МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

Вища математика.
Визначений та невизначений інтеграли
(Модуль 6)

Завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи
студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей
141 - “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”,
208 - "Агроінженерія"

МИКОЛАЇВ
2016

УДК 517
ББК 22.1
В 55
Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 30.06.2016 р., протокол № 9.

Укладачі:
В. С. Шебанін - д-р техн. наук., професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
І. П Атаманюк - д-р. техн. наук., професор, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
В. Г. Богза - канд. техн. наук., доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Цепуріт - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Богданов - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Шептилевський - асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
С. В. Євстрат'єв - асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет.
Рецензенти:
В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор,
ректор Миколаївського національного університету
ім. В. О. Сухомлинського;
І. Д Бурковський – канд. техн. наук, провідний науковий співробітник, Миколаївський національний аграрний університет.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 4,1
Тираж 50 прим. Зам. № 1403-1

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р

Навчальне видання

Вища математика. Диференціальне числення функції однієї змінної (Модуль 5)

Завдання та методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін** В'ячеслав Сергійович
Богза Володимир Григорович
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 141 - "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка",
208 - "Агроінженерія"

Матеріал даного посібника складається з осноіних теоретичних відомостей,: розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв'язання. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв'язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Первісна і невизначений інтеграл. Безпосереднє інтегрування та інтегрування иетодом заміни змінної.

Тема 2. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі. Основні класи функцій, для яких використовується метод інтегрування частинами.

Тема 3. Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій.

Тема 4. Інтегрування дробово- раціональних функцій.

Тема 5. Інтеграли від деяких функцій, які містять квадратний тричлен: $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.,

$\int \frac{Av+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Тема 6. Інтегрування тригонометричних функцій виду: R(sinx,cosx), R($\sin^2$x,$\cos^2$x). Універсальна тригонометрична підстановка . Інтегрування тригонометричних функцій виду: R(tgx), R(sinx)cosx, R(cosx)sinx, f(x) = $\sin^m x\cos^n x$.

Тема 7. Інтегрування ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.

Тема 8. Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст. Основні властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.
Тема 9. Невластиві інтеграли з нескінченими межами. Невластиві інтеграли від функцій, які мають точки розриву.

Практичне заняття 1

Тема 1. ***Первісна і невизначений інтеграл. Безпосереднє інтегрування та інтегрування иетодом заміни змінної***

Означення. Функція *F(x)* зветься первісною для функції *f(x)* на відрізку *[a,b],* якщо в усіх точках цього відрізку виконується рівність *F'(x) = f(x).*

Нехай $F(x)$ — первісна для $f(x)$, тоді будь-яка функція $\Phi(x) = F(x) + c$, де $c = const$, також буде первісною для $f(x)$. Дійсно, $\Phi'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + c' = f(x)$.
Таким чином, якщо функція має первісну, то вона має безліч первісних, до того ж всі ці первісні відрізняються лише на сталу.

Означення. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то вираз $F(x)+C$ називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x)dx = F(x) + C \cdot$

Геометрично невизначений інтеграл визначає сім'ю кривих на площині, кожну з яких можна отримати шляхом зсуву однієї з кривих вздовж осі *Oy*.

Властивості невизначеного інтеграла

Нехай функції $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ визначені на (a,b), а $F(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ — їх відповідні первісні на (a,b). Через $df(x), dF(x)$ будемо позначати диференціали відповідних функцій. Тоді

Зміст

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{8x+7}{\sqrt{x-8}}dx$; 2.2. $\int \left(1-5x\right) sin\, 3xdx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x}{x^3+27}dx$; 3.2. $\int \sin 3x \cos 6x dx$; 3.3. $\int \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}+2x}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_4^9 \frac{3\sqrt{x}}{1+3x}dx$; 4.2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+5x+14}$.

Список рекомендованої літератури:

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа./ Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
2. Валєєв К. Г, Вища математика: навч. посіб. : у 2-х ч. – ч. 1 / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
3. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. / И. П. Натансон. – СПб. : Издательство Лань, 1999. – 736 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2-х т. - Т.1. / Н. С. Пискунов – М. : Наука, 1985. – 560 с.
5. Соколенко О. І. Вища математика: підруч./ О. І. Соколенко – К. : Академія, 2002. – 432 с.

1. $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + c$;

2. $d\int f(x) = d\big(F(x)+c\big) = dF(x) = f(x)dx$;

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, де $k = const, k \in R$;

4. $\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx = F_1(x) + F_2(x) + c$.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int 0\, dx = c$;
2. $\int dx = x + c$;
3. $\int x^\mu\, dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c$, де $\mu = const, \mu \neq -1$;
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c, \quad (x \neq 0)$;
5. $\int e^x\, dx = e^x + c$;
6. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c, \quad (a > 0, a \neq 1)$;
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$;
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$;

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$;

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c = -arcctgx + c$;

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c$, $a = const, a \neq 0$;

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + c$, $a = const, a \neq 0$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c$;

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$, $a = const, a \neq 0$ — довгий логарифм;

17. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$;

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$ — високий логарифм.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x-5}{x^3+1} dx$; 3.2. $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x dx$; 3.3. $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}} dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^1 x \ln x dx$; 4.2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

Варіант № 29

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int e^{11x} dx$; 1.2. $\int e^{11+x} dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt{x}}$; 2.2. $\int (x+7) e^x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{5x+1}{x^2+5x+4} dx$; 3.2. $\int \sqrt{1+4\sin x} \cos x dx$; 3.3. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+x} dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$; 4.2. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}}$.

Варіант № 30

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{x^{11}} dx$; 1.2. $\int \frac{1}{(x+1)^{11}} dx$.

3.1. $\int \frac{2x-5}{x^2+2x-3}dx$; 3.2. $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x dx$; 3.3. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x-\sqrt[5]{x}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^1 xe^{2x}dx$; 4.2. $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$.

Варіант № 27

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \cos 11x dx$; 1.2. $\int \cos(11+x)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{2x+3}}$; 2.2. $\int xe^{x+5}dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x}{x^3+1}dx$; 3.2. $\int \mathrm{tg}^2(7x+3)dx$; 3.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}+x}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$; 4.2. $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{arctg}\, x dx}{x}$.

Варіант № 28

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \sin 11x dx$; 1.2. $\int \sin(11+x)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 2.2. $\int x^2 \cos x dx$.

Метод безпосереднього інтегрування

Це метод обчислення інтегралів за допомогою таблиці інтегралів та властивостей інтегралів.

Інтегрування методом заміни змінної

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$, але безпосередньо підібрати первісну не можна, хоча відомо, що вона існує.

Зробимо заміну змінної у підінтегральному виразі, поклавши $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервна функція з неперервною похідною, яка має обернену функцію. Тоді $dx=\varphi'(t)dt$; у цьому випадку справедлива рівність

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Приклади розв'язання

<u>*Приклад 1*</u>. $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx = 2\int x^3 dx - 3\int \sin x dx +$

$$+5\int x^{1/2}dx = 2/4x^4 + 3\cos x + (2\cdot 5x^{3/2})/3 + C =$$

$$= x^4/2 + 3\cos x + 10x^{3/2}/3 + C. =$$

$$== x^4/2 + 3\cos x + 10x\sqrt{v}/3 + C.$$

<u>*Приклад 2*</u>. $\int (2x^2+1)^3 dx$.

Скористуємося для підінтегральної функції формулою скороченого множення:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Отримаємо:

$$\left(2x^2+1\right)^3 = 8x^6+12x^4+6x^2+1 .$$

Тоді

$$\int\left(2x^2+1\right)^3 dx =$$

$$\int\left(8x^6+12x^4+6x^2+1\right)dx = 8\int x^6dx+12\int x^4dx+6\int x^2dx+\int dx =$$

$$=\frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+2x^3+x+c .$$

<u>*Приклад 3*</u>, $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx$.

$$\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}$$

$$=$$

$$\int\left(\frac{1}{6}x^{\frac{1}{6}}-\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}x^{\frac{5}{12}}\right)dx \overset{\text{правила } 1,2}{=} \frac{1}{6}\int x^{\frac{1}{6}}dx-\frac{1}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx+\frac{2\sqrt[4]{5}}{3}\int x^{\frac{5}{12}}dx=$$

$$=\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{1}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{8\sqrt[4]{5}}{17}\cdot x^{\frac{17}{12}}+c=\frac{1}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^4}+\frac{8}{17}\sqrt[12]{125x^{17}}+c.$$

<u>*Приклад 4*</u>**.**

$$\int\frac{1\cdot dx}{x^2\left(1+x^2\right)}=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

4.1. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx$; 4.2. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{1+x^2}$.

