МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

для виконання самостійної роботи здобувачами вищої освіти денної форми навчання спеціальності 193 "Геодезія та землеустрій "

(частина I)

МИКОЛАЇВ
2016

УДК 51.517
ББК 22.1
В 55
Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 20. 10. 2016р., протокол № 2

Укладачі:

В. С. Шебанін – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. Г. Богза – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;

І. П. Атаманюк – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;

О. В. Цепуріт – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – ст. викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання; Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Богданов – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;

О. В. Шептилевський – асистент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет;

С. В. Євстрат'єв – асистент кафедри вищої та прикладної математики; Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензент:

В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор, професор кафедри математики та методики її викладання, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

Викладання математики передбачає:

- розвиток логічного та алгоритмічного мислення;
- оволодіння основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач економіки;
- вироблення вміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики та прикладних математичних дисциплін;
- вироблення навичок математичного обстеження прикладних питань та вміння інтерпретувати економічну задачу на математичну мову.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу „Вища математика" для студентів факультету агротехнологій аграрних вузів, але його можуть успішно використовувати на всіх інших факультетах, де програмою передбачено вивчення курсу „Вища математика". Методичні рекомендації складаються з трьох розділів, в яких висвітлено питання, що стосуються науково-теоретичного, структурно-логічного та методичного забезпечення курсу вищої математики.

Перший розділ „Основні теоретичні відомості курсу „Вища математика" пропонується, в основному, у вигляді таблиць, що дозволяє узагальнити структуру і об'єм дисципліни, а також чітко систематизувати основні теоретичні положення, що сприяє зручному використанню навчального матеріалу та кращому засвоєнню та запам'ятовуванню базових положень курсу.

Другий розділ „Розрахункові завдання для контрольних робіт та самостійної роботи студентів" складений таким чином, щоб повністю охопити матеріал, що вивчається і дати можливість викладачу перевірити в комплексі рівень знань, умінь та навичок студентів. Вибір індивідуальних завдань залежить від шифру залікової книжки студента.

В третьому розділі „Методичні рекомендації до виконання контрольних робіт" розглянуто приклади виконання контрольних робіт, що охоплюють всі типи приведених завдань та методику їх розв'язання, що дає можливість допомогти студенту самостійно виконати завдання свого варіанту контрольної роботи за короткий проміжок часу без використання допоміжної літератури.

Вказівки по розв'язуванню типових завдань допоможуть студентам більш інтенсивно підготуватися до практичних занять та іспиту. Завдання для контрольних робіт можна використовувати для самостійної роботи студентів та самоперевірки їх знань.

Таким чином, дані методичні рекомендації надають можливість значно оптимізувати та інтенсифікувати навчальний процес по вивченню курсу „Вища математика".

I. РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 МОДУЛЬ 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1.1. МАТРИЦІ

Матрицею розміром $m \times n$ називається впорядкована таблиця чисел, яка складається з m рядків і n стовпчиків, і позначається великими латинськими літерами – ***A, B, C.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, з яких складається матриця, називаються *елементами матриці.* Для їх позначення використовують маленькі латинські літери з подвійною індексацією: a_{ij}. Перший індекс i вказує номер рядка, в якому знаходиться цей елемент, другий індекс j вказує номер стовпця, який містить цей елемент.

Якщо в матриці кількість рядків дорівнює кількості стовпців, тобто $m=n$, то матриця називається *квадратною*, якщо m не дорівнює n, то *прямокутною*.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$ – квадратна матриця третього порядку.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$ – прямокутна матриця розмірності [3×4].

Елементи квадратної матриці A порядку n, що розташовані на діагоналі матриці, яка проходить з лівого верхнього кута до правого нижнього кута, утворюють *головну діагональ* матриці.

Елементи квадратної матриці, що розташовані на діагоналі матриці, яка проходить з правого верхнього кута до лівого нижнього кута, утворюють *неголовну (допоміжну) діагональ* матриці.

Якщо матриця має тільки один стовпчик, або тільки один рядок, то називається відповідно *матриця-стовпчик,* або *матриця-рядок.*

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{6}\\ \boldsymbol{5}\end{pmatrix}$$ - матриця-стовпчик [3×1].

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{5} & -\boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$ - матриця рядок [1×4].

Матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю, називається *нульовою* або *нуль-матрицею.*

Квадратна матриця, усі елементи якої, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *діагональною*.

Квадратна матриця називається *одиничною,* якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а інші дорівнюють нулю, позначається $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця називається *трикутною,* якщо всі її елементи над головною діагоналлю, або під головною діагоналлю дорівнюють нулю:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{8}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{3}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}.$$

Матриці $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ називають ***рівними,*** якщо вони мають однаковий розмір (порядок) та їх відповідні елементи рівні ($\boldsymbol{a_{ij}=b_{ij}}$).

Якщо в матриці $\boldsymbol{A}$ поміняти місцями елементи рядка на відповідні елементи стовпця, або навпаки, то дістанемо *транспоновану* матрицю $\boldsymbol{A^T}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3} & \boldsymbol{8} & \boldsymbol{5}\\ \boldsymbol{7} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7}\\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{6}\end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{A^T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{3} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{4}\\ \boldsymbol{8} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2}\\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{6}\end{pmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається *симетричною,* якщо вона співпадає зі своєю транспонованою, тобто $A = A^T$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}; \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 5 & 4 \\ 8 & 5 & 0 & 2 \\ 9 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Основні математичні дії з матрицями

1) Множення матриці на число.

Добутком матриці на скаляр (число) λ називається матриця, елементи якої дорівнюють добутку скаляра λ на відповідні елементи заданої матриці:

$$A \cdot \lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Властивості операції множення матриці на число:

1) комутативність: $A \cdot \lambda = \lambda \cdot A$;
2) асоціативність: $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$.

2) Додавання (віднімання) матриць.

Додавати (віднімати) можна лише матриці однакового розміру.

Сумою двох матриць A і B називається така матриця C, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць A і B.

$C = A + B$, тобто $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Різницею двох матриць A і B називається така матриця C, елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриць A і B.

$C = A - B$, тобто $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 7 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 9 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Властивості операції додавання матриць:

1. комутативність: $A + B = B + A$;
2. асоціативність: $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3. дистрибутивність відносно суми матриць:
   $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;
4. дистрибутивність відносно суми чисел:
   $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$.

3) Множення матриць.

Матрицю A можна помножити на матрицю B тільки у випадку *узгодженості*, тобто якщо кількість *стовпчиків* матриці A (першого множника) дорівнює кількості *рядків* матриці B (другого множника).

Добутком матриці A на матрицю B називається матриця C, елементи якої визначаються за наступним правилом:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + ... + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Елемент, який стоїть в i - рядку і j - стовпцю добутку двох матриць одержується в результаті множення першого елемента i - рядка матриці A на перший елемент j - стовпця матриці B, другого елемента i - рядка матриці A на другий елемент j - стовпця матриці B і т.д. і послідуючої суми таких добутків пар елементів матриць A і B.

Властивості операції множення матриць:

1) операція множення не коммутативна: $A \cdot B \neq B \cdot A$;

2) операція множення асоціативна: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

1.1.2. ВИЗНАЧНИКИ

Якщо задана матриця A, яка складена з чотирьох чисел a_1, a_2, b_1, b_2:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Число $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ називається *визначником (детермінантом) другого порядку* матриці A. Даний визназник позначається символом $|A|$, Δ або det:

$$|A| = det = \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 називаються *елементами визначника*.

Нехай задана матриця B із дев'яти чисел: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$:

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Визначником (детермінантом) третього порядку, матриці ***B***, називається число, яке визначається рівністю:

$$\boldsymbol{det} = \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3 - a_1 \cdot b_3 \cdot c_2$$

Числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 називаються *елементами визначника*.

Елементи, які розміщені по вертикалі, називаються *стовпцями*, а по горизонталі - *рядками визначника*: елементи a_1, b_2, c_3 утворюють *головну діагональ* визначника, а елементи a_3, b_2, c_1 – *бічну*.

Для обчислення визначника III порядку зручно використовувати ***правило трикутника***, яке запропоноване на *рис. 1*.

Рис. 1

Добуток елементів головної діагоналі і елементів, які утворюють трикутники з основами, паралельними головної діагоналі, беруться зі знаком плюс, а добуток елементів бічної діагоналі і елементів, які лежать у вершиних трикутників з основами, паралельними бічній діагоналі, - зі знаком мінус. Величина визначника дорівнює алгебраїчній сумі одержених шести добутків.

Для обчислення визначників III порядку існує *правило Саррюса*, яке запропоноване на *рис. 2*.

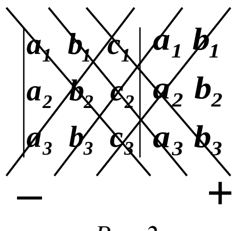


Рис. 2

Якщо до таблиці визначника дописати справа перший і другий стовпці, то при обчисленні визначника добуток елементів, які розміщені на головній і паралельних їй діагоналях, потрібно взяти із знаком плюс, а добуток елементів, які розміщені на бічній і паралельних їй діагоналях із знаком мінус. Величина визначника дорівнює алгебраїчній сумі одержаних добутків.

Властивості визначників

1. Властивість антисиметрії.

Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два стовпця, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його змінюеться на протилежний.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

2. Властивість однорідності.

Якщо всі елементи одного з рядків (стовпців) визначника помножити на деяке число λ, то визначник помножиться на λ.

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Властивість лінійності.

Якщо до одного з рядків (стовпців) визначника додати інший його рядок (стовпець), помножений на деяке число λ, то визначник не зніниться.

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4) Розкладання визначника за елементами рядка або стовпця (теорема Лапласа).

Визначник дорівнює сумі добутків усіх елементів будь якого його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13};$$

$$\det A = a_{11} A_{11} + b_{21} B_{21} + c_{31} C_{31}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називається визначник **(*n*–1)** порядку, який одержується з визначника шляхом викреслювання i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника називають мінор цього елемента, взятий зі знаком (+), якщо сума індексів $(i+j)$ - парна, та зі знаком (–), якщо $(i+j)$ - не парна, тобто:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Для визначників n-го порядку маємо:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \delta_{ij} \Delta,$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \delta_{ij} \Delta,$$

де $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

<u>Обернена матриця</u>

Якщо дві матриці A і B - квадратні одного і того ж порядку, а їх добуток $A \cdot B$ - одинична матриця ($A \cdot B = E$), то матриця **В** називається матрицею, ***оберненою*** до A і позначається символом A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Квадратна матриця A та обернена A^{-1} комутативні, тобто:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену, необхідно і достатньо, щоб визначник $|A|$ матриці A не дорівнював нулю:

$$|A| \neq 0$$

Якщо $\tilde{A}$ - союзна (приєднана) матриця для матриці A, то обернена матриця знаходиться за формулою:

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}.$$

Для одержання союзної матриці необхідно із алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці **А** скласти нову матрицю і транспонувати її. Союзну матрицю позначають символом $\tilde{A}$ і записують наступним чином:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots\dots\dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.1.3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ
Матрична форма запису та розв'язання систем лінійних рівнянь. Формули Крамера. Метод Гаусса.

Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}.$$

Складаємо матрицю A з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих, матрицю-стовпець X з невідомих та матрицю-стовпець B з вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Використовуючи отримані позначення, систему рівнянь можна записати в матричному вигляді:

$$A\cdot X=B \qquad *)$$

Для розв'язку систем лінійних рівнянь використовують матричний метод, формули Крамера, метод Гаусса.

Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним методом

Помножимо ліву і праву частини матричного рівняння ***)** на матрицю, обернену до матриці A:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$$

$$E\cdot X = A^{-1}\cdot B$$

$$X = A^{-1}\cdot B, \qquad |A|\neq 0.$$

Отже, щоб знайти розв'язок системи матричним методом, потрібно знайти матрицю, обернену до матриці системи, і помножити її на матрицю-стовпчик вільних членів.

Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера.

Розглянемо матричне рівняння: $A{\cdot}X{=}B$. ***)**

Його розв'язок: $X = A^{-1}\cdot B$.

Розпишемо більш докладно останню рівність:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 & A_{21}b_2 & \dots & A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 & A_{22}b_2 & \dots & A_{n2}b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}b_1 & A_{2n}b_2 & \dots & A_{nn}b_n \end{pmatrix}.$$

Розглянемо визначник Δx_1, який отримаємо, якщо стовпчик коефіцієнтів при x_1 у визначника матриці A замінимо на стовпчик вільних членів, тобто:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1\cdot A_{11} + b_2\cdot A_{21} + \dots + b_n\cdot A_{n1}.$$

Аналогічно знаходимо визначник Δ_{x_2}, який дорівнює:

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = b_1\cdot A_{12} + b_2\cdot A_{22} + \dots + b_n\cdot A_{n2}.$$

Аналогічно записуються усі визначники, включаючи до Δ_{x_n} . Порівнявши записи для визначників з розв'язком системи рівнянь, маємо:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \dots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Delta x_1}{|A|} \\ \dfrac{\Delta x_2}{|A|} \\ \dots \\ \dfrac{\Delta x_n}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримано формули Крамера для знаходження розв'язку системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}, \\ x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} \end{cases} \qquad \text{де} \quad \Delta = |A| \neq 0.$$

За формулами Крамера можливі випадки:

1. $\Delta \neq 0$ – система рівнянь сумісне і визначена, тобто система має єдиний розвязок:

   $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$, ... $x_n = \dfrac{\Delta x_n}{\Delta}$.

2. $\Delta = 0$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 ... = \Delta x_n = 0$ – система сумісна і не визначена, тобто має безліч розв'язків.

3. $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , ... , Δ_{x_n} відмінний від нуля, то система рівнянь несумісна, тобто розв'язків немає.

Розв’язування системи лінійних рівнянь методом Гаусса (методом виключення невідомих).

I етап. Прямий хід – це послідовне виключення невідомих і зведення системи до трикутного виду.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Виключемо невідому x_1 з усіх рівнянь системи, крім першого. Для цього перше рівняння домножимо на число $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ і додамо до другого рівняння.

Потім перше рівняння домножимо на число $\left(-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ і додамо до третього рівняння і т.д.

В результаті отримаємо систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + \dots + a'_{3n}x_n = b'_3 \\ \dots + \dots + \dots = \dots \\ a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nn}x_n = b'_{n}. \end{cases}$$

Виключимо змінну x_2 з усіх рівнянь крім першого і другого. Для цього домножимо друге рівняння на число $\left(-\dfrac{a_{32}}{a_{22}}\right)$ і додамо до третього і т.д.

Таким чином отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad a''_{33}x_3 + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

II етап. Обернений хід – з останнього рівняння одержаної системи знаходимо значення змінної x_n, потім її підставляємо в змінної (x_{n-1}) і т.д. поки з першого рівняння не знайдемо значення змінної x_1. Метод Гаусса дозволяє знайти розв'язок системи рівнянь, яка сумісна, але невизначена, тобто тоді, коли система має безліч розв'язків.

Теорема Кронекера-Капеллі

Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці ***B*** дорівнює рангу матриці ***A***, тобто ***r(B) = r(A).***

Якщо ж ***r(B) ≠ r(A),*** точніше ***r(A) < r(B),*** система рівнянь не матиме розв'язків.

Крім того сумісна система рівнянь тоді і тільки тоді має єдиний розв'язок, коли ***r(A) = r(B) = n*** – числу невідомих (це може бути тільки в тому випадку, коли ***m = n***).

Рангом матриці називається найвищий порядок мінора, відмінного від нуля.

Ранг матриці А.

Значення мінорів	**Ранг**
Усі $M^{(1)}=0$ (*A* – нульова матриця)	$r(A) = 0$
Усі $M^{(2)}=0$ і хоча б один з $M^{(1)} \neq 0$	$r(A) = 1$
Усі $M^{(3)}=0$ і хоча б один з $M^{(2)} \neq 0$	$r(A) = 2$
…………………………………	……………
Усі $M^{(r+1)}=0$ і хоча б один з $M^{(r)} \neq 0$	$r(A) = r$

Узагальнені поняття та формули з теми.

Назва	Формули та позначення
Визначник другого порядку	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$
Визначник третього порядку	$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$
Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}	$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
Мінор елемента a_{ij}	$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
Обернена матриця A^{-1}	$A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{\|A\|}$, де $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots A_{n2} \\ \dots & \dots\dots\dots & & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots A_{nn} \end{bmatrix}$.

Контрольні запитання до модулю 1.

1. Що називається матрицею? Які частинні випадки матриць ви знаєте?
2. Сформулюйте, що називається визначником другого, третього та *n-го* порядку.
3. Які ви знаєте методи обчислення визначників?
4. Сформулюйте властивості визначників.
5. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням? Наведіть приклади.
6. Що означає: розкласти визначник за елементами стовпця (рядка)?
7. Яка матриця називається оберненою до даної? Яка умова існування оберненої матриці?
8. Які існують методи розв’язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь? Запишіть формули Крамера. У якому випадку вони застосовуються? В чому полягає сутність методу Гаусса?
9. Яка матриця називається оберненою для заданої матриці A?
10. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.

Завдання для самоперевірки

1.1. Обчислити визначник другого порядку:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}$; б) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}$.

1.2. Обчислити визначник третього порядку:

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$;

в) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -7 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & -6 \end{vmatrix}$; г) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

1.3. Знайти алгебраїчне доповнення елемента A_{31} матриці:

а) $A=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & -4 \end{bmatrix}$.

1.4. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15 \\ 5x_1-2x_2+2x_3=15 \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36 \end{cases}$$

<u>Приклади виконання завдань для самоперевірки</u>

1.1. Обчислити визначник другого порядку.

<u>Розв'язання.</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot 7-5\cdot 1=9 .$$

1.2. Обчислити визначник третього порядку.

<u>Розв'язання.</u>

Згідно з правилом трикутника маємо:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\cdot 2\cdot 0+2\cdot 1\cdot 3+1\cdot 1\cdot 1-3\cdot 2\cdot 1-1\cdot 1\cdot 2-1\cdot 2\cdot 0=-1 .$$

1.3. Знайти алгебраїчне доповнення елемента A_{13} матриці:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

<u>Розв'язання.</u>

Алгебраїчне доповнення A_{31} знаходиться за наступною формулою:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij} .$$

Скористаємось даною формулою, отримавши відповідний мінор викреслюванням i -того рядка та j - того стовця:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 5.$$

1.4. Розв'язати систему: $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$

Розв'язання.

Складемо та обчислимо визначник системи.

Визначник, складений з коефіцієнтів системи відмінний від нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-5) + 5 \cdot (-9) \cdot 2 + (-8) \cdot 4 \cdot 3 - (-8) \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 \cdot (-9) = -14 \neq 0$$

Тому можна застосувати правило Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -8 \\ 9 & 3 & -9 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -42; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -8 \\ 4 & 9 & -9 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -28; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -14.$$

Звідси знаходимо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-42}{-14} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-28}{-14} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1.$$

Отже, сукупність чисел ***(3; 2; 1)*** є єдиним розв'язком системи.

1.2 МОДУЛЬ 2. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА І АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1.2.1 ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Вектором називають відрізок, який характеризується не тільки своїм числовим значенням (довжиною), але й напрямом.

Вектори позначають однією маленькою літерою із стрілкою $\vec{a}$, $\vec{c}$, або двома великими $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

При позначенні двома літерами, наприклад $\overrightarrow{AB}$, перша літера A вказує точку початку вектора, а друга літера B – точку його кінця.

Довжину (модуль) вектора позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

Рівними називають вектори, які мають однакові довжини та напрями.

Протилежними називають вектори однакової довжини, які протилежно спрямовані.

Ортом вектора $\vec{a}$ називають вектор $\vec{a}_0$, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$.

Вектор, початок якого збігається з кінцем називається *нульовим* і позначається $\vec{0}$. Напрям нульового вектора невизначений, а його довжина дорівнює нулю.

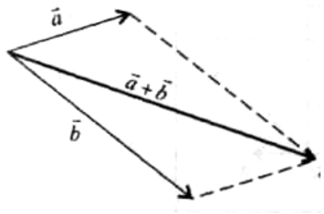
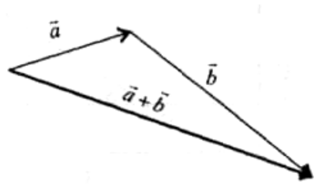
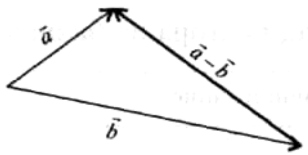
Колінеарними називають вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Компланарними називають вектори, що лежать в одній площині або в паралельних площинах.

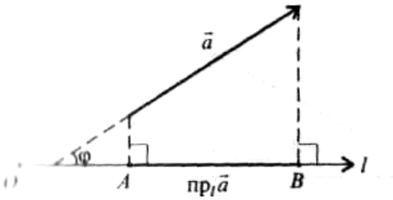
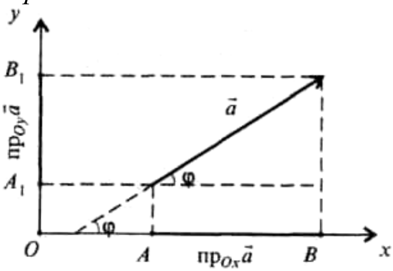
Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо вони колінеарні, однаково спрямовані та мають рівні довжини.

В аналітичній геометріі вектори можна переносити паралельно самим собі, такі вектори називаються вільними.

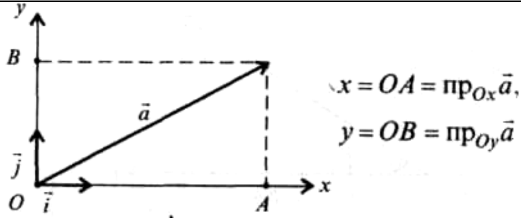
<u>Лінійні дії над векторами, заданими геометрично</u>

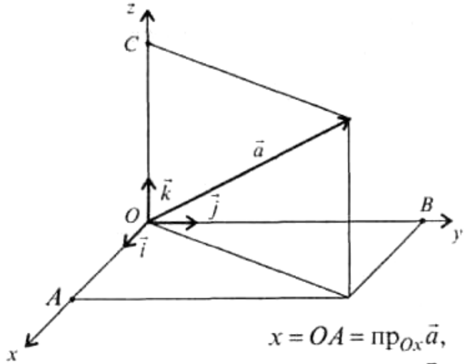
<table>
<tr><th rowspan="2">Операція</th><th colspan="2">Виконання операції</th></tr>
<tr><th>Правило паралелограма</th><th>Правило трикутника</th></tr>
<tr><td>Додавання векторів $\vec{\boldsymbol{a}}$ і $\vec{\boldsymbol{b}}$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Віднімання векторів $\vec{\boldsymbol{a}}$ і $\vec{\boldsymbol{b}}$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Множення вектора $\vec{\boldsymbol{a}}$ на скаляр $\boldsymbol{\lambda}$</td><td>$\vec{\boldsymbol{a}}$ <u>λ>0</u>
$\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{a}}$ λ>1
$\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{a}}$ 0<λ<1</td><td>$\vec{\boldsymbol{a}}$ <u>λ<0</u>
$\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{a}}$ |λ|>1
$\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{a}}$ |λ|<1</td></tr>
</table>

Проекція вектора на вісь

Назва і геометрична ілюстрація	Формули для знаходження
1	2
Проекція вектора на вісь ***l*** 	$\boldsymbol{\text{пр}_l\,\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\ \cos\varphi}$
Проекція вектора на координатні вісі 	$\boldsymbol{\text{пр}_{ox}\,\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\ \cos\varphi}$ $\boldsymbol{\text{пр}_{oy}\,\vec{a} = \lvert\vec{a}\rvert\ \sin\varphi}$

Розклад вектора за координатним базисом

Алгебраїчний запис	Геометрична ілюстрація
1	2
$\vec{a} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$. $\vec{a} = \{x; y\}$; ***x, y*** – координати вектора на площині $\vec{i} = \{1;0;0\}$; $\vec{j} = \{0;1;0\}$.	

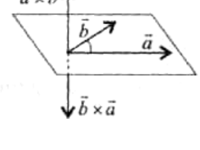
1	2
$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} =$ $= \{x; y; z\}$ x, y, z – координати вектора в просторі $\vec{i} = \{1;0;0\}$; $\vec{j} = \{0;1;0\}$; $\vec{k} = \{0;0;1\}$.	 $x = OA = \text{пр}_{Ox}\vec{a}$, $y = OB = \text{пр}_{Oy}\vec{a}$, $z = OC = \text{пр}_{Oz}\vec{a}$

<u>Лінійні дії з векторами, заданими в координатній формі</u>

Назва операції	**Формули для знаходження**
1	2
Додавання векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) =$ $= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$
Віднімання векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$	$\vec{a} - \vec{b} = (x_1; y_1; z_1) - (x_2; y_2; z_2) =$ $= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$
Множення вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *на скаляр* λ	$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1; y_1; z_1) = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$

1	2
Лінійна комбінація векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ *і* $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$	$\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\lambda_1(x_1;y_1;z_1)+\lambda_2(x_2;y_2;z_2)=$ $=(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2;\lambda_1y_1+\lambda_2y_2;\lambda_1z_1+\lambda_2z_2)$

<u>Види добутків векторів</u>

Назва та позначення	**Означення**	**Координатна форма**	**Результат**
1	2	3	4
Скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$: $(\vec{a}\cdot\vec{b})$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ $=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot пр_a\vec{b}$, або $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{b}\rvert\cdot пр_b\vec{a}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	Число
Векторний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$: $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]=$ $=\vec{a}\times\vec{b}$	1. $\vec{c}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\sin\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$ 2. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$. 3. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – права трійка векторів. 	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ або $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-$ $-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}$	Вектор

1	2	3	4
Мішаний добуток векторів: $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$	Число

Основні формули векторної алгебри

$$\left(\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3)\right)$$

Назва	Формули для знаходження	
	Векторна форма	**Координатна форма**
1	2	3
Довжина вектора $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{\vec{a}^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ *(косинуси кутів, які утворює вектор* $\vec{a}$ *з координатними осями:* α *– з віссю OX,* β *– з віссю OY,* γ *– з віссю OZ)*	$\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\beta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\gamma=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{\lvert\vec{a}\rvert}$. $(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\equiv 1)$	$\cos\alpha=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$.

