МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА. АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ:

методичні рекомендації до самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти
освітнього ступеня «Молодший бакалавр»
початкового рівня (короткий цикл)
спеціальностей
208 «Агроінженерія»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»,
073 «Менеджмент»
денної форми навчання

МИКОЛАЇВ – 2021

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол №4 _ від 20__. _12_. 2021р.)

Укладачі:

О.В. Бойчук	– к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
С.І. Богданов	– старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
Є.Ю. Борчик	– к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шептилевський	– к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензент:

Дармосюк В.М.	– доцент кафедри фізики та математики Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації присвячені першим трьом модулям курсу дисципліни «Вища математика», а саме «Лінійна та векторна алгебра», «Аналітична геометрія на площині», «Аналітична геометрія у просторі».

Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти студентам оволодіти знаннями та набути основних навичків розв’язування завдань з цих модулів, особливо при дистанційній формі навчання.

У методичних рекомендаціях наводяться стисло теоретичні відомості, необхідні для розв’язування практичних завдань, наводяться приклади розв’язування завдань з роз’ясненнями, приводяться завдання для самостійного виконання.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальностей 208 «Анроінженерія», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 073 «Менеджмент», але їх можуть використовувати студенти інших спеціальностей, що вивчають курс «Вища математика».

Модуль 01 "Лінійна та векторна алгебра"
МАТРИЦІ. ДІЇ З МАТРИЦЯМИ
1. Основні поняття та теореми

Прямокутна таблиця $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, складена з m рядків і n стовпців чисел a_{ij}, називається матрицею розміру $m \times n$.

Числа a_{ij} $(i = 1,2,...,m\,,\, j = 1,2,...,n)$ називаються елементами матриці, перший індекс вказує номер рядка, в якому стоїть елемент матриці, а другий індекс – номер стовпця.

Основними математичними операціями з матрицями є множення матриці на число, додавання матриць і множення матриць.

Добутком числа λ і матриці $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ називається матриця $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ елементи якої підраховують згідно з правилом $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Властивості операції множення матриці на число: $\lambda A = A\lambda$; $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Сумою двох матриць $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ і $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$, що мають відповідно рівні кількості рядків і стовпців, називається матриця $S = \lfloor s_{ij} \rfloor$ такої ж розмірності з елементами, що дорівнюють сумам відповідних елементів матриць A і B: $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Властивості операції додавання матриць: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$; $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Операція додавання матриць має обернену операцію – віднімання. Різницею матриць $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ і $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ називається матриця $D = \lfloor d_{ij} \rfloor$, складена з різниці відповідних елементів заданих матриць.

Множення матриць. Нехай матриці $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ і $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ мають вигляд: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ і $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$, тобто кількість стовпців матриці A збігається з кількістю рядків матриці B. Добутком матриць $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ і $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ називається матриця M розміру $m \times k$, елементи якої підраховуються за правилом $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$.

Елемент, що стоїть в i-ому рядку і j-ому стовпці добутку матриць, одержується множенням елементів i-ого рядка матриці A на елементи j-ого стовпця матриці B і додаванням цих добутків.

Операція множення матриць некомутативна $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти матрицю $C = 3A + B$, де $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \; C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & -9 & -3 \\ 9 & 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 8 & -12 & -4 \\ 12 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Знайти матрицю $C = A - 2B$, де $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 5 \\ -1 & -8 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Знайти матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$C = \begin{bmatrix} 12+3+0-4 & 8+0+0+0 & -8+4+0+6 \\ -6+0+6-2 & -4+0+3+0 & 4+0+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. Знайти матрицю $C = A \cdot B$, де $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Розв'язування: $C = \begin{bmatrix} 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$.

5. Знайти матрицю $C = A^T \cdot B^T$, де $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot(-4) & 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) \\ 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) + 0\cdot(-4) & 3\cdot 1 + 4\cdot(-3) + 0\cdot 0 & 3\cdot 1 + 4\cdot 2 + 0\cdot(-2) \\ 0\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 1\cdot(-4) & 0\cdot 1 + 2\cdot(-3) + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot(-2) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 3 \\ 2 & -9 & 11 \\ -6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти матрицю $D = 3A + B - 2C$, де $A = \begin{bmatrix} -3+\alpha & 2+\alpha \\ 1+\alpha & \alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ 2+\alpha & 4+\alpha \end{bmatrix}$ і $C = \begin{bmatrix} 3+\alpha & -9+\alpha \\ \alpha & 4+\alpha \end{bmatrix}$.

2. Знайти $C = A \cdot B$, де $A = \begin{bmatrix} 1{,}5+\alpha & -4{,}5+\alpha & 2+\alpha \\ \alpha & 2+\alpha & -1+\alpha \\ -2+\alpha & 7+\alpha & -3+\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7+\alpha \\ 1+\alpha \\ -2+\alpha \end{bmatrix}$.

3. Знайти матриці $C = A^T \cdot B^T$, $D = B^T \cdot A^T$, де $A = \begin{bmatrix} 3+\alpha & \alpha \\ 8+\alpha & -4+\alpha \\ 9+\alpha & -1+\alpha \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2+\alpha & 2+\alpha & 5+\alpha \\ \alpha & 1+\alpha & 3+\alpha \end{bmatrix}$.

ВИЗНАЧНИКИ, МІНОРИ ТА АЛГЕБРАЇЧНІ ДОПОВНЕННЯ

1. Основні поняття та теореми

Нехай задана квадратна матриця $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Число $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ називається визначником (детермінантом) другого порядку. Позначається $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, Δ або $\det A$.

Визначник (детермінант) третього порядку визначається як

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Елементи a_{11}, a_{22}, a_{33} утворюють головну діагональ визначника, а елементи a_{13}, a_{22}, a_{31} – бічну діагональ. Для обчислення визначника третього порядку зручне правило Саррюса (рис. 1).

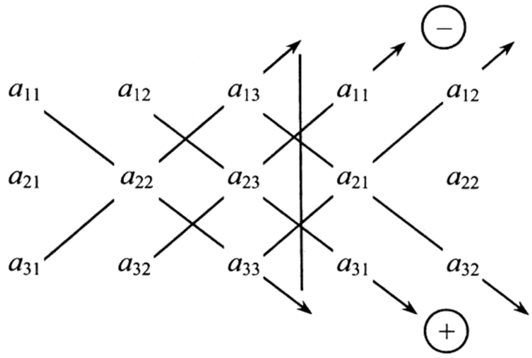

Рис. 1

Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то матриця є особливою (виродженою).

Найважливіші властивості визначників:

1. Властивість антисиметрії: Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два стовпці, то абсолютна величина визначника не зміниться, а знак його зміниться на протилежний.
2. Властивість однорідності: Якщо елементи одного з рядків (стовпців) визначника помножити на деяке число, то визначник помножиться на це число.
3. Властивість лінійності: Якщо до одного з рядків (стовпців) визначника додати інший його рядок (стовпець), (можна ще й помножений на деяке число), то визначник не зміниться.

Мінором M_{ij} матриці є визначник матриці без i-го рядка і j-го стовпчика. Алгебраїчні доповнення A_{ij} визначаються через мінори за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Розглянемо перше із застосувань алгебраїчних доповнень.

Визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, $\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$.

Якщо у деякому рядку (чи стовпці) визначника n порядку всі елементи, крім одного, нулі, то, розклавши його за елементами такого рядка (чи стовпця), отримаємо добуток ненульового елемента на визначник $(n-1)$ порядку.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

$\Delta = -1 \cdot 3 + 5 \cdot 6 = -3 + 30 = 27$.

2. Знаючи визначник $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$, знайти визначники $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\Delta_1 = -27$, бо рядки початкового визначника переставили місцями; $\Delta_2 = -27$, бо перший рядок початкового визначника домножений на (-1); $\Delta_3 = 27$, бо перший рядок початкового визначника – різниця першого і другого рядків.

3. Знайти визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 2 \\ -2 & 7 \\ 3 & -4 \end{matrix} = -5 \cdot 7 \cdot 8 + 2 \cdot (-3) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \cdot (-4) - 4 \cdot 7 \cdot 3 -$$

$$-(-5) \cdot (-3) \cdot (-4) - 2 \cdot (-2) \cdot 8 = -280 - 18 + 32 - 84 + 60 + 32 = -258.$$

4. Знайти визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -2 & 7 & -3 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\Delta = 0$, бо перший рядок рівний другому помноженому на (-1).

5. Знайти визначник третього порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

Відповідь: $\Delta = 0$, бо третій рядок визначника є сумою перших двох.

6. Знайти мінор M_{21} та алгебраїчне доповнення A_{21} елемента a_{21} матриці $\begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$M_{21} = \begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 91 + 8 = 99$, $A_{21} = (-1) \cdot 99 = -99$.

7. Знайти мінор M_{34} та алгебраїчне доповнення A_{34} елемента a_{34} матриці $\begin{bmatrix} 1 & 13 & -4 & 3 \\ 0 & -9 & 2 & -1 \\ 17 & -1 & -23 & 13 \\ 1 & 2 & 7 & 39 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

$$M_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 13 \\ 0 & -9 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -63 + 26 - 0 - 36 - 4 - 0 = -77,$$

$A_{34} = (-1)^{3+4} M_{34} = -M_{34} = 77$.