Варіант № 25

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int\frac{1}{\sin^2 10x}dx$; 1.2. $\int\frac{1}{\sin^2(10+x)}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$; 2.2. $\int x\sin(3x-1)dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int\frac{x+3}{x^2+5x+4}dx$; 3.2. $\int\sin^3 x\sqrt[3]{\cos x}dx$; 3.3. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}-\sqrt[5]{x}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int\limits_4^{11}\frac{x}{\sqrt{x+5}-1}dx$; 4.2. $\int\limits_0^\infty\frac{xdx}{(1+x)^3}$.

Варіант № 26

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int\frac{1}{x^{20}}dx$; 1.2. $\int\frac{1}{(x+1)^{20}}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{7-5x}}$; 2.2. $\int x\ln(x+13)dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

4.1. $\int\limits_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$; 4.2. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Варіант № 23

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int 10^{10x}\,dx$; 1.2. $\int 10^{10+x}\,dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$; 2.2. $\int (2x-3)\ln x\,dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{3x-5}{x^2-9x+4}\,dx$; 3.2. $\int \sin 5x\cdot\cos 9x\,dx$; 3.3. $\int \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt[5]{x}+1}\,dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1+8x^3}\,dx$; 4.2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$.

Варіант № 24

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{\cos^2 10x}\,dx$; 1.2. $\int \frac{1}{\cos^2(10+x)}\,dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{3x-2}}$; 2.2. $\int (x+2)e^{3x}\,dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{3x-5}{x^2-4x+5}\,dx$; 3.2. $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}\,dx$; 3.3. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

Приклад 5.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx =$$

$$= tgx - ctg\,x + C.$$

Приклад 6.

$$\int\left(1+x^2\right)^{10} xdx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int t^{10}dt = \frac{t^{11}}{22} + C = \frac{\left(1+x^2\right)^{11}}{22} + C.$$

Приклад 7. $\int \frac{\sin 3x}{(1-2\cos 3x)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\sin 3x d(3x)}{(1-2\cos 3x)^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\int \frac{2d(-\cos 3x)}{(1-2\cos 3x)^2} =$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{d(-2\cos 3x)}{(1-2\cos 3x)^2} = \frac{1}{6}\int \frac{d(1-2\cos 3x)}{(1-2\cos 3x)^2} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-2\cos 3x} + C.$$

Приклад 8.

$$\int \frac{\left(e^x-1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^x}dx = \int \frac{e^{3x}-e^{2x}+e^x-1}{e^x}dx = \int\left(e^{2x}-e^x+1-e^{-x}\right)dx =$$

$$= \int e^{2x}dx - \int e^x dx + \int dx - \int e^{-x}dx == \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + c.$$

Приклад 9.

$$\int \sin^3 x\cos x dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

Приклад 10.

$$\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} - \ln|t| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

Завдання для самостійного рлзв’язання

1. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx.$ *Відповідь.* $\ln|x| + 2\text{arctg}\, x + C.$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$

3. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx.$ *Відповідь.* $-\text{ctg}x - \text{tg}x + C.$

4. $\int \frac{dx}{x\ln^4 x}.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{3\ln^3 x} + C.$

5. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{5-\sin^2 x}}dx.$ *Відповідь.* $-\sqrt{5-\sin^2 x} + C.$

6. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx.$ *Відповідь.* $-\frac{1}{9}\left(\sqrt{1-9x^2} + (\arccos 3x)^3\right) + C.$

7. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ *Відповідь.* $2\sin\sqrt{x} + C.$

8. $\int \frac{dx}{e^x+1}.$ *Відповідь.* $-\ln\left(e^{-x}+1\right) + C$.

9. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}.$ *Відповідь.* $2\text{arctg}\sqrt{x} + C$ ..

10. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{4}\sin^4 x - \frac{1}{6}\sin^6 x + C$.

11. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$ *Відповідь* $\frac{1}{3}tgx^3 + c$

12. $\int \cos^5 x dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$ **.**

4.1. $\int_1^2 (x+2)\ln(x+1)dx$; 4.2. $\int_0^\infty e^{-x}\cos x dx$ ·

Варіант № 21

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int e^{10x}dx$; 1.2. $\int e^{10+x}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x+3}}$; 2.2. $\int (x+5)e^{-4x}dx$ ·

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{5x+3}{x^2+5x+4}dx$; 3.2. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$; 3.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}+x}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_4^9 \frac{x}{\sqrt{x}-1}dx$; 4.2. $\int_0^\infty xe^{-x}dx$ ·

Варіант № 22

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{x^{10}}dx$; 1.2. $\int \frac{1}{(x+1)^{10}}dx$ ·

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{(x+9)dx}{\sqrt{x+9}+3}$; 2.2. $\int x\cos(5-3x)dx$ ·

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x}{x^2-9x+4}dx$; 3.2. $\int \sin^6 x \cdot \cos^5 x dx$; 3.3. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[5]{x}}dx$ ·

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx$; 4.2. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1-\cos 2x}$

Варіант № 19

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \cos 10x dx$; 1.2. $\int \cos(10+x)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{dx}{5+\sqrt{4x-3}}$; 2.2. $\int (x+3)e^{2x}dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x}{x^2+x+1}dx$; 3.2. $\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$; 3.3. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[5]{x^2-1}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int\limits_1^2 \frac{x}{\sqrt[3]{7x-6}}dx$; 4.2. $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{(x+3)^4}$.

Варіант № 20

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \sin 10x dx$; 1.2. $\int \sin(10+x)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{\sqrt{x}+2}{x+1}dx$; 2.2. $\int (x-3)\sin 2x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x+3}{x^2+5x-6}dx$; 3.2. $\int \frac{\cos x dx}{1+2\sin x}$; 3.3. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2-1}+1}{x-\sqrt[5]{x^2-1}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

13. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$ *Відповідь* $\frac{1}{2}arctgx^2+c$

Практичне заняття 2

Тема 2. ***Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі. Основні класи функцій, для яких використовується метод інтегрування частинами***

Нехай функції $u(x)$, $v(x)$ визначені і диференційовані на (a,b), $u'(x)$, $v'(x)$ — неперервні на (a,b), і функція $u'(x)\,v(x)$ має первісну на цьому інтервалі. Тоді функція $u(x)\,v'(x)$ також має первісну на (a,b) і виконується рівність:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Метод інтегрування частинами часто використовується у випадках, коли підінтегральний вираз у якості множників одночасно містить: степеневу (x^α) і тригонометричну функції; степеневу і зворотну тригонометричну ; показникову (a^x) і тригонометричну; логарифмічну і тригонометричну (чи зворотну тригонометричну).

Отже, є цілі класи інтегралів, наприклад,

$$\int x^k \cos bx dx, \quad \int x^k \sin bx dx, \quad \int x^k \ln^m x dx, \quad \int x^k e^{ax}dx,$$

$$\int P_n(x)e^{ax}dx, \quad \int P_n(x)\cos bx dx, \quad \int P_n(x)\sin bx dx,$$

де $P_n(x)$— многочлен степені n, які обчислюються саме за допомогою інтегрування частинами, але можливо, що цією формулою треба буде скористуватися декілька разів.