1	2	3
Косинус кута між векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\dfrac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=$ $=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
Площа трикутника ***ABC***	$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$S_{ABC}=$ $=\dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$
Площа паралелограма ***ABCD,*** *побудованого на векторах* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	$S_{ABCD}=\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$S_{ABCD}=$ $=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}$
Об'єм трикутної піраміди ***SABC,*** *побудованої на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	$V_{пір}=\dfrac{1}{6}\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AS}$	$V_{пір}=\dfrac{1}{6}\,mod\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Об'єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, *побудованого на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	$V_{пар}=\lvert\vec{a}\vec{b}\vec{c}\rvert$, *де* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AA_1}$	$V_{пір}=mod\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Умови взаємного розміщення векторів

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$$

Опис взаємного розміщення	Умова	
	Векторна форма	Координатна форма
1	2	3
Перпендикулярність векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	*Скалярний добуток дорівнює нулю* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$	$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$
Колінеарність векторів $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$	*Векторний добуток дорівнює нулю* $\vec{a}\times\vec{b}=0$	$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$
Компланарність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$	*Мішаний добуток дорівнює нулю* $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$	$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$

1.2.2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ

Відстань d між точками $A(x_1)$ і $B(x_2)$ на прямій визначається за формулою:

$$d = AB = |x_2 - x_1|$$

Відстань d між точками $A\ (x_1;\ y_1\ )$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ на площині визначається за формулою:

$$d = AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

Відстань d між точками $A\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ в просторі визначається за формулою:

$$d = AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Якщо точка $M(x;\ y)$ належить прямій, яка проходить через дві точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ і задано відношення $\lambda=\frac{AM}{MB}$, в якому точка M поділяє відрізок AB, то координати точки M визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda \cdot z_2}{1+\lambda}.$$

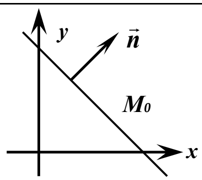
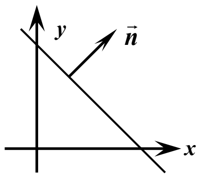
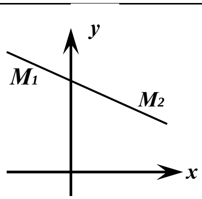
Якщо точка M – середина відрізка AB, то її координати визначаються за формулами:

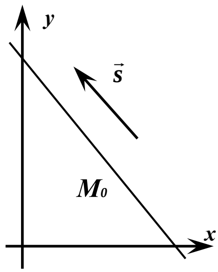
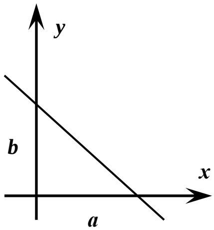
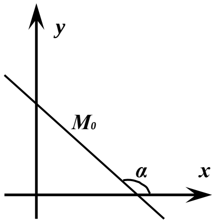
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

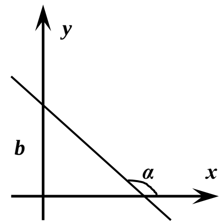
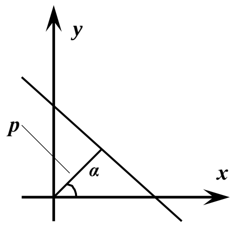
Відстань d від заданої точки $M_0\ (x_0,\ y_0)$ до прямої, що задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, знаходять за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

<u>Різні інтерпретації рівняння прямої</u>

Вид рівняння	**Назва та позначення**	**Геометрична ілюстрація**
1	2	3
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	*Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно $\vec{n}(A;B)$.	
$Ax + By + C = 0$	*Загальне рівняння прямої.* Коефіцієнти A, B – координати вектора $\vec{n}$, перпендикулярного до прямої.	
$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	*Рівняння прямої, що проходить через дві точки:* $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2\ (x_2, y_2)$	

1	2	3
$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}$	*Канонічне рівняння прямої.* Точка $M_0(x_0;\, y_0)$ належить даній прямій. $\vec{s}(l;m)$ – напрямний вектор, який паралельний до даної прямої.	
$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	*Рівняння прямої у відрізках.* a – відрізок, який відтинає пряма на осі OX; b – відрізок, який відтинає пряма на осі OY.	
$y-y_0=k(x-x_0)$	*Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0,\, y_0)$ *з кутовим коефіцієнтом* k. $k=tg\alpha$, α – кут нахилу прямої до осі OX.	

$\boldsymbol{y = kx + b}$	*Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* ***k.*** $\boldsymbol{k = tg\alpha}$, ***b*** – відрізок, який відтинає пряма на осі ***ОУ***.	
1	2	3
$\boldsymbol{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0}$	*Нормальне рівняння прямої.* ***p*** – довжина перпендикуляра від початку координат до прямої; ***α*** – кут між цим перпендикуляром і додатнім напрямом осі ***ОХ***.	

<u>Взаємне розміщення двох прямих на площині</u>

Вихідні дані	**Кут між прямими**	**Умова паралель-ності прямих**	**Умова перпендику-лярності прямих**
1	2	3	4
$\vec{S}_1(l_1; m_1)$, $\vec{S}_2(l_2; m_2)$ – напрямні вектори прямих: $\dfrac{x - x_0}{l_1} = \dfrac{y - y_0}{m_1}$	$\cos\theta = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$	$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$	$l_1 l_2 + m_1 m_2 = 0$

$\dfrac{x-x_1}{l_2}=\dfrac{y-y_1}{m_2}$			
$\vec{n}_1(A_1;B_1)$, $\vec{n}_2(A_2;B_2)$ – нормальні (перпендикулярні) вектори прямих: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\cos\theta = \\ =\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1A_2+B_1B_2=0$
1	2	3	4
$k_2;k_1$ – кутові коефіцієнти прямих: $y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b_2$	$tg\theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$	$k_2=k_1$	$k_2k_1=-1$

<u>Лінії другого порядку</u>

Кривими лініями другого порядку називають лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого степеня.

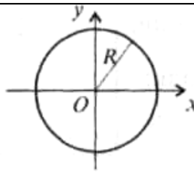
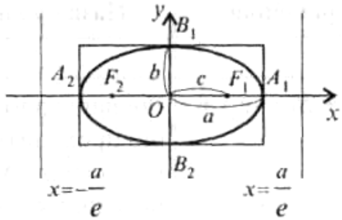
Такими лініями є *коло, еліпс, гіпербола* і *парабола*.

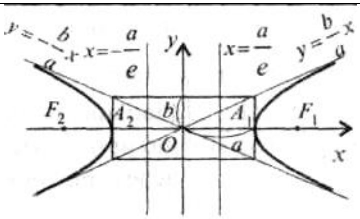
Коло – геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від однієї і тієї ж точки, яка називається центром кола.

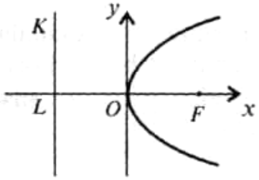
Еліпс – геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней від двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (необхідно, щоб ця стала була більша за відстань між фокусами).

Гіпербола – геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величина стала (необхідно, щоб ця стала не дорівнювала нулю і була б менша за фокалькну відстань).

Парабола – геометричне місце точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованної точки площини, яка називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається директрисою (ця пряма не повинна проходити через фокус).

Назва кривої	**Геометрична ілюстрація**	**Канонічне рівняння і основні залежності між параметрами**
1	2	3
Коло	 O — центр кола; R — радіус кола	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ R – радіус; $(x_0; y_0)$ – координати центра кола.
Еліпс	 $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ — вершини еліпса; $F_1(c; 0)$, $F_2(-c; 0)$ — фокуси еліпса	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a – велика піввісь, b – мала піввісь $(a > b)$; c – фокальна піввісь: $c^2 = a^2 - b^2$; ексцентриситет еліпса: $\varepsilon = \frac{c}{a}, (0<\varepsilon<1)$;

		рівняння директрис: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$
1	2	3
Гіпербола	 $A_1(a;\,0)$, $A_2(-a;\,0)$ — вершини гіперболи; $F_1(c;\,0)$, $F_2(-c;\,0)$ — фокуси гіперболи	$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ ***a*** – дійсна піввісь, ***b*** – уявна піввісь; ***c*** – фокальна піввісь: $c^2 = a^2 + b^2$; Ексцентриситет: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $(\varepsilon > 1)$; рівняння директрис: $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$; рівняння асимптот: $y = \pm \frac{b}{a} x$

Парабола	 $O(0;\,0)$ — вершина параболи; $F(\frac{p}{2};0)$ — фокус параболи; KL — директриса параболи	$\boldsymbol{y^2 = 2\cdot p\cdot x,}$ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{FL}$ – параметр параболи; ексцентриситет $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$; рівняння директриси: $\boldsymbol{x = -\frac{p}{2}}$.

1.2.3. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ПРОСТОРІ

Види рівнянь площини

Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
1	2	3
$\boldsymbol{M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)}$ – точка площини; $\boldsymbol{\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}}$ – вектор нормалі площини.	$\boldsymbol{A(x-x_0) + B(y-y_0) +}$ $\boldsymbol{+\,C(z-z_0) = 0}$	Рівняння площини, що проходить через точку $\boldsymbol{M_0}$ перпендикулярно до вектора $\boldsymbol{\vec{n}}$.
	$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}$	Загальне рівняння площини.
$\boldsymbol{M_1(x_1;\,y_1;\,z_1),}$ $\boldsymbol{M_2(x_2;\,y_2;\,z_2)}$ $\boldsymbol{M_3(x_3;\,y_3;\,z_3)}$ – три точки площини	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$	Рівняння площини, що проходить через три точки.

$A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ – точки перетину площини з координатними осями	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	Рівняння площини у відрізках на осях
p – відстань від початку координат до площини; $\vec{n}_0=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+$ $+\vec{k}\cos\gamma$ – орт вектора нормалі площини	$x\cos\alpha+y\cos\beta+$ $+z\cos\gamma-p=0$	Нормальне рівняння площини

Види рівняннь прямої в просторі

Вихідні дані	Вид рівняння	Назва рівняння
1	2	3
$M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка прямої; $\vec{s}(l;m;n)$ – напрямний вектор прямої	$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$	Канонічне рівняння прямої
	$\begin{cases} x=x_0+tl \\ y=y_0+tm \\ z=z_0+tn \end{cases}$, $-\infty<t<+\infty$	Параметричне рівняння прямої
$M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ – дві точки прямої	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$	Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки
$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ площини, лінією перетину яких є пряма	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	Загальне рівняння прямої

Взаємне розміщення прямої $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

і площини $Ax+By+Cz+D=0$

Взаємне розміщення прямої і площини	**Основні характеристики**	**Аналітичний вираз**
1	2	3
Пряма перетинає площину	Кут між прямою і площиною	$\sin\theta = \\ = \dfrac{\lvert Al+Bm+Cn\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$
	Координати ***x, y, z***– точки перетину прямої з площиною	$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$
1	2	3
Пряма перпендикулярна до площини	Умова перпендикулярності прямої і площини	$\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$
Пряма паралельна площині	Умова паралельності прямої і площини	$Al + Bm + Cn = 0$
Пряма належить площині	Умова належності прямої до площини	$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Al + Bm + Cn = 0 \end{cases}$

Взаємне розміщення двох площин

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

Кут між площинами	**Умова паралель-ності площин**	**Умова перпендику-лярності площин**
1	2	3
$\cos\theta = \\ = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Вихідні дані	**Кут між прямими**	**Умова паралельності прямих**	**Умова перпендикулярності прямих**
1	2	3	4
$\vec{S}_1(l_1;m_1;n_1)$, $\vec{S}_2(l_2;m_2;n_2)$ –напрямні вектори прямих ***L₁, L₂***	$\cos\ \theta = \dfrac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$	$\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$	$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

Контрольні запитання до модулю 2.

1. Що називається вектором, модулем вектора?
2. Що означає: розкласти вектор за координатним базисом?
3. Як визначаються координати вектора через координати точок його початку і кінця?
4. Що називається скалярним, векторним та мішаним добутком векторів? Які їх властивості і як вони виражаються через координати векторів?
5. Яка умова колініарності, перпендикулярності та компланарності векторів?
6. Як переконатися в тому, що дана точка належить даній прямій?
7. Як знайти точку перетину двох ліній, заданих своїми рівняннями?
8. Напішить формулу для обчислення відстані між двома точками у просторі.
9. Який вигляд мають рівняння прямої лінії у просторі?
10. Як визначаються відстань від точки до площини?
11. Як визначити кут між двома площинами? Згадайте умови паралельності та перпендикулярності двох площин.
12. Як визначити кут між прямою та площиною в просторі? Згадайте умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини у просторі.
13. Які ви знаєте лінії другого порядку? Згадайте їх канонічні рівняння.
14. Що можна сказати про ексцентриситет еліпса, гіперболи, параболи по відношенню до одиниці?

Завдання для самоперевірки

2.1. На координатній площині XOY знайти відстань між точками $A\ (5;\ -5)$ та $B\ (11;\ -7)$.

2.2. На координатній площині XOY задані координати вершин трикутника ABC: $A\ (-15;\ 0)$; $B\ (20;\ 53)$; $C(40;\ -35)$. Знайти кординати точки M медіани BM трикутника ABC.

2.3. Дано два вектори: $\vec{a}=\left(2;5;-3\right)$, $\vec{b}=\left(1;15;2\right)$. Знайти скалярний добуток цих векторів.

2.4. Довжина вектора $\vec{a}\{4; y_a\}$ дорівнює ***5*** лінійних одиниць, а вектора $\vec{b}\{x_b ;7\}$ дорівнює ***7*** лінійних одиниць. Знайти y_a та x_b.

2.5. Знайти фокальну відстань та ексцентриситет еліпса: $3x^2 + 105y^2 = 315$.

2.6. Знайти відстань від точки ***P (-1; 6; -2)*** до площини, яка проходить через три точки ***M₁ (1; -1; 1)***; ***M₂ (-2; 1; 3)*** та ***M₃ (4; -5; -2)***.

<u>Приклади виконання завдань для самоперевірки</u>

2.1. На координатній площині ***XOY*** знайти відстань між точками ***A (8; –16)*** та ***B (1; 15)***.

<u>Розв'язання</u>

Відстань між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині визначається за формулою: $d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Підставивши координати точок, маємо:

$$d = AB = \sqrt{(1-8)^2 + (5+6)^2} = \sqrt{49+121} = \sqrt{170} \approx 13{,}04 \text{ лін.од.}$$

2.2. На координатній площині ***XOY*** задані координати вершин трикутника ***ABC***: ***A (–15; –20); B (20; 53); C (40; –30)***. Знайти координати точки ***M*** медіани ***BM*** трикутника ***ABC***.

<u>Розв'язання</u>

Оскільки ***BM*** – медіана, то сторона ***AC*** точкою ***M*** поділяється навпіл.

Знайдемо координати точки ***M***:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-15+40}{2} = 12{,}5\,, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-20-30}{2} = -25\,.$$

2.3. Дано два вектори: $\vec{a} = (4;1;9)$, $\vec{b} = (3;7;-1)$. Знайти скалярний добуток цих векторів.

<u>Розв'язання</u>

Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ обчислюється за наступною формулою:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2\,.$$

Підставивши координати векторів, маємо:

$(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 4\cdot 3 + 1\cdot 7 + 9\cdot(-1) = 10$.

2.4. Довжина вектора $\vec{a}\{5;\, y_a\}$ дорівнює ***13*** лінійних одиниць, а вектора $\vec{b}\{x_b;24\}$ дорівнює ***25*** лінійних одиниць. Знайти y_a та x_b .

<u>Розв'язання</u>

Довжина вектора $\vec{a}$ обчислюється за формулою:

$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{5^2 + y_a^2} = 13$. Звідси

$\sqrt{25 + y_a^2} = 13 \quad 25 + y_a^2 = 169 \quad y_a^2 = 144 \quad y_a = \pm 12$.

Аналогічно знаходимо x_b :

$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} = \sqrt{x_b^2 + 24^2} = 25$. Звідси

$\sqrt{x_b^2 + 576} = 25 \quad x_b^2 + 576 = 625 \quad x_b^2 = 49 \quad x_b = \pm 7.$

2.5. Знайти фокальну відстань та ексцентриситет еліпса:

$4x^2 + 106y^2 = 424.$

<u>Розв'язання</u>

Приведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду:

$\frac{4x^2}{424} + \frac{106y^2}{424} = 1$, $\frac{x^2}{106} + \frac{y^2}{4} = 1$.

В цьому рівнянні велика піввісь еліпса: $a = \sqrt{106}$, мала піввісь еліпса: $b = \sqrt{4} = 2.$

Фокусна відстань еліпса обчислюється наступним чином:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Знаходимо її:

$$c^2 = 106 - 4 = 102.$$

$$c = \sqrt{106 - 4} = \sqrt{102} \approx 10{,}05 \text{ лін. од.}$$

Ексцентриситет еліпса обчислюється за наступною формулою:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Підставивши в цю формулу значення ***c***, ***a***, маємо:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{102}}{\sqrt{106}} = \sqrt{\frac{102}{106}} \approx 0{,}98\ .$$

2.6. Знайти відстань від точки $\boldsymbol{P\ (13;\ 45;\ -10)}$ до площини, яка проходить через три точки $\boldsymbol{M_1\ (1;\ -1;\ 3)}$; $\boldsymbol{M_2\ (-3;\ 1;\ 3)}$ та $\boldsymbol{M_3\ (5;\ -6;\ -3)}$.

<u>Розв'язання</u>

Рівняння площини, що проходить через три точки $\boldsymbol{M_1(x_1;\ y_1;\ z_1),\ M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2),\ M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)}$ записується наступним чином:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Запишемо рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ -3-1 & 1+1 & 3-3 \\ 5-1 & -6+1 & -3-3 \end{vmatrix} = 0\ ; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 0\ ;$$

$$-12(x-1) - 24(y+1) + 12(z-3) = 0\ .$$

Розкривши дужки та привівши подібні, отримаємо рівняння площини:

$$x - 2y - z - 4 = 0\ .$$

Відстань від точки $\boldsymbol{P\ (x_0;\ y_0;\ z_0)}$ до площини $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$ визначається за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ .$$

Підставивши координати точки $\boldsymbol{P}$ та коефіцієнти $\boldsymbol{A,B,C}$ з рівняння площини, маємо:

$$d = \frac{|1\cdot 13 + 2\cdot 45 - (-10) + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} \approx 47{,}8 \text{ лін. од.}$$

1.3. МОДУЛЬ 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Основні елементарні функції

Назва функції	Аналітичний запис
Степенева	$y = x^n \quad (n \in R)$
Показникова	$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1)$
Експоненціальна	$y = e^x \quad (e = 2{,}718281...)$
Логарифмічна	$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1)$
Натуральна логарифмічна	$y = \ln x$
Тригонометричні	$y = \sin x$, $y = \cos x$ $y = tgx$, $y = ctgx$
Обернені тригонометричні	$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ $y = arctgx$, $y = arcctgx$

1.3.1. ГРАНИЦІ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ. Границя числової послідовності.

Послідовністю дійсних чисел називається функція $x_n = f(n)$ натурального аргументу, значення якої записано в порядку зростання аргументу.

Послідовність позначається так: $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ або $\{x_n\}$, де $x_n = f(n)$ – *n*-ний член послідовності (*n* = *1, 2, ...*). Числа $x_1, x_2, ...$ називають відповідно першим, другим, ... членом послідовності, а вираз x_n – *n*-ним або загальним членом послідовності.

Число A називають ***границею числової послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність: $|x_n - A| < \varepsilon$.

Символічно це означення записують наступним чином:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A.$$

Границя функції в точці x_0.

Змінна величина y називається ***функцією*** змінної величини x, якщо вказано закон, за яким кожному значенню x, взятому з множини можливих значень, відповідає певне дійсне значення y. Змінну величину x називають *незалежною змінною* або *аргументом*.

Функціональну залежність між y та x позначають: $y = f(x)$.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називають ***границею функції $f(x)$ в точці x_0***, тобто $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $0 < |x - x_0| < \delta$, $(x \neq x_0)$, виконується нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Границя функції в $+\infty$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;+\infty)$. Число A називають ***границею функції $f(x)$ в „плюс нескінченно" віддаленій точці***, тобто $A = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$, існує число $\delta(\varepsilon) \geq 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $\delta < x < +\infty$, виконується нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Границя функції в $-\infty$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(-\infty;-b)$. Число A називають ***границею функції $f(x)$ в „мінус нескінченно" віддаленій точці***, тобто $A = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) \leq -b$ таке, що для всіх x, які задовольняють умові $-\infty < x < \delta(\varepsilon)$, виконується нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Границя функції в ∞.

Число A називають ***границею функції f(x) в нескінченно віддаленій точці***, тобто $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon>0$ існує таке число $\delta(\varepsilon)>0$, що при $|x|>\delta(\varepsilon)$ виконується нерівність:

$$|f(x)-A|<\varepsilon .$$

Основні властивості границь

Формулювання теореми за умови існування $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$	Аналітичний запис
1. Границя алгебраїчної суми двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)= =\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$
2. Границя добутку двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює добутку границь цих функцій	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)= =\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$
3. Границя частки двох (або скінченної кількості) функцій дорівнює частці границь цих функцій за умови, що границя дільника не дорівнює нулю.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$, ($\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$)
4. Сталий множник можна виносити за знак границі	$\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $(c = const)$
5. Границя цілого додатнього степеня функції дорівнює тому ж степеню границі функції	$\lim\limits_{x\to a} f(x)^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

Нескінченно малі функції

Нехай на числовому проміжку X задано функцію $y=f(x)$ і для змінної $x\in X$ визначено граничний процес.

Якщо функція $f(x)$ така, що y при цьому стає і продовжує бути по абсолютній величині менше будь-якого додатнього числа, то таку функцію називають ***нескінченно малою функцією***, а змінну y називають просто нескінченно малою.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to c$ (відповідно, при $x \to \infty$, або $x \to -\infty$, або $x \to +\infty$), якщо для будь-якого довільного $\varepsilon > 0$ існує, залежне від нього $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, для яких $0 < |x - c| < \delta$ (відповідно, $x < \delta$, або $x < -\delta$, або $|x| < \delta$), має місце нерівність: $|f(x)| < \varepsilon$.

Основні властивості нескінченно малих функцій.

Властивість	Аналітичний запис
1. Алгебраїчна сума двох (або скінченної кількості) нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малою функцією	Якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ та $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)\pm\beta(x))=0$
2. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу функцію є нескінченно малою функцією	Якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ та $\lvert f(x)\rvert < M$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)\alpha(x)=0$
3. Якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x \to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика функція при $x \to a$	Якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$

Нескінченно великі функції

Якщо при $x \to c$ або $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$ функція $f(x)$ така, що y в залежності від x стає і продовжує бути по абсолютній величині більше будь-якого додатного числа, то функцію називають ***нескінченно великою функцією***, а змінну величину y просто нескінченно великою. Той факт, що y нескінченно велика при $x \to c$, відповідно при $x \to -\infty$, або $x \to -\infty$, записують у вигляді:

$y \to \infty \quad (x \to c)$ або $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$;

$y \to +\infty \quad (x \to +\infty)$ або $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$;

$y \to -\infty \quad (x \to -\infty)$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$;

$y \to \infty \quad (x \to \infty)$ або $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to c$ (або $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$), якщо для будь-якого $M > 0$ можна вказати залежне від M $\delta > 0$ таке, що нерівність $|f(x)| > M$ виконується для всіх x, які задовольняють умові $0 < |x - c| < \delta$ (відповідно: $x > \delta$, або $x < -\delta$, або $|x| < \delta$).

Основні властивості нескінченно великих функцій.

Властивість	Аналітичний запис
1. Алгебраїчна сума двох (або скінченної кількості) нескінченно великих функцій однакового знаку є нескінченно великою функцією	Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ та $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \pm\infty$, то $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm \varphi(x)) = \pm\infty$
2. Добуток обмеженої функції на нескінченно велику функцію є нескінченно великою функцією	Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ та $\lvert\varphi(x)\rvert < M$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x)\varphi(x) = \infty$
3. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика функція при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала функція при $x \to a$	Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

Важливі границі та їх наслідки

Назва	Аналітичний запис
1	2
Перша важлива границя	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
Наслідки	1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k,\quad k\neq 0$
	2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$
	3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgkx}{x}=k,\quad k\neq 0$
	4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$
	5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$
Друга важлива границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e,\quad e=2{,}7182...$
Наслідки	1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$
	2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$

Теорема про перехід до границі в показнику степеня при постійній умові.

Якщо існує $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то при сталому значенні b має місце рівність:

$$\lim_{x\to a} b^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$

Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають границю в точці a, причому $\lim\limits_{x\to a} f(x)>0$, то функція $f(x)^{\varphi(x)}$ також має границю, яка обчислюється за формулою:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$$

Односторонні границі.

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку $\langle a;b\rangle$ крім точки $x_0 \in \langle a;b\rangle$. Число A називається ***правосторонньою (лівосторонньою) границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in \langle a;b\rangle$, які задовольняють нерівність $x_0 < x < x_0 + \delta$ $(x_0 - \delta < x < x_0)$, виконується нерівність:

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Це записують так:

$$\lim_{x \to x+0} f(x) = f(x_0 + 0) = A,$$

$$\lim_{x \to x-0} f(x) = f(x_0 - 0) = A.$$

<u>Теорема</u>. Для того, щоб функція $f(x)$ мала в точці x_0 границю, яка дорівнює числу A, необхідно і достатньо, щоб в цій точці існували односторонні границі функції, які дорівнюють числу A, тобто:

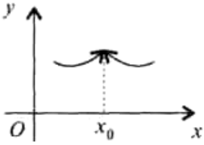
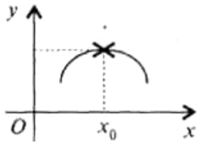
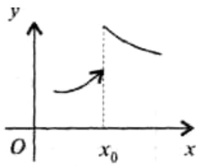
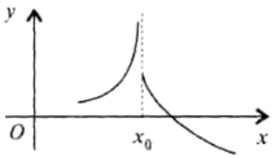
$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

<u>1.3.2. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ</u>

Назва поняття	Означення
x_0 – точка неперервності функції $f(x)$	1. $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому її околі. 2. Існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. 3. Виконується рівність: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
x_0 – точка розриву функції $f(x)$	Не виконується одна з умов 1 – 3

<u>Класифікація точок розриву функції</u>

<table>
<tr><th>Назва</th><th>Означення</th></tr>
<tr><td>x_0 – точка розриву першого роду

а) усувний розрив
</td><td>$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$,
але $f(x_0)$ невизначена або
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$</td></tr>
<tr><td>б) неусувний розрив
(розрив типу стрибка)
</td><td>$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$</td></tr>
<tr><td>x_0 – точка розриву другого роду
</td><td>Хоча б одна з границь
$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$
не існує або дорівнює нескінченості</td></tr>
</table>

Контрольні запитання до модулю 3.

1. Що називається границею функції?
2. Дайте означення границі числової послідовності.
3. Які функції називають нескінченно малими, нескінченно великими?
4. Які ви знаєте арифметичні властивості границь?
5. Як записується перша чудова границя, її наслідки?
6. Як записується друга чудова границя, її наслідки?
7. Яка функція називається неперервною в точці?
8. Які існують точки розриву функції?

Завдання для самоперевірки

3.1. Знайти границю функції:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-3}{2x^2+3}$.

3.2. Обчислити границю числової послідовності:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^2-(5n-2)^2}{(n+3)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}$.

3.3. Обчислити границю функції за допомогою першої чудової границі:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

3.4. Обчислити границю функції, використовуючи другу чудову границю:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+x+2}\right)^x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}\right)^{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+x}\right)^{x+x^3}$.

Приклади виконання завдань для самоперевірки

3.1. Знайти границю функції: $\lim\limits_{n\to 64}\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt[3]{x}-1}$.

Розв'язання.

При безпосередній підстановці граничного значення в функцію одержимо число, яке і є границею функції.

$$\lim_{n\to 64}\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\sqrt{64}+4}{\sqrt[3]{64}-1}=\frac{8+4}{4-1}=\frac{12}{3}=4\ .$$

3.2. Обчислити границю числової послідовності:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(2+n)^2}{n^2+n+1}\ .$$

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-(2+n)^2}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1-4-4n-n^2}{n^2+n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n-3}{n^2+n+1}.$$

В даній границі є невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$, розділимо чисельник і знаменник дробу на n^2 і застосуємо арифметичні властивості границь:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-2n-3}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{-2n}{n^2}-\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{n}\right)-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{n^2}\right)}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{0}{1}=0\cdot$$

3.3. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ за допомогою першої чудової границі.