8. Знайти визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & -5 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Розпишемо визначник за елементами першого рядка, маємо $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Так як $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6 - 5 = -11$, $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(12 + 30) = -42$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 12 = 8$, то $\Delta = 1 \cdot (-11) + 2 \cdot (-42) + 2 \cdot 8 = -11 - 84 + 16 = -79$.

9. Знайти визначник $\begin{vmatrix} 1 & 13 & -4 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Розпишемо визначник за елементами першого стовпчика, маємо

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = 1 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -9 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -63 - 4 = -67.$$

10. Знайти визначник $\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Віднімемо від другого рядка перший і запишемо отримані числа у другий рядок: $\begin{vmatrix} 1 & -18 & 3 \\ 0 & 22 & -1 \\ 0 & 19 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 22 & -1 \\ 19 & 1 \end{vmatrix} = 22 + 19 = 41$.

11. Знайти визначник $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 9 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Для отримання стовпчика з тільки одним ненульовим елементом запишемо замість другого рядка різницю другого рядка і третього рядка домноженого на 2: $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-1-6) = 7$.

12. Знайти визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 10 \\ -4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

Розв'язування:

Зробимо такі перетворення визначника, щоб перший стовпчик містив всі нулі, крім елемента a_{11}:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 10 \\ -4 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}\left\{\begin{matrix} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}+4\cdot\mathrm{I} \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 14 \\ 0 & 8 & 14 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 14 \\ 8 & 14 & 4 \end{vmatrix}.$$

Знову зробимо такі перетворення визначника, щоб перший стовпчик містив всі нулі, крім елемента a_{11}:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -3 & 5 & 14 \\ 8 & 14 & 4 \end{vmatrix}\left\{\begin{matrix} \\ \mathrm{II}+3\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-8\cdot\mathrm{I} \end{matrix}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 38 \\ 0 & 38 & -60 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 38 \\ 38 & -60 \end{vmatrix} = 240-1444 = -1204.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти визначник другого порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 3+\alpha & 6 \\ 5 & 10-\alpha \end{vmatrix}$.

2. Знайти визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1+\alpha & 2 & 4 \\ -2 & 1-\alpha & 3 \\ 3 & -4 & 2-\alpha \end{vmatrix}$.

3. Знайти визначник третього порядку $\begin{vmatrix} 1 & 2+\alpha & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1-\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

4. Знайти алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці $A=\begin{bmatrix} \alpha-50 & 1 & 3 \\ 2 & \alpha & 2 \\ \alpha & 2 & \alpha-45 \end{bmatrix}$.

5. Знайти визначник четвертого порядку $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 2 & 3+\alpha & 4 \\ 1 & 3+\alpha & 6 & 10 \\ 1+\alpha & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ ТА ЇЇ ЗНАХОДЖЕННЯ

1. Основні поняття та теореми

Розглянемо друге застосування алгебраїчних доповнень.

Якщо дві матриці A і B – квадратні одного і того ж порядку, а їх добуток $A\cdot B$ – одинична матриця, то матриця B є матрицею оберненою до A і позначається символом A^{-1}.

Квадратна матриця A і її обернена A^{-1} комутативні, тобто

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Для того, щоб квадратна матриця A мала обернену, необхідно і достатньо, щоб визначник матриці A не дорівнював нулю, тобто матриця A не повинна бути особливою (виродженою).

Обернену матрицю A^{-1} знаходимо за формулою $A^{-1}=\dfrac{\widetilde{A}^T}{|A|}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}^T$,

де $\widetilde{A}^T=\begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ .. & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$ – транспонована союзна (приєднана) матриця для матриці A (складена із алгебраїчних доповнень усіх елементів матриці A).

Алгоритм знаходження оберненої матриці до матриці A:

1) знайти визначник матриці A (якщо він не рівний нулю, то обернена матриця існує);
2) визначити алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці A;
3) скласти союзну матрицю $\widetilde{A}$ і транспонувати її.

Обернена матриця записується як $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}^T$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти матрицю обернену до матриці $A=\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

Визначник $|A| = 9 \cdot 14 - 2 \cdot 3 = 120$; алгебраїчні доповнення $A_{11} = 14$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 9$, тоді $\widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

На першому кроці алгоритму знаходимо визначник матриці $|A| = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 11 \\ 4 & 9 & 3 \\ 18 & -3 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} 12 & 1 \\ 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{matrix} = 1728 + 54 - 132 - 1782 + 108 - 64 = -88$. Матриця невироджена, отже обернена існує.

На другому кроці алгоритму визначаємо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці, маємо: $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = 144 + 9 = 153$,

$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = -(64 - 54) = -10$, $A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 162 = -174$,

$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ -3 & 16 \end{vmatrix} = -(16 + 33) = -49$, $A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 18 & 16 \end{vmatrix} = 192 - 198 = -6$,

$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 18 & -3 \end{vmatrix} = -(-36 - 18) = 54$, $A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 99 = -96$,

$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 12 & 11 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(36 - 44) = 8$, $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 108 - 4 = 104$.

На третьому кроці складаємо союзну матрицю $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 153 & -10 & -174 \\ -49 & -6 & 54 \\ -96 & 8 & 104 \end{bmatrix}$, $\widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{bmatrix}$.

Тоді обернена матриця має вигляд $A^{-1} = -\frac{1}{88}\begin{bmatrix} 153 & -49 & -96 \\ -10 & -6 & 8 \\ -174 & 54 & 104 \end{bmatrix}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти матрицю обернену до матриці $A = \begin{bmatrix} 65 - \alpha & 25 \\ 20 & 7 \end{bmatrix}$.

2. Знайти матрицю обернену до матриці. $A=\begin{bmatrix}\alpha-50 & 1 & 3\\ 2 & \alpha & 2\\ \alpha & 2 & \alpha-45\end{bmatrix}$.

3. Знайти матрицю обернену до матриці $A=\begin{bmatrix}1 & 3+\alpha & 5\\ 2+\alpha & 4+\alpha & 8+\alpha\\ 2 & 7+\alpha & 6\end{bmatrix}$.

МАТРИЧИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.

1. Основні поняття та теореми

Обернена матриця застосовується при розв'язуванні систем лінійних рівнянь (матричним способом). Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3.\end{cases}$ Складаємо відповідно матрицю з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих, матрицю-стовпець з невідомих та матрицю-стовпець з вільних членів $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$. Враховуючи правило множення матриць та умови рівності двох матриць, систему лінійних рівнянь можна записати в такому вигляді $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}$ або, враховуючи зроблені позначення, всю систему рівнянь можна записати компактно у вигляді одного матричного рівняння $A\cdot X=B$.

Метод працює і для системи n лінійних рівнянь з n невідомими.

Якщо матриця A – невироджена, то вона має обернену матрицю A^{-1}. Перемноживши зліва обидві частини рівняння $A\cdot X=B$ на A^{-1} та враховуючи, що $A^{-1}\cdot A=E$ і $E\cdot X=X$, знаходимо стовпець невідомих X з рівності

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти розв'язки системи лінійних рівнянь $\begin{cases}21x+3y+3z=-6,\\ 2x+y+6z=-16,\\ 3x+2y+2z=2\end{cases}$ матричним способом (за допомогою оберненої матриці)

Розв'язування:

$$\begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ звідки } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Визначимо обернену матрицю $\begin{bmatrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$. Для цього знаходимо визначник матриці $\left|\begin{matrix} 21 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 21 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 42 + 54 + 12 - 9 - 252 - 12 = -165 \neq 0$.

Визначаємо алгебраїчні доповнення до всіх елементів матриці, маємо: $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 33$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -33$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 15$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -120$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 15$. Тоді обернена матриця $A^{-1} = -\frac{1}{165}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix}$ і

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{165}\begin{bmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 14 & 33 & -120 \\ 1 & -33 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{165}\begin{bmatrix} 90 \\ -852 \\ 552 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18/33 \\ 284/55 \\ -184/55 \end{bmatrix}.$$

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти розв'язки системи лінійних рівнянь матричним способом (за допомогою оберненої матриці).

$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3, \\ 4x - 2y - 5z = 5, \\ 6x - y + 3z = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ x - y + 2z = -4, \\ 2x + 2y + z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 3y + 2z = -1, \\ 2x + y - z = 3, \\ x - 2y - 3z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - 2y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x - 3y - z = -5. \end{cases}$
$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3, \\ 2x + y - z = -5, \\ 5x - y + 3z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x - 2y - z = 7. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 3, \\ x + y - 2z = 4, \\ 3x - 2y + 6z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x - y + 3z = -4, \\ 3x + 5y + z = 4. \end{cases}$
$\begin{cases} 4x + 3y - 2z = -1, \\ 3x + y + z = 3, \\ x - 2y - 3z = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 8, \\ 4x - 3y - 2z = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x - y - 2z = 6. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0, \\ x + y - 2z = -7, \\ x - 2y + 3z = 3. \end{cases}$

ФОРМУЛИ КРАМЕРА. МЕТОД ГАУССА

1. Основні поняття та теореми

Якщо визначник матриці A не рівний нулю, то розв'язок системи лінійних рівнянь можна знайти і за допомогою формул Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ_i – визначник, одержаний з визначника Δ заміною елементів i-того стовпця відповідними вільними членами.

Якщо визначник $\Delta = 0$, а серед визначників Δ_1, Δ_2, Δ_3 є хоч один, що не дорівнює нулю, то система лінійних рівнянь розв'язків не має (несумісна).

Якщо $\Delta = 0$, а також $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, то система має нескінчену множину розв'язків.