Приклади розв’язання

Приклад 1.

$$\int x\cos xdx=\begin{bmatrix} u(x)=x & dv(x)=\cos xdx \\ du(x)=dx & v(x)=\int\cos xdx=\sin x \end{bmatrix}=$$

$$=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos s+c$$

Приклад 2.

$$\int x\operatorname{arctg}xdx=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg}x, & du=\dfrac{dx}{x^2+1}; \\ dv=xdx\Rightarrow v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2} & \end{matrix}\right|=\left|\int udv=uv-\int vdu\right|=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\,arctg\,x-\frac{1}{2}\left(x-arctg\,x\right)+C\,.$$

Приклад 3.

$$\int x^2\sin 3xdx=\begin{bmatrix} u(x)=x^2 & dv(x)=\sin 3xdx \\ du(x)=2xdx & v(x)=-\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx$$

Для отриманого інтеграла ще раз скористуємося формулою інтегрування за частинами:

$$\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx=\begin{bmatrix} u(x)=x & dv(x)=\cos 3xdx \\ du(x)=dx & v(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx\right)=\frac{2}{9}x\sin 3x+\frac{2}{27}\cos 3x+c$$

Нарешті,

Варіант № 17

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int\frac{1}{x^{19}}dx$; 1.2. $\int\frac{1}{(x+1)^{19}}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$; 2.2. $\int(x+5)e^{3x}dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int\frac{x-3}{x^2-7x+8}dx$; 3.2. $\int(\sin 3x+\cos 3x)^2dx$; 3.3. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2-1}+x}{\sqrt[5]{x^2-1}+1}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\cos^2 2x}$; 4.2. $\int\limits_0^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Варіант № 18

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int\frac{1}{\sqrt[9]{x}}dx$; 1.2. $\int\frac{1}{\sqrt[9]{x+1}}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x-6}+9}$; 2.2. $\int\arccos xdx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int\frac{4-x}{5x^2+6x+18}dx$; 3.2. $\int\sin^5 x\cdot\cos^6 xdx$; 3.3. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^2-1}+x}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

1.1. $\int \frac{1}{\cos^2 9x}dx$; 1.2. $\int \frac{1}{\cos^2(9+x)}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; 2.2. $\int (3-2x)4^x\,dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{3x-2}{x^2+2x+2}dx$; 3.2. $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x}$; 3.3. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[5]{x^2-1}+x}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_2^1 \frac{x}{1+\sqrt{1+4x}}dx$; 4.2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Варіант № 16

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{\sin^2 9x}dx$; 1.2. $\int \frac{1}{\sin^2(9+x)}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{\sqrt{2x}}{x+1}dx$; 2.2. $\int (2x-3)\cos 5x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$; 3.2. $\int \frac{\sin^{3x} dx}{\sqrt{\cos x}}$; 3.3. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[5]{x^2-1}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2x+7}}dx$; 4.2. $\int_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x + \frac{2}{27}\cos 3x + c.$$

<u>*Приклад 4*</u>.

$$\int x^2 \ln^2 x dx = \begin{bmatrix} u(x) = \ln^2 x & dv(x) = x^2 dx \\ du(x) = \frac{2\ln x}{x}dx & v(x) = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{3}\int x^2 \ln x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u(x) = \ln x & dv(x) = x^2 dx \\ du(x) = \frac{dx}{x} & v(x) = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln^2 x - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}x^3 + c.$$

<u>*Приклад 5*</u>.

$$I = \int e^x \cos x dx = \begin{Bmatrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{Bmatrix} = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} u = e^x,\ du = e^x dx \\ dv = \sin x dx,\ v = -\cos x \end{Bmatrix} = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

Ми одержали лінійне рівняння відносно I, тобто

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I.$$

Звідси

$$I = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. $\int \arcsin x dx.$ *Відповідь.* $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

2. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$ *Відповідь.* $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C$.

3. $\int \ln(x^2+1)dx.$ *Відповідь.* $x\ln\left(x^2+1\right)-2x+2arctgx+C$.

4. $\int \sin(\ln x)dx.$ *Відповідь.* $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

5. $\int (2x+5)e^{-3x}dx.$ *Відповідь.* $-\frac{e^{-3x}}{9}(6x+17)+C$

Практичне заняття 3

Тема 3. *Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій*

Нехай треба знайти інткграл

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p1}{q1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p2}{q2}},\ldots\right)dx,$$

де R — раціональна функція, $p1, q1, p2, q2,...$ — цілі числа.

Інтеграли цього виду обчислюються за допомогою підстановки:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n,$$

де n — найменше загальне кратне чисел $q1, q2,...$ Така заміна приведе всі показники степені до цілого виду.

Приклади розв'язання

<u>*Приклад 1*</u>. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int\frac{x+3}{4x^2-4x+17}dx$; 3.2. $\int(1-\operatorname{tg}3x)^2dx$; 3.3. $\int\frac{dx}{(x-3)\sqrt{x^2+x+2}}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^9\frac{dx}{\sqrt[3]{1+7x}}$; 4.2. $\int_5^\infty\frac{dx}{x^2-8x+17}$.

Варіант № 14

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int 9^{9x}dx$; 1.2. $\int 9^{9+x}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x(1-\sqrt{x})}$; 2.2. $\int 3x\sin(5x+2)dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int\frac{x-3}{3-2x-x^2}dx$; 3.2. $\int\frac{(1-\cos x)dx}{1+\cos x}$; 3.3. $\int\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x-\sqrt[5]{x}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$; 4.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x dx$.

Варіант № 15

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{3x-5}{x^2-5x-3}dx$; 3.2. $\int \sin 2x \cos 6x dx$; 3.3. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}dx$

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_1^4 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$; 4.2. $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

Варіант № 12

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \sin 9x dx$; 1.2. $\int \sin(9+x)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-2}}$; 2.2. $\int (3x-1)\cos 5x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}dx$; 3.2. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$; 3.3. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+x}{\sqrt[5]{x}+1}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$; 4.2. $\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{2}}dx$.

Варіант № 13

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int e^{9x}dx$; 1.2. $\int e^{9+x}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$; 2.2. $\int (5-2x)e^{-x}dx$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(2x-1)^{\frac{1}{2}}-(2x-1)^{\frac{1}{4}}}.$$

Підінтегральний вираз є раціональною функцією від $(2x-1)^{\frac{1}{2}}, (2x-1)^{\frac{1}{4}}$, тобто $\frac{p1}{q1}=\frac{1}{2}$, $\frac{p2}{q2}=\frac{1}{4}$. Найменше загальне кратне чисел $q1=2, q2=4$ — це 4, тому доцільною є заміна:

$$2x-1=t^4,$$

яка приведе до зникнення коренів у знаменнику.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \begin{bmatrix} t^4 = 2x-1 \Rightarrow t=\sqrt[4]{2x-1} \\ x=\dfrac{t^4+1}{2},\ dx=2t^3dt \end{bmatrix} =$$
$$= \int \frac{2t^3dt}{t^2-t} = 2\int \frac{t^2dt}{t-1} = 2\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt =$$
$$= 2\int (t+1)dt + 2\int \frac{dt}{t-1} = t^2+2t+2\ln|t-1|+c =$$
$$= \sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ln\left|\sqrt[4]{2x-1}-1\right|+c.$$

<u>*Приклад 2*</u>. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

В підінтегральному виразі є лише один радікал: $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{p1}{q1}=\frac{1}{2}$, тому для того, щоб усунути ірраціональність, доцільною є заміна

$$\frac{x-1}{x+1}=t^2.$$

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \left[\begin{array}{l} t^2=\dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}},\ x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx = \dfrac{2t\left(1-t^2\right)+2t\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^2}dt = \dfrac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt \end{array}\right]$$

$$= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot t\cdot\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt == 4\int\frac{t^4+t^2}{\left(1-t^2\right)^3}dt = 4\int\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt.$$

Розкладемо підінтегральну раціональну функцію на суму найпростіших:

$$\frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3} = \frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{(1-t)^3}+\frac{D}{1+t}+\frac{E}{(1+t)^2}+\frac{F}{(1+t)^3}.$$

Приведемо праву частину до спільного знаменника:

$$\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{(1-t)^3}+\frac{D}{1+t}+\frac{E}{(1+t)^2}+\frac{F}{(1+t)^3}=$$

$$=\frac{A(1-t)^2(1+t)^3+B(1-t)(1+t)^3+C(1+t)^3+D(1-t)^3(1+t)^2+E(1-t)^3(1+t)+F(1-t)^3}{(1-t)^3(1+t)^3}$$

.

Тоді

$$t^4+t^2=$$

$$\begin{aligned}&=A(1-t)^2(1+t)^3+B(1-t)(1+t)^3+C(1+t)^3+\\&+D(1-t)^3(1+t)^2+E(1-t)^3(1+t)+F(1-t)^3\end{aligned}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях t:

3.1. $\int\frac{2-x}{x^2-2x-5}dx$; 3.2. $\int\frac{dx}{1-\sin x}$; 3.3. $\int\frac{\sqrt{x-2}+1}{x-\sqrt[3]{x-2}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^2 xdx$; 4.2. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{(x+2)^3}$.