<u>Розв’язання</u>**.**

Перша чудова границя має вигляд: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Зведемо границю до цього виразу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}.$$

3.4. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^3+1}{x}}$, використовуючи другу чудову границю.

<u>Розв’язання</u>.

Друга чудова границя має вигляд: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$.

Зведемо задану границю до цього виразу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2x}{x^2+1}\right)^{\frac{x^3+1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x^2+1}{2x}}\right)^{\frac{x^3+1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-x^2+1}{2x}}\right)^{\frac{-x^2+1}{2x}\cdot\left(-\frac{2x}{x^2+1}\right)\frac{x^3+1}{x}} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{x^2+1}{2x}}\right)^{-\frac{x^2+1}{2x}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x\cdot\left(x^3+1\right)}{\left(x^2+1\right)\cdot x}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^3-2}{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{-2x^3}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}} = \left[e^{\frac{-2}{0}}\right] = \left[e^{-\infty}\right] = \left[\frac{1}{e^{\infty}}\right] = 0.$$

1.4. МОДУЛЬ 4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1.4.1. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ

Похідною функції $y = f(x)$ *в точці* x_0 *називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Якщо ця границя існує, то її позначають наступним чином: $f'(x)$ або y', або y'_x, або $\frac{dy}{dx}$, або $\frac{df(x)}{dx}$.

Отже: $$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідною другого порядку функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається похідна від похідної першого порядку цієї функції:

$$y'' = (y')'.$$

Похідною n–го порядку функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається похідна від похідної (***n–1***)–го порядку цієї функції:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається головна частина приросту функції в цій точці, лінійна до Δx:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x)\, dx$$

Операцію знаходження похідної функції називають ***диференціюванням*** цієї функції. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають диференційованою в точці x_0. Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою в цьому проміжку.

Основні інтерпретації похідної.

1. *Механічний зміст похідної.* Якщо тіло рухається за законом $S = f(t)$, де S - шлях, а t - час, то похідна $f'(t)$ є величиною *миттєвої швидкості руху*.

2. *Геометричний зміст похідної.* Похідна $f'(x)$ дорівнює *кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції* $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0.

3. *Економічний зміст похідної.* Похідні $V'(x)$, $D'(x)$, $P'(x)$ дорівнюють *маргінальній (граничної) вартості, доходу та прибутку,* відповідно, при кількості продукції x. Використовують також поняття *еластичності попиту* η:

$$\eta = \frac{p \cdot f'(p)}{f(p)} \text{ або } \eta = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}.$$

Таблиця похідних елементарних функцій.

№	Похідна	№	Похідна
1	$C' = 0, \; (C = const)$	9	$(\sin x)' = \cos x$
2	$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$	10	$(\cos x)' = -\sin x$
3	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	11	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	12	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5	$(e^x)' = e^x$	13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
6	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad (a > 0, a \neq 1)$	14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
7	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15	$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$
8	$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e, \quad (a > 0, a \neq 1)$	16	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$

Правила диференціювання.

1) Похідна постійної величини C дорівнює нулю: $C' = 0$.

2) Постійний множник C можна виносити за знак похідної:

$$\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x).$$

3) Якщо кожна із функцій має похідну в деякій точці x, то їх алгебраїчна сума також має похідну в цій точці, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх похідних:

$$\left[U(x) + V(x) - W(x)\right]' = U'(x) + V'(x) - W'(x).$$

4. Похідна добутку двох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної першої функції на другу функцію і першої функції на похідну другої функції:

$$\left[U(x) \cdot V(x)\right]' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x).$$

5. Похідна частки двох диференційованих функцій дорівнює дробу, знаменником якого є квадрат знаменника даного дробу, а чисельником – різниця між добутком похідної чисельника на знаменник і добутком чисельника на похідну знаменника:

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{V^2(x)}.$$

Рівняння доточної та нормалі до графіка функції в точці x_0:

Назва рівняння	**Аналітичний запис**
1	2
Рівняння дотичної	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
Рівняння нормалі	$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Похідна складеної функції.

Якщо функція $u = \varphi(x)$ диференційована в точці x, а функція $y = f(u)$ має при відповідному значенні u похідну $y_u' = f'(u)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ в даній точці x також диференційована, причому похідна складеної функції дорівнює добутку похідної функції $y = f(u)$ за проміжним аргументом u на похідну проміжного аргументу за x:

$$y_x' = y_u' \cdot u_x .$$

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функцію $y = f(x)$ задано параметрично:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha;\beta].$$

Якщо функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію і функції $\varphi(t)$ та $\psi(t)$ диференційовані на відрізку $[\alpha;\beta]$, то функція $y = f(x)$ також диференційована на цьому відрізку. Похідну її можна знайти, користуючись формулою:

$$y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Похідна другого порядку від параметрично заданої функції обчислюється наступним чином:

$$y_{xx}'' = \left(y_x'\right)'_x = \frac{\left(y_x'\right)'_t}{\varphi'(t)}.$$

Логарифмічне диференціювання

Для знаходження похідної першого порядку функції вигляду: $y = \left(u(x)\right)^{v(x)}$ використовують метод логарифмічного диференціювання.

Спочатку прологарифмуємо функцію:

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

Шляхом диференціювання цієї рівності одержимо:

$$\frac{1}{y} y' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{1}{u(x)} u'(x).$$

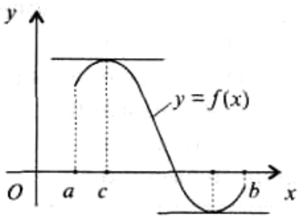
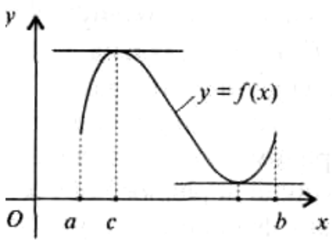
Розв’язуючи цю рівність відносно y', маємо:

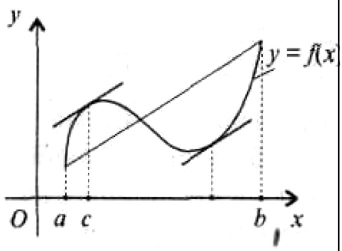
$$y' = y\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Підставивши в праву частину замість y показниково-степеневу функцію, остаточно отримаємо:

$$y' = (u(x))^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

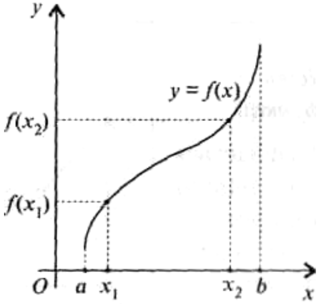
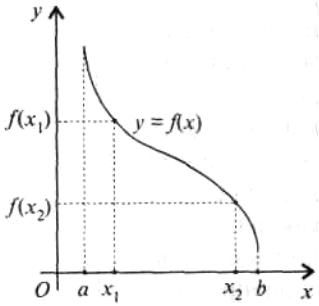
1.4.2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

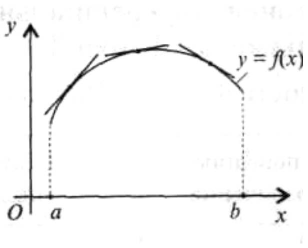
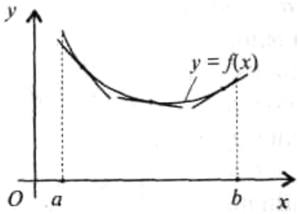
Формулювання	**Геометрична ілюстрація**	**Аналітичний запис**
1	2	3
Теорема Ферма Якщо диференційована функція ***f(x)*** у деякій точці ***c*** інтервала ***(a; b)*** набуває свого найбільшого або найменшого значення, то в цій точці похідна дорівнює нулю: ***f '(c) = 0***		Точка ***c*** $\in$ ***(a;b)*** – точка ***max*** або ***min*** ф-ції ***f(x) => f '(c) = 0***
Теорема Ролля Якщо функція ***f(x):*** **1)** неперервна на відрізку **[*a; b*]**; **2)** диференційована в інтервалі ***(a; b)***; **3)** на кінцях відрізка **[*a; b*]** набуває однакових значень, тобто ***f(a)*** = ***f(b)***, то знайдеться хоча б одна точка ***c*** $\in$ ***(a; b)***, в якій похідна функції дорівнює нулю: ***f '(c) = 0***		***f(a)*** = ***f(b)=>*** => існує т. ***c*** $\in$ ***(a; b):*** ***f '(c) = 0***
1	2	3

Теорема Лагранжа Якщо функція ***f(x):*** **1)** неперервна на відрізку [***a; b***]; **2)** диференційована в інтервалі ***(a; b)***, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій має місце рівність: $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$		Формула Лагранжа: $f'(x) =$ $= \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$
Теорема Коші Якщо функції ***f(x)*** і ***φ(x):*** **1)** неперервні на відрізку [***a; b***]; **2)** диференційовані в інтервалі ***(a; b)***; **3)** похідна $\varphi'(x) \neq 0$, то знайдеться хоча б одна точка $c \in (a; b)$, в якій виконується умова: $\dfrac{f(b) - f(c)}{\varphi(b) - \varphi(c)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.		Формула Коші: $\dfrac{f(b) - f(c)}{\varphi(b) - \varphi(c)} =$ $= \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.
Правило Лопіталя Нехай функції ***f(x)*** і ***φ(x)*** диференційовані в деякому околі точки ***a*** і в цьому околі $\varphi'(x) \neq 0$. Якщо ***f(x)*** і ***φ(x)*** є одночасно або нескінченно малими, або нескінченно великими функціями при $x \to a$, тобто мають місце невизначеності типів $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$, то границя відношення цих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо останні існують.		$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} =$ $= \left[\dfrac{0}{0}\ або\ \dfrac{\infty}{\infty}\right] =$ $= \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ $(\varphi'(x) \neq 0)$.

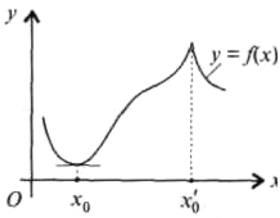
1.4.3. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

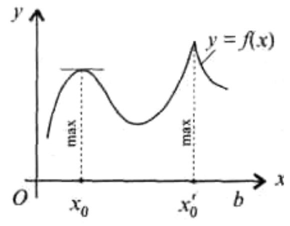
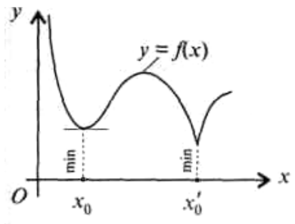
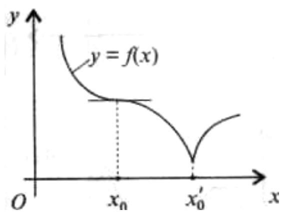
Монотонність функції. Опуклість і угнутість кривих.

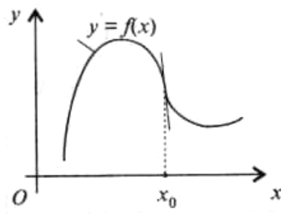
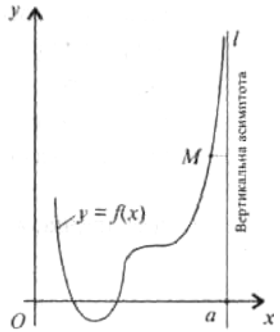
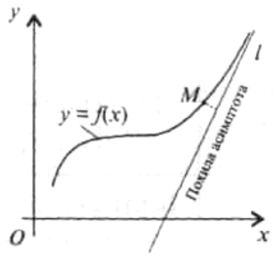
Характер поведінки функції, означення	**Геометрична ілюстрація**	**Знак похідної**
1	2	3
Зростання функції Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на інтервалі $(a; b)$, якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає більше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_1$, випливає перівність: $f(x_2) > f(x_1)$		$y'(x) \geq 0,$ $x \in (a; b)$
Спадання функції Функція $y = f(x)$ називається спадною на інтервалі $(a; b)$, якщо більшому значенню аргументу з цього інтервалу відповідає менше значення функції, тобто якщо з нерівності $x_2 > x_x$ випливає нерівність: $y = f(x_2) < f(x_1)$.		$y'(x) \leq 0,$ $x \in (a; b)$

1	2	3
<u>Опуклість графіка функції</u> Крива ***y = f(x)*** називається опуклою на інтервалі ***(a; b)***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.		$y''(x) < 0$, $x \in (a; b)$
Угнутість графіка функції Крива ***y = f(x)*** називається угнутою на інтервалі ***(a; b)***, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.		$y''(x) > 0$, $x \in (a; b)$

<u>Характерні точки і прямі кривої</u>

Назва точки або прямої, означення	**Геометрична ілюстрація**	**Аналітична умова**
1	2	3
Точка x_0 називається *критичною точкою* (або критичною точкою першого роду) функції ***y = f(x)***, якщо похідна ***f'(x)*** в цій точці дорівнює нулю або не існує		$y'(x_0) = 0$ ***y'(x₀) не існує***

1	2	3
Точка x_0 називається *точкою локального максимуму* функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, Для всіх точок x якого виконується нерівність: $f(x) < f(x_0)$		Якщо похідна $y'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з „+” на „–”, то ця точка є точкою максимуму функції $y = f(x)$
Точка x_0 називається точкою *локального мінімуму* функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, для всіх точок x якого виконується нерівність: $f(x) > f(x_0)$		Якщо похідна $y'(x)$ при переході через критичну точку змінює знак з „–” на „+”, то ця точка є точкою мінімуму функції $y = f(x)$
Точками *локального екстремуму*, або просто екстремуму, називаються точки локального максимуму і мінімуму		
Точка x_0 називається *критичною точкою другого роду* функції $y = f(x)$, якщо друга похідна $y = f''(x)$ в цій точці дорівнює нулю або не існує		$y''(x_0) = 0$ або ***$y''(x_0)$ не існує***

1	2	3
Точка кривої $\boldsymbol{y=f(x)}$ називається *точкою її перегину,* якщо вона відділяє її опуклу частину від угнутої		Якщо друга похідна $\boldsymbol{y''(x)}$ при переході через критичну точку другого роду змінює знак, то ця точка є точкою перегину кривої $\boldsymbol{y=f(x)}$
Пряма $\boldsymbol{l}$ називається *асимптотою кривої* $\boldsymbol{y=f(x)}$, якщо відстань від змінної точки $\boldsymbol{M}$ кривої до цієї прямої прямує до нуля, коли точка $\boldsymbol{M}$, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність		Якщо в точці $\boldsymbol{x = a}$ функція $\boldsymbol{y=f(x)}$ має нескінченний розрив другого роду, то пряма $\boldsymbol{x = a}$ є вертикальною асимптотою графіка функції
		Похила асимптота кривої $\boldsymbol{y=f(x)}$ має рівняння $\boldsymbol{y=kx+b}$, де $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$

<u>Контрольні запитання до модулю 4</u>.

1. Дайте означення похідної даної функції, її механічний, геометричний та економічний зміст.
2. Як записуються рівняння дотичної та нормалі до кривої?
3. Сформулюйте арифметичні властивості похідних.
4. Напишіть формули диференціювання основних елементарних функцій.
5. Що називається похідною другого порядку, третього порядку, n-ного порядку?
6. Що називається диференціалом функції, який його геометричний зміст.
7. Розкриття невизначенностей за допомогою правила Лопіталя.
8. Згадайте схему повного дослідження функції методами диференціального числення.

<u>Завдання для самоперевірки</u>

4.1. Знайти похідні функцій:

а) $y = ln^2 cos3x + 2\sqrt{x} + 5$; б) $y = tgln5x - \frac{1}{2} arcsin^2 4x$.

4.2. Скласти рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка кривої $y = \frac{4x - x^2}{4}$, в точці $x_0 = 2$.

4.3. Знайти границі, застосовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x \cdot \sin x}$.

Приклади виконання завдань для самоперевірки

4.1. Знайти похідну функції $y = \ln\ln^2 \ln^3 x$.

Розв’язання.

Застосовуючи правило диференціювання складної функції, отримаємо:

$$y' = \left(\ln\ln^2 \ln^3 x\right)' = \frac{1}{\ln^2 \ln^3 x}\left(\ln^2 \ln^3 x\right)' =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 \ln^3 x} 2\ln\ln^3 x \cdot \left(\ln\ln^3 x\right)' =$$

$$= \frac{2\ln\ln^3 x}{\ln^2 \ln^3 x} \cdot \frac{1}{\ln^3 x}\left(\ln^3 x\right)' = \frac{2\ln\ln^3 x}{\ln^2 \ln^3 x} \cdot \frac{3\ln^2 x}{\ln^3 x}\left(\ln x\right)' =$$

$$= \frac{2\ln\ln^3 x}{\ln^2 \ln^3 x} \cdot 3\frac{\ln^2 x}{\ln^3 x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln x \ln\ln^3 x}, \qquad (x \neq 1, e.)$$

4.2. Скласти рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка кривої $y = 6\sqrt[3]{x} - \dfrac{16\sqrt[4]{x}}{3}$ в точці $x_0 = 1$.

Розв’язання.

На основі геометричного змісту похідної рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ записується таким чином:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$

Для того, щоб скласти рівняння дотичної, треба обчислити значення функції та похідної в точці $x_0 = 1$:

$$y(x_0) = y(1) = \frac{2}{3}; \; y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}}; \; y'(x_0) = y'(1) = \frac{2}{3}.$$

Отже, отримаємо рівняння дотичної:

$$y - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x - 1) \qquad \text{або} \qquad y = \frac{2}{3}x.$$

Рівняння нормалі до графіка функції $y=f(x)$ записується наступним чином:

$$y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}\left(x - x_0\right),$$

отже в даному випадку воно буде мати вигляд:

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{3}{2}\left(x - 1\right), \quad \text{або} \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{13}{6},$$

або $\quad 6y + 9x - 13 = 0.$

4.3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, застосовуючи правило Лопіталя.

<u>Розв'язання.</u>

Безпосередня підстановка дає невизначеність $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Скористуємось правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left[\frac{1 + 1 - 2}{1 - 1}\right] = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Знов маємо невизначеність. Застосуємо ще раз правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[\frac{1 - 1}{0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Скористуємось правилом Лопіталя в третій раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2\,.$$

Отже, в даному прикладі застосування тричі правила Лопіталя дає можливість обчислити границю.

1.5. МОДУЛЬ 5. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1.5.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Змінна величина u називається ***функцією незалежних змінних*** $x, y, z, \ldots t,$ якщо кожній сукупності значень цих змінних у області їх змінювання відповідає єдине значення $u = f(x, y, z, \ldots t)$.

Розглянемо функцію двох змінних, як окремий випадок функції багатьох змінних. Якщо кожній парі $(x; y)$ значень двох незалежних змінних величин x і y з деякої області їх змінювання відповідає єдине значення величини z, то говорять, що z є ***функцією двох незалежних змінних*** x і y, визначеною в області z.

Функція двох змінних позначається $z = f(x; y)$.

Сукупність пар $(x; y)$ значень x і y, для яких визначається функція $z = f(x; y)$, називають *областю визначення або областю існування цієї функції*.

Різницю $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x; y)$ при $\Delta x \neq 0$ називають *частинним приростом по* x функції $f(x; y)$.

Різницю $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x; y)$ при $\Delta y \neq 0$ називають *частинним приростом по* y функції $f(x; y)$.

Різницю $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x; y)$ називають *повним приростом функції* z.

Частинні похідні функції двох змінних

Частиною похідною по x функції $z = f(x,y)$ називають границю відношення частинного прироста $\Delta_x z$ по x до приросту Δx при прямуванні Δx до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x}.$$

Частинну похідну функції z по x від функції $f(x; y)$ позначають одним із символів:

$$z'_x; \quad f'_x(x; y); \quad \frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}.$$

Аналогічно, ***частинна похідна по y*** від функції $z = f(x; y)$ визначається як границя відношення частинного приросту $\Delta_y z$ по y до приросту Δy, якщо Δy прямує до нуля:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Частина похідна функції z по y позначається одним із символів:

$$z'_y; \qquad f'_y(x, y); \qquad \frac{\partial z}{\partial y}; \qquad \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}.$$

Частинна похідна z'_x обчислюється при незмінному y, тобто її означення можна сформулювати таким чином: частинною похідною по x від функції $z = f(x; y)$ називається похідна по x, яка обчислена у припущенні, що y – стала. Аналогічно, частинною похідною по y від функції $z = f(x; y)$ називається похідна по y, яка обчислена у припущенні, що x – стала.

Повний диференціал функції двох змінних

Функція $z = f(x; y)$, повний приріст якої у даній точці $(x; y)$ може бути наданим у виді суми:

$$\Delta y = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y,$$

де

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0,}} \alpha = 0, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0,}} \alpha = 0,$$

називається *диференційованою у даній точці*.

Лінійна частина приросту називається ***повним диференціалом*** і позначається:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta y.$$

Прирости незалежних змінних Δx і Δy називаються ***диференціалами незалежних змінних x і y*** і позначаються відповідно dx і dy.

Отже, ***вираз повного диференціала*** функції двох незалежних змінних x і y має вигляд:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Якщо обчислити частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції двох незалежних змінних $z = f(x; y)$, вони також будуть функціями від незалежних змінних x і y, отже від кожної з них можна знайти частинні похідні по x або по y.

Частина похідна по x від частинної похідної $f'_x(x;y)$ називається ***частиною похідною другого порядку по*** x^2 від функції $z = f(x; y)$ в точці $(x; y)$ і позначається:

$$z''_{xx}, \quad f''_{xx}(x;y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x;y)}{\partial x^2}.$$

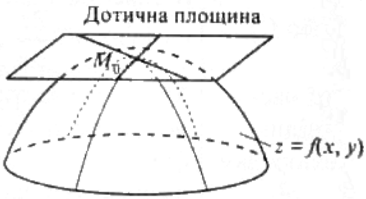
Таким чином,

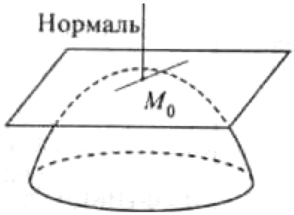
$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Аналогічно,

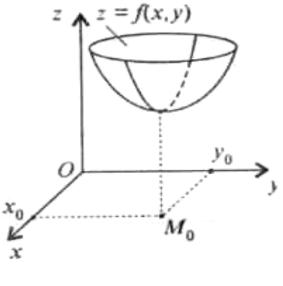
$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

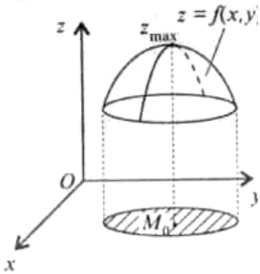
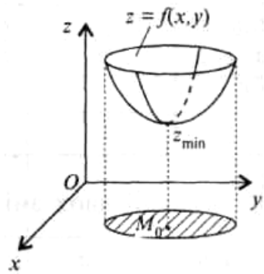
1.5.2. ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Поняття	Вид рівняння або формула для обчислення
1	2
Дотична площина до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	 а) поверхню задано неявно $F(x; y; z) = 0$: $F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) +$ $+ F_z(M_0)(z - z_0) = 0$ б) поверхню задано явно $z = f(x; y)$: $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0$

1	2
Нормаль до поверхні в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$	 а) поверхню задано неявно $F(x; y; z) = 0$: $$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)};$$ б) поверхню задано явно $z = f(x; y)$: $$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{1}$$

Локальні екстремуми функції багатьох змінних

Назва точки, означення	Геометрична ілюстрація	Аналітична умова
1	2	3
Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ називається критичною точкою функції $z = f(x; y)$, якщо частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю (або не існують).		$$\begin{cases} \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

1	2	3
Якщо функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки M_0, неперервна в цій точці і для довільної точки M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$, то точка M_0 називається точкою локального максимуму, або просто максимуму функції $z = f(x; y)$	 	Якщо в точці M_0 частинні похідні функції $z = f(x; y)$ дорівнюють нулю і в деякому околі точки M_0 функція $z = f(x; y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, причому $f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2 > 0$, $f''_{xx}(M_0) < 0$, то точка M_0 є точкою максимуму функції $z = f(x; y)$
Якщо функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки M_0, неперервна в цій точці і для довільної точки M цього околу виконується нерівність $f(M) > f(M_0)$, то точка M_0 називається точкою локального мінімуму функції, або просто точкою мінімуму функції $z = f(x; y)$	 	Якщо в точці M_0 частинні похідні функції $z = f(x; y)$ дорівнюють нулю і в деякому околі точки M_0 функція $f(x; y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку, причому $f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2 > 0$, $f''_{xx}(M_0) > 0$, то точка M_0 є точкою мінімуму функції $z = f(x; y)$.

Контрольні запитання і завдання до модулю 5.

1. Дайте означення функції двох змінних та її області визначення.
2. Як визначається границя та неперервність функції двох змінних?
3. Що називається повним, частинним приростом функции кількох змінних?
4. Сформулюйте означення частинної похідної. Який її геометричний зміст?
5. Що називається повним диференціалом функції багатьох змінних?
6. Як визначаються частинні похідні вищих порядків?

Завдання для самоперевірки

6.1.Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = x^2 y^2 + x^3 - y^3$.

6.2. Знайти повний диференціал dz функцій:

а) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; б) $z = \ln tg\frac{y}{x}$; в) $z = \cos^2 y - x^2 y^2 + 1$.

6.3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функцій:

а) $z = x^4 y^2 + 2\cos x + xy$; б) $z = \frac{y^3 \cdot x^3}{3} + e^{x+y}$; в) $z = \sin^3 x^2 y^2$.

Приклади виконання завдань для самоперевірки

6.1.Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = x^3 y^3 - x^3 + y^3$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^3 - 3x^2 = 3x^2 (y^3 - 1).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 + 3y^2 = 3y^2(x^3 + 1).$$

6.2. Знайти повний диференціал dz функції $z = x^3y^3 - x^3 + y^3$.

Розв'язання.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 3x^2(y^3 - 1)dx + 3y^2(x^3 + 1)dy.$$

6.3. Знайти частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функції $z = x^3y^3 - x^3 + y^3$.

Розв'язання.

Оскільки $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^3 - 3x^2 = 3x^2(y^3 - 1)$, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^3 - 6x = 6x(y^3 - 1).$$

Оскільки $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3y^2 + 3y^2 = 3y^2(x^3 + 1)$, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^3y + 6y = 6y(x^3 + 1).$$

1.6. МОДУЛЬ 6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

1.6.1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.

Функція $F(x)$ називається ***первісною*** функції $f(x)$ на проміжку $(a; b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a; b)$ і справджується рівність $F'(x) = f(x)$, якщо $x \in (a;b)$.

Невизначеним інтегралом називають сукупність всіх первісних $F(x) + C$ заданої функції.

Позначення невизначеного інтегралу:

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Таблиця основних невизначених інтегралів

№	Інтеграл	№	Інтеграл
1	$\int dx = x + C$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	11	$\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	12	$\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
4	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	13	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert tg\frac{x}{2}\right\rvert + C$
5	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right\rvert + C$
6	$\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
7	$\int \sin xdx = -\cos x + C$	16	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
8	$\int \cos xdx = \sin x + C$	17	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	18	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

Властивості невизначеного інтеграла

1) Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2) Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x)dx = F(x) + C.$$

4. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$$

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій $f(x)$ та $g(x)$ дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій за умови, що $f(x)$ та $g(x)$ мають первісні:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Основні методи інтегрування.