Метод Гаусса складається з двох основних етапів.

На першому етапі (прямий хід методу Гаусса) здійснюють послідовне виключення невідомих за допомогою рівносильних перетворень системи. В результаті система зводиться до східчастої форми рівняння.

На другому етапі (зворотний хід методу Гаусса) з останнього рівняння знаходять останнє невідоме. Потім одержане значення підставляють у передостаннє рівняння і визначають з нього наступне невідоме і т.д.

2. Приклади виконання завдань

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x - 4y + 3z = 19, \\ x - 2y + z = 8, \\ 3x - 8y - 21z = -11 \end{cases}$ за допомогою визначників (формул Крамера).

Розв'язування:

Маємо $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 126 - 12 - 24 + 18 + 24 - 84 = 48$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 19 & -4 & 3 \\ 8 & -2 & 1 \\ -11 & -8 & -21 \end{vmatrix} = 798 + 44 - 192 - 66 + 152 - 672 = 64,\ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 19 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 3 & -11 & -21 \end{vmatrix} = -504 + 57 - 33 - 72 + 33 + 399 = -120,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{120}{48} = -\frac{5}{2}.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3 & -4 & 19\\ 1 & -2 & 8\\ 3 & -8 & -11\end{vmatrix}=66-96-152+114+192-44=80,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{80}{48}=\frac{5}{3}.$$

2. Розв'язати методом Гаусса систему рівнянь $\begin{cases}2x-3y+4z=-25,\\ 3x-8y-18z=-15,\\ x-4y-28z=25.\end{cases}$

Розв'язування:

Переставимо місцями перше і останнє рівняння $\begin{cases}x-4y-28z=25,\\ 3x-8y-18z=-15,\\ 2x-3y+4z=-25.\end{cases}$

Щоб виключити змінну x_1 з другого рівняння помножимо перше рівняння на (-3) і додамо до другого рівняння

$$\begin{cases}\overset{-3x+12y+84z=-75}{x-4y-28z=25},\\ 3x-8y-18z=-15, II+(-3)\cdot I\\ 2x-3y+4z=-25,\end{cases}\qquad \begin{cases}x-4y-28z=25,\\ 4y+66z=-90,\\ 2x-3y+4z=-25.\end{cases}$$

Щоб виключити змінну x_1 з третього рівняння помножимо перше рівняння на (-2) і додамо з першим

$$\begin{cases}\overset{-2x+8y+56z=-50}{x-4y-28z=25},\\ 4y+66z=-90,\\ 2x-3y+4z=-25, III+(-2)\cdot I\end{cases}\qquad \begin{cases}x-4y-28z=25,\\ 4y+66z=-90,\\ 5y+60z=-75.\end{cases}$$

Друге рівняння поділимо на 2, третє рівняння – на 5, одержимо $\begin{cases}x-4y-28z=25,\\ 2y+33z=-45,\\ y+12z=-15.\end{cases}$ Щоб виключити змінну x_2 з третього рівняння помножимо третє рівняння на (-2) і додамо з другим

$$\begin{cases}x-4y-28z=25,\\ 2y+33z=-45,\\ \overset{-2y-24z=30}{y+12z=-15}, \quad (-4)\cdot III+II\end{cases}\qquad \begin{cases}x-4y-28z=25,\\ 2y+33z=-45,\\ 9z=-15.\end{cases}$$

З останнього рівняння маємо $z=-\frac{15}{9}=-\frac{5}{3}$; з другого рівняння маємо $2y-55=-45$, $2y=10$, $y=5$; з першого рівняння маємо $x-4\cdot 5-28\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)=25$, $x=45-\frac{140}{3}=-\frac{5}{3}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою визначників (формул Крамера).

2. Розв'язати методом Гаусса систему лінійних рівнянь.

$\begin{cases} x-3y+z=2, \\ 2x+y+3z=3, \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$	$\begin{cases} x+5y-z=-1, \\ 2x+y-2z=7, \\ x-4y+z=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y-5z=1, \\ 3x+y-2z=-4, \\ x-2y+z=5. \end{cases}$	$\begin{cases} x-3y-z=1, \\ 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$
$\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+y+2z=-4, \\ x-2y-z=-1, \\ 2x+3y+2z=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ x+2y+z=2, \\ x-3y+4z=-1. \end{cases}$
$\begin{cases} 2x+y-2z=5, \\ 3x+y+5z=7, \\ -x+3y+3z=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 7x-3y-5z=2, \\ 5x+2y-2z=2, \\ 2x-y+z=8. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x+y+z=4, \\ x-2y-z=-5, \\ 3x+4y+z=7. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+4y+z=1, \\ 2x+2y+3z=6, \\ 7x-6y-z=11. \end{cases}$
$\begin{cases} x+2y-3z=-3, \\ 2x-3y+4z=7, \\ 5x+y+z=8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+5z=5, \\ x+3y+z=-2, \\ 4x-y-4z=10. \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3z=-3, \\ 2x+2y+z=3, \\ x+4y-5z=10. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-2y-z=5, \\ 4x-5y+2z=0, \\ x+3y+z=-1. \end{cases}$
$\begin{cases} -2x+y+z=6, \\ 3x-4y+5z=-5, \\ 4x+3y+2z=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x-y-4z=-3, \\ 2x+2y-3z=1, \\ 5x+3y-7z=0. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+3y+3z=1, \\ 4x-y-2z=-6, \\ 5x+y+z=-4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+2z=2, \\ 4x+y-2z=0, \\ 6x-y+3z=13. \end{cases}$
$\begin{cases} 2x+2y+z=5, \\ 4x-y-5z=7, \\ 6x-y+2z=2. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+2y-z=4, \\ x-y+z=-4, \\ 2x+y+z=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y+z=-1, \\ 3x+y+z=1, \\ 2x+y+2z=0. \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3z=0, \\ x+y+z=2, \\ 2x-3y+4z=2. \end{cases}$
$\begin{cases} 2x+4y+z=1, \\ 2x+2y+3z=-7, \\ 3x-4y-z=-1. \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y+z=3, \\ 2x+3y-z=3, \\ 3x-y-2z=4. \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-3z=2, \\ x+5y-z=-1, \\ 2x+5y-2z=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+4z=-11, \\ x-2y-z=0, \\ 3x+y+z=-1. \end{cases}$

НЕСУМІСНІ І НЕВИЗНАЧЕНІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Основні поняття та теореми

Рангом матриці називається найвищий порядок мінора відмінного від нуля.

У лінійній алгебрі доведено, що ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків цієї матриці (тобто рівнянь системи) чи стовпців.

Розглядувані досі системи лінійних рівнянь мали розв'язок і єдиний. Але не кожна система рівнянь має розв'язок. Система рівнянь, що не має розв'язків, називається несумісною.

Вияснити сумісна чи несумісна система рівнянь можна або безпосередньо, або скориставшись теоремою Кронекера – Капеллі.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь з n невідомими, що може бути записана в такому вигляді $\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ ...., \\ a_{m1}x + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ Складаємо матрицю з коефіцієнтів a_{ij} при невідомих та розширену матрицю системи рівнянь: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$.

Теорема Кронекера – Капеллі. Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці B дорівнює рангу матриці A, тобто коли $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(A)$. Якщо ж $\operatorname{rang}(B) > \operatorname{rang}(A)$, система рівнянь не має розв'язків. Крім того, сумісна система рівнянь тоді і тільки тоді має єдиний розв'язок, коли $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(A) = n$ – числу невідомих (це може бути тільки в тому випадку, коли $m = n$).

Система рівнянь, що має безліч розв'язків, є невизначеною. Це якщо одне з рівнянь є лінійною комбінацією інших.

Однорідною системою n лінійних рівнянь з n невідомими є система виду $\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ ...., \\ a_{n1}x + ... + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$ або $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases}$ Ці системи завжди сумісні – бо мають нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ або $x = y = z = 0$. Для такої системи $\Delta_1 = ... = \Delta_n = 0$ Якщо визначник $\Delta \neq 0$ то нульовий розв'язок єдиний, а система визначена. Якщо визначник $\Delta = 0$, то однорідна система рівнянь має ще й ненульові розв'язки (система невизначена).

2. Приклади виконання завдань

1. Визначити ранг матриці $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -12 \\ -2 & -4 & 8 \end{bmatrix}$.

Розв'язування:

До третього рядка додамо перший та другий, одержимо матрицю $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ранг якої дорівнює рангу даної матриці.

Так як $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, то $\operatorname{rang}(A) < 3$.

Оскільки мінор другого порядку $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 26 \neq 0$, то $\operatorname{rang}(A) = 2$.

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 3. \end{cases}$

Розв'язування:

Розв'яжемо систему матричним способом: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Але $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 20 + 16 - 10 + 8 + 8 = 0$. Для розв'язування системи матричний метод не підходе.

Спробуємо застосувати формули Крамера. Маємо $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 12 + 8 - 6 + 40 + 4 = 24 \neq 0$, отже дана система розв'язку не має.

Застосуємо метод Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, \; -II + 2 \cdot I \\ 5x + 4y - 2z = 3, - III + 5 \cdot I \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 3y + 6z = 9, \\ 6y + 12z = 2, \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ 3y + 6z = 1, \quad III - 3 \cdot II \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ 0 = -8. \end{cases}$ Останнє рівняння є неправильною рівністю, тобто метод Гаусса теж дає висновок про відсутності розв'язків розглядуваної системи рівнянь.

3. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ 5x + 4y - 2z = 7. \end{cases}$

Розв'язування:

Так як матриця A така ж, як в попередньому випадку, то метод оберненої матриці і в цьому випадку незастосовний.

Спробуємо застосувати формули Крамера. Маємо $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 28 + 8 - 14 + 40 + 4 = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 7 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{matrix} =$
$= -2 - 50 + 28 - 10 + 14 + 20 = 0$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 10 + 40 - 25 - 4 - 28 = 0$.

Система має безліч розв’язків, проте невідомо яких.

Застосуємо метод Гаусса $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 2x + y - 2z = 1, & -II + 2 \cdot I \\ 5x + 4y - 2z = 7, & -III + 5 \cdot I \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ 3y + 6z = 9, \\ 6y + 12z = 18, \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ y + 2z = 3, & III - II \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3, \\ 0 = 0. \end{cases}$ Останнє рівняння є правильною рівністю, тобто система з трьох рівнянь звелась до системи з двох рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 5, \\ y + 2z = 3. \end{cases}$

Позначимо $z = t$, де t будь-яке дійсне число, тоді з другого рівняння одержимо $y + 2t = 3$, $y = 3 - 2t$, а з першого рівняння $x + 2(3 - 2t) + 2t = 5$, $x + 6 - 4t + 2t = 5$, $x = 2t - 1$.

Метод Гаусса дає можливість знайти всі розв’язки розглядуваної системи рівнянь у вигляді $(2t - 1; 3 - 2t; t)$. Так при $t = 0$ маємо $(-1; 3; 0)$. При $t = 1$ маємо $(1; 1; 1)$. І таких розв’язків безліч.

4. Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 3x + y - 3z = 0, \\ 2x - y + 5z = 0. \end{cases}$

Розв’язування:

Знайдемо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 12 + 12 + 8 - 3 - 30 = -20 \neq 0$.

Система має єдиний нульовий розв’язок $(0; 0; 0)$.

5. Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \\ 5x + 4y - 2z = 0. \end{cases}$

Розв’язування:

Визначник $\Delta = 0$. Розглядувана однорідна система рівнянь має безліч розв'язків. Знайдемо ненульові розв'язки.

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0, \ -II + 2 \cdot I \\ 5x + 4y - 2z = 0, -III + 5 \cdot I \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ 3y + 6z = 0, \\ 6y + 12z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0. \end{cases}$$

Система з трьох рівнянь звелась до системи з двох рівнянь $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0, \\ y + 2z = 0. \end{cases}$

Позначимо $z = t$, де t будь-яке дійсне число, тоді з другого рівняння одержимо $y + 2t = 0$, $y = -2t$, а з першого рівняння $x + 2(-2t) + 2t = 0$, $x - 4t + 2t = 0$, $x = 2t$.

Метод Гаусса дає можливість знайти всі розв'язки розглядуваної системи рівнянь у вигляді $(2t;-2t;t)$. Так при $t = 0$ маємо $(0;0;0)$. При $t = 1$ маємо $(2;-2;1)$. І таких розв'язків безліч.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Визначити ранг матриці $A = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 18 \\ 2(\alpha - 21) & 3(\alpha - 21) & -4(\alpha - 21) \\ -5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$.

2. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} (\alpha + 1)x + 2y - 3z = -10, \\ 5(\alpha + 1)x + 8y - 9z = 5, \\ 3(\alpha + 1)x + 4y - 3z = 25. \end{cases}$

3. Знайти всі розв'язки системи лінійних рівнянь $\begin{cases} x + \alpha y - 4z = 0, \\ 2x + \alpha y - 9z = 0, \\ x + 2\alpha y - 3z = 0. \end{cases}$

4. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} (\alpha + 5)x + 4y + 2z = 0, \\ 2(\alpha + 5)x + 5y + 4z = 0, \\ (\alpha + 5)x + 7y + 2z = 0. \end{cases}$

5. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 3x + (\alpha + 2)y - 4z = 0, \\ 4x + (\alpha + 2)y - 9z = 0, \\ 5x + 2(\alpha + 2)y - 3z = 0. \end{cases}$

6. Знайти всі розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 2(\alpha + 3)x + 2y - 3z = -10, \\ 7(\alpha + 3)x + 8y - 9z = 5, \\ 3(\alpha + 3)x + 4y - 3z = 25. \end{cases}$

ЛІНІЙНІ ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ. СКАЛЯРНЕ МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ

1. Основні поняття та теореми

Вектор – напрямлений відрізок. Вектор, початок якого знаходиться в точці A, а кінець – у точці B, позначається $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Якщо дані дві точки $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ – відповідно початок та кінець вектора $\vec{a}$, то його координати визначаються за формулами $X_a = x_2 - x_1$, $Y_a = y_2 - y_1$.

Відстань між початком вектора і його кінцем називається довжиною (або модулем) вектора і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$ і визначається формулою $|\vec{a}| = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2}$.

Для просторового випадку координати вектора $X_a = x_2 - x_1$, $Y_a = y_2 - y_1$, $Z_a = z_2 - z_1$; довжина вектора $|\vec{a}| = \sqrt{X_a^2 + Y_a^2 + Z_a^2}$.

Координати вектора суми $\vec{a} + \vec{b}$ є сумами відповідних координат векторів $\vec{a}(X_a;Y_a)$, $\vec{b}(X_b;Y_b)$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(X_a + X_b;Y_a + Y_b)$.

Координати вектора різниці $\vec{a} - \vec{b}$ є різницями відповідних координат векторів $\vec{a}(X_a;Y_a)$, $\vec{b}(X_b;Y_b)$: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(X_a - X_b;Y_a - Y_b)$.

Для просторового випадку маємо $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(X_a + X_b;Y_a + Y_b;Z_a + Z_b)$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}(X_a - X_b;Y_a - Y_b;Z_a - Z_b)$.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}(X_a;Y_a)$ і $\vec{b}(X_b;Y_b)$ називається число, що дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = X_a X_b + Y_a Y_b$. Для просторового випадку скалярним добутком векторів $\vec{a}(X_a;Y_a;Z_a)$ і $\vec{b}(X_b;Y_b;Z_b)$ називається число, що дорівнює $\vec{a} \cdot \vec{b} = X_a X_b + Y_a Y_b + Z_a Z_b$.

Скалярний добуток застосовують для визначення кута між векторами (або прямих, на яких вектора розташовані). Косинус цього кута рівний $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, де в чисельнику саме скалярний добуток векторів, в знаменнику добуток довжин цих векторів. Якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, то кут φ – гострий; якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, то кут φ – тупий; якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то кут φ – прямий, а вектора ортогональні.

2. Приклади виконання завдань

1. На координатній площині xOy поставити точки $A(15;-5)$ і $B(3;0)$ та $C(10;5)$ і $D(4;-3)$. Знайти: координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ та їхні довжини; суму і різницю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ і косинус кута між ними.

Розв'язування:

Координати векторів знайдемо, віднімаючи від координат кінця координати початку $\overrightarrow{AB}(3-15;0+5)=\overline{(-12;5)}$, $\overrightarrow{CD}(4-10;-3-5)=\overline{(-6;-8)}$; тоді довжини векторів $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$ і $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=10$; сума векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overline{(-12-6;5-8)}=\overline{(-18;-3)}$, різниця векторів $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overline{(-12+6;5+8)}=\overline{(-6;13)}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-12\cdot(-6)+5\cdot(-8)=72-40=32$; косинус кута між векторами $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{32}{13\cdot 10}\approx 0{,}246$.

2. Дано точки в просторі $A(-2;2;1)$, $B(2;-2;3)$ та $C(0;4;2)$. Знайти: координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та їхні довжини; суму і різницю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і косинус кута між ними.

Розв'язування:

Координати векторів відповідно рівні $\overrightarrow{AB}(2+2;-2-2;3-1)=\overline{(4;-4;2)}$, $\overrightarrow{AC}(0+2;4-2;2-1)=\overline{(2;2;1)}$; тоді довжини $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=6$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$; сума векторів $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(4+2;-4+2;2+1)=\overline{(6;-2;3)}$, різниця векторів $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(4-2;-4-2;2-1)=\overline{(2;-6;1)}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 2+(-4)\cdot 2+2\cdot 1=2$; косинус кута між векторами $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{2}{6\cdot 3}\approx 0{,}111$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. На координатній площині xOy поставити точки $A(\alpha-5;-5)$, $B(\alpha+7;0)$ та $C(7;5-\alpha)$, $D(4;1-\alpha)$ $D(4;1-\alpha)$. Знайти: координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ та їхні довжини; суму і різницю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ і косинус кута між ними.

2. Дано точки в просторі $A(2;1+\alpha;-7)$, $B(1;3+\alpha;-9)$ та $C(-9;\alpha-1;3)$. Знайти: координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ та їхні довжини; суму і різницю векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ і косинус кута між ними.

ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ ВЕКТОРІВ

1. Основні поняття та теореми

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (позначається $\vec{a}\times\vec{b}$) називається вектор, що визначається такими трьома умовами:

1. Модуль вектора $|\vec{a}\times\vec{b}|$ рівний $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$, де θ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
2. Вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний як вектору $\vec{a}$ так і $\vec{b}$.
3. Упорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$, відкладених від однієї точки, утворює правий базис.

Векторний добуток залежить від порядку співмножників: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (рис. 2).

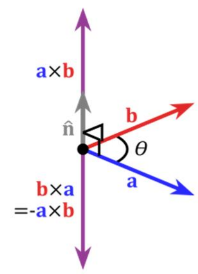

Рис. 2.