Варіант № 10

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$; 1.2. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$; 2.2. $\int(x-1)\sin 4xdx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int\frac{5x-2}{x^2+10x+29}dx$; 3.2. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$; 3.3. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+x}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_1^2\frac{dx}{x+x^2}$; 4.2. $\int_2^4\frac{dx}{x^2-4}$.

Варіант № 11

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int\cos 9xdx$; 1.2. $\int\cos(9+x)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}dx$; 2.2. $\int x\cos(x-2)dx$.

3.1. $\int \frac{4-3x}{x^2-x2}dx$; 3.2. $\int \sin^2 x\cdot\cos^3 x dx$; 3.3. $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+\sqrt[3]{x-2}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^1 \ln(x+1)dx$; 4.2. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$.

Варіант № 8

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{x^{18}}dx$; 1.2. $\int \frac{1}{(x+17)^{18}}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+3}}$; 2.2. $\int \operatorname{arctg} x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{2x-3}{x^2+3x-1}dx$; 3.2. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; 3.3. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-2}-\sqrt[3]{x-2}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$; 4.2. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Варіант № 9

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$; 1.2. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{2x-5}{1+\sqrt{2x+1}}dx$; 2.2. $\int (2x-1)e^{-3x}dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

$$
\begin{array}{c|l}
t^5 & 0 = A - D, \\
t^4 & 1 = A - B + D - E, \\
t^3 & 0 = -2A - 2B + C + 2D + 2E - F, \\
t^2 & 1 = -2A + 3C - 2D + 3F, \\
t^1 & 0 = A + 2B + 3C - D - 2E - 3F, \\
t^0 & 0 = A + B + C + D + E + F.
\end{array}
$$

Після розв’язання отриманої системи:

$$A = \frac{1}{8},\ B = -\frac{3}{8},\ C = \frac{1}{4},\ D = \frac{1}{8},\ E = -\frac{3}{8},\ F = \frac{1}{4}.$$

Тоді

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{t^4+t^2}{(1-t)^3(1+t)^3}dt = \frac{1}{8}\int\frac{dt}{1-t} - \frac{3}{8}\int\frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^3} + \\
&+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{1+t} - \frac{3}{8}\int\frac{dt}{(1+t)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^3} = \\
&= \frac{1}{8}ln|1-t| - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{8}ln|1+t| + \\
&+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1+t} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(1+t)^2} + c.
\end{aligned}
$$

Для того, щоб отримати шукане значення, треба повернутися зо старої змінної, підставивши $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

Приклад 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^{-2}}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{x+1}{x-1} \\ dt = \dfrac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}dx = \dfrac{-2dx}{(x+1)^2} \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{-\frac{1}{2}dt}{t^{2/3}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1/3}}{1/3} + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ *Відповідь.* $ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right| + c$.

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$

Відповідь. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\,ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + c$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ *Відповідь.* $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\,ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right| + c$.

3.1. $\int \frac{3-x}{x^2-4x-7}dx$; 3.2. $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x dx$; 3.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x-2}+x}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4.2. $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(x+2)^3}$

Варіант № 6

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{\cos^2 8x}dx$; 1.2. $\int \frac{1}{\cos^2(8+x)}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int (x-2)\sqrt{x+1}dx$; 2.2. $\int (2x+1)\cdot 2^{-x}dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{5-2x}{x^2-5x}dx$; 3.2. $\int \frac{dx}{1+\cos 4x}$; 3.3. $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}}$; 4.2. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Варіант № 7

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \frac{1}{\sin^2 8x}dx$; 1.2. $\int \frac{1}{\sin^2(8+x)}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int x^3\sqrt{2-5x}dx$; 2.2. $\int (x-1)\cos 3x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{3x-2}{x^2-x+1}dx$; 3.2. $\int \frac{\sin x dx}{(1+\cos x)^2}$; 3.3. $\int \frac{dx}{(x-5)\sqrt{x^2+2x+1}}$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$; 4.2. $\int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x^3}dx$.

Варіант № 4

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1 $\int e^{8x}dx$.; 1.2. $\int \frac{1}{(x+1)^8}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-3x}}$; 2.2. $\int (x-2)ln(1-x)dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int \frac{x-13}{x^2+3x-15}dx$; 3.2. $\int sin^2 6xdx$; 3.3. $\int \frac{x}{\sqrt{x-2}+\sqrt[3]{x-2}}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4.2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$.

Варіант № 5

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int 8^{8x}dx$; 1.2. $\int 8^{8+x}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{dx}{2-\sqrt[3]{x}}$; 2.2. $\int (2x+3)e^x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

4. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$ *Відповідь.* $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\,ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|+c$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$ *Відповідь.* $ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c$

Практичне заняття 4

Тема 4. *Інтегрування дробово- раціональних функцій*

Кожен правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n<m$, *може бути представлений у вигляді суми скінченної кількості найпростіших раціональних функцій, а тому має первісну.*

Це розкладання правильного дробу на прості дроби пов'язане з розкладанням знаменника $Q_m(x)$ на прості множники. Як відомо з алгебри, кожен многочлен з дійсними коефіцієнтами розкладається на дійсні множники типа $x-a,\ x^2+px+q$, при цьому припускається, що квадратичні множники не мають дійсних коренів, а тому не розкладаються на дійсні лінійні множники.Об'єднуючи однакові множники, якщо такі є, і припускаючи для спрощення старший коефіцієнт $Q_m(x)$ рівним одиниці, можна схематично записати розкладання цього многочлена у вигляді:

$$Q_m(x)=(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^l\ldots,$$

де $k,...,l,...$ — натуральні числа.

Якщо при розкладанні на множники знаменника дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ множник $x-a$ входе до $Q_m(x)$ лише в першій степені, то йому при розкладанні $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на найпростіші буде відповідати один дріб —

$$\frac{A}{x-a}.$$

Якщо серед множників $Q_m(x)$ присутній $(x-a)^k$, $k>1$, то при розкладанні $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ йому буде відповідати сума k найпростіших дробів:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

де $A, A_1, A_2, ..., A_k$ — дійсні сталі.

Квадратичному множнику x^2+px+q в розкладанні $Q_m(x)$ поставимо в відповідність при розкладанні $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на найпростіші один дріб вида III

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q},$$

якщо x^2+px+q входе до $Q_m(x)$ в першій степені, і суму з l найпростіших дробів

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l},$$

якщо цей множник входе з показником $l>1$. Тут $M, M_i, N, N_i, i=\overline{1,l}$, — дійсні сталі.

3.1. $\int\dfrac{2x-3}{x^2+3x-5}dx$; 3.2. $\int sin^2 6xdx$; 3.3. $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}+x}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_4^9\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}dx$; 4.2. $\int_1^\infty\dfrac{dx}{x^2+4x+13}$.

Варіант № 2

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int cos\,8xdx$; 1.2. $\int sin(8+x)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int\dfrac{dx}{5x+\sqrt{x}}$; 2.2. $\int(1-2x)e^{3x}dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3.1. $\int\dfrac{1-3x}{x^2+6x-7}dx$; 3.2. $\int cos^3 4xdx$; 3.3. $\int\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}+x}dx$.

4. Обчислити визначений та невласний інтеграли:

4.1. $\int_4^9\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}dx$; 4.2. $\int_1^\infty\dfrac{dx}{x^2+4x+13}$.

Варіант № 3

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int\dfrac{1}{x^8}dx$; 1.2. $\int 2^{8+x}dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int x^3\sqrt{1-2x}dx$; 2.2. $\int 4xe^x dx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}dx$ *Відповідь.* Розбігається.

4. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos\beta dx$

Відповідь. $\frac{a}{a^2+b^2}$, якщо $a>0$, розбігається, якщо $a \le 0$.

5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ *Відповідь.* $\frac{8}{3}$.

6. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$ *Відповідь.* Розбігається.

7. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$ *Відповідь.* Розбігається.

8. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)dx}{\sqrt[3]{x}}$ *Відповідь.* $6-\frac{9}{2}\ln 3$.