1. *Метод безпосереднього інтегрування.*

Базується на основних властивостях невизначених інтегралів, таблиці інтегралів, а також на рівностях:

$$dx = d(x+b); \quad dx = \frac{1}{k}d(kx+b), \quad \text{де} \quad k, b - const.$$

2. *Метод заміни змінної.*

$$\int f(x)dx = \left| x = \varphi(t) \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt.$$

Остання рівність існує за наступних умов:

- $f(x)$ має первісну на інтервалі $(a; b)$;
- $\varphi(t)$ визначена і диференційована на інтервалі $(\alpha; \beta)$, причому $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$.

З методу заміни змінної випливає наступна рівність:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

3. *Метод інтегрування частинами.*

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(функції $u=f(u)$ та $v=f(v)$ мають на деякому проміжку неперевні похідні).

Рекомендації до застосування методу інтегрування частинами:

55.Якщо $\int P(x)\cdot\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx,\ \text{то } u = P(x);\ dv = \begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}dx$.

56.Якщо $\int P(x)\cdot\begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{Bmatrix}dx,\ \text{то } u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{Bmatrix};\ dv = P(x)dx$,

де $P(x)$ – многочлен.

Інтегрування раціональних дробів

Раціональні дроби	Інтеграли
1	2
Найпростіші раціональні дроби	
Типу І: $\dfrac{A}{x-a}$	$\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\ln\lvert x-a\rvert + C$
Типу ІІ: $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n \geq 2$	$\int \dfrac{A}{(x-a)^n}dx = \dfrac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$
Типу ІІІ: $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, де $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$	$\int \dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \dfrac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \dfrac{N - \dfrac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} arctg \dfrac{x + \dfrac{p}{2}}{\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}} + C$
1	2

Типу IV: $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}$, де $\dfrac{p^2}{4}-q<0$, $n\ge 2$	$\int\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx$ шляхом повторного інтегрування частинами зводиться до інтегралу від найпростішого дробу типу III.
Правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $де\ m<n$	$\int\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$ зводиться до суми інтегралів від найпростіших дробів типів I – IV. Зауваження: 1. Дійсному простому кореню знаменника $x=a$ відповідає дріб типу I: $\dfrac{A}{x-a}$ 2. Дійсному простому кореню знаменника $x=b$ кратності k відповідає сума дробів типів I і II: $\dfrac{A_1}{x-b}+\dfrac{A_2}{(x-b)^2}+\ldots+\dfrac{A_k}{(x-b)^k}$ 3. Парі комплексно-спряжених коренів знаменника або квадратному тричлену x^2+px+q з $\dfrac{p^2}{4}-q<0$ відповідає дріб типу III: $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$
Неправильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $де\ m\ge n$	$\int\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\int T_{m-n}(x)dx+\int\dfrac{R_p(x)}{Q_n(x)}dx$, де $T_{m-n}(x)$ –ціла частина дробу; $\dfrac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ –правильний раціональний дріб ($p<n$)

Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл	Підстановка
1	2
$\int R(x,\sqrt[n]{x})dx$	$\sqrt[n]{x}=t$
$\int R(x,\sqrt[n_1]{x},\sqrt[n_2]{x},...)dx$	$\sqrt[n]{x}=t$, де n – найменше спільне кратне чисел n_1, n_2, ...
$\int R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$	$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$
$\int R(x,\sqrt{x^2+a^2})dx$	$x=a\cdot tgt$ або $x=a\cdot ctgt$
$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$	$x=\dfrac{a}{cost}$ або $x=\dfrac{a}{sint}$
$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$	$x=a\cdot \sin t$ або $x=a\cdot \cos t$

<u>Інтегрування тригонометричних функцій</u>

Інтеграл	Підстановка	Вираз для інтегрування
1	2	3
$\int R(\sin x)\cos xdx$	$t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$	$\int R(t)dt$
$\int R(\cos x)\sin xdx$	$t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$	$-\int R(t)dt$
$\int \sin^2 xdx$	$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$	$\dfrac{1}{2}\int\left(1-\cos 2x\right)dx$
$\int \cos^2 xdx$	$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$	$\dfrac{1}{2}\int\left(1+\cos 2x\right)dx$
$\int \sin^m x\cos^n xdx$, m та n – цілі парні додатні числа: $m=2p,\ n=2q$	$\sin^{2p} x=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^p$ $\cos^{2q} x=\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^q$	$\int \sin^{2p} x\cos^{2q} x\,dx=$ $=\int\left(\sin^2 x\right)^p\left(\cos^2 x\right)^q dx=$ $=\int\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^p\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^q dx$
1	2	3

$\int \sin^m x \cos^n x dx$, n чи m – непарне ціле додатнє число.		
Можливі випадки:		
1) якщо $n = 2p+1$	$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$	$\int \sin^m x \cdot \cos^{2p+1} x\, dx = \int \sin^m x \cdot \left(1 - \sin^2 x\right)^p \cdot \cos x\, dx = \int t^m \cdot \left(1 - t^2\right)^p dt$
2) якщо $m = 2k+1$	$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$	$\int \sin^{2k+1} x \cdot \cos^n x\, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cdot \cos^n x \cdot \sin x\, dx = -\int (1 - t^2)^k \cdot t^n dt$
$\int R(\sin x, \cos x) dx$	***Універсальна тригонометрична підстановка*** $t = tg\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$	$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}$
$\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x dx$	$\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x\right)$	$\frac{1}{2}\int \left(\sin(\alpha - \beta)x - \sin(\alpha + \beta)x\right) dx$
$\int \sin \alpha x \cdot \sin \beta x dx$	$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x\right)$	$\frac{1}{2}\int \left(\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x\right) dx$
1	2	3

$\int \cos \alpha x \cdot \cos \beta x dx$	$\cos \alpha x \cdot \cos \beta x =$ $= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right)$	$\frac{1}{2}\int\left(\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x\right)dx$

Інтегрування диференціального бінома

Диференціальним біномом називається вираз $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, де $a, b - const$ $\left(a \neq 0,\ b \neq 0\right)$; m, n, p – дійсні числа.

Інтеграл $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ виражається через елементарні функції в наступних випадках:

Умова	**Підстановка**
1	2
1. Якщо p – ціле число	$x = t^k$, де k – спільний знаменник дробів m і n
2. Якщо p – дріб $\left(p = \frac{r}{s}\right)$, але $\frac{m+1}{n}$ – ціле число	$a + bx^n = y^s$, де s – знаменник дробу p.
3. Якщо обидва числа $p = \frac{r}{s}$ та $\frac{m+1}{n}$ – дроби, але їх сума $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле число	$a + bx^n = y^s x^n$ або $ax^{-n} + b = y^s$, де s – знаменник дробу p.

Інтегрування функцій типу $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$

Інтегруання цього типу функцій відбувається за допомогою однієї з ***підстановок Ейлера***.

Назва	**Умова**	**Підстановка**
1	2	3
Перша підстановка Ейлера	$a>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\cdot x+t$
Друга підстановка Ейлера	$c>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$
Третя підстановка Ейлера	Трьохчлен ax^2+bx+c має дійсні корені x_1, x_2	$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)\cdot t$ або $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_2)\cdot t$

1.6.2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ називається границя інтегральної суми $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ \Delta x_k$ при $\lambda = max\ \Delta x_k \to 0$, якщо остання існує і не залежить ні від способу розбиття відрізку на частини, ні від вибору точок ξ_k в кожній із частин:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\ \Delta x_k,$$

$$\lambda = max\ \Delta x_k \to 0$$

Основні властивості визначеного інтеграла.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровані на відрізку ***[a;b]***.

1. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx, \quad C = const$$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій $f(x)$ та $g(x)$ дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx .$$

3. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 .$$

4. Якщо змінити місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить свій знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

5. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на максимальному з відрізків ***[a; b], [a; c], [c; b],*** то інтеграл від функції $f(x)$ по відрізку ***[a; b]*** дорівнює сумі інтегралів від цієї функції по відрізках ***[a; c]*** та ***[c; b]***:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

6. Якщо для всіх точок відрізка ***[a; b]*** виконується нерівність $f(x) < g(x)$, то аналогічна нерівність має місце і для визначених інтегралів від цих функцій на відрізку ***[a; b]***:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

7. Якщо m і M – відповідно найменше та найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку ***[a; b]*** ***(a < b)***, то значення визначеного інтерала від цієї функції на відрізку ***[a; b]*** знаходиться між добутками найменшого та найбільшого значень підінтегральної функції на довжину відрізка інтегрування:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

8. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку ***[a; b]***, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що добуток значення функції в цій точці на довжину відрізка ***[a; b]*** дорівнює визначеному інтегралу $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \qquad c \in (a;b).$$

<u>Обчислення визначеного інтеграла</u>

1. *Формула Ньютона-Лейбніца:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ або } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на ***[a; b]***.

2. *Формула заміни змінної у визначеному інтегралі:*

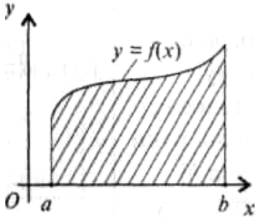
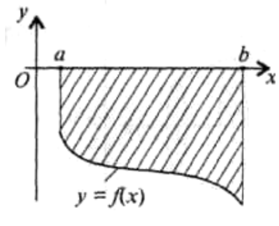
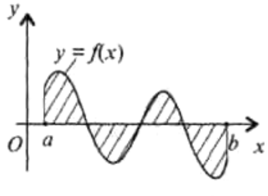
$$\int_a^b f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \\ \varphi(\alpha) = a \Rightarrow t_a = \alpha \\ \varphi(\beta) = b \Rightarrow t_b = \beta \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

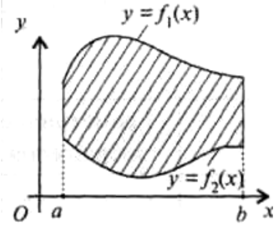
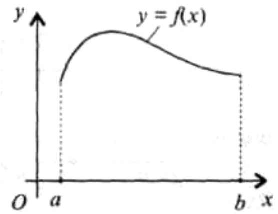
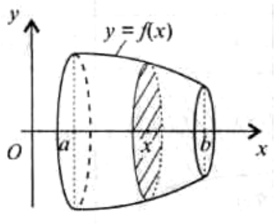
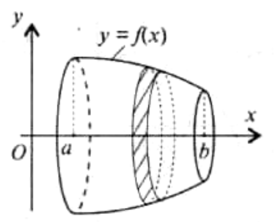
3. *Формула інтегрування частинами визначеного інтеграла:*

$$\int_a^u udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

<u>Застосування визначеного інтеграла</u>

Геометричні задачі

Назва поняття	**Геометрична ілюстрація**	**Формули для обчислення**
1	2	3
<u>Площа плоскої фігури:</u> а) площа криволінійної трапеції, якщо ***f(x) ≥ 0***		а) криву задано явно: $S=\int_a^b f(x)dx$; б) криву задано параметрично: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ t \in [\alpha;\beta]$ $S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$
б) площа криволінійної трапеції, якщо ***f(x) ≤ 0***		$S=-\int_a^b f(x)dx$
в) площа фігури, зображеної на рисунку		$S=\int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$
1	2	3

г) площа фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ та прямими $x=a,\ x=b$		$S=\int\limits_a^b (f_1(x)-f_2(x))dx$, $(f_1(x)\geq f_2(x))$
Довжина дуги кривої		а) криву задано явно: $y=f(x),\ x\in[a;b]$; $l=\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$; б) криву задано параметрично: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases},\ t\in[\alpha;\beta]$; $l=\int\limits_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$
Об’єм тіла обертання		$V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$
Площа поверхні обертання		$Q=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

<u>Наближене обчислення визначених інтегралів</u>.

Назва	**Аналітичний запис**
1	2
Формула прямокутників	$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)$, або $\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, де $x_i = x_{i-1} + h;\quad h = \frac{b-a}{n}$
Формула трапецій	$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$, де $x_i = x_{i-1} + h;\quad h = \frac{b-a}{n}$
Формула Сімпсона	$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(f(a) + f(b) +$ $+ 2(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x2n-2)) +$ $+ 4(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2n-1})),$ де $x_i = x_{i-1} + h;\quad h = \frac{b-a}{n}$

<u>1.6.3. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ</u>

Невластиві інтеграли з нескінченою верхньою або нижньою межою інтегрування визначають наступним чином:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \quad \text{або} \quad \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx .$$

Якщо границя правої частини рівності існує і скінчена, то відповідний невластивий інтеграл називають *збіжним*. Якщо границя не існує або дорівнює $\pm\infty$, то інтеграл називають *розбіжним*.

Невластиві інтеграли з двома нескінченими межами інтегрування визначають наступним чином:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx .$$

Цей інтеграл буде *збіжним, якщо обидва інтеграли правої частини рівності – збіжні.*

Невластиві інтеграли від необмежених функцій

Коли на обмеженому проміжку інтегрування **[*a*; *b*]** підінтегральна функція необмежено зростає, тобто $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to a$ або $x \to b$, або при $x \to c$, де $a < c < b$, тоді невластиві інтеграли від необмеженої функції визначають так:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \text{або} \quad \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad \text{або}$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{a}^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'' \to 0} \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx, \text{ де } (\varepsilon,\ \varepsilon' \text{ та } \varepsilon'' - \text{додатні}).$$

Якщо вказані границі існують, то відповідний інтеграл називають *збіжним*. Якщо будь-яка з границь не існує або дорівнює $\pm\infty$, то відповідний інтеграл називають *розбіжним*.

Для дослідження збіжності або розбіжності інтегралів важливими є теореми:

<u>Теорема 1</u>. Якщо для всіх ***x (x ≥ a)*** виконується нерівність $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ і якщо $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ збігається, то збігається і інтегал $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, причому $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx \le \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$.

<u>Теорема 2</u>.

Якщо для всіх ***x (x ≥ a)*** виконується нерівність $\varphi(x) \le f(x) \le 0$ і якщо $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ збігається, то інтегал $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Якщо ***f(x)*** є знакозмінною в **[*a;* +∞]**, то має місце теорема 3:

<u>Теорема 3</u>.

Якщо збігається $\int\limits_{a}^{+\infty}\left|f(x)\right|dx$, то збігається і інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$, причому абсолютно.

Контрольні запитання до модулю 6.

1. Яка функція називається первісною?
2. Дайте означення невизначеного інтеграла.
3. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
4. У чому полягає метод інтегрування частинами та метод заміни змінної?
5. Сформулюйте означения визначеного інтеграла.
6. У чому полягае геометричний зміст визначеного інтеграла?
7. Які ви знаєте основні властивості визначеного інтеграла?
8. Що можна сказати про застосування визначеного інтеграла?
9. Що називається невластивим інтегралом з нескінченними межами існування?
10. Чи можна застосовувати формулу Ньютона-Лейбніца для інтегралів:

а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{x-3}$; в) $\int\limits_{1}^{\infty}x^{3}dx$.

Завдання для самоперевірки

5.1. Знайти невизначені інтеграли. Результат перевірити диференціюванням.

а) $\int\left(2e^{x}+5\sin x+\frac{1}{x^{2}}\right)dx$; б) $\int x^{2}\cdot e^{x}dx$; в) $\int\frac{\sin^{3}x}{2+\cos x}dx$.

5.2. Обчислити визначені інтеграли.

а) $\int\limits_{1}^{3}x^{3}\cdot\sqrt{x^{2}-1}dx$; б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}arctg\,x\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{\pi/3}\cos^{2}x\,dx$.

5.3. Встановити збіжність або розбіжність інтегралів:

а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$; б) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

5.4. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:
$y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.

Приклади виконання завдань для самоперевірки

5.1. а) Знайти $\int \left(3\sqrt{x} - 4x + 1\right)dx$.

Розв’язання.

Використовуючи властивості інтегралів та формули таблиці інтегралів, маємо:

$$\int \left(3\sqrt{x} - 4x + 1\right)dx = \int 3\sqrt{x}dx - \int 4xdx + \int 1dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx - 4\int xdx + \int dx =$$
$$= 2\sqrt{x^3} - 2x^2 + x + C$$

б) Знайти $\int x \cdot sinxdx$.

Розв’язання.

Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int x \cdot sinxdx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = sinxdx & v = \int sinxdx = -cosx \end{vmatrix} =$$
$$= -x \cdot cos\,x + \int cos\,x = -x \cdot cos\,x + sinx + C.$$

в) Знайти $\int \frac{dx}{5 - 3cosx}$.

Розв’язання.

Застосуємо до інтегралу універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x} = \left| \begin{matrix} tg\,\frac{x}{2} = t & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ x = 2arctgt & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{5-3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{5+5t^2-3+3t^2} = 2\int \frac{dt}{8t^2+2} = \int \frac{dt}{4t^2+1} = \frac{1}{2} arctg2t + C =$$

$$= \frac{1}{2} arctg\left(2tg\,\frac{x}{2}\right) + C.$$

5.2. а) Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{1}^{9} x \cdot \sqrt[3]{1-x}$.

<u>Розв'язання</u>.

Виконаємо заміну: $t = \sqrt[3]{1-x}$.

Тоді $x = 1-t^3, \quad dx = -3t^2dt$.

Якщо $x = 1$, то $t = 0$; якщо $x = 9$, то $t = -2$.

Отже, $\int\limits_{1}^{9} x\sqrt[3]{1-x} = \int\limits_{0}^{-2} \left(1-t^3\right)\cdot t \cdot \left(-3t^2\right)dt = 3\int\limits_{-2}^{0}\left(1-t^3\right)\cdot t^3dt =$

$$= 3\left(\frac{t^4}{3} - \frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_{-2}^{0} = -66\frac{6}{7}.$$

б) Обчислити визначений інтеграл: $\int\limits_{1}^{2} 2\ln x dx$.

<u>Розв'язання</u>.

Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$2\int\limits_{1}^{e} \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{matrix} \right| = 2\left(x\cdot \ln x\Big|_{1}^{e} - \int\limits_{1}^{e} x\cdot\frac{1}{x}dx \right) =$$

$$= 2(e - e + 1) = 2.$$

в) Знайти $\int\limits_{0}^{\pi/2} 2\sin^2 x dx$

Застосуємо до інтеграла формулу:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Тоді:

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2x) dx = \int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \cos 2x dx =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin \pi \right) = \frac{\pi}{2}.$$

5.3. а)Встановити збіжність або розбіжність інтеграла: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

В околі $x = 0$ підінтегральна функція необмежена. Отже,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \to +0} \int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\alpha \to +0} (1 - \sqrt{\alpha}) = 2,$$

інтеграл збіжний.

б) Встановити збіжність або розбіжність інтеграла:

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Розв'язання.

В околі $x = 1$ підінтегральна функція необмежена. Отже,

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\beta \to +0} \int_{1/2}^{1-\beta} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{\beta \to +0} \arcsin x \Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1-\beta} =$$

$$= \lim_{\beta \to +0} \left[\arcsin(1 - \beta) - \arcsin \frac{1}{2} \right] = \arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

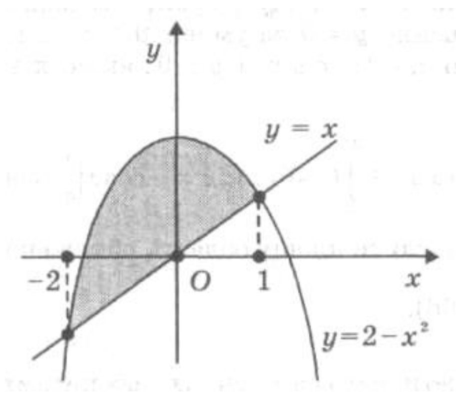
Інтеграл збіжний.

5.4. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій: $y = 2 - x^2$; $y = x$.

Розв'язання.

Знайдемо точки перетину заданих ліній. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \; x_1 = -2\,; \; x_2 = 1\,.$$



Площу знайдемо згідно з наступною формулою:

$$F = \int_a^b [\,f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

$$F = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2} \text{ кв. од.}$$

Розділ 2. РОЗРАХУНКОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

2.1. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1.

Аналітична геометрія. Векторна та лінійна алгебра.

I. В задачах **1-20** задані координати вершин трикутника ***ABC***.

Знайти:

1. довжини сторін ***AB, BC*** та ***AC***;
2. рівняння сторін ***AB, BC, AC*** та їх кутові коефіцієнти;
3. величину кута ***B*** в радіанах з точністю до двох знаків;
4. довжину бісектриси ***BP*** внутрішнього кута ***B***;
5. рівняння висоти ***CD*** та її довжину;
6. рівняння медіани ***AE*** та координати точки ***P*** перетину цієї медіани з висотою ***CD***;
7. рівняння прямої ***PL***, яка проходить через точку ***P*** паралельно до сторони ***AB***;
8. рівняння та довжину перпендикуляра (висоти) ***BH***, який проведено з вершини ***B*** на медіану ***AE***;
9. координати точки ***M***, розташованої симетрично до точки ***A*** відносно прямої ***CD;***
10. побудувати на міліметровому папері трикутник ***ABC*** та знайти його елементи в системі координат ***xOy***, взявши відповідну одиницю масштабу.

№ задачі	Координати вершин трикутника		
1	A (–7; –2)	B (13; –19)	C (9; 11)
2	A (–9; 3)	B (3; –6)	C (7; 16)
3	A (2; –1)	B (14; –10)	C (12; 4)
4	A (–3; 2)	B (9; –7)	C (13; 15)
5	A (–4; 0)	B (8; –9)	C (12; 13)
6	A (–10; 5)	B (2; –4)	C (6; 18)
7	A (–1; 2)	B (11; –7)	C (9; 7)
8	A (–6; –1)	B (6; –10)	C (10; 12)
9	A (–5; 8)	B (7; –1)	C (5; 13)
10	A (–2; 1)	B (10; –8)	C (14; 14)
11	A (–6; 3)	B (6; –6)	C (4; 8)
12	A (–1; –2)	B (11; –11)	C (15; 11)
13	A (–8; 4)	B (4; –5)	C (8; 17)
14	A (–4; 8)	B (8; –1)	C (12; 21)
15	A (–9; 5)	B (3; 4)	C (1; 10)
16	A (–9; 7)	B (3; –2)	C (1; 12)
17	A (–2; 1)	B (10; –8)	C (8; 6)
18	A (–3; 0)	B (9; –9)	C (13; 13)
19	A (–7; 7)	B (5; –2)	C (3; 12)
20	A (–4; 1)	B (8; –8)	C (12; 14)

ІІ. В задачах **21-25** скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней яких до даної точки $\boldsymbol{A\ (x_1;\ y_1)}$ і до даної прямої $\boldsymbol{x = a}$ дорівнює числу **ε**. Одержане рівняння звести до канонічного виду і побудувати криву.

№ задачі	Координати точки $A\ (x_1;\ y_1)$	Рівняння прямої $x = a$	ε
21	$A\ (3;\ 0)$	$x = 4/3$	$1{,}5$
22	$A\ (2;\ 0)$	$x = 4{,}5$	$2/3$
23	$A\ (10;\ 0)$	$x = 2{,}5$	2
24	$A\ (2;\ 0)$	$x = -8/5$	$5/4$
25	$A\ (6;\ 0)$	$x = 1{,}5$	2

В задачах **26-30** скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від даної точки $\boldsymbol{A\ (x_1;\ y_1)}$ і даної прямої $\boldsymbol{y = b}$. Одержане рівняння привести до канонічного виду і побудувати криву.

№ задачі	Координати точки $A\ (x_1;\ y_1)$	Рівняння прямої $y = b$
26	$A\ (1;\ -1)$	$y = 3$
27	$A\ (-4;\ 3)$	$y = -1$
28	$A\ (2;\ 5)$	$y = 1$
29	$A\ (3;\ -4)$	$y = 2$
30	$A\ (-2;\ -3)$	$y = -1$

В задачах **31-35** дано координати точок ***A*** $(x_1; y_1)$ і ***B*** $(x_2; y_2)$.

Необхідно:

1) скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через задані точки ***A*** і ***B***, якщо фокуси гіперболи розташовані на вісі абсцис;

1. знайти піввісі, фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот цієї гіперболи;

2. знайти всі точки перетину гіперболи з колом, який має центр в початку координат і проходить через фокуси гіперболи;

1. побудувати гіперболу, її асимптоти і коло.

№ задачі	Координати точки *A* $(x_1; y_1)$	Координати точки *B* $(x_2; y_2)$
31	$A\ (8;\ 6)$	$B\ (10;\ -3\sqrt{10}\ )$
32	$A\ (8;\ 12)$	$B\ (-6;\ 2\sqrt{15}\ )$
33	$A\ (-4;\ -3)$	$B\ (8;\ 9)$
34	$A\ (4;\ -6)$	$B\ (6;\ 4\sqrt{6}\ )$
35	$A\ (-3;\ 4)$	$B\ (-5;\ 4\sqrt{5}\ )$

В задачах **36-40** дано координати точок ***A*** $(x_1; y_1)$ і ***B*** $(x_2; y_2)$ і радіус кола ***R***, центр якого знаходиться в початку координат.

Необхідно:

1) скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через задані точки ***A*** і ***B***;

2)знайти піввісі, фокуси, ексцентриситет цього еліпса;

1. знайти усі точки перетину еліпса з даним колом;
2. побудувати еліпс і коло.

№ задачі	Координати точки $A\ (x_1;\ y_1)$	Координати точки $B\ (x_2;\ y_2)$	Радіус кола R
36	$A\ (2\sqrt{6}\ ;\ -4)$	$B\ (6;\ \ 2\sqrt{2}\ )$	$R = 2\sqrt{10}$
37	$A\ (\ -6;\ 2\sqrt{6}\ )$	$B\ (3\sqrt{2}\ ;\ 6)$	$R = 8$
38	$A\ (\sqrt{6}\ ;\ -2)$	$B\ (-3;\ \ \sqrt{2}\ )$	$R = 3$
39	$A\ (-8;\ 4)$	$B\ (4\sqrt{7}\ \ ;\ -2)$	$R = 4\sqrt{5}$
40	$A\ (4;\ -2)$	$B\ (2;\ \ \sqrt{7}\ )$	$R = 2\sqrt{5}$

III. В задачах **41-60** розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами:

1. за допомогою визначників (за формулами Крамера);
2. за допомогою оберненої матриці;
3. за допомогою способу виключення невідомих (методом Гаусса).