Модуль векторного добутку перетворюється на нуль тоді, коли кут між векторами 0° або 180°, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ паралельні (колінеарні).

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані координатами $\vec{a}(X_1;Y_1;Z_1)$, $\vec{b}(X_2;Y_2;Z_2)$, то векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначається формулою

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

Векторний добуток двох векторів застосовують для визначення площі паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах. Площі визначають за формулами: $S_\diamond=|\vec{a}\times\vec{b}|$, $S_\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються число рівне векторному добутку $\vec{a}\times\vec{b}$, який помножений скалярно на вектор $\vec{c}$ тобто $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані своїми координатами $\vec{a}(X_1;Y_1;Z_1)$, $\vec{b}(X_2;Y_2;Z_2)$, $\vec{c}(X_3;Y_3;Z_3)$, то мішаний добуток визначається формулою

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}.$$

Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=0$.

Мішаний добуток трьох векторів застосовують для визначення об’єму паралелепіпеда та піраміди, побудованих на цих векторах. Об’єми визначають за формулами: $\pm V_{паралелепіпеда}=(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\pm V_{піраміди}=\frac{1}{6}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано вектори $\vec{a}(7;-4;4)$, $\vec{b}(-3;2;6)$, $\vec{c}(-4;4;2)$. Знайти скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$, мішаний добуток $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$.

Розв'язування:

Скалярний добуток: $\vec{a}\cdot\vec{b}=7\cdot(-3)+(-4)\cdot 2+4\cdot 6=-21-8+24=-5$.

Векторний добуток:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 7 & -4 & 4\\ -3 & 2 & 6\end{matrix}\right|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 7 & -4\\ -3 & 2\end{matrix}=-24\vec{i}-12\vec{j}+14\vec{k}-12\vec{k}-8\vec{i}-42\vec{j}=-32\vec{i}-54\vec{j}+2\vec{k}$$

Мішаний добуток:

1 спосіб $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\overrightarrow{(-32;-54;2)}\cdot\overrightarrow{(-4;4;2)}=-32\cdot(-4)+(-54)\cdot 4+2\cdot 2=-84$.

2 спосіб $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\begin{matrix}7 & -4 & 4\\ -3 & 2 & 6\\ -4 & 4 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}7 & -4\\ -3 & 2\\ -4 & 4\end{matrix}=28+96-48+32-168-24=-84$.

2. Визначити при яких значеннях β і γ вектори $\vec{a}=-0{,}5\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\gamma\vec{i}-6\vec{j}-0{,}5\vec{k}$ ортогональні; колінеарні.

Розв'язування:

Якщо вектори ортогональні, то $-0{,}5\cdot\gamma+3\cdot(-6)+\beta\cdot(-0{,}5)=0$, $-0{,}5\gamma-18-0{,}5\beta=0$, $\gamma=-36-\beta$.

Якщо вектори колінеарні, то їхні координати пропорційні $\dfrac{-0{,}5}{\gamma}=\dfrac{3}{-6}=\dfrac{\beta}{-0{,}5}$, тоді $\dfrac{-0{,}5}{\gamma}=\dfrac{1}{-2}$, $\gamma=1$; $\dfrac{1}{-2}=\dfrac{\beta}{-0{,}5}$, $\beta=0{,}25$.

3. Дано два вектори $\vec{a}(-2;3;4)$, $\vec{b}(2;2;1)$. Знайти векторний добуток векторів, площу паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах.

Розв'язування:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ -2 & 3\\ 2 & 2\end{matrix}=3\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}-6\vec{k}-8\vec{i}+2\vec{j}=-5\vec{i}+10\vec{j}-10\vec{k}.$$

$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-5)^2+10^2+(-10)^2}=\sqrt{225}=15$, $S_{\Diamond}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=15\,кв.од.$, $S_{\Delta}=7{,}5\,кв.од.$.

4. Чи лежать в одній площині точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$?

Розв'язування:

Для відповіді на питання встановимо: чи лежать в одній площині вектора $\overrightarrow{AB}(-1;-1;6)$, $\overrightarrow{AC}(-2;0;2)$, $\overrightarrow{AD}(1;-1;4)$.

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 6\\ -2 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}\begin{matrix}-1 & -1\\ -2 & 0\\ 1 & -1\end{matrix}=0-2+12-0-2-8=0.$$ Так.

5. При якому значенні параметра t вектори $\vec{a}(1;-1;3)$, $\vec{b}(1;9;-11)$, $\vec{c}(2;3t;-1)$ компланарні?

Розв'язування:

Вектори компланарні, якщо їх мішаний добуток дорівнює нулю

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\\ 2 & 3t & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 9\\ 2 & 3t\end{matrix}=-9+22+9t-54+33t-1=42t-42=0,\ t=1.$$

6. Знайти мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(4;1;1)$, $\overrightarrow{AC}(1;1;0)$, $\overrightarrow{AD}(0;0;58)$, визначити об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на них.

Розв'язування:

Мішаний добуток векторів знайдемо, обчисливши визначник:

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 58\end{vmatrix}=58\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=58\cdot 3=174.$$

$$\pm V_{паралелепіпеда}=\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=174\,куб.од.,\ \pm V_{піраміди}=\frac{174}{6}=29\,куб.од..$$

7. Задані координати вершин піраміди $A(1;2;3)$, $B(-3;10;4)$, $C(8;6;-1)$, $D(-2;4;9)$. Знайти: 1) координати і довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; 2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (відповідними ребрами піраміди); 3) площу грані ABC; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

Розв'язування:

1) Координати та довжини векторів відповідно рівні $\overrightarrow{AB}(-4;8;1)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+8^2+1^2}=9$; $\overrightarrow{AC}(7;4;-4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{7^2+4^2+(-4)^2}=9$; $\overrightarrow{AD}(-3;2;6)$, $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-3)^2+2^2+6^2}=7$.

2) Скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4\cdot 7+8\cdot 4+1\cdot(-4)=0$, отже $\overrightarrow{AB}\,\widehat{\cdot}\,\overrightarrow{AC}=90^\circ$.

3) Векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 8 & 1\\ 7 & 4 & -4\end{vmatrix}=-32\vec{i}+7\vec{j}-16\vec{k}-56\vec{k}-4\vec{i}-16\vec{j}=-36\vec{i}-9\vec{j}-72\vec{k}.$$

Модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-36)^2+(-9)^2+(-72)^2}=81$, тоді $S_{ABC}=\dfrac{81}{2}=40{,}5\,кв.од.$

4) Мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\begin{matrix}-4 & 8 & 1\\ 7 & 4 & -4\\ -4 & 4 & 2\end{matrix}\right|\begin{matrix}-4 & 8\\ 7 & 4\\ -4 & 4\end{matrix}=-96+96+14+12-32-336=-342,$$ тоді

$V_{ABCD}=\dfrac{342}{6}=57\,куб.од.$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дано вектори $\vec{a}(\alpha-3;-\alpha;\alpha)$, $\vec{b}(\alpha-7;\alpha+2;\alpha+6)$, $\vec{c}(-2\alpha;2\alpha;\alpha)$. Знайти скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$, векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$, мішаний добуток $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

2. Визначити при яких значеннях β і γ вектори $\vec{a}=(2+(\alpha-10)\cdot 0{,}1)\vec{i}-6\vec{j}+\beta\vec{k}$ і $\vec{b}=\gamma\vec{i}+3\vec{j}+(2+(\alpha-10)\cdot 0{,}1)\vec{k}$ колінеарні.

3. Дано два вектори $\vec{a}(-2;-3;4)$ і $\vec{b}(2\alpha;-2\alpha;\alpha)$. Знайти векторний добуток векторів, площу паралелограма і трикутника, побудованих на цих векторах.

4. При якому значенні параметра t вектори $\vec{a}(\alpha;2\alpha;3\alpha)$, $\vec{b}(4;5;6)$, $\vec{c}(7;2t;9)$ компланарні?

5. Знайти мішаний добуток векторів $\overrightarrow{AB}(5;\alpha;36)$, $\overrightarrow{AC}(1;1;0)$, $\overrightarrow{AD}(0;0;36)$, визначити об'єм паралелепіпеда та об'єм піраміди, побудованих на них.

6. Задані координати вершин піраміди A, B, C, D. Знайти: 1) координати і довжини векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$; 2) кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (відповідними ребрами піраміди); 3) площу грані ABC; 4) об'єм піраміди $ABCD$.