Завдання для виконання контрольної роботи

Варіант № 1

1. Знайти невизначені інтеграли методом безпосереднього інтегрування:

1.1. $\int \sin 8xdx$; 1.2. $\int \cos\left(8+x\right)dx$.

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінних та методом інтегрування частинами:

2.1. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x-1}}dx$; 2.2. $\int \left(1-4x\right)\sin 2xdx$.

3. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональної, тригонометричної та ірраціональної функції:

Приклади розв’язання

<u>*Приклад 1*</u>. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx = \left| \frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{x+2}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \right.$

$$= \frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)} \Rightarrow x+2 = x^2(A+C)+x(B-2A)-2B;$$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=A+C \\ x^1 & 1=B-2A \\ x^0 & 2=-2B \end{array}\Bigg\} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=-1 \\ C=1 \end{cases} \qquad \left.\frac{x+2}{x^3-2x^2} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2}\right| =$$

$$= \int\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-2}\right)dx = -\ln|\,x\,| + \frac{1}{x} + \ln|\,x-2\,| + C.$$

<u>*Приклад 2*</u>. $\int \frac{3x^4+x+1}{x^2-3x+2}dx$.

Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом: степінь многочлена чисельника дорівнює 4, а знаменника — 2, тому спочатку поділимо чисельник на знаменник.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4+x+1 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -\;3x^4-9x^3+6x^2 & 3x^2+9x+21 \\ \cline{1-1} 9x^3-6x^2+x+1 & \\ -\;9x^3-27x^2+18x & \\ \cline{1-1} 21x^2-17x+1 & \\ -\;21x^2-63x+42 & \\ \cline{1-1} 46x-41 & \end{array}$$

Таким чином,

$$\frac{3x^4+x+1}{x^2-3x+2}=3x^2+9x+21+\frac{46x-41}{x^2-3x+2}.$$

Розкладемо отриманий правильний раціональний дріб на найпростіші дроби:

$$\frac{46x-41}{x^2-3x+2}=\frac{46x-41}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти отриманого розкладання. Для цього:

$$\frac{46x-41}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=$$
$$=\frac{A(x-2)}{(x-1)(x-2)}+\frac{B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)}.$$

Оскільки дроби з однаковими знаменниками рівні, то рівні і їх чисельники:

$$46x-41=Ax-2A+Bx-B=x(A+B)+(-2A-B).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 46=A+B; \\ x^0 & -41=-2A-B \end{array}$$

Розв’язуючи отриману систему, маємо: $A=-5,\ B=51$. Таким чином:

$$\frac{3x^4+x+1}{x^2-3x+2}=3x^2+9x+21+\frac{-5}{x-1}+\frac{51}{x-2}.$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}x^{-2}dx+\int_{0}^{1}x^{-2}dx$$

$$I_1=\int_{-1}^{0}x^{-2}dx=\lim_{b\to0-o}\int_{-1}^{b}x^{-2}dx=\lim_{b\to0-0}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_{-1}^{b}\right)=\lim_{b\to0-0}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{b}\right)=\lim_{b\to0-0}\left(-\frac{-1}{b}-1\right)=$$

$$=\frac{-1}{0-0}-1=+\infty-1=+\infty$$

Оскільки цей інтеграл розбігається, то не існує також інтеграл, який стоїть в лівій частині рівності.

Приклад 4. Обчислити невластивий інтеграл $\int_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Всередині відрізка інтегрування $[-8;27]$ при $x\to0$ підінтегральна функція необмежено зростає ($x=0$ –точка розриву функції). Згідно з означенням запишемо:

$$\int_{-8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{-8}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon\to0+}\int_{0+\varepsilon}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-8}^{0-\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0+\varepsilon}^{27}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to0+}(0-\varepsilon)^{\frac{2}{3}}-(-8)^{\frac{2}{3}}\right)+\frac{3}{2}\left(27^{\frac{2}{3}}-\lim_{\varepsilon\to0+}(0+\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}(-4+9)=\frac{3}{2}\cdot5=\frac{15}{2}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ *Відповідь.* π.

2. $\int_{0}^{+\infty}x\,e^{-x^3}dx$ *Відповідь.* $\frac{1}{2}$.

інтегралів $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, де інтеграли в правій частині рівності є невластивими. Якщо обидва інтеграли, які стоять в правій частині існують, то існує також інтеграл, який стоїть в лівій частині.

Приклади розв'язання

Приклад 1.

Обчислити невластивий інтеграл з нескінченою верхньою межею.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-4}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-3}}{-3}\bigg|_1^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3b^3}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot\infty^3} = \frac{1}{3}-0 = \frac{1}{3}$$

Приклад 2. Обчислити невластивий інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{N\to+\infty}\int_0^N\frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_A^0 + \lim_{N\to+\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^N =$$

$$= \operatorname{arctg} 0 - \lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg} A + \lim_{N\to+\infty}\operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} 0 =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi .$$

Приклад 3. Знайти $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$

Оскільки підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2}$ має точку розриву $x=0$, яка належить відрізку інтегрування $[-1;1]$, то цей інтеграл є невластивим. Отже він знаходиться у виді

Тоді

$$\int\frac{3x^4+x+1}{x^2-3x+2}dx = \int 3x^2dx + \int 9xdx + \int 21dx + \int\frac{-5}{x-1}dx +$$
$$+\int\frac{51}{x-2}dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 9\cdot\frac{x^2}{2} + 21x - 5\ln|x-1| +$$
$$+51\ln|x-2| + c = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 21x - 5\ln|x-1| + 51\ln|x-2| + c.$$

Приклад 3.

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2(x-2)}dx$$

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом: степінь многочлена чисельника дорівнює 2, а знаменника — 5. Для інтегрування спочатку розкладемо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів. Знаменник містить прості множники $(x^2+1)^2, (x-2)$. Множнику $(x^2+1)^2$ відповідає сума 2-х доданків (показник степені при x^2+1 дорівнює 2):

$$\frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

а множнику $(x-2)$ — один дріб

$$\frac{A}{x-2}.$$

Таким чином

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2(x-2)} = \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{A}{x-2}.$$

Знайдемо невідомі коефіцієнти A, B, C, D, E. Для цього приведемо всі дроби в правій частині до спільного знаменника:

$$\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A}{x-2}=$$

$$\frac{(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2)}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}+\frac{(Dx+E)(x-2)}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}+\frac{A\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)},$$

тоді рівність буде мати вигляд:

$$\frac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}=$$

$$\frac{(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2)+(Dx+E)(x-2)+A\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}.$$

З рівності чисельників

$$2x^2+2x+13=$$
$$(Bx+C)\left(x^2+1\right)(x-2)+(Dx+E)(x-2)+A\left(x^2+1\right)^2$$

витікає рівність коефіцієнтів многочленів при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0=A+B, \\ x^3 & 0=-2B+C, \\ x^2 & 2=2A+B-2C+D, \\ x^1 & 2=-2B+C-2D+E, \\ x^0 & 13=A-2C-2E \end{array}$$

функція визначена і неперервна на проміжку $[-\infty; b]$, то якщо існує границя $\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то її позначають $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ і називають невластивим інтегралом з нескінченою нижньою межею. Причому говорять, що цей інтеграл збігається або існує. Якщо ця скінчена границя не існує, то говорять, що інтеграл не існує або розбігається.

Невластивий інтеграл виду $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$ визначається як сума двох невластивих інтегралів $=\int\limits_{-\infty}^{C} f(x)dx+\int\limits_{C}^{+\infty} f(x)dx$, де C-довільна точка.

Примітка: Невластивий інтеграл в лівій частині рівності існує, якщо існують (збігаються) обидва інтеграли, які стоять в правій частині рівності. Якщо хоча б один з цих інтегралів розбігається, то розбігається також $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

2 Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка визначена і неперервна на півінтервалі $[a;c)$. Тобто для x, таких що $a\le x<c$ і невизначена (має розрив в т. c). В цьому випадку $\int\limits_a^c f(x)dx$ визначається таким чином $\int\limits_a^c f(x)dx=\lim\limits_{b\to c-0}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо ця границя існує, то невластивий інтеграл збігається, якщо не існує, то розбігається. Якщо функція $f(x)$ невизначена або має розрив на лівому кінці відрізку тобто визначена і неперервна напівінтервалі $(c;b]$, то невластивий інтеграл $\int\limits_a^c f(x)dx=\lim\limits_{a\to c+0}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Якщо функція має розрив в т. c, що належить відрізку $[a;b]$, то визначений інтеграл від $[a;b]$ знаходиться як сума двох

4. $y=\frac{\ln x}{4x}$, $y = x\ln x$. *Відповідь.* $S=\frac{1}{16}\left(3-\ln 4-2\ln^2 2\right)$.

