовжня сила	28
діаграма розтягу-стиску	35	поперечний згин	80
дотичні напруження	17	поперечна сила	83
жорсткість	6	радіус інерції	25
згин	84	релаксація напружень	11
згинальний момент	93	статичний момент площі	19
ізотропність	11	стійкість	6
крихкість	11	стрижень	9
кручення	74	центральні вісі	22
крутний момент	75	центр ваги	23
оболонка	9	центр згину	101
однорідність	11	центральний розтяг	27
осьові моменти інерції	19	центральний стиск	28
масивне тіло	9	чистий згин	84
міцність	6	чистий зсув	68

## ЛІТЕРАТУРА

1. Цурпал І. А. Механіка матеріалів і конструкцій. Київ : Вища школа, 2005. 367 с.
2. Ройзман В. П. Опір матеріалів : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2004. 124 с.
3. Агаміров Л. В. Сопротивление материалов : краткий курс для студентов вузов. Москва : АСТ, 2003. 256 с.
4. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. Москва : Высшая школа, 2009. 560 с.
5. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов / Ф. З. Алмаметов и др. Москва : Высшая школа, 2003. 367 с.
6. Бондаренко А. Н. Курс лекций по сопротивлению материалов. Москва : МИИТ, 2007. 69 с.
7. Механіка матеріалів і конструкцій : навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю «Прикладна механіка» / А. Є. Бабенко та ін. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2017. 191 с.
8. Огородніков В. А., Грушко О. В., Архіпова Т. Ф. Механіка матеріалів та конструкцій : навч. посібник. Вінниця : ВНТУ, 2018. 91 с.
9. Бондаренко Л. Ю., Вершков О. О., Антонова Г. В. Лабораторний практикум з механіки матеріалів і конструкцій : навч. посіб. Мелітополь : ТДАТУ, 2017. 183 с.
10. Бабенко Д. В., Горбенко О. А., Доценко Н. А. Механіка матеріалів і конструкцій: практикум : навчальний посібник. Миколаїв : МНАУ, 2017. 384 с. URL : <http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/3207>.
11. Бабенко Д. В., Горбенко О. А., Доценко Н. А. Механіка матеріалів і конструкцій: практикум для навчання в умовах

інформаційно-освітнього середовища. Миколаїв : МНАУ, 2018. 384 с.

12. Механіка матеріалів і конструкцій : методичні рекомендації (модуль IV "Згин") для виконання лабораторних робіт та самоконтролю в умовах інтеграції навчальних тренажерів в інформаційно-освітнє середовище для здобувачів вищої освіти ступеня "бакалавр" спеціальності 208 "Агроінженерія", 015 «Професійна освіта (Технологія виробництва і переробки продуктів сільського господарства)» денної та заочної форм навчання / уклад. : Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко. Миколаїв : МНАУ, 2018. 80 с. URL : <http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/4804>.

13. Методичні рекомендації по виконанню розрахунково-графічної роботи №1 з дисципліни "Механіка матеріалів і конструкцій" для студентів денної форми навчання напрямів підготовки 6.100102 "Процеси, машин та обладнання в АПВ"; 6.010104 "Професійна освіта. Технологія виробництва і переробка с.г продуктів"; 6.100101 "Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі" / уклад. : Д. В. Бабенко, Н. А. Горбенко. Миколаїв : МНАУ, 2013. 64 с.

14. Методичні рекомендації для самостійного вивчення та виконання контрольної роботи з дисципліни "Механіка матеріалів і конструкцій" для здобувачів вищої освіти заочної форми навчання напрямів підготовки 6.100102 "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва" і 6.010104 "Проф. освіта "Технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства)" / уклад. Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко. Миколаїв : МНАУ, 2015. 72 с. URL: <http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/4679>.

15. Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт та самостійної роботи з дисципліни "Механіка матеріалів і конструкцій" (розділ "Центральний розтяг-стиск стрижнів") для здобувачів вищої освіти денної та заочної форм навчання напрямів

підготовки 6.100102 "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва" і 6.010104 "Проф. освіта "Технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства)" / уклад. Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко. Миколаїв : МНАУ, 2015. 51 с. URL : <http://dspace.mnau.edu.ua/jsru/handle/123456789/4678>.

16. Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт та самостійної роботи з дисципліни «Механіка матеріалів і конструкцій». Модуль 1 «Геометричні характеристики плоских перерізів» для здобувачів вищої освіти денної та заочної форм навчання напрямів підготовки 6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва» і 6.010104 «Професійна освіта (Технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства)» / уклад. : Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко. Миколаїв : МНАУ, 2016. 56 с.

17. Механіка матеріалів і конструкцій: методичні рекомендації (розділ «Кручення») для виконання лабораторних робіт та самостійної роботи з використанням інформаційно-освітнього середовища для здобувачів вищої освіти ступеня «бакалавр» спеціальностей 208 «Агроінженерія», 015 «Професійна освіта (Технологія виробництва і переробки продуктів сільського господарства)» денної та заочної форма навчання / уклад. : Д. В. Бабенко, Н. А. Доценко. Миколаїв : МНАУ, 2017. 42 с.

## ЗМІСТ

Розділ 1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА .....	4
Модуль «Вступ» .....	4
1.1. Мультимедійна презентація «Вступ. Основні гіпотези курсу механіки матеріалів і конструкцій» .....	4
1.2. Мультимедійна презентація «Основні поняття курсу механіки матеріалів і конструкцій» .....	4
1.3. Відеолекція «Вступ. Основні гіпотези курсу механіки матеріалів і конструкцій» .....	4
1.4. Відеолекція «Основні поняття та положення курсу механіки матеріалів і конструкцій» .....	5
1.5. Слайди до мультимедійної презентації «Основні положення та завдання курсу механіки матеріалів і конструкцій» .....	6
1.6. Слайди до мультимедійної презентації «Основні поняття курсу механіки матеріалів і конструкцій» .....	13
Модуль «Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	18
1.7. Мультимедійна презентація ««Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	18
1.8. Відеолекція «Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	18
1.9. Слайди до мультимедійної презентації «Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	19
Модуль «Центральний розтяг та стиск стрижнів» .....	26
1.10. Мультимедійна презентація «Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів» .....	26

1.11. Мультимедійна презентація «Розрахунок при центральному розтягу-стиску» .....	26
1.12. Мультимедійна презентація «Механічні властивості матеріалів» .....	26
1.13. Слайди до мультимедійної презентації «Теоретичні положення центрального розтягу-стиску стрижнів» .....	27
1.14. Слайди до мультимедійної презентації «Розрахунок при центральному розтягу-стиску» .....	32
1.15. Слайди до мультимедійної презентації «Механічні властивості матеріалів» .....	35
1.16. Відеолекція «Центральний розтяг та стиск стрижнів. Приклади розрахунку» .....	45
1.17. Відеолекція «Механічні властивості матеріалів» .....	45
Модуль «Напружений та деформований стан в точці» .....	46
1.18. Мультимедійна презентація «Поняття напруженого стану в точці» .....	46
1.19. Мультимедійна презентація «Деформований стан у точці» .....	46
1.20. Мультимедійна презентація «Теорії міцності» .....	46
1.21. Відеолекція «Напружений стан в точці» .....	47
1.22. Відеолекція «Деформований стан в точці» .....	47
1.23. Відеолекція «Теорії міцності» .....	48
1.24. Слайди до мультимедійної презентації «Напружений стан в точці» .....	49
1.25. Слайди до мультимедійної презентації «Деформований стан в точці» .....	55
1.26. Слайди до мультимедійної презентації «Теорії міцності» .....	60