41. $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ 4x-2y-5z=5 \\ 6x-y+3z=1 \end{cases}$	**42.** $\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+2z=-4 \\ 2x+2y+z=4 \end{cases}$
43. $\begin{cases} 3x+2y+2z=-4 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$	**44.** $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x+2y+z=2 \\ x-3y+4z=-1 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 3x+3y+2z=-1 \\ 2x+y-z=3 \\ x-2y-3z=4 \end{cases}$	**46.** $\begin{cases} 5x-2y+z=-1 \\ 2x+y+2z=6 \\ x-3y-z=-5 \end{cases}$
47. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3 \\ 2x+y-z=-5 \\ 5x-y+3z=4 \end{cases}$	**48.** $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x+3y+z=0 \\ x-2y-z=7 \end{cases}$
49. $\begin{cases} 2x-3y+z=3 \\ x+y-2z=4 \\ 3x-2y+6z=0 \end{cases}$	**50.** $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+5y+z=4 \end{cases}$
51. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1 \\ 3x+y+z=3 \\ x-2y-3z=8 \end{cases}$	**52.** $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 4x-3y-2z=-1 \end{cases}$
53. $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x+2y+3z=0 \\ x-y-2z=6 \end{cases}$	**54.** $\begin{cases} 2x-3y+3z=0 \\ x+y-2z=-7 \\ x-2y+3z=3 \end{cases}$
55. $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ 2x+y+3z=3 \\ 2x-y-2z=8 \end{cases}$	**56.** $\begin{cases} x+5y-z=-1 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-4y+z=0 \end{cases}$
57. $\begin{cases} 2x-3y-5z=1 \\ 3x+y-2z=-4 \\ x-2y+z=5 \end{cases}$	**58.** $\begin{cases} x-3y-z=1 \\ 2x+y+z=-7 \\ 2x-y-3z=5 \end{cases}$
59. $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y+3z=5 \\ 3x+4y+z=-2 \end{cases}$	**60.** $\begin{cases} 3x+y-2z=1 \\ x-2y+3z=5 \\ 2x+3y-z=-4 \end{cases}$

IV. В задачах **61-80** задано координати вершин піраміди ***ABCD***. <u>Необхідно:</u>

1. записати вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ в системі орт і знайти модулі (довжини) цих векторів;
2. записати кут між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків;
3. знайти проекцію вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;
4. знайти площу грані ***ABC***;
5. знайти об'єм піраміди ***ABCD***.

№ зада-чі	Координати вершин піраміди			
61.	***A (-3; 4; -3)***	***B (-2; 2; -1)***	***C (8; 6; 7)***	***D (5; 8; 5)***
62.	***A (-4; 5; -5)***	***B (-3; 3; -3)***	***C (7; 7; 5)***	***D (4; 9; 3)***
63.	***A (-8; 3; -1)***	***B (-7; 1; 1)***	***C (3; 5; 9)***	***D (0; 7; 7)***
64.	***A (0; 2; -10)***	***B (1; 0; -8)***	***C(11; 4; 0)***	***D (8; 6; -2)***
65.	***A (1; -4; 0)***	***B(2; -6; 2)***	***C (12; -2; 10)***	***D (9; 0; 8)***
66.	***A (4; -2; 5)***	***B(8; 2; 3)***	***C (6; 9; -5)***	***D (4; 0; 6)***
67.	***A (5; -1; -4)***	***B (9; 3; -6)***	***C (7; 10; -14)***	***D (5; 1; -3)***
68.	***A (-3; -6; 2)***	***B (1; -2; 0)***	***C (-1; 5; -8)***	***D (-3; -4; 3)***
69.	***A (-4; 2; -1)***	***B(0; 6; -3)***	***C(-2; 13; -11)***	***D (-4; 4; 0)***
70.	***A (-2; 0; -2)***	***B (2; 4; -4)***	***C(0; 11; -12)***	***D (-2; 2; -1)***
71.	***A (3; 3; -3)***	***B (7; 7; -5)***	***C (5; 14; 13)***	***D (3; 5; -2)***
72.	***A (0; 4; 3)***	***B (4; 8; 1)***	***C (2; 15; -7)***	***D (0; 6; 4)***
73.	***A (-1; 1; -5)***	***B (3; 5; -7)***	***C (1; 12; -15)***	***D (-1; 3; -4)***
74.	***A (1; -4; 0)***	***B (5; 0; -2)***	***C (3; 7; -10)***	***D (1; -2; 1)***
75.	***A (2; -3; 1)***	***B(6; 1; -1)***	***C (4; 8; -9)***	***D (2; -1; 2)***

76.	***A (-5; 0; 1)***	***B (-4; -2; 3)***	***C (6; 2; 11)***	***D (3; 4; 9)***
77.	***A (-1; -2; -8)***	***B (0; -4; -6)***	***C (10; 0; 2)***	***D (7; 2; 0)***
78.	***A (3; 1; -2)***	***B (4; -1; 0)***	***C (14; 3; 8)***	***D (11; 5; 6)***
79.	***A (-2; -3; 2)***	***B (-1; -5; 4)***	***C(9; -1; 12)***	***D (6; 1; 10)***
80.	***A (2; -1; -4)***	***B (3; -3; -7)***	***C (13; 1; 6)***	***D (10; 3; 4)***

V. В задачах **81-90** дано координати точок ***A, B, C, D*** і ***M***. Потрібно знайти:

1. рівняння площини **α**, яка проходить через три точки ***A, B*** і ***C;***
2. канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку ***M*** перпендикулярно до площини **α**;
3. відстань від точок ***M*** та ***D*** до площини **α**.

№ задачі	**Координати точок**				
81.	***A (0; 1; -1)***	***B (-1; 5; -4)***	***C (8; 3; 6)***	***D (13; -14; 12)***	***M (-2; 13; 18)***
82.	***A (0; 6; -5)***	***B (8; 2; 5)***	***C (2; 6; -3)***	***D (11; -14; -14)***	***M (-8; 7; 12)***
83.	***A (7; 9; 2)***	***B (10; 5; 7)***	***C (1; 3; -1)***	***D (17; -10; -13)***	***M (-10; 9; 12)***
84.	***A (1; -4; 1)***	***B (4; 4; 0)***	***C (-1; 2; -4)***	***D (17; -8; -11)***	***M (-3; 13; 14)***
85.	***A (6; 7; 2)***	***B (5; -1; 5)***	***C (8; 9; 3)***	***D (17; -10; -10)***	***M (-11; 11; 19)***
86.	***A (-4; -2; -5)***	***B (1; 8; -5)***	***C (0; 4; -4)***	***D (9; -12; -17)***	***M (-8; 12; 11)***
87.	***A (6; 9; 1)***	***B (3; 5; 0)***	***C (4; 1; 3)***	***D (15; -6; -14)***	***M (-4; 12; 15)***
88.	***A (1; 7; -3)***	***B (3; -3; 4)***	***C (7; 5; 4)***	***D (19; -6; -10)***	***M (-6; 14; 18)***
89.	***A (5; 4; 1)***	***B (-1; -2; -2)***	***C (3; -2; 2)***	***D (15; -12; -11)***	***M (-9; 8; 9)***
90.	***A (-3; -2; 4)***	***B (-4; 2; -7)***	***C (5; 0; 3)***	***D (13; -10; 14)***	***M (-9; 7; 8)***

VI. В задачах **91-100** задано координати точок ***A, B*** та ***C***. Потрібно:

1. записати канонічні рівняння прямої ***AB***;
2. записати рівняння площини **α**, яка проходить через точку ***C***, перпендикулярно до прямої ***AB***;
3. знайти відстань від точки ***C*** до прямої ***AB***.

№ задачі	Координати точок		
91	***A (-4; 0; 8)***	***B (0; 2; 4)***	***C (-3; -1; 4)***
92	***A (2; 0; 8)***	***B (6; 2; 4)***	***C (3; -1; 4)***
93	***A (2; -3; 7)***	***B (6; -1; 3)***	***C (3; -4; 3)***
94	***A (-1; 2; -2)***	***B (3; 4; -6)***	***C (0; 1; -6)***
95	***A (-1; 4; 2)***	***B (3; 6; -2)***	***C (0; 3; -2)***
96	***A (2; -6; 7)***	***B (6; -4; 3)***	***C (3; -7; 7)***
97	***A (-3; 2; 0)***	***B (1; 4; -4)***	***C (-2; 1; -4)***
98	***A (1; 4; 5)***	***B (5; 6; 1)***	***C (2; 3; 1)***
99	***A (-3; 1; 2)***	***B (1; 3; -2)***	***C (-2; 0; -2)***
100	***A (5; 5; 4)***	***B (9; 7; 0)***	***C (6; 4; 0)***

2.2. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2.

Вступ до аналізу.

Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

I. В задачах **101-120** знайти границі функції.

101	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$ при а) $x_0=1$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$;	
	2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-6x+8}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{7-x}$	5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^x-16}{\sin\pi x}$.
102	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+3x-2}{(x+2)^2}$ при а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$;	
	2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,2x}{4x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{3-x}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\ln x}$
103	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2-2x+1}$ при а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$;	
	2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{3x-4}$	5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 7x}$

104	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-10x+25}$	при а) $x_0=3$; б) $x_0=5$; в) $x_0=\infty$
	2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg5x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$	5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$.
105	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$	при а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$;
	2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 x}{x\sin 2x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+3}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$.
106	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x+9}$	при а) $x_0=2$; б) $x_0=3$; в) $x_0=\infty$
	2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$
	4) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$	5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$.
107	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$	при а) $x_0=1$; б) $x_0=-3$; в) $x_0=\infty$;

	2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+4x}-3x\right)$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{tg^2 2x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-4}\right)^{7x}$	5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{\sin^2 x}$
108	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$	при *а)* $x_0=1$; *б)* $x_0=3$; *в)* $x_0=\infty$;
	2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right)$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 6x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-2}\right)^{6x+1}$	5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.
109	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$	при *а)* $x_0=3$; *б)* $x_0=2$; *в)* $x_0=\infty$;
	2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{\sqrt{2x-1}-3}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-3x}$	5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln 2x-\ln\pi}{\sin\frac{5x}{2}\cos x}$.
110	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$	при *а)* $x_0=-3$; *б)* $x_0=-5$; *в)* $x_0=\infty$;
	2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin 3x\cdot ctg 5x\right)$
	4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(5-2x\right)^{\frac{x}{x-2}}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

111	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$ при а) $x_0=-1$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$;	
	2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,tgx}{1-\cos 4x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+5}\right)^{2x+1}$	5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{tg^2\,2x}$.
112	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$ при а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$;	
	2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$	3) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg4x$
	4) $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$	5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$.
113	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+11x+6}$ при а) $x_0=1$; б) $x_0=-3$; в) $x_0=\infty$;	
	2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tgx}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x-2}\right)^{3x-7}$	5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln tgx}{\cos 2x}$.
114	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$ при а) $x_0=1$; б) $x_0=2$; в) $x_0=\infty$;	

	2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\text{-}\cos x}{x^2}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+1}{7x-2}\right)^{2x+1}$	5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{e^{\pi}-e^{x}}{\sin 5x-\sin 3x}$.
115	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-27}$	при *а)* $x_0=-1;$ *б)* $x_0=3;$ *в)* $x_0=\infty;$
	2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\text{-}\cos 6x}{tg 3x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{5x-1}$	5) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.
116	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$	при *а)* $x_0=-1;$ *б)* $x_0=1;$ *в)* $x_0=\infty;$
	2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 3x}{\sin 5x}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+5}\right)^{3x\text{-}4}$	5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.
117	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{(x-5)^2}{x^2-3x-10}$	при *а)* $x_0=1;$ *б)* $x_0=5;$ *в)* $x_0=\infty;$
	2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{arctg 2x}$

	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+7}\right)^{2x+1}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$
118	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+8}{x^2+x-2}$	при а) $x_0=2$; б) $x_0=-2$; в) $x_0=\infty$;
	2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$
	4) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x}$
119	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$	при а) $x_0=-1$; б) $x_0=1$; в) $x_0=\infty$;
	2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctg3x}{ctg4x}$
	4) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{tg\pi x}$.
120	1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$	при а) $x_0=3$; б) $x_0=4$; в) $x_0=\infty$;
	2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$	3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^5 x}{x^2}$
	4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{x+3}$	5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$.

II. В задачах **121-140** для функцій заданих явно (1-5) знайти похідні $\frac{dy}{dx}$, а для функцій заданих неявно та параметрично (6-7) знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$.

121	1) $y=\dfrac{5x-6}{\sqrt[3]{x^3+5x-2}}$	2) $y=\left(3^{ctg^2x}+\ln\sin x\right)^3$
	3) $y=e^{arcctg\sqrt{4x-1}}$	4) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^2+1}{2x^3-1}}$
	5) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^x$	6) $y=\begin{cases}\dfrac{\cos t}{1+2\cos t}\\ \dfrac{\sin t}{1+2\cos t}\end{cases}$
	7) $x\cdot\ln x-e^y+1=0.$	
122	1) $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}$	2) $y=\left(5^{\sin^2x}-\cos 2x\right)^3$
	3) $y=e^{\arccos\sqrt{1-x^2}}$	4) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2-2}{x^2+2}}$
	5) $y=(\cos 2x)^{tg2x}$	6) $\begin{cases}x=\sin t-t\cos t\\ y=\cos t+t\sin t\end{cases}$
	7) $arctgx-\ln\sqrt{2y+3}=0.$	
123	1) $y=\dfrac{3x-1}{\sqrt[3]{x^3+9x-1}}$	2) $y=\left(3^{arctg2x}+\ln(1+4x^2\right)^4$
	3) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$	4) $y=\ln\sqrt{\dfrac{3x^2-4}{3x^2+4}}$

	5) $y=\left(\sin 2x\right)^{tg\,2x}$	6) $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=tg^2 t \end{cases}$
	7) $e^x-x^2-e^y=0.$	
124	1) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}$	2) $y=\left(6^{acctg3x}+arcctg\,3x\right)^4$
	3) $y=\ln\cos e^{-4x}$	4) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{10-3x^2}{x^3-10x}}$
	5) $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin x}$	6) $\begin{cases} x=\sqrt{t^3-1} \\ y=\ln t \end{cases}$
	7) $x+\ln x+\sqrt{3+2y}=0.$	
125	1) $y=\dfrac{5x-2}{\sqrt{x^2+5x-1}}$	2) $y=\left(3^{\cos 2x}+\cos^2 x\right)^4$
	3) $y=e^{arctg\sqrt{x^4-1}}$	4) $y=\ln\sqrt{\dfrac{5-4x}{x^2+8x-10}}$
	5) $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{2\sqrt{x}}$	6) $\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=\dfrac{2}{\cos 2t} \end{cases}$
	7) $\sin x-arctgy=0.$	
126	1) $y=\dfrac{x^3-10}{\sqrt{x^4-8x}}$	2) $y=\left(4^{tg\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^3$
	3) $y=\ln tg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	4) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3-x^2}{x^3-9x}}$

	5) $y=\left(x+\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$	6) $\begin{cases} x=\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2} \\ y=\dfrac{2}{e^{t}+e^{-t}} \end{cases}$
	7) $tgx-\sqrt{4y+5}+2=0.$	
127	1) $y=\dfrac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$	2) $y=\left(2^{\cos^2 x}+\sin^2 x\right)^3$
	3) $y=e^{\arcsin\sqrt{1-x}}$	4) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{5-x^2}{x^3-15x}}$
	5) $y=\left(x+1\right)^{arctg\sqrt{x}}$	6) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t+1} \end{cases}$
	7) $2x-\sin 2x-y^2=0.$	
128	1) $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2-16x-2}}$	2) $y=\left(5^{ctg2x}+\cos ec2x\right)^3$
	3) $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}$	4) $y=\ln\sqrt[8]{\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}}$
	5) $y=\left(x+\sin x\right)^{x^3}$	6) $\begin{cases} x=t+\sin t \\ y=2-\cos t \end{cases}$
	7) $ctgx+\ln\sqrt{4y+1}=0.$	
129	1) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^3-4x^2+1}}$	2) $y=\left(2^{\arcsin x}+\arccos x\right)^4$
	3) $y=\ln arctg\sqrt{x-1}$	4) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^2-2}{x^3-3x}}$

	5) $y=\left(x^2+1\right)^{arctgx}$	6) $\begin{cases} x=\cos t+\sin t \\ y=\sin 2t \end{cases}$
	7) $e^x-x-y^3=0.$	
130	1) $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-9}}$	2) $y=\left(2^{arctgx}+\ln(1+x^2)\right)^4$
	3) $y=\ln tgx^3$	4) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x}}$
	5) $y=\left(1+\cos 2x\right)^{x^2}$	6) $\begin{cases} x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2} \\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \end{cases}$
	7) $x^2+y^2=2y=0.$	
131	1) $y=\dfrac{4x+3}{\sqrt[3]{x^3-4x-1}}$	2) $y=\left(2^{\arccos\sqrt{x}}-\sqrt{1-x}\right)^4$
	3) $y=\ln\left(tge^{2\sqrt{x}}\right)$	4) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}}$
	5) $y=\left(ctgx\right)^{\sin^2 x}$	6) $\begin{cases} x=t^2+\ln t \\ y=2t^3+3t \end{cases}$
	7) $arctgy=x+y.$	
132	1) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{x^3-8x+4}}$	2) $y=\left(4^{tg2x}-tg2x\right)^5$
	3) $y=\ln arctg\dfrac{1}{x}$	4) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^4-3}{x^4+3}}$
	5) $y=\left(x^4+1\right)^{\frac{1}{x}}$	6) $\begin{cases} x=a\cdot\cos^2 t \\ y=b\cdot\sin^3 t \end{cases}$

	7) $x^2+xy+y^2=a^2$.	
133	1) $y=\dfrac{5x+4}{\sqrt{x^2-5x-2}}$	2) $y=\left(2^{arcsinx}-\sqrt{1-x^2}\right)^5$
	3) $y=e^{arctg^3\sqrt{x^2-1}}$	4) $y=ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^3-3x}}$
	5) $y=(ctg4x)^{\sin 4x}$	6) $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$
	7) $y=\sin(x+y)$.	
134	1) $y=\dfrac{2x-7}{\sqrt{x^2+8x-14}}$	2) $y=\left(2^{tg3x}-\sec 3x\right)^5$
	3) $y=\ln arccos\dfrac{1}{x}$	4) $y=ln\sqrt[4]{\dfrac{2x-3}{x^2-4x+6}}$
	5) $y=(tg2x)^{\cos 2x}$	6) $\begin{cases} x=ctgt \\ y=\sec^2 t \end{cases}$
	7) $y=tg(x+y)$.	
135	1) $y=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+1}}$	2) $y=\left(4^{arccos2x}-\sqrt{1-4x^2}\right)^3$
	3) $y=arctg\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$	4) $y=ln\sqrt[3]{\dfrac{3x^2-2}{3x^2+2}}$
	5) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$	6) $\begin{cases} x=a\cdot tgt \\ y=b\cdot\sec t \end{cases}$
	7) $e^{x+y}=xy$.	
136	1) $y=\dfrac{2x^3+5}{\sqrt{x^4+2x}}$	2) $y=\left(5^{tg^2x}+\sec^2 x\right)^3$

	3) $y = \ln \arcsin \frac{2}{\sqrt{x}}$	4) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{3x+1}{3x-1}}$
	5) $y = (ctgx)^{\sec x}$	6) $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\sin t) \end{cases}$
	7) $y^3 + x^3 - 3axy = 0.$	
137	1) $y = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+4x-3}}$	2) $y = \left(3^{arctg2x} - \ln(1+4x^2)\right)^4$
	3) $y = \ln \sin(2^{x^2})$	4) $y = \ln \sqrt[5]{\frac{4-3x^2}{x^3-4x}}$
	5) $y = (tg2x)^{tg2x}$	6) $\begin{cases} x = arctg3t \\ y = \ln(1+9t^2) \end{cases}$
	7) $e^y + xy = e.$	
138	1) $y = \frac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-2}}$	2) $y = \left(5^{tg2x} - x^2\right)^3$
	3) $y = e^{arctg^2\sqrt{2x-1}}$	4) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2+4}{x^3+12x}}$
	5) $y = (\arcsin x)^{\sqrt{1-x^2}}$	6) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$
	7) $y = x + arctgy.$	
139	1) $y = \frac{2x}{\sqrt{x^3-5x^2+3}}$	2) $y = \left(3^{\cos 3x} + \sin^2 3x\right)^2$
	3) $y = arctg\frac{2x+1}{2x-1}$	4) $y = \ln\sqrt{\frac{x^2+3}{x^3+9x}}$

	5) $y=\left(x^3+2\right)^{\sin x}$	6) $\begin{cases} x=\arcsin 2t \\ y=3t-t^3 \end{cases}$
	7) $y=x+\ln y.$	
140	1) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$	2) $y=\left(3^{\sin 2x}-\cos^2 2x\right)^3$
	3) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$	4) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2-x^2}{x^3-6x}}$
	5) $y=(2x+3)^{tgx}$	6) $\begin{cases} x=t-\ln t \\ y=3t^2-2t^3 \end{cases}$
	7) $x^4-xy+y^4=1.$	

III. В задачах **141-160** дослідити функцію засобами диференціального числення та побудувати її графік.

141	$y=\frac{1}{2}x^3-3x^2+6$	**142**	$y=\frac{1}{5}x^3-2x^2+2$
143	$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+5$	**144**	$y=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-3x$
145	$y=\frac{1}{6}x^3-\frac{5}{2}x^2+3$	**146**	$y=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2-4$
147	$y=\frac{1}{9}x^3-3x^2+3$	**148**	$y=\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2-2$
149	$y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-2$	**150**	$y=-\frac{1}{8}x^3+2x-3$

151	$y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4$	**152**	$y = -\frac{1}{9}x^3 + 3x - 5$
153	$y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2$	**154**	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - 4$
155	$y = -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 1$	**156**	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2$
157	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2$	**158**	$y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 3$
159	$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x$	**160**	$y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - 5$

IV. В задачах **161-180** знайти:

1. невизначені інтеграли та результати перевірити диференціюванням (1-3);
2. визначений та невластивий інтеграли (4-5).

161	1) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx$	2) $\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} dx$
	3) $\int 2arctg\sqrt{5x-1}\, dx$	4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\cdot\sqrt{1-x}}$
	5) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.	
162	1) $\int \frac{7x^3 + 40x - 96}{2x^4 + 5x^3 - 12x^2} dx$	2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}}$
	3) $\int x^2 \cos 4x\, dx$	4) $\int\limits_0^1 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(9x-1)^2} - \sqrt[3]{(9x-1)^2} + 1}$

	5) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.	
163	1) $\int \frac{x+2}{(2x+3)(x+1)^2} dx$	2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$
	3) $\int (x^2+1)\sin x\, dx$	4) $\int_0^2 \ln(x^2+4)\, dx$
	5) $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$.	
164	1) $\int \frac{5dx}{x^3+2x^2+5x}$	2) $\int \frac{x^2 dx}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$
	3) $\int arctg\, 3x\, dx$	4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$
	5) $\int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx$.	
165	1) $\int \frac{dx}{(2x-1)(8x^2-4x+1)}$	2) $\int \frac{x^3 dx}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$
	3) $\int e^{-2x} \cos x\, dx$	4) $\int_0^1 x^3 arctgx dx$
	5) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$.	

166	1) $\int \frac{x^2+5}{2x^3-x^2-10x}dx$	2) $\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx$
	3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$	4) $\int_0^1 3x^2 \arcsin x dx$
	5) $\int_5^\infty \frac{dx}{x^2-8x+17}$.	
167	1) $\int \frac{3x^2-2}{(x+3)(2x^2-3x-2)}dx$	2) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$
	3) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$	4) $\int_{-1}^0 \frac{(7x+16)dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}$
	5) $\int_0^\infty \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$	
168	1) $\int \frac{9xdx}{(x-5)(x^2+2x+10)}$	2) $\int \frac{x+2}{\sqrt{4x^2+12x+7}}dx$
	3) $\int 16\sin^4 x\cos^4 x\, dx$	4) $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-2x}dx$
	5). $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.	
169	1) $\int \frac{2dx}{16x^4-1}$	2) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{9x^2-12x+5}}dx$
	3) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x+5}$	4) $\int_1^4 \frac{(x-1)dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}-\sqrt[3]{3x-4}+1}$
	5) $\int_0^\infty \frac{xdx}{(x+2)^3}$.	

170	1) $\int \frac{5dx}{(x+1)(2x^2+2x+5)}$	2) $\int \frac{6x-1}{\sqrt{9x^2+6x-2}}dx$
	3) $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$	4) $\int_1^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x dx$
	5) $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.	
171	1) $\int \frac{2x^4+9x^3+3x^2+27}{x^3+6x^2+9x}dx$	2) $\int \frac{dx}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}$
	3) $\int x \cdot \ln(x^2+2)dx$	4) $\int_1^3 \frac{15xdx}{\sqrt[4]{(5x+1)^2}+\sqrt[4]{5x+1}}$
	5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgxdx$.	
172	1) $\int \frac{4x^4-4x^3+x^2+5}{4x^3+4x^2+5x}dx$	2) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$
	3) $\int \arccos 4xdx$	4) $\int_0^5 \frac{27xdx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}+\sqrt[4]{3x+1}}$
	5) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$.	
173	1) $\int \frac{3x^3+4x}{(x-2)^3(x^2+4)}dx$	2) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$
	3) $\int x^2 e^{-3x}dx$	4) $\int_{-1}^2 3x^2 \cdot \ln(x+2)dx$
	5) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$	

174	1) $\int \frac{x^4-2}{x^3+x}dx$	2) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$
	3) $\int e^{-x}\sin x dx$	4) $\int\limits_0^2 arctg\frac{x}{2}dx$
	5) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.	
175	1) $\int \frac{34dx}{(x-2)(x^2-2x+17)}$	2) $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{x^2+4}}$
	3) $\int x^2\cos\frac{x}{2}dx$	4) $\int\limits_0^{\pi} x\cdot\cos\frac{x}{2}dx$
	5) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	
176	1) $\int \frac{20dx}{(x+4)(x^2+4x+20)}$	2) $\int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{11-20x-4x^2}}$
	3) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$	4) $\int\limits_1^4 \frac{(13-5x)dx}{\sqrt[4]{(5x-4)^3}+3\sqrt[4]{5x-4}}$
	5) $\int\limits_0^{\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$	
177	1) $\int \frac{2x^4+8x^3+9x^2+4}{x^3+4x^2+4x}dx$	2) $\int \frac{3x-4}{\sqrt{21+12x-9x^2}}dx$
	3) $\int ctg^4 x dx$	4) $\int\limits_0^5 \frac{3dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$
	5) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{(x+3)^2}$	

178	1) $\int \frac{4x-3}{x(2x-3)^2}dx$	2) $\int \frac{2x-1}{\sqrt{5+12x-9x^2}}dx$
	3) $\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^6 x}$	4) $\int_0^{0,5} \arcsin 2xdx$
	5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$.	
179	1) $\int \frac{2x^2+4}{(x-4)(x+2)^2}dx$	2) $\int \frac{x+5}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$
	3) $\int tg^4 xdx$	4) $\int_1^2 \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$
	5) $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-4}$.	
180	1) $\int \frac{2x^5-2x^4+4}{x^4+4x^2}dx$	2) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx$
	3) $\int \frac{dx}{4-5\cos x}$	4) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$
	5) $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.	

V. В задачах **181-200** задана функція $z = f(x; y)$.

Знайти:

1. повний диференціал dz;
2. частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
3. мішані частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

181	$z = y^{\ln x}$	**182**	$z = arctg\,\frac{x+y}{x}$
183	$z = e^{x}(\cos y + x\sin y)$	**184**	$z = \ln(x + e^{xy})$
185	$z = arctg\,\frac{x+y}{1-xy}$	**186**	$z = x^2 \ln(x+y)$
187	$z = arctg\,\frac{y}{x}$	**188**	$z = e^{xe^{y}}$
189	$z = \ln\sqrt{x^2 + 4y}$	**190**	$z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$
191	$z = x \cdot \ln\frac{y}{x}$	**192**	$z = \arccos\frac{y}{x}$
193	$z = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}$	**194**	$z = \arcsin\frac{x-y}{x+y}$
195	$z = \arcsin(xy)$	**196**	$z = e^{x}(x\cos y - y\sin y)$
197	$z = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	**198**	$z = \ln\frac{x^2-y^2}{xy}$
199	$z = \cos y + (y-x)\sin y$	**200**	$z = arctg\sqrt{xy}$

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

3.1. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №1.