5. $y=\mathrm{tg}x$, $y=\frac{2}{3}\cos x$, $x=0$. *Відповідь.* $S=\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Практичне заняття 9
Тема 9. *Невластиві інтеграли з нескінченими межами. Невластиві інтеграли від функцій, які мають точки розриву*

1 Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на проміжку $[a;+\infty]$. Нехай т. a закріплена, а т. b змінює своє положення, тоді значення визначеного інтегралу буде залежати від значення b, тобто можна надати цей інтеграл, як функцію від b

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx$$

Візьмемо $b\to+\infty$

Означення: Якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то її позначають $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і називають невластивим інтегралом з нескінченою верхньою межею, в цьому випадку говорять, що невластивий інтеграл існує або збігається.

Якщо не існує скінченої границі $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то говорять, що невластивий інтеграл не існує або розбігається.

Невластивий інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ від неперервної невід'ємної функції $f(x)$ чисельно дорівнює площі необмеженої фігури, яка розташована між кривою $y=f(x)$, зліва обмежена прямою $x=a$, а знизу віссю OX. Якщо в інтегралі закріплена верхня межа b,

Звідки

$$A=1, B=-1, C=-2, D=-3, E=-4\,.$$

Таким чином:

$$\frac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}=-\frac{x+2}{x^2+1}-\frac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x-2}\,.$$

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}dx=-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\int\frac{1}{x-2}dx\,.$$

$$\int\frac{2x^2+2x+13}{\left(x^2+1\right)^2(x-2)}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-4x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4arctgx+c\,.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$. *Відповідь.* $ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$

2. $\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)+\mathrm{arctg}\,(x+1)+C$.

3. $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$. *Відповідь.* $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$.

4. $\int\frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. *Відповідь.* $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

5. $\int\frac{\left(2x^2-3x-3\right)dx}{(x-1)\left(x^2-2x+3\right)}$.

Відповідь. $\ln\frac{\sqrt{\left(x^2-2x+3\right)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$.

Практичне заняття 5

Тема 5. *Інтеграли від деяких функцій, які містять квадратний тричлен:*

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx, \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.,$$

$$\int\frac{Av+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

1. $\int\frac{n}{ax^2+bx+c}dx,\quad a,b,c,n=const,\ a\neq 0$.

Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

.

Зробимо заміну:

$$\int\frac{n}{ax^2+bx+c}dx=\frac{n}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}t=x+\frac{b}{2a}\\ dt=dx\end{array}\right]=\frac{n}{a}\int\frac{dt}{t^2+\frac{-b^2+4ac}{4a^2}}$$

Завдання для самостійного розв'язання

I. Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int_0^1\left(1+e^{3x}\right)^2e^{3x}dx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{9}\left(\left(1+e^3\right)^3-8\right)$.

2. $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}.$ *Відповідь.* $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$.

3. $\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ *Відповідь.* $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}.$ *Відповідь.* $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{xdx}{\cos^2x}.$ *Відповідь.* $\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$.

6. $\int_1^3\frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$ *Відповідь.* $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$.

7. $\int_0^{\pi}e^x\sin xdx.$ *Відповідь.* $\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$.

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3x}dx.$ *Відповідь.* $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

I. II. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

1. $y=x^2+4x,\ y=x+4.$ *Відповідь.* $S=\frac{125}{6}$.

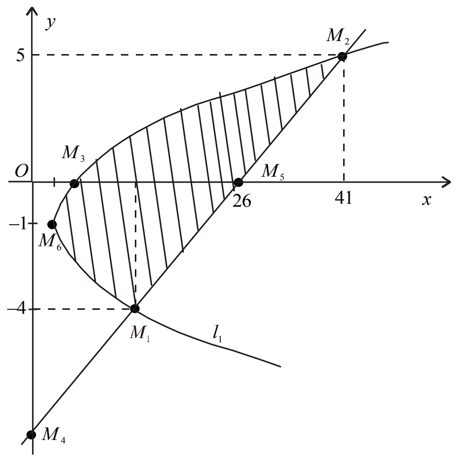
2. $y=-x^2+9,\ y=2x+1.$ *Відповідь.* $S=36$.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ *Відповідь.* $S=\pi ab.$

$$l_1 \cap Oy \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=26 \\ x=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow M_4\left(0;\ -\frac{26}{3}\right).$$

$$l_2 \cap Ox \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=26 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=26 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow M_5(26;\ 0).$$

$x = y^2+2y+6 \Leftrightarrow (x-5)=(y+1)^2 \Rightarrow M_6(5;\ -1)$ — вершина параболи.



Для обчислення площі фігури $S_{M_1M_2M_6}$ найбільш зручно скористатись формулою $S=\int\limits_c^d(\varphi_1(y)-\varphi_2(y))dy$.

Отже, за цією формулою дістанемо:

$$S_{M_1M_2M_6} = \int\limits_{-4}^{5}\left(3y+26-\left(y^2+2y+6\right)\right)dy = \int\limits_{-4}^{5}\left(-y^2+y+20\right)dy =$$

$$=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+20y\right)\Bigg|_{-4}^{5} = -\frac{125}{3}+\frac{25}{2}+100-\left(\frac{64}{3}+\frac{16}{2}-80\right)=121{,}5.$$

Інтеграл має вигляд табличного інтегралу. Він може обчислюватися за формулою 12 таблиці внтегралів (у випадку $\dfrac{-b^2+4ac}{4a^2}>0$), чи за формулою 18 (коли $\dfrac{-b^2+4ac}{4a^2}<0$).

2.

$$\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,\quad a,b,c,m,n=const,\ a\neq 0,\ m\neq 0.$$

У цьому випадку в першу чергу у чисельнику треба виділити похідну знаменника:

$$\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b.$$

Для цього зручно в чисельнику спочатку винести коефіцієнт m за знак інтеграла, щоб коефіцієнт при x дорівнював 1, а потім зробити еквівалентні перетворення в чисельнику так, щоб отримати там у вигляді доданку $2ax+b$.

3.

$$\int\frac{n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\quad a,b,c,n=const,\ a\neq 0.$$

Дії, які ми проводимо для обчислення інтегралу аналогічні тим, які проводилися для інтегралу виду 1, приводять до табличного інтегралу 16, коли $a>0$, і до табличного інтегралу 14, коли $a<0$.

4.

$$\int\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,\quad a,b,c,m,n=const,\ a\neq 0,\ m\neq 0.$$

Метод обчислення аналогічний тому, який був застосований для інтегралу виду 2.

Приклади розв’язання

Приклад 1..

$$\int \frac{1}{2x^2-5x+7}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\textit{виділяємо повний квадрат в знаменнику}\\ 2x^2-5x+7=2\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}\right)=2\left(x^2-2\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}+\frac{7}{2}\right)=\\ \qquad\qquad =2\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}\right)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}}=\left[\begin{array}{l}t=x-\frac{5}{4}\\ dt=dx\end{array}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{31}{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{31}}arctg\frac{4t}{\sqrt{31}}+c=\frac{2}{\sqrt{31}}arctg\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+c.$$

Приклад 2..

$$\int\frac{1}{x^2-7x-1}dx=$$

$$\left[\begin{array}{l}\textit{виділяємо повний квадрат в знаменнику}\\ x^2-7x-1=x^2-2\cdot\frac{7}{2}x-1=x^2-2\cdot\frac{7}{2}x+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}-1=\\ \qquad\qquad =\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{53}{4}\end{array}\right]=$$

$$=\int_2^4\frac{t-1}{t}dt=\int_2^4\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_2^4=4-\ln 4-\left(2-\ln 2\right)=2-\ln 2.$$

Приклад 2.

$$\int_1^e x\ln x dx=\left|\begin{array}{ll}u=\ln x, & du=\frac{dx}{x};\\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e\frac{x^2\cdot dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}\left(\ln e-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln 1-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2+1}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x=y^2+2y+6(l_1)$, $x-3y=26(l_2)$.