Модуль «Зсув та кручення» .....	66
1.27. Мультимедійна презентація «Зсув» .....	66
1.28. Мультимедійна презентація «Кручення» .....	66
1.29. Відеолекція «Зсув» .....	66
1.30. Відеолекція «Кручення».....	67
1.31. Слайди до мультимедійної презентації «Зсув» .....	68
1.32. Слайди до мультимедійної презентації «Кручення» .....	74
Модуль «Згин» .....	80
1.33. Мультимедійна презентація «Плоский згин» .....	80
1.34. Мультимедійна презентація «Чистий згин» .....	80
1.35. Мультимедійна презентація «Поперечний згин».....	80
1.36. Мультимедійна презентація «Міцність балок при згині» ....	80
1.37. Мультимедійна презентація «Переміщення при згині» .....	80
1.38. Відеолекція «Плоский згин».....	81
1.39. Відеолекція «Чистий згин» .....	81
1.40. Відеолекція «Поперечний згин» .....	82
1.41. Відеолекція «Міцність балок при згині».....	82
1.42. Відеолекція «Переміщення при згині» .....	83
1.43. Слайди до мультимедійної презентації «Плоский згин» .....	84
1.44. Слайди до мультимедійної презентації «Чистий згин».....	94
1.45. Слайди до мультимедійної презентації «Чистий згин».....	96
1.46. Слайди до мультимедійної презентації «Міцність балок при згині»... ..	103
1.47. Слайди до мультимедійної презентації «Переміщення при згині» .....	113
Розділ 2. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА.....	123

2.1. Практична робота №1 «Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	123
2.1.1. Задача 1 «Визначення геометричних характеристик плоских симетричних перерізів із сортаменту прокатної сталі» .....	123
2.1.2. Задача 2 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів» .....	125
2.1.3. Задача 3 «Визначення геометричних характеристик плоских несиметричних перерізів із прокатної сталі для трьох елементів» .....	128
2.2. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	132
2.3. Завдання для самостійного виконання з теми «Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	132
2.4. Практична робота №2 «Центральний розтяг та стиск стрижнів» .....	135
2.4.1. Задача «Розрахунок ступінчастого стрижня на розтяг-стиск» .....	135
2.5. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Центральний розтяг та стиск стрижнів» .....	137
2.6. Завдання для самостійного виконання з теми «Центральний розтяг та стиск стрижнів» .....	137
2.7. Практична робота №3 «Кручення» .....	138
2.8. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Кручення валу» ..	141
2.9. Завдання для самостійного виконання з теми «Кручення» ...	141
2.10. Практична робота №4 «Згин» .....	143
2.11. Графічно-цифрове пояснення до модуля «Згин балки» .....	147

2.12. Завдання для самостійного виконання з теми «Згин» .....	148
Розділ 3. МОДУЛЬНИЙ КОНТРОЛЬ .....	149
3.1. Інтерактивний тестовий тренажер «Основні поняття механіки матеріалів і конструкцій» .....	149
3.2. Інтерактивний тестовий тренажер «Геометричні характеристики плоских перерізів» .....	149
3.3. Інтерактивний тестовий тренажер «Центральний розтяг та стиск стрижнів» .....	150
3.4. Інтерактивний тестовий тренажер «Механічні властивості матеріалів» .....	150
3.5. Інтерактивний тестовий тренажер «Напружений та деформований стан в точці» .....	151
3.6. Інтерактивний тестовий тренажер «Кручення та зсув» .....	151
3.7. Інтерактивний тестовий тренажер «Згин» .....	152
3.8. Підсумковий інтерактивний тестовий тренажер «Механіка матеріалів і конструкцій» .....	152
ПЕРЕЛІК ПІДСУМКОВИХ ПИТАНЬ КУРСУ .....	153
ДОДАТОК 1 .....	156
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ ПОКАЖЧИК .....	167
ЛІТЕРАТУРА .....	168
ЗМІСТ .....	171

Навчальне видання

**Бабенко Дмитро Володимирович**  
**Доценко Наталія Андріївна**  
**Горбенко Олена Андріївна**

**МЕХАНІКА МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ. Частина 1:  
ПРАКТИКУМ  
ДЛЯ НАВЧАННЯ НА ОСНОВІ ІНТЕРАКТИВНОГО  
ГРАФІЧНО-ЦИФРОВОГО КОНТЕНТУ**

*Навчальний посібник*

*за редакцією проф. Д. В. Бабенка*

*Технічний редактор: О. А. Горбенко; Н. А. Доценко*

*Комп'ютерний дизайн обкладинки: Н. А. Доценко*

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 11

Тираж 300 прим. Зам. № \_\_\_\_\_

Надруковано у видавничому відділі Миколаївського національного аграрного  
університету.

54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.