Аналітична геометрія. Векторна та лінійна алгебра.

I. Задано координати вершин трикутника ABC: $A(-3;10)$, $B(9;1)$, $C(7;15)$.

Знайти:

1. довжини сторін AB, BC та AC;
2. рівняння сторін AB, BC, AC та їх кутові коефіцієнти;
3. величину кута B в радіанах з точністю до двох знаків;
4. довжину бісектриси BF внутрішнього кута B;
5. рівняння висоти CD та її довжину;
6. рівняння медіани AE та координати точки P перетину цієї медіани з висотою CD;
7. рівняння прямої PL, яка проходить через точку P паралельно до сторони AB;
8. рівняння та довжину перпендикуляра (висоти) BH, який проведено з вершини B на медіану AE;
9. координати точки M, розташованої симетрично до точки A відносно прямої CD;
10. побудувати на міліметровому папері трикутник ABC та знайти його елементи в системі координат xOy, взявши відповідну одиницю масштабу.

Розв' язання:

1. Довжини сторін трикутника ABC обчислюємо за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \qquad (1)$$

Використовуючи (1) знаходимо довжини сторін трикутника:

$$d_{AB} = |AB| = \sqrt{(9-(-3))^2 + (1-10)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15 \text{ (лін. од.)}$$

$$d_{BC} = |BC| = \sqrt{(7-9)^2 + (15-1)^2} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} \approx 14{,}14 \text{ (лін. од.)}$$

$$d_{AC} = |AC| = \sqrt{(7+3)^2 + (15-10)^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} \approx 11{,}18 \text{ (лін.од.)}$$

2. Рівняння прямої, що проходить через дві точки , має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ . \qquad (2)$$

Підставляючи в (2) координати точок A і B, одержимо рівняння сторони AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},\ \frac{x+3}{9+3}=\frac{y-10}{1-10},\ \frac{x+3}{12}=\frac{y-10}{-9},\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-10}{-3},$$

$-3x-9=4y-40$.

Остаточно загальне рівняння сторони AB буде мати вигляд:

$$\underline{3x+4y-31=0}$$

Перевірка:

т.A: $3\cdot(-3)+4\cdot 10-31=0$; $-9+40-31=0$; $40-40=0$; $0=0$.

т.B: $3\cdot 9+4\cdot 1-31=0$; $27+4-31=0$; $31-31=0$; $0=0$.

Підставляючи в (2) координати точок B і C, одержимо рівняння сторони BC:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B},\ \frac{x-9}{7-9}=\frac{y-1}{15-1},\ \frac{x-9}{-2}=\frac{y-1}{14},\ \frac{x-9}{-1}=\frac{y-1}{7},$$

$7x-63=1-y$.

Остаточно загальне рівняння сторони BC буде мати вигляд:

$$\underline{7x+y-64=0}$$

Перевірка:

т.B: $7\cdot 9+1-64=0$; $63+1-64=0$; $64-64=0$; $0=0$.

т.C: $7\cdot 7+1\cdot 15-64=0$; $49+15-64=0$; $64-64=0$; $0=0$.

Підставляючи в (2) координати точок A і C, одержимо рівняння сторони AC:

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_C-y_A},\ \frac{x+3}{7+3}=\frac{y-10}{15-10},\ \frac{x+3}{10}=\frac{y-10}{1},\ \frac{x+3}{2}=\frac{y-10}{1},$$

$x+3=2y-20$.

Остаточно загальне рівняння сторони AC буде мати вигляд:

$$\underline{x-2y+23=0}$$

Перевірка:

т.A: $-3-2\cdot 10+23=0$; $-3-20+23=0$; $23-23=0$; $0=0$.

т.C: $7-2\cdot 15+23=0$; $7-30+23=0$; $30-30=0$; $0=0$.

Виразивши кожне з рівнянь сторін AB, BC та AC відносно y, отримаємо їх рівняння у вигляді рівнянь прямих з кутовим коефіцієнтом, звідки визначимо кутові коефіцієнти:

AB	BC	AC
$3x + 4y - 31 = 0$	$7x + y - 64 = 0$	$x - 2y + 23 = 0$
$y = -\frac{3}{4}x + \frac{31}{4}$	$y = -7x + 64$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{23}{2}$
$k_{AB} = -\frac{3}{4}$	$k_{BC} = -7$	$k_{AC} = \frac{1}{2}$

Кутові коефіцієнти також можна знайти, використовуючи загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$, тоді $k = -\frac{A}{B}$.

3. Тангенс кута між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють k_1 та k_2, обчислюється за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{3}$$

Кут B утворений прямими AB та BC, кутові коефіцієнти яких знайдені: $k_1 = k_{BC} = -7$; $k_2 = k_{AB} = -\frac{3}{4}$.

Використовуючи формулу (3), отримаємо:

$$tgB = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AB}} = \frac{-\frac{3}{4} - (-7)}{1 + (-7)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{25}{4}} = 1 .$$

Отже, $\angle B = 45°$, або $\angle B \approx 0{,}79$ радіан.

4. Довжину бісектриси BF знаходимо як відстань між двома точками: B та F. Невідомі координати x, y точки F визначаємо за формулами:

$$x_F = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_F = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \tag{4}$$

де відношення $\lambda = \frac{AF}{FC}$, а координати точок A і C відомі: $A(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$.

$A(-3;10)$, $C(7;15)$.

Використовуючи властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника, отримаємо:

$$\lambda = \frac{AF}{FC} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{200}} \approx 1,06 .$$

Оскільки точка F поділяє відрізок AC у відношенні $\lambda \approx 1,06$, то згідно з (4) знаходимо:

$$x_F = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{-3 + 1,06 \cdot 7}{1+1,06} = \frac{4,42}{2,06} \approx 2,15$$

$$y_F = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{10 + 1,06 \cdot 15}{1+1,06} = \frac{25,9}{2,06} \approx 12,57$$

Отже, точка F має координати: $F(2,15;\ 12,57)$. Для побудови її на площині в системі координат xOy візьмемо $x_F \approx 2,2$; $y_F \approx 12,6$.

Довжину бісектриси BF знайдемо за формулою (1):

$$d_{BF} = |BF| = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (y_F - y_B)^2} =$$

$$= \sqrt{(2,15-9)^2 + (12,57-1)^2} \approx 13,45 \text{ (лін.од.)}$$

5. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_0(x_0; y_0)$ в заданому напрямі k, має вигляд:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (5)$$

Висота CD перпендикулярна до сторони AB, тому їх кутові коефіцієнти задовольняють умові перпендикулярності прямих:

$$k_1 \cdot k_2 = -1 \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (6)$$

$$k_{AB} = -\frac{3}{4}, \quad k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{4}{3}.$$

Підставляючи в (5) замість x_0 та y_0 координати точки C: $x_C = 7$; $y_C = 15$ та знайдений кутовий коефіцієнт висоти $k_{CD} = \frac{4}{3}$, отримаємо рівняння висоти CD :

$$y-15=\frac{4}{3}(x-7);\ y-15=\frac{4}{3}x-\frac{4\cdot 7}{3};\ y-15=\frac{4}{3}x-\frac{28}{3};$$

$$3y-45=4x-28;\ 4x-3y-28+45=0.$$

Загальне рівняння висоти CD остаточно буде мати вигляд:

$$\underline{4x-3y+17=0}\ .$$

Для того, щоб знайти довжину висоти CD, визначимо координати точки D – точки перетину прямих AB і CD, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{matrix}(AB)\\(CD)\end{matrix}\begin{cases}3x+4y-31=0\\4x-3y+17=0\end{cases}.$$

Помножимо перше рівняння системи на 4, а друге на (-3) та додамо перше рівняння до другого:

$$\begin{cases}12x+16y-124=0\\-12x+9y-51=0\end{cases}+\ \Leftrightarrow\ 25y-175=0\ \Leftrightarrow 25y=175\Leftrightarrow\ y=7\ .$$

Підставивши в перше рівняння системи отримане значення $y=7$, знаходимо x:

$$3x+4\cdot 7-31=0;\ 3x+28-31=0;\ 3x-3=0;\ 3x=3;\ x=1.$$

Отже, точка $D\ \ (1;7)$.

За формулою (1) знаходимо довжину висоти CD:

$$d_{CD}=|CD|=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2}=$$

$$=\sqrt{(1-7)^2+(7-15)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10\ \text{(лін.од.)}$$

6. Для знаходження рівняння медіани AE використовуємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (2).

Координати точки E визначаємо за формулами поділу відрізка навпіл:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (7)$$

Оскільки за умовою $B(9;1)$, $C(7;15)$, то:

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}=\frac{9+7}{2}=8;\ y_E=\frac{y_B+y_C}{2}=\frac{1+15}{2}=8.$$

Координати точки $E(8;8)$.

Підставляючи в (2) координати точок A і E знаходимо рівняння медіани AE:

$$\frac{x+3}{8+3}=\frac{y-10}{8-10}; \qquad \frac{x+3}{11}=\frac{y-10}{-2}.$$

Остаточно загальне рівняння медіани AE буде мати вигляд:

$$\underline{2x+11y-104=0}\ .$$

Перевірка:

т.A: $2\cdot(-3)+11\cdot 10-104=0$; $-6+110-104=0$; $110-110=0$; $0=0$.

т.E: $2\cdot 8+11\cdot 8-104=0$; $16+88-104=0$; $104-104=0$; $0=0$.

Координати точки P перетину медіани AE з висотою CD знайдемо, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+11y-104=0 \\ 4x-3y+17=0 \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на (-2) та додамо до другого рівняння:

$$\begin{cases} -4x-22y+208=0 \\ 4x-3y+17=0 \end{cases} + \Leftrightarrow -25y+225=0 \Leftrightarrow 25y=225 \Leftrightarrow y=9\ .$$

Підставивши знайдене значення $y=9$ в друге рівняння, знайдемо x:

$4x-3\cdot 9+17=0$; $4x-3\cdot 9+17=0$; $4x-10=0$; $x=2{,}5$.

Отже, координати точки $P\ (2{,}5;\ 9\ )$.

7. Для знаходження рівняння прямої PL, яка проходить через точку P паралельно до сторони AB, скористаємось умовою паралельності прямих:

$$k_{PL}=k_{AB}=-\frac{3}{4}\ .$$

Скориставшись рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом (5), отримаємо рівняння PL:

$$y-9=-\frac{3}{4}(x-2{,}5);$$

$$3x+4y-36-7{,}5=0$$

Остаточно рівняння прямої PL буде мати вигляд:

$$\underline{3x+4y-43{,}5=0}\ .$$

8. Висота BN перпендикулярна до медіани AE, тому їх кутові коефіцієнти задовольняють умові перпендикулярності прямих (6):

$$k_{BN} = -\frac{1}{k_{AE}} .$$

(AE): $\quad 2x + 11y - 104 = 0$,

$11y = 104 - 2x$,

$y = -\frac{2}{11}x + \frac{104}{11}$,

$k_{AE} = -\frac{2}{11}$, $k_{BN} = \frac{11}{2}$.

Скориставшись рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом (5), підставівши замість x_0 та y_0 координати точки $B(9;1)$ та знайдений кутовий коефіцієнт висоти $k_{BN} = \frac{11}{2}$, отримаємо рівняння висоти BN :

$$y - 1 = \frac{11}{2}(x - 9), \quad y - 1 = \frac{11}{2}x - \frac{99}{2}, \quad \frac{11}{2}x - y + 1 - \frac{99}{2} = 0,$$

$$\frac{11}{2}x - y - \frac{97}{2} = 0 .$$

Остаточно загальне рівняння висоти BN буде мати вигляд:

$$\underline{11x - 2y - 97 = 0} .$$

Довжину BN знайдемо як відстань від точки B до медіани AE. Для цього приведемо рівняння медіани AE: $2x + 11y - 104 = 0$ до нормального виду.

Обчислимо нормуючий множник:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 11^2}} = \frac{1}{\sqrt{125}} = \frac{1}{5\sqrt{5}} .$$

Помноживши загальне рівняння медіани AE на нормуючий множник, отримаємо нормальне рівняння медіани AE :

$$\frac{2x + 11y - 104}{5\sqrt{5}} = 0 .$$

Підставивши в нормальне рівняння медіани AE координати точки $B(9;1)$, знаходимо довжину висоти BN :

$$d_{BN} = \left| \frac{2 \cdot 9 + 11 \cdot 1 - 104}{5\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{18 + 11 - 104}{5\sqrt{5}} \right| \approx 6{,}7 \text{ (лін. од.)}$$

9. Оскільки пряма AB перпендикулярна до висоти CD, то точка M, яка розташована симетрично до точки A відносно прямої CD, знаходиться на прямій AB.

Точка D – середина відрізка AM. Скориставшись формулами ділення відрізка навпіл (7), визначимо координати точки M:

$$x_D = \frac{x_A + x_M}{2}; \quad 1 = \frac{-3 + x_M}{2}; \quad -3 + x_M = 2; \quad x_M = 5.$$

$$y_D = \frac{y_A + y_M}{2}; \quad 7 = \frac{10 + y_M}{2}; \quad 10 + y_M = 14; \quad y_M = 4.$$

Координати точки $M\ (5;4)$.

10. Побудуємо на міліметровому папері знайдені елементи трикутника ABC:

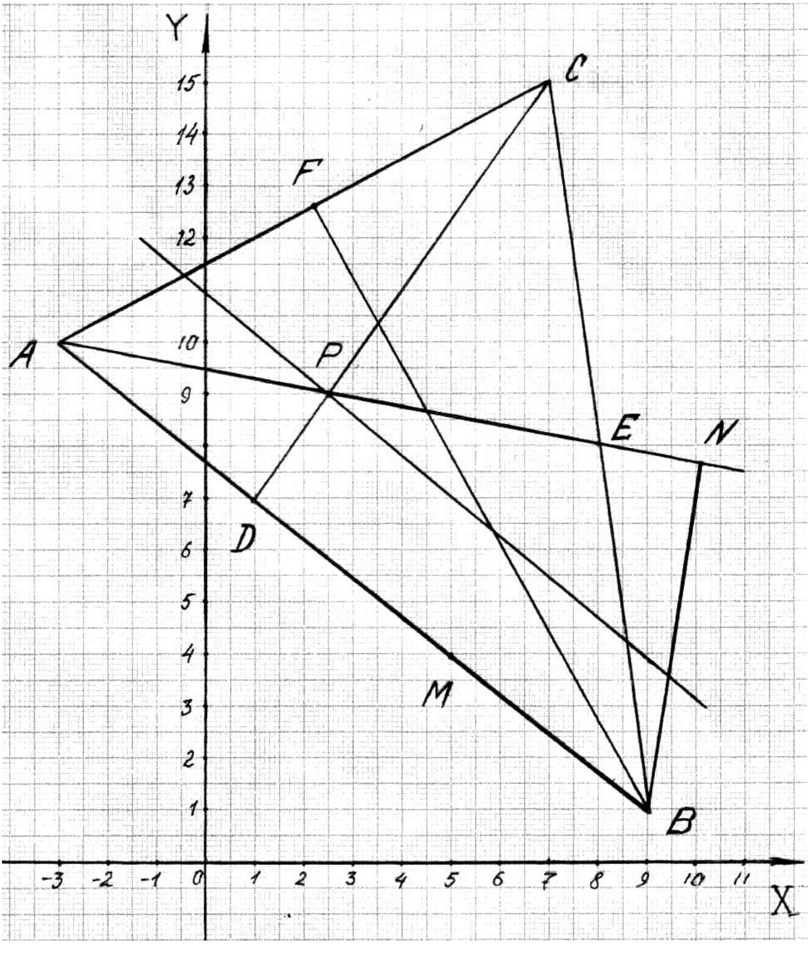


Рис. 1.

II. Приклад 1.

Завдання. Скласти рівняння геометричного місця точок, відношення відстаней яких до даної точки $A(3;0)$ і до прямої $x=12$ дорівнює $\varepsilon=0,5$ Одержане рівняння звести до канонічного виду і побудувати криву.

Розв'язання

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка відшукуваної лінії. Опустимо перпендикуляр MB на пряму $x=12$ (*рис.2.*). Очовидно, що ордината точки B дорівнює ординаті точки M: $y_B=y_M=y$, а абсциса точки B: $x_B=12$.

Отже, точка B має координати: $B\ (12;y)$.

За умовою задачі $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{2}$, $MB=2MA$. (1)

Відстань між точками $N_1\ (x_1;\ y_1)$ і $N_2\ (x_2;\ y_2)$ на площині визначається за формулою:

$$N_1N_2=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\ . \qquad (2)$$

Підставивши в формулу (2) координати точок A, B, M, запишемо вирази для визначення довжин сторін MA та MB:

$$MA=\sqrt{\left(x_A-x_M\right)^2+\left(y_A-y_M\right)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{(3-x)^2+y^2}\ ;$$

$$MB=\sqrt{\left(x_B-x_M\right)^2+\left(y_B-y_M\right)^2}=\sqrt{(12-x)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(12-x)^2}\ .$$

Використовуючи (1), запишемо:

$$\sqrt{(12-x)^2}=2\sqrt{(3-x)^2+y^2}\ .$$

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату:

$$\left(12-x\right)^2=4\left(\left(3-x\right)^2+y^2\right).$$

Скористаємось формулами скороченого множення та приведемо подібні:

$$144-24x+x^2=4\left(9-6x+x^2+y^2\right);$$

$$3x^2+4y^2-108=0\ ; \qquad \frac{3x^2}{108}+\frac{4y^2}{108}-\frac{108}{108}=0\ ; \qquad \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1\ .$$

$\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{\left(3\sqrt{3}\right)^2}=1$ – канонічне рівняння еліпса з центром в точці $O\ (0;0)$.

Великі піввісі еліпса: $a=PO=ON=6$ (лін. од.)

Малі піввісі еліпса: $b=CO=OD=3\sqrt{3}$ (лін. од.)

Велика вісь PN еліпса лежить на осі OX : $PN=2\cdot 6=12$ (лін. од.), мала вісь еліпса CD лежить на осі OY : $CD=2\cdot 3\sqrt{3}\approx 10{,}4$ (лін. од.)

F_1 та F_2 – фокуси еліпса (точки що лежать на великій осі по обидві сторони від центру на відстані:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\ . \qquad (3)$$

$c=\sqrt{6^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36-27}=\sqrt{9}=3$ (лін. од.)

Тоді $F_1(-3;0)$; $F_2=(3;0)$. Точка $A(3;0)$ є одним з фокусів еліпса.

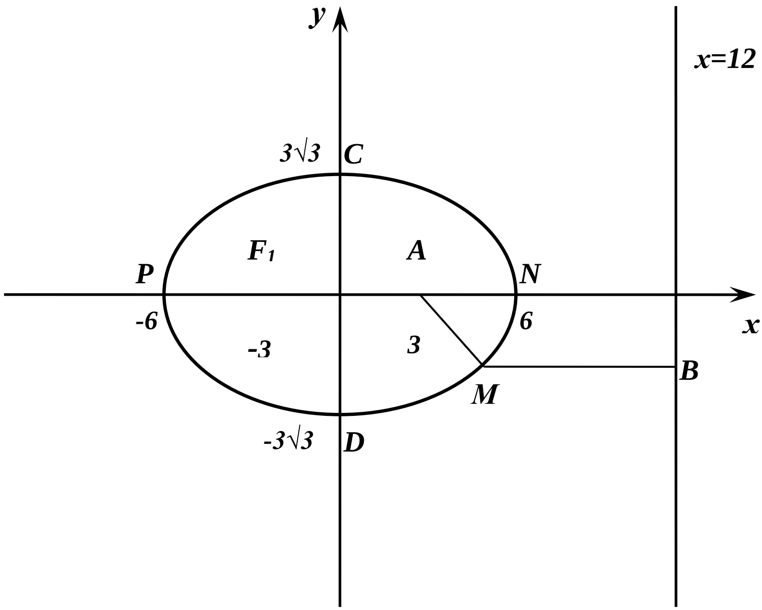


Рис. 2.

Приклад 2.

Завдання. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від даної точки $A(62;\ -65)$ і даної прямої $y=-57$. Одержане рівняння привести до канонічного виду і побудувати криву.

Розв'язання. Нехай $M(x;y)$ – довільна точка відшукуваної лінії. Опустимо перпендикуляр MB на пряму $y=-57$ і визначимо координати точки B (*рис.3.*). Очовидно, що абсциса точки B дорівнює абсцисі точки M, а ордината точки B дорівнює $\left(-57\right)$. Таким чином маємо: $B(x;\ -57)$.

Підставивши в формулу (2) координати точок A, B, M, запишемо вирази для визначення довжин сторін AM та BM :

$$AM = \sqrt{(x-62)^2 + (y+65)^2}\ ;$$

$$BM = \sqrt{(x-x)^2 + (y+57)^2} = \sqrt{(y+57)^2}\ .$$

Згідно з умовою задачі $AM = BM$, тому:

$$\sqrt{(x-62)^2 + (y+65)^2} = \sqrt{(y+57)^2}\ .$$

Після піднесення правої та лівої частини до квадрату одержимо:

$$(x-62)^2 + y^2 + 130y + 4225 = y^2 + 114y + 3249\ .$$

Звідки

$$(x-62)^2 = -16y - 976\ ,$$

або

$$(x-62)^2 = -16\cdot(y+61)\ .$$

Якщо виконати заміну $X = x-62$ та $Y = y+61$, то одержимо канонічне рівняння параболи:

$$X^2 = 2\cdot(-8)\cdot Y\ ,$$

де $p = -8$ – параметр параболи.

Таким чином, знайдене рівняння $(x-62)^2 = 2\cdot(-8)\cdot(y+61)$ є канонічним рівнянням параболи, яка має вершину в точці з координатами $x_0 = 62,\ y_0 = -61$, параметр $p = -8$.

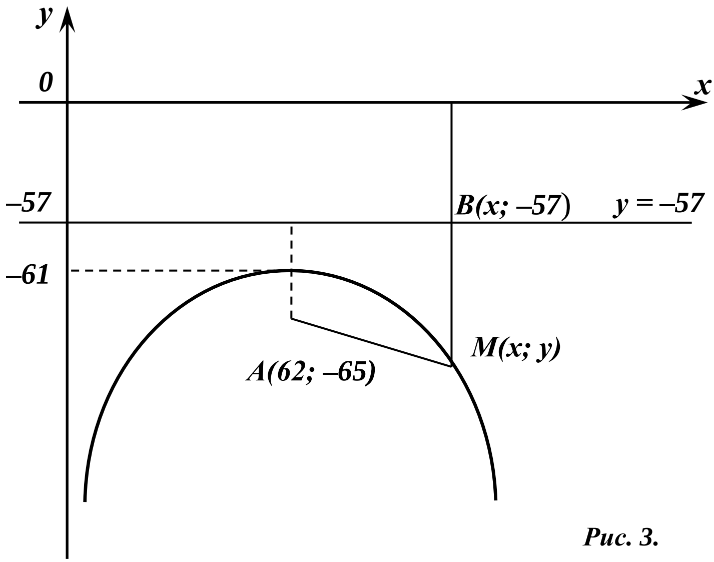


Рис. 3.

Приклад 3.

Завдання. Задано координати точок $A(2; -3)$ і $B(3; 2\sqrt{6})$.

Необхідно:

1) скласти канонічне рівняння гіперболи, яка проходить через задані точки A і B, якщо фокуси гіперболи розташовані на вісі абсцис;

11. знайти піввісі, фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот цієї гіперболи;

12. знайти всі точки перетину гіперболи з колом, яке має центр в початку координат, проходить через фокуси гіперболи та має радіус $R = 2$ лін. од.;

13. побудувати гіперболу, її асимптоти і коло.

Розв'язання.

1. Канонічне рівняння гіперболи записується наступним чином:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \,. \tag{1}$$

Оскільки точки A і B належать гіперболі, то їх координати повинні задовільняти її канонічному рівнянню. Підставивши замість x, y координати точок $A(2; -3)$ і

$B(3;\ 2\sqrt{6})$, складаємо систему рівнянь, розв'язавши яку знаходимо квадрати уявної (b^2) та дійсної (a^2) піввісей гіперболи:

$$\begin{cases} \dfrac{2^2}{a^2} - \dfrac{(-3)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{3^2}{a^2} - \dfrac{\left(2\sqrt{6}\right)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = 1 \\ \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{24}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{cases}.$$

Отже, згідно (1) канонічне рівняння гіперболи буде записано наступним чином:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ або } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

2. Знаходимо піввісі гіперболи. Дійсна піввісь має довжину $a = \sqrt{1} = 1$ (лін. од.); уявна піввісь має довжину $b = \sqrt{3}$ (лін. од.)

Фокуси гіперболи розташовані на осі абсцис, тому вони мають наступні координати:

$$F_1(-c;\ 0), F_2(c;\ 0), \qquad (2)$$

де c – довжина фокальної піввісі, квадрат якої знаходиться за наступною формулою:

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (3)$$

Використовуючи (3), маємо:

$$c^2 = 1 + 3 = 4; \qquad c = \sqrt{4} = 2 \text{ (лін.од.)}$$

Фокуси гіперболи згідно (2) будуть мати наступні координати:

$$F_1(-2;\ 0), \quad F_2(2;\ 0).$$

Ексцентриситет ε гіперболи повинен бути більшим за одиницю, знайти його можна за наступною формулою:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (4)$$

Отже, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2}{1} = 2 > 1$.

Рівняння асимптот гіперболи записуються таким чином:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (5)$$

Згідно (5) для даної гіперболи рівняння асимптот наступні:

$$y = \pm\sqrt{3} \cdot x.$$

3. Оскільки коло має центр в початку координат і проходить через фокуси гіперболи, то радіус його буде дорівнювати довжині фокальної піввісі (c): $R = c = 2$ (лін. од.)

Для знаходження точок перетину гіперболи з колом складемо систему рівнянь, яка включає рівняння кола та гіперболи:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \; x^2 = \frac{7}{4} \; \Rightarrow \; x_1 = -\frac{\sqrt{7}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Кожному з отриманих значень аргументу $x_1 = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ та $x_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ відповідають два значення функції: $y_1 = -\dfrac{3}{2}$ та $y_2 = \dfrac{3}{2}$.

Отже, існують чотири точки перетину гіперболи з колом, які мають координати:

$$N_1\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; -\frac{3}{2}\right),\; N_2\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{2}\right),\; N_3\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; -\frac{3}{2}\right),\; N_4\left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

4. Гіперболу, її асимптоти і коло схематично зображено на ***рис. 4.***

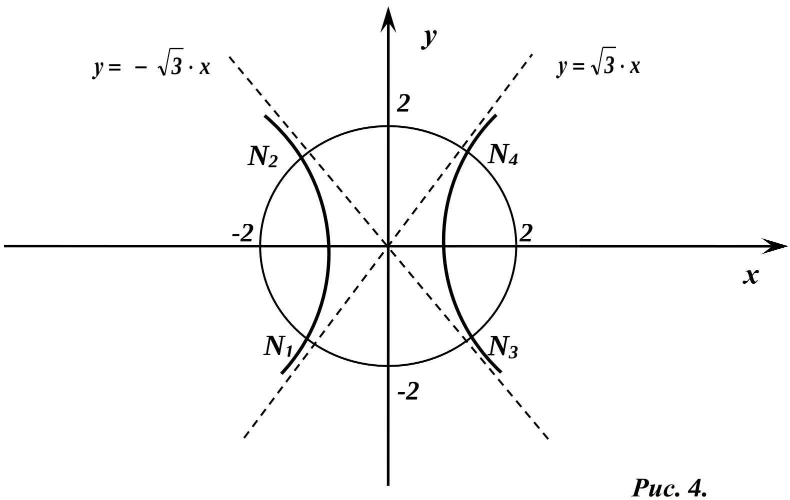


Рис. 4.