Побудуємо фігуру, обмежену параболою $x=y^2+2y+6$ та прямою $x-3y=26$, на координатній площині; при цьому обов’язково треба знайти точки перетину заданих ліній між собою та з осями координат

$$l_1\cap l_2\Leftrightarrow\begin{cases}x=y^2+2y+6\\ x-3y=26\end{cases}\begin{cases}x=3y+26\\ y^2-y-20=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3y+26\\ \left[\begin{array}{l}y=-4\\ y=5\end{array}\right.\end{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=14\\ y=-4\end{cases}\\ \begin{cases}x=41\\ y=5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}M_1(14;\ -4)\\ M_2(41;\ 5).\end{array}\right.$$

$$l_1\cap Ox\Leftrightarrow\begin{cases}x=y^2+2y+6\\ y=0\end{cases}\begin{cases}x=6\\ y=0\end{cases}\Leftrightarrow M_3(6;\ 0).$$

$$l_1\cap Oy\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=y^2+2y+6\end{cases}\begin{cases}x=0\\ y^2+2y+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$$

$$=\left\{ tgt=\frac{x}{3},\ \sin t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}} \right\}=$$

$$=\frac{x}{9\sqrt{x^2+9}}+c$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-14)^3}}$ *Відповідь.* $-\frac{x}{14\sqrt{x^2-14}}+c$.

2. $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ *Відповідь.* $\frac{x}{4\sqrt{4+x^2}}+c$.

3. $\int\frac{dx}{\left(x^2+4\right)\sqrt{1-x^2}}$ *Відповідь.* $\frac{1}{2\sqrt{5}}arctg\frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{1-x^2}}+c$.

4. $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$ *Відповідь.* $\frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+c$.

Тема 8. Практичне заняття 8

Означення визначеного інтеграла та його геометричний зміст.Основні властивості визначеного інтеграла.Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Приклади розв'язання

Приклад 1.

$$\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{array}{ll} 1+\sqrt{2x+1}=t, & dx=(t-1)dt; \\ x=\frac{(t-1)^2}{2}, & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline t & 2 & 4 \end{array} \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{53}{4}}=\left[\begin{array}{l} t=x-\frac{7}{2} \\ dt=dx \end{array}\right]=\int\frac{dt}{t^2-\frac{53}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{53}}\cdot ln\left|\frac{t-\frac{\sqrt{53}}{2}}{t+\frac{\sqrt{53}}{2}}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{53}}\cdot ln\left|\frac{x-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{53}}{2}}{x-\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{53}}{2}}\right|+c=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{53}}\cdot ln\left|\frac{2x-7-\sqrt{53}}{2x-7+\sqrt{53}}\right|+c.$$

Приклад 3. $\int\frac{2x+6}{3x^2+x+3}dx$.

Інтеграл виду 2. Похідна знаменника $\left(3x^2+x+3\right)'=6x+1$. Виділимо цю похідну у чисельнику:

$$\int\frac{2x+6}{3x^2+x+3}dx=2\int\frac{x+3}{3x^2+x+3}dx=$$
$$=\frac{2}{6}\int\frac{6x+18}{3x^2+x+3}dx=\frac{1}{3}\int\frac{\left(6x+1\right)+17}{3x^2+x+3}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{6x+1}{3x^2+x+3}dx+\frac{17}{3}\int\frac{1}{3x^2+x+3}dx=I_1+I_2.$$

$$I_1=\frac{1}{3}\int\frac{6x+1}{3x^2+x+3}dx=\left[\begin{array}{l} t=3x^2+x+3 \\ dt=\left(6x+1\right)dx \end{array}\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}ln\left|t\right|+c=\frac{1}{3}ln\left|3x^2+x+3\right|+c.$$

$$I_2=\frac{17}{3}\int\frac{1}{3x^2+x+3}dx=$$

$$=\frac{17}{3}\int\frac{1}{3\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{35}{36}\right)}dx=\left[\begin{matrix}t=x+\frac{1}{6}\\ dt=dx\end{matrix}\right]=\frac{17}{9}\int\frac{dt}{t^2+\frac{35}{36}}dx=$$

$$=\frac{17}{9}\cdot\frac{6}{\sqrt{35}}arctg\frac{6t}{\sqrt{35}}+c=\frac{34}{3\sqrt{35}}arctg\frac{6\left(x+\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{35}}+c=$$

$$=\frac{34}{3\sqrt{35}}arctg\frac{6x+1}{6\sqrt{35}}+c.$$

Тоді

$$\int\frac{2x+6}{3x^2+x+3}dx=\frac{1}{3}\ln\left|3x^2+x+3\right|+\frac{34}{3\sqrt{35}}arctg\frac{6x+1}{6\sqrt{35}}+c.$$

Приклад 4.

$$\int\frac{2}{\sqrt{3x^2+2x+1}}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{1}{\sqrt{3\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}\right)}}dx=\frac{2}{3\sqrt{3}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}}dx=$$

$$=\left[\begin{matrix}t=x+\frac{1}{3}\\ dt=dx\end{matrix}\right]=\frac{2}{3\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{2}{9}}}=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{2}{9}}\right|+c=\frac{2}{3\sqrt{3}}ln\left|x+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\right|+c.$$

Приклади розв’язання

Приклад 1.

$$\int\sqrt{9-x^2}dx=\left\{\begin{matrix}x=3\sin t\\ dx=3\cos t\end{matrix}\right\}=\int\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos tdt=9\int\cos^2 tdt=$$

$$=9\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{9}{2}\int dt+\frac{9}{4}\int\cos 2td2t=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=$$

$$=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\sin 2\arcsin\frac{x}{3}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{4}2\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=$$

$$=\frac{9}{2}arcsin\frac{x}{3}+\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2}+C.$$

Приклад 2.

$$\int\frac{dx}{\left(x^2-5\right)\sqrt{x^2-5}}=\left\{\begin{matrix}x=\frac{\sqrt{5}}{cos\,t},\ x^2-5=5tg^2t\\ dx=\frac{\sqrt{5}\,sin\,t}{cos^2\,t}dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{\sqrt{5}\,sin\,t\,dt}{5\sqrt{5}\,cos^2\,t\cdot tg^3t}=\frac{1}{5}\int\frac{cos\,t}{sin^2\,t}dt=-\frac{1}{5\,sin\,t}+c=$$

$$=\left\{\begin{matrix}x^2=\frac{5}{cos^2\,t},\ cos^2\,t=\frac{5}{x^2},\\ sin\,t=\sqrt{1-cos^2\,t}=\sqrt{1-\frac{5}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{x}{5\sqrt{x^2-5}}+c$$

Приклад 3.

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}}=\left\{\begin{matrix}x=3tgt,\ x^2+9=\frac{9}{cos^2\,t}\\ dx=\frac{3}{cos^2\,t}dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{3\,cos^3\,tdt}{27\,cos^2\,t}=\frac{1}{9}\int cos\,tdt=\frac{1}{9}sin\,t+c=$$

Практичне заняття 7

Тема 7. *Інтегрування ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок*

1. *Дуже часто, коли підінтегральний вираз містить радикал*

$$\sqrt{a^2-x^2}\,,$$

доцільною є заміна

$$x=a\sin t\,,$$

завдяки чому

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t\,.$$

2. *Якщо інтеграл містить радикал*

$$\sqrt{x^2-a^2}\,,$$

доцільно зробити заміну змінної

$$x=\frac{a}{\cos t}\,.$$

Тоді

$$\sqrt{x^2-a^2}=atgt\,.$$

3. *Якщо інтеграл містить радикал*

$$\sqrt{x^2+a^2}\,,$$

доцільно зробити заміну змінної

$$x=atgt\,.$$

Тоді

$$\sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t}\,.$$

Приклад 5..

$$\int\frac{3x+9}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=3\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\left(x^2+2x+2\right)'=2x+2;\\ \text{виділимо в чисельнику}\\ \text{похідну підкореневого}\\ \text{виразу знаменника}\end{array}\right]=\frac{3}{2}\int\frac{\left(2x+2\right)+4}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx+6\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=I_1+I_2;$$

$$I_1=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left[\begin{array}{l}t=x^2+2x+2\\ dt=\left(2x+2\right)dx\end{array}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{3}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=$$

$$=3\sqrt{t}+c=3\sqrt{x^2+2x+2}+c.$$

$$I_2=6\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=\left[x^2+2x+2=\left(x+1\right)^2+1\right]=$$

$$=6\int\frac{1}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}}dx=\left[\begin{array}{l}t=x+1\\ dt=dx\end{array}\right]=$$

$$=6\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt=6\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c=6\ln\left|x+1+\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}\right|+c.$$

Враховуючи обчислені I_1, I_2, отримуємо:

$$\int\frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx=3\sqrt{x^2+2x+2}+6\ln\left|x+1+\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}\right|+c.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. $\int \frac{2}{\sqrt{3x^2+2x+1}}dx$

Відповідь.