$(-5;0;1)$, $(-4;-2;3)$, $(6;2;11)$, $(3;4;9)$	$(-2;-3;2)$, $(-1;-5;4)$, $(9;-1;12)$, $(6;1;10)$
$(1;-4;0)$, $(2;-6;2)$, $(12;-2;10)$, $(9;0;8)$	$(0;2;-10)$, $(1;0;-8)$, $(11;4;0)$, $(8;6;-2)$
$(-4;5;-5)$, $(-3;3;-3)$, $(7;7;5)$, $(4;9;3)$	$(3;3;-3)$, $(7;7;-5)$, $(5;14;-13)$, $(3;5;-2)$
$(0;-1;-7)$, $(1;-3;-5)$, $(11;1;3)$, $(8;3;1)$	$(1;3;-9)$, $(2;1;-7)$, $(12;5;1)$, $(9;7;-1)$
$(4;2;-1)$, $(5;0;1)$, $(15;4;9)$, $(12;6;7)$	$(-7;4;0)$, $(-6;2;2)$, $(4;6;10)$, $(1;8;8)$
$(0;4;3)$, $(4;8;1)$, $(2;15;-7)$, $(0;6;4)$	$(-2;5;-2)$, $(-1;3;0)$, $(9;7;8)$, $(6;9;6)$
$(4;-2;5)$, $(8;2;3)$, $(6;9;-5)$, $(4;0;6)$	$(2;-3;1)$, $(3;-5;3)$, $(13;-1;11)$, $(10;1;9)$
$(1;-4;0)$, $(5;0;-2)$, $(3;7;-10)$, $(1;-2;1)$	$(-4;1;2)$, $(-3;-1;4)$, $(7;3;12)$, $(4;5;10)$
$(-3;4;-3)$, $(-2;2;-1)$, $(8;6;7)$, $(5;8;5)$	$(2;-1;-4)$, $(3;-3;-2)$, $(13;1;6)$, $(10;3;4)$
$(2;-3;1)$, $(6;1;-1)$, $(4;8;-9)$, $(2;-1;2)$	$(5;-1;-4)$, $(9;3;-6)$, $(7;10;-14)$, $(5;1;-3)$
$(3;1;-2)$, $(4;-1;0)$, $(14;3;8)$, $(11;5;6)$	$(-8;3;-1)$, $(-7;1;1)$, $(3;5;9)$, $(0;7;7)$

Модуль 02 "Елементи аналітичної геометрії на площині"

СИСТЕМА ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТ

1. Основні поняття та теореми

Відстань між точками точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині визначається за формулою $d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Якщо точка $M(x; y)$ лежить на прямій, що проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, і ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = AM/MB$, то координати точки M визначаються як $x_M = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y_M = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

Якщо точка C – середина відрізка AB, то її координати визначаються за формулами $x_C = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_C = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Пригадаємо наступне:

Медіана трикутника поділяє протилежну сторону навпіл.

Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на два відрізки, які відносяться один до одного як відповідні бічні сторони.

Центр трикутника – точка перетину його медіан, в цій точці медіани діляться у відношенні $2 \div 1$, починаючи від вершин.

Площа трикутника за координатами його вершин $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ визначається за формулою $\pm S = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$.

2. Приклади виконання завдань

1. На координатній площині xOy знайти відстань між точками $A(15;-5)$ і $B(3;0)$; координати точок M_1 і M_2, що поділяють відрізок AB у відношеннях $\lambda = \dfrac{AM_1}{M_1B} = \dfrac{3}{1}$, $\lambda = \dfrac{AM_2}{M_2B} = \dfrac{1}{3}$ відповідно.

Розв'язування:

$d = |AB| = \sqrt{(3 - 15)^2 + (0 + 5)^2} = \sqrt{169} = 13$.

$x_{M_1} = \dfrac{15 + 3 \cdot 3}{1 + 3} = \dfrac{24}{4} = 6$; $y_{M_1} = \dfrac{-5 + 3 \cdot 0}{1 + 3} = \dfrac{-5}{4} = -1{,}25$.

$x_{M_2} = \dfrac{15 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{16}{\frac{4}{3}} = 12$; $y_{M_2} = \dfrac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 0}{1 + \frac{1}{3}} = \dfrac{-5}{\frac{4}{3}} = \dfrac{-15}{3} = -3{,}75$.

2. На координатній площині xOy задано вершини трикутника $A(4;1)$, $B(-1;3)$, $C(2;-1)$. Знайти довжини медіани BM і висоти AN трикутника.

Розв'язування:

Координати точки M як середини AC: $x_M = \frac{4+2}{2} = 3$, $y_M = \frac{1-1}{2} = 0$.

Тоді довжина медіани $|BM| = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Оскільки $S_\Delta = \frac{1}{2} BC \cdot AN$, то $AN = \frac{2S_\Delta}{BC}$. Площа трикутника ABC:

$\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1-4 & 3-1 \\ 2-4 & -1-1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 7 кв.од.$. Довжина сторони BC:

$|BC| = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{25} = 5$. Тоді довжина висоти: $AN = \frac{2 \cdot 7}{5} = 2{,}8$.

3. На координатній площині xOy задано вершини трикутника: $A(-4;0)$, $B(-1;4)$, $C(2;-8)$. Знайти довжину бісектриси AD трикутника.

Розв'язування:

Бісектриса AD поділяє сторону BC у відношенні $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Так як $|AB| = \sqrt{(-1+4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{25} = 5$, $|AC| = \sqrt{(2+4)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$, то $\frac{BD}{CD} = \frac{5}{10} = 0{,}5 = \lambda$. Координати точки D: $x_D = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{-1+0{,}5 \cdot 2}{1+0{,}5} = \frac{0}{1{,}5} = 0$, $y_D = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{4+0{,}5\cdot(-8)}{1+0{,}5} = \frac{0}{1{,}5} = 0$. Тоді довжина бісектриси AD: $|AD| = \sqrt{(0+4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16} = 4$.

4. На координатній площині xOy задано вершини $A(7;0)$, $B(3;4)$, $C(4;-3)$ трикутника. Знайти довжини сторін, площу трикутника, висоту AD, кут B, бісектрису BE, медіану CF і центр трикутника O.

Розв'язування:

Довжини сторін трикутника: $|AB| = \sqrt{(3-7)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$, $|BC| = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2} = 5\sqrt{2}$, $|CA| = \sqrt{(7-4)^2 + (0+3)^2} = 3\sqrt{2}$.

Площа трикутника ABC: $\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3-7 & 4-0 \\ 4-7 & -3-0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 12 кв.од.$.

Оскільки $S_\Delta = \frac{1}{2} BC \cdot AD$, то $AD = \frac{2S_\Delta}{BC}$. Тоді $AN = \frac{2 \cdot 12}{5\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$.

Так як $\angle B = \arcsin\frac{AD}{AB}$, то $\angle B = \arcsin\frac{12\sqrt{2}}{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \arcsin 0{,}6$; $\angle B \approx 36{,}87^\circ$.

Бісектриса BE поділяє сторону AC на відрізки у відношенні $\frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 0{,}8 = \lambda$.

Тоді координати точки E, що поділяє сторону AC у заданому відношенні: $x_E = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{7+0{,}8\cdot 4}{1+0{,}8} = \frac{17}{3}$, $y_E = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{0+0{,}8\cdot(-3)}{1+0{,}8} = -\frac{4}{3}$.

Довжина бісектриси $|BE| = \sqrt{\left(\frac{17}{3}-3\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}-4\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{8}{3}\sqrt{5}$.

Координати точки F: $x_F = \frac{7+3}{2} = 5$, $y_F = \frac{0+4}{2} = 2$. Довжина медіани $|CF| = \sqrt{(5-4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{26}$.

Координати центра трикутника O, як точки, що поділяє медіани у відношенні $2 \div 1$, починаючи від вершин трикутника, становлять: $x_O = \frac{x_C + 2x_F}{1+2} = \frac{4+2\cdot 5}{1+2} = \frac{14}{3}$, $y_O = \frac{y_C + 2y_F}{1+2} = \frac{-3+2\cdot 2}{1+2} = \frac{1}{3}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. На координатній площині xOy знайти відстань між точками $A(\alpha+5; 2\alpha+1)$ і $B(-2\alpha+2; -2\alpha-3)$; координати точок M_1 і M_2, що поділяють відрізок AB у відношеннях $\lambda = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{4}{1}$, $\lambda = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{1}{4}$ відповідно.

2. На координатній площині xOy задано вершини трикутника ABC. Знайти довжину його висоти, яка проведена з вершини C та довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

Варіант	A	B	C	Варіант	A	B	C
1.	$(-3;1)$	$(0;5)$	$(6;-11)$	2.	$(-2;2)$	$(1;6)$	$(7;-10)$
3.	$(-1;3)$	$(2;7)$	$(8;-9)$	4.	$(0;4)$	$(3;8)$	$(9;-8)$
5.	$(1;5)$	$(4;9)$	$(10;-7)$	6.	$(2;6)$	$(5;10)$	$(11;-6)$
7.	$(3;7)$	$(6;11)$	$(12;-5)$	8.	$(4;8)$	$(7;12)$	$(13;-4)$
9.	$(5;9)$	$(8;13)$	$(14;-3)$	10.	$(-3;1)$	$(6;-11)$	$(0;5)$
11.	$(-2;2)$	$(7;-10)$	$(1;6)$	12.	$(-1;3)$	$(8;-9)$	$(2;7)$
13.	$(0;4)$	$(9;-8)$	$(3;8)$	14.	$(1;5)$	$(10;-7)$	$(4;9)$
15.	$(2;6)$	$(11;-6)$	$(5;10)$	16.	$(3;7)$	$(12;-5)$	$(6;11)$
17.	$(4;8)$	$(13;-4)$	$(7;12)$	18.	$(5;9)$	$(14;-3)$	$(8;13)$
19.	$(-4;0)$	$(2;-8)$	$(-1;4)$	20.	$(-3;1)$	$(3;-7)$	$(0;5)$
21.	$(-2;2)$	$(4;-6)$	$(1;6)$	22.	$(-1;3)$	$(5;-5)$	$(2;7)$
23.	$(0;4)$	$(6;-4)$	$(3;8)$	24.	$(1;5)$	$(7;-3)$	$(4;9)$
25.	$(2;6)$	$(8;-2)$	$(5;10)$	26.	$(3;7)$	$(9;-1)$	$(6;11)$
27.	$(4;8)$	$(10;0)$	$(7;12)$	28.	$(5;9)$	$(11;1)$	$(8;13)$

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ. РІЗНІ РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $(x_1;y_1)$ та $(x_2;y_2)$, має вигляд $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$. Вектор $\vec{n}(A;B)$ – є нормаллю до прямої.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$, де $k=\text{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої, тобто тангенс кута, який утворює пряма з додатнім напрямком осі Ox, причому цей кут відраховується від осі Ox до прямої проти руху часової стрілки; b – величина відрізка, який пряма відтинає на осі ординат.