Приклад 4.

Завдання. Задано координати точок $A\left(\sqrt{5};\ \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ і $B\left(-2\sqrt{5};\ \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

Необхідно:

1) скласти канонічне рівняння еліпса, що проходить через задані точки A і B;

2) знайти піввісі, фокуси, ексцентриситет цього еліпса;

3) знайти всі точки перетину еліпса з колом, яке має центр в початку координат та радіус $R = 4$ (лін. од.);

4) побудувати еліпс і коло.

Розв'язання.

1. Канонічне рівняння еліпса записується наступним чином:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \tag{1}$$

Оскільки точки A і B належать еліпсу, то їх координати повинні задовільняти її канонічному рівнянню. Підставивши замість x, y координати точок $A\left(\sqrt{5};\ \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ і $B\left(-2\sqrt{5};\ \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, складаємо систему рівнянь, розв'язавши яку знаходимо квадрати малої (b^2) та великої (a^2) піввісей еліпса:

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{\left(-2\sqrt{5}\right)^2}{a^2} + \dfrac{\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{a^2} + \dfrac{36}{5b^2} = 1 \\ \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{9}{5b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases}.$$

Отже, згідно (1) канонічне рівняння еліпса буде записано наступним чином:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1\ .$$

2. Знаходимо піввісі еліпса. Велика піввісь має довжину $a = \sqrt{25} = 5$ лін. од.; мала піввісь має довжину $b = \sqrt{9} = 3$ (лін. од.)

Фокуси еліпса розташовані на осі абсцис, тому вони мають наступні координати:

$$F_1(-c;\ 0), F_2(c;\ 0), \qquad (2)$$

де c – довжина фокальної піввісі, квадрат якої знаходиться за наступною формулою:

$$c^2 = a^2 - b^2. \qquad (3)$$

Використовуючи (3), маємо:

$c^2 = 25 - 9 = 16$; $\qquad c = \sqrt{16} = 4$ (лін.од.).

Фокуси еліпса згідно (2) будуть мати наступні координати:

$$F_1(-4;\ 0), \quad F_2(4;\ 0).$$

Ексцентриситет ε еліпса повинен бути меншим за одиницю, знайти його можна за наступною формулою:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \qquad (4)$$

Отже, використовуючи (4), знаходимо ексцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{4}{5} = 0,8 < 1.$$

3. Оскільки коло має центр в початку координат і проходить через фокуси еліпса, то радіус його буде дорівнювати довжині фокальної піввісі (c): $R = c = 2$ (лін. од.).

Для знаходження точок перетину еліпса з колом складемо систему рівнянь, яка включає рівняння кола та еліпса:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{175}{16}; \Rightarrow x_1 = -\frac{5\sqrt{7}}{4}, x_2 = \frac{5\sqrt{7}}{4}.$$

Кожному з отриманих значень аргументу $x_1 = -\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$ та $x_2 = \dfrac{5\sqrt{7}}{4}$ відповідають два значення функції: $y_1 = -\dfrac{3}{2} = -1,5$ та $y_2 = \dfrac{3}{2} = 1,5$.

Отже, існують чотири точки перетину еліпса з колом, які мають координати:

$$N_1\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{3}{2}\right),\ N_2\left(-\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{3}{2}\right),\ N_3\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; \frac{3}{2}\right),\ N_4\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{3}{2}\right).$$

4. Еліпс і коло схематично зображені на ***рис. 5***.

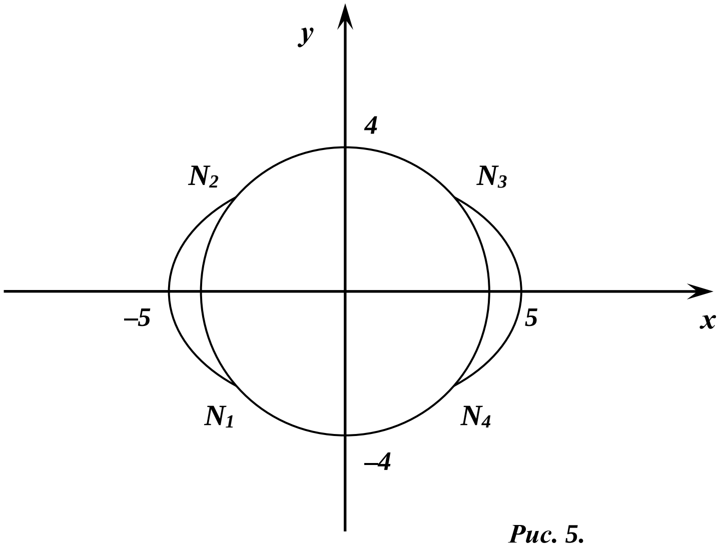


Рис. 5.

III. Розв’язати систему лінійних рівнянь трьома способами.

1. За допомогою визначників (за формулами Крамера).
2. За допомогою оберненої матриці.
3. Способом Гаусса (метод послідовного виключення невідомих).

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 0 \\ 3x + y - 3z = -1 \\ 2x - y + 5z = 3 \end{cases}$$

<u>Розв’язання.</u>

1. Розв’яжемо систему рівнянь, використовуючи формули Крамера:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} \qquad (1)$$

Δ – головний визначник системи, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – допоміжні визначники системи.

Складемо визначник з коефіцієнтів при невідомих та обчислимо його, користуючись правилом трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 12 + 8 - 3 - 30 = -20 \neq 0 \, .$$

Визначник $\Delta \neq 0$, тому система має єдиний розв`язок.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -18 - 4 + 12 + 10 = 0 \, , \quad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{0}{-20} = 0 \, ;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 36 - 8 + 9 = -40 \, , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-40}{-20} = 2 \, ;$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 18 - 1 = -20 \, , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-20}{-20} = 1 \, .$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$

2. Розв’яжемо систему рівнянь, використовуючи метод оберненої матриці. Невідомі ***x, y, z*** знаходяться за формулою:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Знайдемо матрицю A^{-1}, обернену для матриці A :

$A^{-1} = \dfrac{\tilde{A}}{|A|}$, де $\tilde{A}$ – союзна матриця.

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = +(5 - 3) = 2 \, ;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(15 + 6) = -21 \, ;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +(-3-2) = -5\ ;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(10-4) = -6\ ;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (5+8) = 13\ ;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-4) = 5\ ;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-6+4) = -2\ ;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+12) = -9\ ;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1-6) = -5\ .$$

Союзна матриця:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -21 & 13 & -9 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \text{ тоді } A^{-1} = -\frac{1}{20}\begin{vmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -21 & 13 & -9 \\ -5 & 5 & -5 \end{vmatrix}.$$

У відповідності з (2) отримаємо:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -2 \\ -21 & 13 & -9 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 0 & -13 & -27 \\ 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$

3. Розв'яжемо систему рівнянь, використовуючи метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих).

Виключимо з двох останніх рівнянь x. Для цього домножимо перше рівняння на (**–3**) та додамо до нього друге, а потім домножимо перше рівняння на (**–2**) та віднімемо від нього третє:

$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ 3x+y-3z=-1 \\ 2x-y+5z=3 \end{cases} \xrightarrow{(-3)\cdot P_1+P_2} \begin{cases} x+2y-4z=0 \\ -5y+9z=-1 \\ 2x-y+5z=3 \end{cases} \xrightarrow{(-2)\cdot P_1+P_3} \begin{cases} x+2y-4z=0 \\ -5y+9z=-1 \\ -5y+13z=3 \end{cases}.$$

З останнього рівняння виключимо y. Для цього віднімемо від другого рівняння третє:

$$\begin{cases} x+2y-4z=0 \\ \quad -5y+9z=-1 \\ \qquad\quad -4z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=1. \end{cases}$

Отже, всі три методи розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь привели до однакових відповідей, що дає змогу стверджувати про достовірність отриманого результату.

IV. Задано координати вершин піраміди $ABCD$:

$A\ (6;6;\ 5)$; $B\ (2;-2;\ 3)$; $C\ (12;1;\ 9)$; $D\ (1;2;\ 6)$.

Необхідно

1. Записати вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ та $\vec{AD}$ в системі орт і знайти модулі (довжини) цих векторів.

2. Записати кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків.

3. Знайти проекцію вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AB}$.

4. Знайти площу грані ABC.

5. Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язок

1. Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати в системі орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, користуючись наступною формулою:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\ , \qquad (1)$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі *OX, OУ, OZ*;

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, напрямок яких збігається з напрямком координатних осей *OX, OУ, OZ*;

Якщо задані довільні точки простору $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то проекції вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на координатні осі знаходяться за формулами:

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1 \qquad (2)$$

Тоді:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k} \qquad (3)$$

Підставляючи в (3) координати точок A і B, одержимо вектор $\overrightarrow{AB}$ в системі орт:

$$\overrightarrow{AB} = (2-6) \cdot \vec{i} + (-2-6) \cdot \vec{j} + (3-5) \cdot \vec{k} = -4 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} - 2 \cdot \vec{k}\ .$$

Аналогічно, підставляючи в (3) координати точок A і C, знаходимо вектор AC:

$$\overrightarrow{AC} = (12-6) \cdot \vec{i} + (1-6) \cdot \vec{j} + (9-5) \cdot \vec{k} = 6 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}\ .$$

Підставляючи в (3) координати точок A і D, знаходимо вектор AD:

$$\overrightarrow{AD} = (1-6) \cdot \vec{i} + (2-6) \cdot \vec{j} + (6-5) \cdot \vec{k} = -5 \cdot \vec{i} - 4 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}\ .$$

Якщо вектор задано в системі орт, то його можна записати в координатній формі наступним чином:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}. \qquad (4)$$

Отже, знайдені вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ мають такі координати:

$$\overrightarrow{AB} = \{-4; 8; -2\};\ \overrightarrow{AC} = \{6; -5; 4\};\ \overrightarrow{AD} = \{-5; -4; 1\}.$$

Якщо вектор $\vec{a}$ задано формулою (1) або (4), то його модуль (довжина) обчислюється за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (5)$$

Застосовуючи формулу (5), обчислюємо модулі знайдених векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 64 + 4} = \sqrt{84} \approx 9{,}2 \text{ (лін. од.)}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 25 + 16} = \sqrt{77} \approx 8{,}8 \text{ (лін. од.)}.$$

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 14 + 1} = \sqrt{42} \approx 6{,}5 \text{ (лін. од.)}.$$

2. Оскільки скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, то косинус кута φ між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad (6)$$

Якщо координати векторів відомі: $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$; $\vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то їх скалярний добуток можна знайти за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \qquad (7)$$

Знаходимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ за формулою (7):

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-4) \cdot 6 + (-8) \cdot (-5) + (-2) \cdot 4 = -24 + 40 - 8 = 8 \text{ (лін. од.)}.$$

Модулі цих векторів вже знайдені:

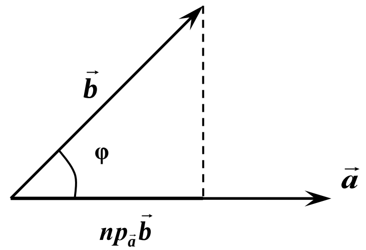
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{84} \text{ (лін. од.)}, \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{77} \text{ (лін. од.)}.$$

За формулою (6) дістанемо:

$$\cos\varphi = \cos A = \frac{8}{\sqrt{84} \cdot \sqrt{77}} = \frac{8}{\sqrt{6468}} = \frac{8}{80{,}424} \approx 0{,}0995.$$

Оскільки $\cos A \approx 0{,}0995$, то $A \approx 84^o 17'$, або $A \approx 1{,}47$ (радіана).

3. Проекція вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ (тобто на вісь, яка спрямована як вектор $\vec{a}$) знаходиться за формулою: $np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$.



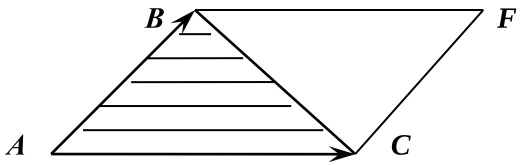
Застосовуючи формулу (6) для знаходження $\cos\varphi$, отримаємо:

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}, \text{ звідки } np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} \qquad (8)$$

Отже, проекція вектора $\vec{AD}$ на $\vec{AB}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на модуль вектора $\vec{AB}$:

$$np_{\vec{AB}}\vec{AD} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AD}}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{(-4)\cdot(-5)+(-8)\cdot(-4)+(-2)\cdot 1}{\sqrt{84}} \approx \frac{40}{9{,}165} \approx 4{,}4 \text{ (лін. од.)}$$

4. Площа грані АВС дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\vec{AB}$ на вектор $\vec{AC}$ через вектор $\vec{AM}$: $\vec{AM} = \vec{AB}\times\vec{AC}$.



Виходячи з геометричного змісту модуля векторного добутку двох векторів, величина модуля вектора $\vec{AM}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, а площа грані ABC буде дорівнювати половині модуля вектора $\vec{AM}$:

$$S_{ABFC} = \left|\vec{AM}\right|, \qquad\qquad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\vec{AM}\right|.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$:

$$\vec{AM} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -8 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{vmatrix} = -42\vec{i} + 4\vec{j} + 68\vec{k}.$$

Таким чином,

$\vec{AM} = \{-42;4;68\}$, а його модуль дорівнює:

$$\left|\vec{AM}\right| = \sqrt{(-42)^2 + 4^2 + 68^2} = \sqrt{1764 + 16 + 4624} = \sqrt{6404} \approx 80{,}02.$$

Отже, $S_{ABFC} \approx 80{,}02$ (кв. од.), звідки:

$$S_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{6404} \approx \frac{80{,}02}{2} = 40{,}01 \text{ (кв. од.).}$$

5. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах, чисельно дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку:

$$V_{пар.} = \left|\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right) \cdot \vec{AD}\right|,$$

а об'єм піраміди дорівнює шостій частині від об'єму паралелепіпеда:

$$V_{піраміди.} = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right) \cdot \vec{AD}\right|.$$

Обчислимо мішаний добуток $\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right) \cdot \vec{AD}$:

$$\left(\vec{AB} \times \vec{AC}\right) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-5)\cdot 1 + (-8)\cdot 4\cdot(-5) +$$

$$+ 6\cdot(-4)\cdot(-2) - (-5)\cdot(-5)\cdot(-2) - (-4)\cdot(-4)\cdot 4 - 6\cdot(-8)\cdot 1 =$$

$$= 20 + 160 + 48 + 50 - 64 + 48 = 262.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда $V_{пар.} = 262$ (куб. од.), а об'єм піраміди

$$V_{піраміди.ABCD} = \frac{262}{6} \approx 43{,}7 \text{ (куб. од.).}$$

V. Дано координати точок:

A (1;-2;-1), B (3;4;-2), C (3;2;1), D (10;-22;-12), M (-11;8;10).

Потрібно знайти

1. Рівняння площини α, яка проходить через три точки ***A, B*** і ***C;***

2. Канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку ***M*** перпендикулярно до площини α;

3. Відстань від точок ***M*** та ***D*** до площини α.

Розв'язок

1. Рівняння площини, що проходить через три точки ***A***$(x_1; y_1; z_1)$, ***B***$(x_2; y_2; z_2)$, ***C***$(x_3; y_3; z_3)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Підставивши в (1) координати точок ***A, B*** і ***C,*** дістанемо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 3-1 & 4+2 & -2+1 \\ 3-1 & 2+2 & 1+1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Враховуючи, що всі числа третього рядка кратні числу 2, то його можна винести за знак визначника. Розділивши (скоротивши) ліву та праву частини останнього рівняння на 2, отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо отриманий визначник по елементам першого рядка:

$$(x-1)\cdot A_{11} + (y+2)\cdot A_{12} + (z+1)\cdot A_{13} = 0;$$

$$(x-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (y+2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)\cdot(6+2) - (y+2)\cdot(2+1) + (z+1)\cdot(4-6) = 0;$$

$$8(x-1) - 3(y+2) - 2(z+1) = 0; \quad 8x-8-3y-6-2z-2=0.$$

Остаточно рівняння площини α буде записано наступним чином:

$$\underline{8x-3y-2z-16=0}, \qquad (2)$$

де $\vec{n} = \{8; -3; -2\}$ – нормальний вектор площини α.

Перевірка:

точка $A\ (1;-2;-1)$: $8\cdot 1-3\cdot(-2)-2\cdot(-1)-16=0$;

$8+6+2-16=0$;

$16-16=0$; $0\equiv 0$;

точка $A\ (1;-2;-1)\in\alpha$;

точка $B\ (3;4;-2)$: $8\cdot 3-3\cdot 4-2\cdot(-2)-16=0$; $24-12+4-16=0$;

$16-16=0$; $0\equiv 0$;

точка $B\ (3;4;-2)\in\alpha$;

точка $C\ (3;2;1)$: $8\cdot 3-3\cdot 2-2\cdot 1-16=0$; $24-6-2-16=0$;

$16-16=0$; $0\equiv 0$;

точка $C\ (3;2;1)\in\alpha$.

Отже, загальне рівняння площини α знайдено вірно.

2. Канонічні рівняння прямої в просторі мають вигляд:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \tag{3}$$

де $(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки, яка належить прямій (3);

$l;m;n$ – координати напрямного вектора $\vec{s}$ цієї прямої.

За умовою, пряма проходить через точку $M\ (-11;8;10)$ та перпендикулярна до площини α. Отже, підставляючи в (3) замість $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ координати точки M, та взявши $\vec{s}=\vec{n}=\{8;\ -3;\ -2\}$, тобто $l=8; m=-3; n=-2$ (коефіцієнти загального рівняння площини α).

Таким чином, канонічні рівняння прямої в просторі будуть мати вигляд:

$$\frac{x+11}{8}=\frac{y-8}{-3}=\frac{z-10}{-2}. \tag{4}$$

3. Відстань d від точки $M_0\ (x_0;y_0;z_0)$ до площини, яка має загальне рівняння $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{5}$$

Підставивши замість $(x_0;y_0;z_0)$ координати точок $D\ (10;-22;-12)$ та $M\ (-11;8;10)$, а також значення $A=8,\ B=-3,\ C=-2,\ D=-16$ із загального рівняння (2) площини α, знайдемо відшукувані відстані d_1 від точки M до площини α та d_2 від точки D до площини α:

$$d_1=\frac{|8\cdot(-11)-3\cdot(8)-2\cdot 10-16|}{\sqrt{8^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{|-88-24-20-16|}{\sqrt{64+9+4}}=\frac{148}{\sqrt{77}}\approx 16{,}87$$ (лін. од.).

$$d_2=\frac{|8\cdot 10-3\cdot(-22)-2\cdot(-12)-16|}{\sqrt{8^2+(-3)^2+(-2)^2}}=\frac{|80+66+24-16|}{\sqrt{64+9+4}}=\frac{154}{\sqrt{77}}\approx 17{,}55$$ (лін. од.).

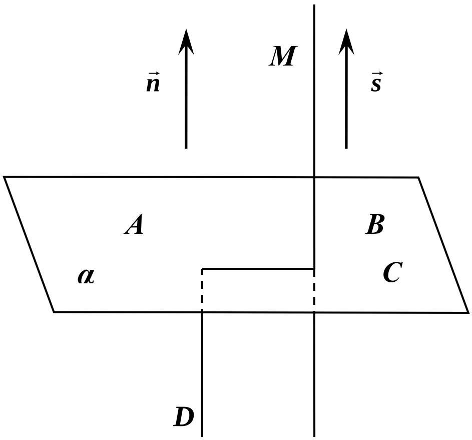


Рис. 6.

VI. Дано координати точок $A\ (9;9;8)$, $B\ (10;7;0)$, $C\ (12;9;7)$.
Потрібно
1. Записати канонічні рівняння прямої AB;
2. Записати рівняння площини α, яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB;
3. Знайти відстань від точки C до прямої AB.

Розв'язок

1. Канонічне рівняння прямої в просторі, яка проходить через точки $A\ (x_1; y_1; z_1)$, $B\ (x_2; y_2; z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ . \qquad (1)$$

Підставляючи в (1) координати точок ***A*** і ***B***, отримаємо:

$$\frac{x-9}{10-9}=\frac{y-9}{7-9}=\frac{z-8}{0-8}\ .$$

Остаточно канонічне рівняння прямої ***AB*** в просторі буде мати вигляд:

$$\underline{\frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8}\ .}$$

Спрямовуючий вектор прямої ***AB***: $\vec{s}_1\ (\ 1;\ -2;\ -8)$.

2. Запишемо рівняння площини α в загальному вигляді:

$$Ax+By+Cz+D=0\ .$$

Якщо площина проходить через точку $M_0\ \ (x_0\,;y_0\,;z_0\,)$, то її координати можна записати наступним чином:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ , \qquad (2)$$

де $\vec{n}\ (A;\ B;\ C)$ – нормальний вектор площини, який перпендикулярний до площини.

Оскільки відшукувана площина перпендикулярна до прямої ***AB***, то нормальний вектор $\vec{n}$ такої площини буде колінеарним спрямовуючому вектору $\vec{s}_1$ прямої ***AB***, а тому можна взяти $\vec{n}=\vec{s}_1=\{\ 1;\ -2;\ -8\ \}$.

Замінимо коефіцієнти ***A, B, C*** в рівнянні (2) числами: ***1, –2, –8*** , а замість $x_0\,;y_0\,;z_0$ підставимо координати точки $C\ \ (12;9;7)$:

$$1\cdot(x-12)+(-2)\cdot(y-9)+(-8)(z-7)=0\ ;$$

$$x-12-2y+18-8z+56=0\ .$$

Остаточно загальне рівняння площини α, яка проходить через точку ***C*** перпендикулярно до прямої ***AB***, буде записано наступним чином:

$$\underline{x-2y-8z+62=0\ .}$$

3. Для того, щоб визначити відстань від точки ***C*** до прямої ***AB***, знайдемо спочатку координати точки ***M*** перетину площини α з прямою ***AB***.

Для цього запишемо параметричне рівняння прямої $\boldsymbol{AB}$. Нехай

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8}=t\,,$$

де t – деякий параметр, звідки:

$$\frac{x-9}{1}=t\,;\ \frac{y-9}{-2}=t\,;\ \frac{z-8}{-8}=t\,,$$

тобто

$$x=t+9\,;\ y=-2t+9\,;\ z=-8t+8\,. \qquad (4)$$

Підставляючи (4) в (3), знаходимо значення параметра t, при якому точка прямої АВ буде належати площині α:

$$t+9-2(-2t+9)-8(-8t+8)+62=0\,;$$

$$t+9+4t-18+64t-64+62=0\,;$$

$$69t-11=0\,;\quad 69t=11\,;\quad t=\frac{11}{69}\,.$$

Підставляючи в (4) значення $t=\dfrac{11}{69}$, знаходимо координати точки $\boldsymbol{M}$ перетину прямої $\boldsymbol{AB}$ з площиною α:

$$x_M=\frac{11}{69}+9=\frac{11+621}{69}=\frac{632}{69}\approx 9{,}16\,;$$

$$y_M=(-2)\cdot\frac{11}{69}+9=-\frac{22}{69}+9=\frac{-22+621}{69}=\frac{599}{69}\approx 8{,}68\,;$$

$$z_M=(-8)\cdot\frac{11}{69}+8=-\frac{88}{69}+8=\frac{-88+552}{69}=\frac{464}{69}\approx 6{,}72\,.$$

Отже, точка $M(\frac{632}{69};\ \frac{599}{69};\ \frac{464}{69})$ або $M(9{,}16;\ 8{,}68;\ 6{,}72)$.

Знайдемо тепер відстань від точки $\boldsymbol{C}$ до прямої $\boldsymbol{AB}$.Оскільки пряма $\boldsymbol{AB}$ перпендикулярна до площини α, то відшукувана відстань дорівнює довжині перпендикуляра CM ($CM \perp AB$).

Отже, маємо:

$$|CM|=\sqrt{(x_M-x_C)^2+(y_M-y_C)^2+(z_M-z_C)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{632}{69}-12\right)^2+\left(\frac{599}{69}-9\right)^2+\left(\frac{464}{69}-7\right)^2}=$$

$$= \sqrt{\frac{(-196)^2}{69^2} + \frac{(-22)^2}{69^2} + \frac{(-19)^2}{69^2}} = \frac{\sqrt{39261}}{69} \approx \frac{198{,}144}{69} \approx 2{,}87 \text{ (лін. од.).}$$

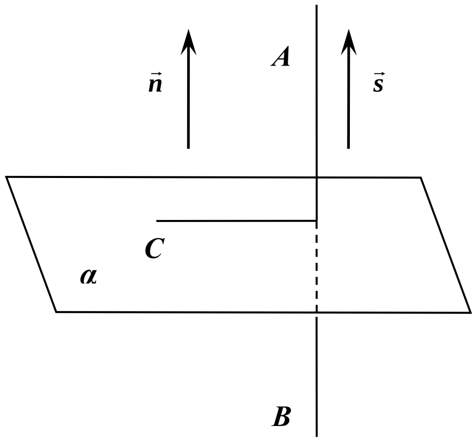


Рис. 7.

3.2. ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №2.

Вступ до аналізу.
Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної.
Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

I. 1) а) Знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$ функції при $x_0=3$.

Розв'язання.

При безпосередній підстановці граничного значення аргумента в функцію одержимо число, яке і є границею функції:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5} = \left[\frac{3^2+2\cdot 3-3}{3^2+4\cdot 3-5}\right] = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

<u>Відповідь:</u> $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=\dfrac{3}{4}$.

б) Знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$ функції при $x_0=1$.

<u>Розв'язання</u>.

При підстановці в функцію граничного значення аргумента отримаємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=\left[\frac{1^2+2\cdot 1-3}{1^2+4\cdot 1-5}\right]=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники. Після скорочення на вираз $(x-1)$ позбуваємось невизначеності:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+5)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)}{(x+5)}.$$

При підстановці граничного значення аргументу в функцію, остаточно отримаємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)}{(x+5)}=\left[\frac{1+3}{1+5}\right]=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

<u>Відповідь:</u> $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=\dfrac{2}{3}$.

в) Знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}$ функції при $x_0=\infty$.

<u>Розв'язання</u>.

При підстановці в функцію граничного значення аргумента отримаємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Розділимо чисельник і знаменник дробу на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}}=\left[\frac{1+0-0}{1+0-0}\right]=1.$$

<u>Відповідь:</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}=1.$

2) Знайти границю:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

<u>Розв’язання</u>.

Оскільки чисельник і знаменник мають границею нуль, то маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Виконаємо перетворення, домноживши чисельник і знаменник на вираз, спряжений з виразом, що знаходиться в чисельнику, а потім скористаємось формулами скороченого множення:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2^2}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}.$$

Після скорочення на вираз $(x-5)$ позбуваємось невизначеності:

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\left[\frac{1}{\sqrt{5-1}+2}\right]=\frac{1}{4}.$$

<u>Відповідь:</u> $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\frac{1}{4}.$

3) Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{tg 3x}$.