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{2}{9}}\right|+c=\frac{2}{3\sqrt{3}} ln\left|x+\frac{1}{3}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}}\right|+c.$$

2.

$\int \frac{(8x-1)dx}{x^2-4x+1}$. *Відповідь.* $4\ln\left|x^2-4x+1\right|+\frac{15}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}}\right|+C$

3.

$\int \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

Відповідь. $3\sqrt{x^2+2x+2}+6\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+1}\right|+c.$

Практичне заняття 6

Тема 6. ***Інтегрування тригонометричних функцій виду: R(sinx,cosx), R(sin²x,cos²x). Універсальна тригонометрична підстановка . Інтегрування тригонометричних функцій виду: R(tgx), R(sinx)cosx, R(cosx)sinx, f(x) = sin^mxcosⁿx***

Інтеграли виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$ приводяться до інтегралів від раціональних функцій нового аргумента t підстановкою $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,$ де $x\in(-\pi,\pi)$, яку називають універсальною.

$$\int cos\,x\,cos^2\,3xdx=\frac{1}{2}\int cos\,xdx+\frac{1}{4}\int cos\,5xdx+\frac{1}{4}\int cos\,7xdx=$$

$$=\frac{1}{2}sin\,x+\frac{1}{20}sin\,5x+\frac{1}{28}sin\,7x+c.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. $\int \sin^{10}x\cos^3 xdx$ *Відповідь.* $\frac{sin^{11}x}{11}-\frac{sin^{13}x}{13}+c.$

2. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x}dx$

Відповідь. $\frac{1}{2cos^2 x}+2\,ln\left|cos\,x\right|-\frac{cos^2 x}{2}+c.$

3. $\int \sin^4 3x\cos^2 3xdx$ *Відповідь.* $\frac{sin\,2t}{48}-\frac{sin^3 2t}{144}+c.$

4. $\int tg^4 xdx$ *Відповідь.* $\frac{tg^3 x}{3}-tgx+x+c.$

5. $\int \sin 9x\sin xdx$ *Відповідь.* $\frac{1}{16}sin\,8x-\frac{1}{20}sin\,10x+c.$

6. $\int \sin 3x\sin 2x\sin xdx$

Відповідь. $-\frac{1}{8}cos\,2x+\frac{1}{24}cos\,6x-\frac{1}{16}cos\,4x+c.$

7. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ *Відповідь.* $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}tgx\right)+c.$

$$\int\frac{1}{2\sin x+3\cos x}dx=\left\{\begin{aligned}\operatorname{tg}\frac{x}{2}&=u\\ dx&=\frac{2du}{1+u^2}\end{aligned}\right\}=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{2\cdot\frac{2u}{1+u^2}+3\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{4u+3-3u^2}{1+u^2}}=$$

$$=\int\frac{2du}{-3u^2+4u+3}=-\frac{2}{3}\int\frac{du}{u^2-2\cdot u\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}-1}=-\frac{2}{3}\int\frac{du}{\left(u-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}}\ln\left|\frac{u-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}}{u-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}}\right|+C=-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3u-2-\sqrt{13}}{3u-2+\sqrt{13}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2-\sqrt{13}}{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2+\sqrt{13}}\right|+C$$

Приклад 4.

$\int\cos x\cos^2 3xdx$.

$$cos\,x\,cos^2\,3x=cos\,x\cdot\frac{1+cos\,6x}{2}=\frac{1}{2}cos\,x+\frac{1}{2}cos\,x\,cos\,6x=$$
$$=\frac{1}{2}cos\,x+\frac{1}{4}\left(cos\,5x+cos\,7x\right).$$

Тоді

$$x=2\operatorname{arctg}t,dx=\frac{2dt}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\operatorname{tg}x=\frac{2t}{1-t^2}$$
.

Але підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ часто приводить до громіздких обчислень. Тому її слід застосовувати лише тоді, коли невідомі інші методи обчислення невизначеного інтеграла. Зупинимося на деяких методах обчислення інтегралів від раціональних функцій відносно $\sin x$ і $\cos x$.

1. Якщо інтеграл має вид $\int R(\sin x)\cos xdx$, то підстановка $\sin x=t$, тоді $\cos xdx=dt$ приводить цей інтеграл до виду $\int R(t)dt$. До цього виду можна привести за допомогою тригонометричних формул інтеграли від $R(\sin x,\cos x)$, коли при фіксованому $\sin x$ функція відносно $\cos x$ непарна, тобто

$$R(\sin x,-\cos x)dx=-R(\sin x,\cos x)dx.$$

2. Якщо інтеграл має вид $\int R(\cos x)\sin xdx$, то підстановка $\cos x=t$ раціоналізує підінтегральний вираз. До цього виду приводяться інтеграли $\int R(\sin x,\cos x)dx$, коли при фіксованому $\cos x$ підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, тобто

$$R(-\sin x,\cos x)dx=-R(\sin x,\cos x)dx.$$

3. Якщо підінтегральна функція залежить тільки від tg x, тобто інтеграли $\int R(\operatorname{tg}x)dx$ за допомогою заміни $\operatorname{tg}x=t,x=\operatorname{arctg}t;dx=\frac{dt}{1+t^2}$ зводяться до інтегралів від раціональних функцій:

$$\int R(\operatorname{tg}x)dx=\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

До цього типу інтегралів можна привести за допомогою тригонометричних формул інтеграли виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, коли підінтегральна функція задовольняє умову $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

4. Інтеграли виду

$$\int \sin\alpha x \cos\beta x dx, \int \sin\alpha x \sin\beta x dx, \int \cos\alpha x \cos\beta x dx$$

за допомогою формул для перетворення добутку тригонометричних функцій на суму

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\sin(\beta-\alpha)x + \sin(\alpha+\beta)x\right),$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\alpha)x - \cos(\alpha+\beta)x\right),$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta-\alpha)x + \cos(\alpha+\beta)x\right)$$

зводяться до суми табличних інтегралів.

У випадку, коли підінтегральна функція становить цілу степінь тригонометричних функцій чи добуток цілих степеней тригонометричних функцій недоцільно застосовувати вказані підстановки. У таких випадках застосовують найпростіші засоби, які грунтуються на формулах тригонометрії і загальних методах інтегрування. Інтеграли від непарного додатного степеня синуса чи косинуса, коли один з показників степеня непарний обчислюють так:

$$\int \sin^{2m+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2m} x \cos^n x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^m \cos^n x dx \cos x,$$

$$\int \cos^{2m+1} x \sin^n x dx = \int \cos^{2m} x \sin^n x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^m \sin^n x dx \sin x.$$

де n – будь-яке ціле невід’ємне число.

Якщо обидва показники парні, то спочатку застосовують формули

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$; іноді можна застосувати формулу $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ і одержати суму

інтегралів таких, що можливо можна знайти їх чи вони утримують $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в парних степенях, тоді цей процес продовжують.

Приклади розв’язання

<u>*Приклад 1*</u>**.**

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x)dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

<u>*Приклад 2*</u>**.**

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{2t}{t^2+1}; \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3\right)} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg}(t+1) + C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right) + C.$$

<u>*Приклад 3*</u>**.**

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dt = \frac{dx}{\cos^2 x}; \\ \frac{1}{\left(\cos^2 x\right)} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) = \left(1 + t^2\right) \end{array} \right| = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \left(1 + t^2\right)dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$