Рівняння прямої у відрізках на осях $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, де a – відрізок, який пряма відтинає на осі абсцис від початку координат, а b – відрізок, який пряма відтинає на осі ординат від початку координат.

Нормальне рівняння прямої $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, де p – довжина перпендикуляра, який опущено з початку координат на пряму (рис. 3), α – кут, який перпендикуляр утворює з додатнім напрямком осі Ox і відлічується від осі проти годинникової стрілки.

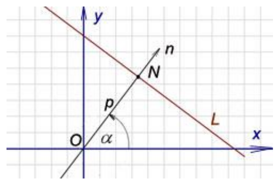

Рис. 3.

Для приведення загального рівняння прямої до нормального вигляду обидві його частини потрібно помножити на нормуючий множник $\mu=\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак множника вибирається протилежним знаку C у загальному рівнянні прямої.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано точки $A(-1;2)$, $B(2;3)$. Знайти загальне рівняння прямої AB, кутовий коефіцієнт прямої, точки перетину прямої з осями координат, відстань до початку координат.

Розв'язування:

Застосуємо рівняння прямої, яка проходить через дві точки, маємо $\dfrac{x+1}{2+1}=\dfrac{y-2}{3-2}$; $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}$. Застосуємо властивість пропорції $1(x+1)=3(y-2)$, звідки $x+1=3y-6$, тоді загальне рівняння $x-3y+7=0$.

Для визначення кутового коефіцієнта прямої виразимо y із загального рівняння прямої, маємо $-3y=-x-7$, $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{7}{3}$, тому $k=\dfrac{1}{3}$.

Перетворимо рівняння $x-3y+7=0$ у рівняння у відрізках на осях, маємо $x-3y=-7$, $\frac{x}{-7}+\frac{3y}{7}=1$, $\frac{x}{-7}+\frac{y}{\frac{7}{3}}=1$, тоді точки перетину з осями $(-7;0)$ і $\left(0;\frac{7}{3}\right)$.

Запишемо нормальне рівняння прямої. Для цього знайдемо нормуючий множник $\mu=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$ (знак «мінус», бо $C=7$ «з плюсом»), тоді нормальне рівняння $-\frac{x}{\sqrt{10}}+\frac{3y}{\sqrt{10}}-\frac{7}{\sqrt{10}}=0$. Звідки відстань до початку відліку $d=\frac{7\sqrt{10}}{10}$.

2. Задано координати точок $D(-3;4)$, $E(-9;2)$, $G(-1;6)$, $H(-5;8)$. Записати рівняння через дві точки; загальні рівняння; рівняння з кутовим коефіцієнтом; рівняння у відрізках на осях; нормальні рівняння прямих DE і GH.

Розв'язування:

Рівняння прямої, яка проходить через точки D та E, має вигляд $\frac{x+3}{-9+3}=\frac{y-4}{2-4}$, звідки $\frac{x+3}{-6}=\frac{y-4}{-2}$ або $\frac{x+3}{6}=\frac{y-4}{2}$.

Знаходимо загальне рівняння прямої DE: $2(x+3)=6(y-4)$, $2x+6=6y-24$, $2x-6y+30=0$ або $x-3y+15=0$.

Рівняння DE з кутовим коефіцієнтом: $-3y=-x-15$, тоді $y=\frac{1}{3}x+5$.

Знаходимо рівняння прямої DE у відрізках на осях, маємо $x-3y=-15$, $\frac{x}{-15}+\frac{3y}{15}=1$, тоді $\frac{x}{-15}+\frac{y}{5}=1$.

Нормуючий множник $\mu=-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, тоді нормальне рівняння прямої DE: $-\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}y-\frac{15}{\sqrt{10}}=0$.

Рівняння прямої, яка проходить через точки G та H, має вигляд: $\frac{x+1}{-5+1}=\frac{y-6}{8-6}$, звідки $\frac{x+1}{-4}=\frac{y-6}{2}$.

Знаходимо загальне рівняння прямої GH: $2(x+1)=-4(y-6)$, $2x+2=-4y+24$, $2x+4y-22=0$ або $x+2y-11=0$.

Рівняння GH з кутовим коефіцієнтом: $2y=-x+11$, тоді $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$.

Знаходимо рівняння прямої GH у відрізках на осях, маємо $x+2y=11$, $\frac{x}{11}+\frac{2y}{11}=1$, тоді $\frac{x}{11}+\frac{y}{5,5}=1$.

Нормуючий множник $\mu=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, тоді нормальне рівняння прямої GH: $\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y-\frac{11}{\sqrt{5}}=0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Задано координати точок D, E, G, H. Записати: рівняння через дві точки; загальні рівняння; рівняння з кутовим коефіцієнтом; рівняння у відрізках на осях; нормальні рівняння прямих DE і GH.

1.	$D(-2;9)$ $E(0;-1)$ $G(5;4)$ $H(-4;7)$	2.	$D(-5;0)$ $E(1;-2)$ $G(4;-2)$ $H(-2;-6)$
3.	$D(1;6)$ $E(4;0)$ $G(-3;5)$ $H(9;2)$	4.	$D(1;5)$ $E(7;1)$ $G(6;5)$ $H(-2;1)$
5.	$D(1;8)$ $E(4;-1)$ $G(-2;4)$ $H(8;2)$	6.	$D(1;9)$ $E(3;3)$ $G(4;5)$ $H(-4;3)$
7.	$D(-4;2)$ $E(2;3)$ $G(-1;5)$ $H(8;2)$	8.	$D(-3;8)$ $E(0;-4)$ $G(-4;4)$ $H(2;2)$
9.	$D(-6;2)$ $E(6;1)$ $G(-2;9)$ $H(-1;5)$	10.	$D(-6;-3)$ $E(-2;3)$ $G(-3;5)$ $H(5;3)$
11.	$D(-5;1)$ $E(2;8)$ $G(2;3)$ $H(8;1)$	12.	$D(-3;7)$ $E(6;1)$ $G(-2;2)$ $H(6;8)$
13.	$D(0;4)$ $E(8;1)$ $G(-4;-3)$ $H(9;-2)$	14.	$D(-3;-4)$ $E(1;6)$ $G(-3;-3)$ $H(1;3)$
15.	$D(2;5)$ $E(9;-2)$ $G(3;8)$ $H(-2;-2)$	16.	$D(-2;3)$ $E(4;-1)$ $G(-3;1)$ $H(3;5)$
17.	$D(-3;3)$ $E(-1;4)$ $G(1;1)$ $H(-4;2)$	18.	$D(-1;1)$ $E(6;4)$ $G(2;5)$ $H(10;1)$
19.	$D(-2;1)$ $E(1;2)$ $G(-1;4)$ $H(5;2)$	20.	$D(-1;1)$ $E(3;5)$ $G(1;4)$ $H(7;2)$
21.	$D(4;-2)$ $E(2;6)$ $G(-1;2)$ $H(5;-4)$	22.	$D(-4;6)$ $E(5;3)$ $G(5;5)$ $H(-3;1)$
23.	$D(-2;-2)$ $E(2;-6)$ $G(1;2)$ $H(3;8)$	24.	$D(-3;2)$ $E(2;3)$ $G(-2;3)$ $H(-6;7)$
25.	$D(-2;-4)$ $E(1;2)$ $G(-2;3)$ $H(4;1)$	26.	$D(0;1)$ $E(1;4)$ $G(-2;-1)$ $H(1;-4)$
27.	$D(-1;-1)$ $E(1;3)$ $G(-3;0)$ $H(1;-2)$	28.	$D(1;-4)$ $E(3;-3)$ $G(4;-2)$ $H(-1;-1)$
29.	$D(1;-4)$ $E(5;6)$ $G(1;-3)$ $H(5;3)$	30.	$D(-1;-1)$ $E(5;2)$ $G(0;4)$ $H(4;0)$

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ І ТОЧОК НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Якщо дві прямі задані рівняннями $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$, то кут між прямими φ визначається за формулою $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$.

Якщо рівняння прямих задані в загальному вигляді, то кут між ними визначається за формулою $\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$.

Прямі паралельні, якщо $k_1 = k_2$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Прямі перпендикулярні, якщо $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ в даному напрямі, який визначається кутовим коефіцієнтом k, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Координати точки перетину двох прямих знаходять, розв'язуючи системую рівнянь $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$

Відстань від точки $(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ визначає формула $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Дано вершини $A(5;0)$, $B(0;1)$, $C(3;3)$ трикутника. Знайти рівняння сторін, кути трикутника.

Розв'язування:

Рівняння сторін визначаємо за двома відповідними вершинами

$AB: \frac{x-5}{0-5} = \frac{y-0}{1-0}$; $\frac{x-5}{-5} = \frac{y}{1}$; $1 \cdot (x-5) = -5 \cdot y$; $x - 5 = -5y$; $x + 5y - 5 = 0$.