<u>Розв’язання</u>.

Безпосередня підстановка граничного значення аргументу $x=0$ приводить до невизначеності $\dfrac{0}{0}$.

Скористаємось формулою: $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$. (1)

Тоді $\sin^2 3x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 6x)$; $\quad 2\sin^2 3x = 1-\cos 6x$. (2)

Підставивши згідно (2) замість виразу $1-\cos 6x$ в чисельник вираз $2\sin^2 3x$, отримаємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{tg 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{tg 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{\frac{\sin 3x}{\cos 3x}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x\cdot\cos 3x}{\sin 3x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\sin 3x\cos 3x = \lim_{x\to 0}\sin 6x = 0.$$

<u>Відповідь:</u> $\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{tg 3x} = 0.$

4) Знайти границю: $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

<u>Розв'язання</u>.

При $x\to\infty$ границя виразу $\dfrac{2x-3}{2x+5}\to 1$, а $x-1\to\infty$, тому маємо невизначеність типу 1^{∞}.

Виділимо цілу частину дробу: $\dfrac{2x-3}{2x+5} = 1-\dfrac{8}{2x+5}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{2x+5}\right)^{x-1}.$$

Покладемо $2x+5=-8y$. Якщо $x\to\infty$, то $y\to\infty$.

$$2x=-8y-5; \quad x=-4y-\frac{5}{2}; \quad x-1=-4y-\frac{5}{2}-1=-4y-\frac{7}{2}.$$

Друга визначна границя записується наступним чином:

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e. \tag{3}$$

Зробимо перетворення, які дозволять скористатись другою визначною границею:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{8}{2x+5}\right)^{x-1}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{8}{-8y}\right)^{-4y-\frac{5}{2}-1}=\lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{8}{-8y}\right)^{-4y-\frac{7}{2}}=$$

$$=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-4}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{7}{2}}=\left[e^{-4}\cdot 1^{-\frac{7}{2}}\right]=e^{-4}.$$

<u>Відповідь:</u> $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}=e^{-4}$.

5) Знайти границю: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}$.

<u>Розв'язання</u>.

Безпосередня підстановка граничного значення $x=\frac{\pi}{2}$ приводить до невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}=\left[\frac{tg\frac{3\pi}{2}}{tg\frac{\pi}{2}}\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Зробимо заміну: $\left[\begin{array}{ll} x-\frac{\pi}{2}=t, & x=t+\frac{\pi}{2} \\ x\to\frac{\pi}{2}, & t\to 0 \end{array}\right]$.

Отже,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}=\lim_{t\to 0}\frac{tg3\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{tg\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{-ctg3t}{-ctgt}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{cos3t}{sin3t}}{\frac{cost}{sint}}=\lim_{t\to 0}\frac{cos3t\cdot sint}{sin3t\cdot cost}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{cos3t}{cost}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sint}{sin3t}=\left[\frac{1}{1}\right]\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot sint}{t}}{\frac{3t\cdot sin3t}{3t}}=1\cdot\frac{\lim_{t\to 0}t\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}{\lim_{t\to 0}3t\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}}$$

Оскільки перша визначна границя записується наступним чином:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad (4)$$

то застосувавши вираз (4), отримаємо:

$$\frac{\lim\limits_{t\to 0} t\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}}{\lim\limits_{t\to 0} 3t\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{3t}}==\frac{\lim\limits_{t\to 0} t\cdot 1}{\lim\limits_{t\to 0} 3t\cdot 1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

<u>Відповідь</u>: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}=\dfrac{1}{3}$.

II. Для функцій заданих явно (1-5) знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$, а для функцій заданих неявно та параметрично (6-7) знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1) Знайти похідну функції: $y=\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

<u>Розв'язання</u>.

Скористаємось формулою похідної частки двох функцій, яка має вигляд:

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}. \qquad (1)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(3x-2)'\sqrt{x^2+3x-4}-(3x-8)\left(\sqrt{x^2+3x-4}\right)'}{\left(x^2+3x-4\right)^2}=$$

$$=\frac{3\sqrt{x^2+3x-4}-\dfrac{(3x-8)(2x+3)}{2\sqrt{x^2+3x-4}}}{x^2+3x-4}=\frac{3(x+3x-4)-(3x-8)(2x+3)}{2\sqrt{\left(x^2+3x-4\right)^3}}=$$

$$=\frac{3x^2+9x-12-6x^2-9x+16x+24}{2\sqrt{\left(x^2+3x-4\right)^3}}=\frac{-3x^2+16x+12}{2\sqrt{\left(x^2+3x-4\right)^3}}.$$

<u>Відповідь:</u> $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-3x^2+16x+12}{2\sqrt{\left(x^2+3x-4\right)^3}}$.

2) Знайти похідну функції

$$y = (4x+1)^2 \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + ln4x .$$

<u>Розв’язання.</u>

Задана функція, яка складається з алгебраїчної суми двох складних функцій. Застосовуючи правило диференціювання алгебраїчної суми двох функцій, яке записується наступним чином:

$$[U(x)+V(x)]' = U'(x)+V'(x), \qquad (2)$$

отримаємо:

$$y' = \left((4x+1)^2 \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + ln4x \right)' = \left((4x+1)^2 \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} \right)' + (ln4x)' .$$

Для першого доданку застосуємо правило диференціювання добутку двох функцій:

$$[U(x)\cdot V(x)]' = U'(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V'(x), \qquad (3)$$

а для другого доданку застосуємо правило диференціювання складної функції виду $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, яке має вигляд:

$$y'_x = f'(u)\cdot \varphi'(x). \qquad (4)$$

З урахуванням (2), (3) та (4) отримаємо:

$$y' = \left((4x+1)^2 \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} \right)' + (ln4x)' =$$

$$\left((4x+1)^2\right)' \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + (4x+1)^2 \cdot \left(arctg\sqrt{1-e^{2x}} \right)' + \frac{(4x)'}{4x} =$$

$$= 2(4x+1)(4x+1)' \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + (4x+1)^2 \cdot \frac{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{1+\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2} + \frac{4}{4x} =$$

$$= 8(4x+1)\cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + (4x+1)^2 \cdot \frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2-e^{2x}} + \frac{1}{x} =$$

$$= 8(4x+1)\cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + (4x+1)^2 \cdot \frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2-e^{2x}} + \frac{1}{x}.$$

<u>Відповідь</u>: $\dfrac{dy}{dx} = y' = (32x+8)\cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} - \dfrac{(4x+1)^2 \cdot e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}\cdot\left(2-e^{2x}\right)} + \dfrac{1}{x}.$

3) Знайти похідну функції: $y = arctg\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Розв'язання. Задана складна функція виду $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$.

Застосовуючи правило диференціювання складної функції (4), отримаємо:

$$y' = \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(2x^2+2x\sqrt{x^2+1}+2\right)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}.$$

Відповідь: $\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)}$.

4) Знайти похідну функції $y = ln\sqrt{\dfrac{3x^3}{5x^2+7}}$.

Розв'язання.

Використаємо властивості логарифмів:

$$y = ln\sqrt{\frac{3x^3}{5x^2+7}} = ln\left(\frac{3x^3}{5x^2+7}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}ln\frac{3x^3}{5x^2+7} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(ln3x^3 - ln\left(5x^2+7\right)\right).$$

Застосовуючи правило диференціювання алгебраїчної суми двох функцій (2), одержимо:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{2}\left(ln3x^3 - ln\left(5x^2+7\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\left(ln3x^3\right)' - ln\left(5x^2+7\right)'\right).$$

Застосовуючи правило диференціювання складної функції (4), отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3x^3}\cdot\left(3x^3\right)'\right) - \left(\frac{1}{5x^2+7}\left(5x^2+7\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9x^2}{3x^3} - \frac{10x}{5x^2+7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{15x^4+63x^2}{3x^3\left(5x^2+7\right)}\right) = \frac{5x^2+21}{10x^3+14x}.$$

Відповідь: $\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{5x^2 + 21}{10x^3 + 14x}$.

5) Знайти похідну показниково-степеневої функції:

$y = (sinx)^{cosx}$, $\quad\quad (0 < x < \pi)$.

Розв'язання.

Для диференціювання показниково-степеневої функції застосовується формула:

$$y' = (u(x))^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]. \qquad (5)$$

Прологарифмуємо функцію y, а потім продиференціюємо з урахуванням того, що y є функцією від x:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\cos x} = \cos x \cdot \ln(\sin x),$$

$$\frac{1}{y}y' = (\cos x)' \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot (\ln(\sin x))' =$$

$$= -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(\sin x).$$

Після приведення останньої рівності до ідентичності вигляду (5), маємо:

$$\frac{dy}{dx} = y' = (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln(\sin x)\right].$$

6) Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}.$$

Розв'язання.

Враховуючи, що перша похідна від параметрично заданої функції знаходиться за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \qquad (6)$$

похідну другого порядку від параметрично заданої функції можна обчислити наступним чином:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \qquad (7).$$

Знайдемо похідні першого порядку по параметру t:

$$x'_t = \left(2\left(t - \sin t\right)\right)' = 2\left(1 - \cos t\right), \quad y'_t = \left(2\left(1 - \cos t\right)\right)' = 2\sin t .$$

Застосувавши формулу (6), знаходимо похідну першого порядку від параметрично заданої функції:

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{2\sin t}{2\left(1 - \cos t\right)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = ctg\,\frac{t}{2} .$$

Застосовуючи формулу (7) , знайдемо похідну другого порядку:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} = \frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{2\left(1 - \cos t\right)} = -\frac{1}{8\sin^4\dfrac{t}{2}} .$$

Відповідь: $\dfrac{dy}{dx} = y'_x = ctg\,\dfrac{t}{2}$; $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = y''_{xx} = -\dfrac{1}{8\sin^4\dfrac{t}{2}}$.

7) Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для функції, заданої неявно:

$2x - \sin 2x - y^2 = 0$.

Розв’язання.

Щоб знайти похідну неявно заданої функції, продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x :

$2 - \cos 2x \cdot 2 - 2yy' = 0$

$2 - 2\cos 2x - 2yy' = 0$

$yy' = 1 - \cos 2x$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1-\cos 2x}{y} = \frac{2\sin^2 x}{y} \qquad (8)$$

Вдруге продиференціюємо по x обидві частини рівняння (8):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\frac{y'}{y^2}2\sin^2 x + \frac{4\sin x\cos x}{y} = -\frac{y'}{y^2}2\sin^2 x + \frac{2\sin 2x}{y};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\frac{2\sin^2 x}{y^3}2\sin^2 x + \frac{2\sin 2x}{y} = \frac{-4\sin^4 x}{y^3} + \frac{2\sin 2x}{y}.$$

Відповідь: $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2\sin^2 x}{y}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{-4\sin^4 x}{y^3} + \frac{2\sin 2x}{y}$.

III. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Розв'язання.

Пропонується наступна схема дослідження функцій.

1. Знайти область визначення та область значень функції.
2. Дослідити функцію на парність – непарність.
3. Знайти інтервали монотонності (зростання та спадання) функції, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках.
4. Знайти точки перегину графіка функції та інтервали опуклості і вгнутості.
5. Дослідити графік функції на наявність асимптот.
6. Скласти таблицю значень функції для деяких значень її аргументу.
7. Використовуючи всі отримані результати, побудувати графік функції.

Застосуємо цю схему для дослідження функції:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$$

1. Областю визначення функції є значення $x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значень функції: $y \in (-\infty; +\infty)$.

2. Для дослідження функції на парність – непарність аргумент x замінимо на $(-x)$, тоді:

$$y(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-(-x^2)-3(-x)+2=-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+2,$$ тобто

$y(-x)\neq y(x)$ і $y(-x)\neq -y(x)$.

Отже, задана функція не є парною, не є непарною.

3. Дослідимо задану функцію на екстремум за допомогою необхідної і достатньої ознак. Визначимо критичні точки. Для цього знаходимо першу похідну даної функції $y'(x)$ і прирівнюємо її до нуля:

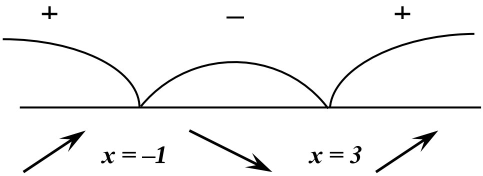
$$y'(x)=x^2-2x-3; \qquad x^2-2x-3=0$$

Розвязком рівняння є $x_1=-1$ та $x_2=3$.

Таким чином, $x_1=-1$ та $x_2=3$ – критичні точки.

Оскільки похідна $y'(x)$ існує при будь-якому x, то інших критичних точок немає.

За допомогою методу інтервалів визначимо знаки похідної зліва та справа від критичних точок.



При $x\in(-\infty;-1)$ похідна функції додатня $(y'(x)>0)$.

Якщо $x\in(-1;3)$ похідна від'ємна $(y'(x)<0)$, якщо $x\in(3;+\infty)$, то похідна знов додатня $(y'(x)>0)$.

Згідно достатній умові існуваня екстремуму функції

$x_{max}=-1$, а $x_{min}=3$.

Визначимо значення функції в точках мінімуму та максимуму.

$$y_{max}=y(-1)=-\frac{1}{3}-1+3+2=3\frac{2}{3}$$

$$y_{min}=y(3)=9-9-9+2=-7$$

Таким чином, точка максимуму $A(-1;\ 3\frac{2}{3})$, точка мінімуму $B(3;-7)$.

Згідно з теоремою про достатні ознаки зростання та спадання функції, функція зростає на проміжках $x \in (-\infty;-1)$ та $x \in (3;+\infty)$. Функція спадає на проміжку $x \in (-1;3)$.

4. Знайдемо точки перегину графіка функції та інтервали опуклості та вгнутості.

Для цього знаходимо другу похідну $y''(x)$, прирівняємо її до нуля та знайдемо корені рівняння $y''(x) = 0$:

$$y''(x) = 2x - 2; \qquad 2x - 2 = 0$$

Тоді $x = 1$ – критична точка другого роду. Запишемо другу похідну у вигляді:

$$y''(x) = 2\,(x - 1)$$

З правої частини цієї рівності випливає, що при $x < 1$ друга похідна $y''(x)$ від'ємна, а при $x > 1$ $y''(x)$ – додатня.

Отже, в інтервалі $(-\infty;1)$ графік функції є опуклим, в інтервалі $(1;+\infty)$ – вгнутим.

Друга похідна при переході через точку $x = 1$ змінює свій знак. Отже, $x = 1$ є абсцисою точки перегину.

Обчислимо ординату цієї точки:

$$y(1) = \frac{1}{3} - 1 - 3 + 2 = -\frac{5}{3}$$

Таким чином, точка $P\ (1; -\frac{5}{3})$ є точкою перегину графіка функції.

5. З'ясуємо наявність асимптот графіка функції.

Вертикальних асимптот немає, оскільки функція визначена при всіх дійсних значеннях аргументу.

Похилих асимптот, що виражаються формулою $y = kx + b$, в даному випадку також не буде, оскільки

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}x^2 - x - 3 + \frac{2}{x}\right) = \infty\ ,$$

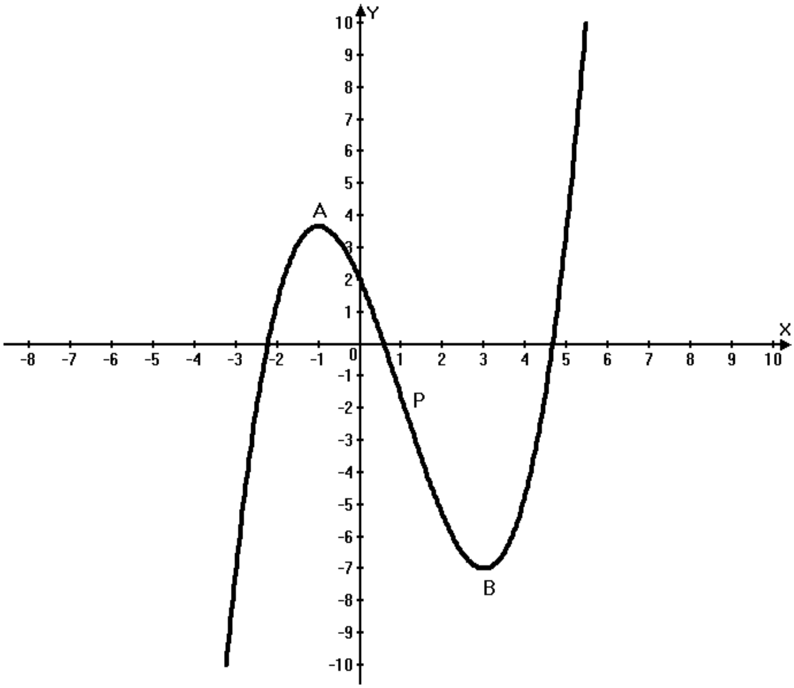
$$b = \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big) == \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2 - x\right) = \infty\,.$$

Оскільки $\boldsymbol{k \neq 0}$, то горизонтальних асимптот графік функції не має.

6. Складемо таблицю значень функції для деяких значень її аргументу:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	$1\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	2	$-1\frac{2}{3}$	$-5\frac{1}{3}$	–7	$-4\frac{2}{3}$

7. Скориставшись отриманими результатами, побудуємо графік функції.



IV. Знайти:

1. невизначені інтеграли та результати перевірити диференціюванням (1-3) ;
2. невизначений та невластивий інтеграли (4-5).

1) Обчислити невизначений інтеграл: $I=\int\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}dx$.

Розв'язання.

Розкладемо підінтегральний вираз на найпростіші дроби I та III типів:

$$\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+13}.$$

Привівши до спільного знаменника, помножимо обидві частини рівняння на знаменник лівої частини:

$$3x^2+14x+37=Ax^2+4Ax+13A+Bx^2-Bx+Cx-C\;;$$

$$3x^2+14x+37=x^2(A+B)+x(4A-B+C)+13A-C\,.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів A; B; C використовуємо метод невизначених коефіцієнтів :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=3 \\ x^1 & 4A-B+C=14 \\ x^0 & 13A-C=37 \end{array}\qquad \begin{cases} B=3-A \\ C=13A-37 \\ 4A-3+A+13A-37=14 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=3 \\ B=0 \\ C=2 \end{cases}$$

Підставивши замість коефіцієнтів A; B; C їх значення, запишемо підінтегральний вираз у вигляді:

$$\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x^2+4x+13}.$$

Проінтегруємо:

$$I=3\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x^2+4x+13}.$$

Окремо знайдемо первісні першого та другого інтегралів, зробивши відповідні позначення:

$$I_1=3\int\frac{dx}{x-1}=3\ln|x-1|+C_1.$$

$$I_2=2\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=2\int\frac{dx}{(x+2)^2+9}=$$

$$=2\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9}=2\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2}=\frac{2}{3}arctg\,\frac{x+2}{3}+C_2.$$

Остаточно маємо:

$$F(x)=I_1+I_2=3\ln|x-1|+\frac{2}{3}arctg\,\frac{x+2}{3}+C.$$

<u>Перевірка :</u>

$$F'(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{9\left(1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{9+(x+2)^2}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x^2+4x+13}=$$

$$=\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}=f(x).$$

<u>Відповідь:</u> $\int\frac{3x^2+14x+37}{(x-1)(x^2+4x+13)}dx=3\ln|x-1|+\frac{2}{3}arctg\,\frac{x+2}{3}+C.$

2) Обчислити невизначений інтеграл: $I=\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$.

<u>Розв'язання.</u>

Застосуємо до інтегралу підстановку: $x=\frac{1}{cost}$.

Тоді $dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$; $x^2=\frac{1}{\cos^2 t}$; $x^4=\frac{1}{\cos^4 t}$; $t=\arccos\frac{1}{x}$.

$$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}=\frac{\sin t}{\cos t}.$$

Отже, $I=\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx=\int\frac{sint\cdot\cos^4 t\cdot\sin t}{cost\cdot\cos^2 t}dt=\int\sin^2 t\cdot costdt=$

$$=\int\sin^2 td\left(sint\right)=\frac{\sin^3 t}{3}+C.$$

<u>Перевірка :</u>

$$F'(x)=\left(\frac{\sin^3 t}{3}\right)'=\frac{1}{3}3\sin^2 t\cdot cost=\sin^2 t\cdot cost.$$

Повернемось до аргументу x:

$$I=\frac{\sin^3 t}{3}=\frac{1}{3}\sin^3\left(\arccos\frac{1}{x}\right)+C.$$

Відповідь: $I=\frac{1}{3}\sin^3\left(\arccos\frac{1}{x}\right)+C.$

3) Обчислити невизначений інтеграл: $\int 6x^2\cdot arctg\,2xdx$.

Розв'язання.

Застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{4}$$

Покладемо $u=arctg\,2x$, $dv=6x^2dx$, тоді

$$du=\left(arctg\,2x\right)'=\frac{2}{1+4x^2}dx,\quad v=\int 6x^2dx=6\cdot\frac{x^3}{3}=2x^3 .$$

Згідно з (4) отримаємо:

$$\int 6x^2\cdot arctg\,2xdx=2x^3\cdot arctg\,2x-\int\frac{2\cdot 2x^3}{1+4x^2}dx=$$

$$=2x^3\cdot arctg\,2x-\int\left(x-\frac{x}{1+4x^2}\right)dx=2x^3\cdot arctg\,2x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}\ln\left|1+4x^2\right|+C.$$

Перевірка :

$$F'(x)=6x^2arctg\,2x+2x^3\frac{2}{1+4x^2}-\frac{2}{2}x+\frac{1}{8}\frac{8x}{1+4x^2}=$$

$$6x^2arctg\,2x+\frac{4x^3}{1+4x^2}-x+\frac{x}{1+4x^2}=6x^2arctg\,2x+$$

$$+\frac{4x^3-x-4x^3+x}{1+4x^2}=6x^2arctg\,2x=f(x).$$

Відповідь: $\int 6x^2arctg\,2xdx=2x^3\cdot arctg\,2x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{8}\ln\left|1+4x^2\right|+C.$

4) Обчислити визначений інтеграл:

$$\int_0^3\frac{4xdx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2}-2\sqrt[3]{3x-8}+4}.$$

Розв'язання.

Застосуємо підстановку: $\left|\begin{array}{l} t^3=3x-8;\quad x=\dfrac{t^3+8}{3}\\ dx=t^2dt\end{array}\right|$.

Визначимо границі інтегрування для t :

При $x = 0 \quad t = -2$;
При $x = 3 \quad t = 1$.

$$I = \int_0^3 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(3x-8)} - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4} = \int_{-2}^{1} \frac{4\frac{t^3+8}{3}t^2dt}{t^2-2t+4} = \frac{4}{3}\int_{-2}^{1} \frac{t^5+8t^2}{t^2-2t+4}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right) - \frac{4}{3}\left(4-\frac{16}{3}\right) = \frac{1}{3}+\frac{8}{9}-\frac{16}{3}+\frac{64}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Відповідь: $\int_0^3 \frac{4xdx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2} - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4} = 3.$

5) Обчислити невластивий інтеграл: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Розв'язання.

Маємо невластивий інтеграл з нескінченою верхньою межею інтегрування. Скористаємось граничним переходом:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2+4x+13} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{(x+2)^2+9} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+3^2} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right)\Big|_1^b\right] =$$

$$== \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left[arctg\left(\frac{b+2}{3}\right) - arctg\left(\frac{1+2}{3}\right)\right] = \frac{1}{3}\left(arctg(\infty) - arctg\,1\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

Відповідь: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13} = \frac{\pi}{12}$.

V. Дана функція $z = \frac{y^2}{\sqrt{xy}}$.

Знайти:

1. повний диференціал dz;
2. частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

3. мішані частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Розв'язання.

1) Повний диференціал функції dz знайдиться за формулою:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \,. \tag{1}$$

Для того, щоб знайти повний диференціал, знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{y^2}{\sqrt{xy}}\right)'_x = \frac{y^2}{\sqrt{y}}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'_x = -\frac{1}{2}\sqrt{y^3}\cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^3}{x^3}}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{y^2}{\sqrt{xy}}\right)'_y = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(y^{\frac{3}{2}}\right)'_y = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}y^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,.$$

Підставивши знайдені частинні похідні у формулу повного диференціалу (1), отримаємо:

$$dz = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^3}{x^3}}dx + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}dy\,.$$

<u>**Відповідь:**</u> повний диференціал функції $dz = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^3}{x^3}}dx + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}dy$.

2) Знайдемо частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^3}{x^3}}\right)'_x = -\frac{1}{2}\sqrt{y^3}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'_x = \frac{3}{4}\sqrt{y^3}\cdot x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}\,.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)'_y = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'_y = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{xy}}\,.$$

<u>**Відповідь:**</u> $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y^3}{x^5}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{3}{4\sqrt{xy}}$.

3) Мішані частинні похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^3}{x^3}} \right)'_y = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(y^{\frac{3}{2}} \right)'_y = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{y}{x^3}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \right)'_x = \frac{3}{2}\sqrt{y}\left(x^{-\frac{1}{2}} \right)'_x = \frac{3}{4}\sqrt{y} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}} \ .$$

<u>**Відповідь:**</u> мішані частинні похідні рівні між собою:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}} \ .$$

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Бергман – М. : Наука, 1985. – 287 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – 5-е изд. – М. : Высшая школа, 1977. – 245 с.
3. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – 2-е изд. – М. : Высшая школа, 1975. – 301 с.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. – у 2-х ч. Ч. II / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – 4-е изд.. – М. : Высшая школа, 1986. – 287 с.
5. Дубовик В. П. Вища математика : зб. задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрина. – К. : А.С.К., 2001. – 319 с.
6. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов – М. : Наука, 1977. – 127 с.
7. Засуха В. А. Прикладна математика / В. А. Засуха. – К. : Арістель, 2004. – 250 с.
8. Ивашев-Мусатов О. С. Теория вероятностей и математическая статистика / О. С. Ивашев-Мусатов. – М. : Высшая школа, 1979. – 237 с.
9. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. / Д. В. Клетеник – М. : Наука, 1989. – 150 с.
10. Коленаев В. А. Теория вероятностей и математическая статистика/ В. А. Коленаев, О. В. Староверов, В. В. Турундаевский. – М. : Высшая школа, 1991. – 190 с.
11. Лавренчук В. П. Вища математика. – в 2-х ч. / В. П. Лавренчук – Чернівці : Рута, 2002. – 560 с.
12. Мармоза А.Т. Практикум по математической статистике / А. Т. Мармоза. – К. : Вища школа, 1990. – 290 с.
13. Мартиненко М. А. Теорія ймовірностей / М. А. Мартиненко, Р. К. Клименко, І. В. Лебедєва. – К. : УДУХТ, 1999 – 242 с.
14. Опря А. Т. Математична статистика / А. Т. Опря. – К. : Урожай, 1994. – 187 с.
15. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посіб. : у 2-х ч. – Ч. І. Теорія

ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – К. : КНЕУ, 2001. – 304 с.

16. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посіб.: у 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2001. – 336 с.
17. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник / П. С. Сеньо 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Знання, 2007. – 556 с.

Зміст

Навчально-методичне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Контрольні завдання та методичні рекомендації

Укладачі:
Шебанін В'ячеслав Сергійович;
Шебаніна Олена В'ячеславівна;
Богза Володимир Георгійович
та ін.

Формат 60х84/16
Ум. друк. арк. 10,9
Наклад 20 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.