$BC: \frac{x-0}{3-0} = \frac{y-1}{3-1}$; $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2}$; $2x = 3(y-1)$; $2x = 3y - 3$; $2x - 3y + 3 = 0$.

$CA: \frac{x-3}{5-3} = \frac{y-3}{0-3}$; $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-3}$; $-3(x-3) = 2(y-3)$; $-3x + 9 = 2y - 6$; $-3x - 2y + 3 = 0$ або $3x + 2y - 3 = 0$.

Кути знайдемо за формулою $\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$. Кут між прямими AB і CA: $\cos\angle A = \frac{1 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle A = 45^\circ$;

кут між AB і BC: $\cos\angle B = \frac{|1 \cdot 2 + 5 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\angle B = 45^\circ$;

тоді кут $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 90^\circ$.

2. Написати рівняння прямих, що проходять через точку $(1;2)$ перпендикулярно і паралельно прямій $3x + 2y - 7 = 0$.

Розв'язування:

Спочатку визначимо кутовий кофіцієнт прямої $2y = -3x + 7$.

Маємо $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$, $k=-\frac{3}{2}$.

Кутовий кофіцієнт паралельної прямої $k_{//}=-\frac{3}{2}$. Тоді рівняння паралельної прямої, що проходе через задану точку: $y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$, звідки $y-2=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$, $y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}+2$ або $y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$.

Кутовий кофіцієнт перпендикулярної прямої $k_{\perp}=\frac{2}{3}$. Тоді рівняння перпендикулярної прямої, що проходе через задану точку: $y-2=\frac{2}{3}(x-1)$, звідки $y-2=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$, $y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+2$ або $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.

3. (продовження задачі попереднього заняття). Знайти: величину кута між прямими DE і GH; координати точки перетину прямих DE і GH; рівняння прямої g, що проходить через точку G паралельно прямій DE; рівняння прямої h, що проходить через точку H перпендикулярно прямій DE; відстані від точок G, H до прямої DE.

Розв'язування:

Випишемо для прямої DE: загальне рівняння $x-3y+15=0$, рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=\frac{1}{3}x+5$; для прямої GH: загальне рівняння $x+2y-11=0$, рівняння з кутовим коефіцієнтом $y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$; координати точок $G(-1;6)$, $H(-5;8)$.

Тангенс кута між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відомі, обчислимо за формулою $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$. Так як $k_1=\frac{1}{3}$ і $k_2=-\frac{1}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}{1-\frac{1}{6}}\right|=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1,\ \varphi=45^{\circ}.$$

Для того, щоб знайти координати точки перетину прямих DE та GH, розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases}x-3y+15=0,\\x+2y-11=0.\end{cases}$ Віднімемо від другого рівняння перше, маємо $5y-26=0$, звідки $y_{\times}=5{,}2$, тоді з другого рівняння $x+2\cdot5{,}2-11=0$, $x_{\times}=11-10{,}4=0{,}6$. Таким точка перетину прямих є $(0{,}6;5{,}2)$.

Рівняння прямої, що проходить через точку в заданому напрямі, має вигляд $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Кутовий коефіцієнт прямої g, що паралельна прямій DE, рівний $k_g = k_{DE} = \frac{1}{3}$. Підставляючи кутовий коефіцієнт та координати точки G, маємо $y - 6 = \frac{1}{3}(x+1)$, $y - 6 = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3} + 6$, $y = \frac{x}{3} + \frac{19}{3}$. Кутовий коефіцієнт прямої h, що перпендикулярна прямій DE, рівний $k_h = -\frac{1}{k_{DE}} = -3$. Підставляючи кутовий коефіцієнт та координати точки H, маємо $y - 8 = -3(x+5)$, $y - 8 = -3x - 15$, $y = -3x - 7$.

Відстань від точки до прямої знайдемо за формулою $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Відстань від точки $G(-1;6)$ до прямої DE із загальним рівнянням $x - 3y + 15 = 0$ рівна $d_G = \frac{|-1 - 3\cdot 6 + 15|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \approx 1{,}26$. Відстань від точки $H(-5;8)$ до прямої DE рівна $d_H = \frac{|-5 - 3\cdot 8 + 15|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}} \approx 4{,}43$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. (продовження попереднього домашнього). Знайти: величину кута між прямими DE і GH; координати точки перетину прямих DE і GH; рівняння прямої g, що проходить через точку G паралельно прямій DE; рівняння прямої h, що проходить через точку H перпендикулярно прямій DE; відстані від точок G, H до прямої DE.

ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Коло – це геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від однієї і тієї ж точки, яка називається центром кола. Рівняння кола має такий вигляд $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, де $(x_0; y_0)$ – координати центра кола, r – радіус кола.

Якщо центр кола знаходиться у точці $(0;0)$, а радіус $r = a$, то рівняння кола має вигляд $x^2 + y^2 = a^2$.

Еліпсом називається геометричне місце точок, для кожної з яких сума відстаней від двох фіксованих точок площини (F_1 і F_2), які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне (найпростіше) рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де a –велика піввісь еліпса, b – мала піввісь еліпса (при умові $a>b$).

Фокуси еліпса $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ розташовані на великій півосі, відстань між фокусами (фокальна відстань) рівна $2c$ (рис. 4).

Величини a, b, c пов'язані рівністю $c^2=a^2-b^2$.

Ексцентриситет еліпса (ε) – відношення фокальної відстані ($2c$) до довжини його великої осі ($2a$), тобто $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Для еліпса $\varepsilon<1$.

Дві прямі, перпендикулярні до більшої осі, які розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, називаються директрисами еліпса. Рівняння директрис мають вигляд $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{a^2}{c}$.

Якщо $a=b$, то канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ або $x^2+y^2=a^2$, тобто такий еліпс є колом (Коло – еліпс з нульовою фокальною відстанню або фокуси якого співпадають).

Гіперболою називається геометричне місце точок, для кожної з яких різниця відстаней від двох фіксованих точок площини (F_1 і F_2), які називаються фокусами, є величина стала.

Канонічне (найпростіше) рівняння гіперболи має вигляд $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь гіперболи.

Фокуси гіперболи $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ розташовані на її дійсній півосі, відстань між фокусами $2c$ (рис. 5).

Величини a, b, c пов'язані рівністю $c^2=a^2+b^2$.

Ексцентриситет гіперболи (ε) – це відношення фокальної відстані ($2c$) до довжини її дійсної осі ($2a$), тобто $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Для гіперболи $\varepsilon>1$.

Дві прямі, перпендикулярні до дійсної осі гіперболи, які розташовані симетрично відносно центра на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього, – директриси гіперболи. Рівняння директрис мають вигляд $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{a^2}{c}$.

Якщо $a=b$, то гіпербола називається рівнобічною, її рівняння при цьому має вигляд $x^2-y^2=a^2$.

Асимптоти гіперболи – прямі, які задаються рівняннями $y=\pm\frac{b}{a}x$.

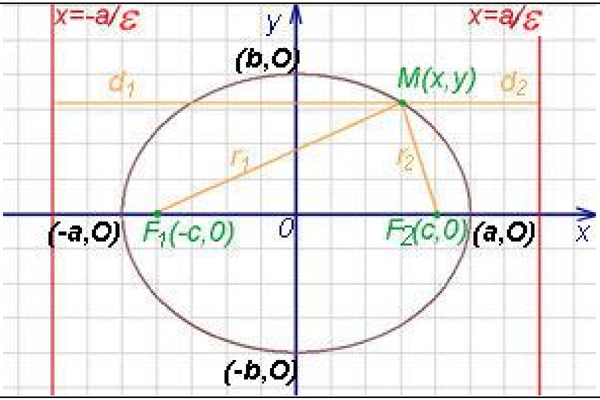

Рис. 4

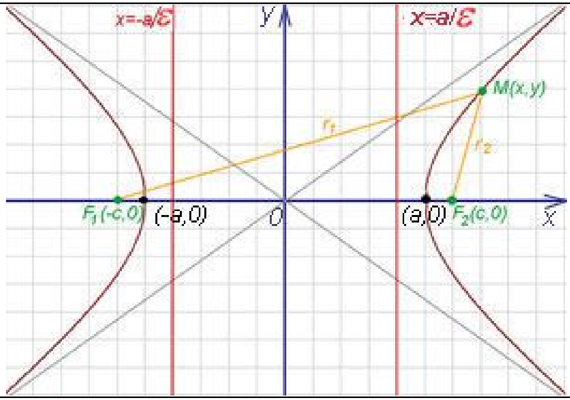

Рис. 5

Асимптоти застосовують для побудови гіперболи. Для цього будують прямокутник через точки $(a;0)$, $(-a;0)$, $(0;b)$, $(0;-b)$ зі сторонами паралельними координатним осям, проводять діагоналі прямокутника і продовжують їх за межі прямокутника – це асимптоти. Далі з точок $(a;0)$, $(-a;0)$ (якщо дійсна піввісь a) або з точок $(0;b)$, $(0;-b)$ (якщо дійсна піввісь b) проводимо вітки гіперболи наближаючись до асимптот, але не перетинаючи їх (рис. 6).

Параболою є геометричне місце точок для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини (F), яка називається фокусом, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка називається директрисою (ця пряма не повинна проходити через фокус) (рис. 7).

Канонічне (найпростіше) рівняння параболи з фокусом $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ та директрисою $x=-\frac{p}{2}$ має вигляд $y^2=2px$, де p – параметр параболи.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon=1$.

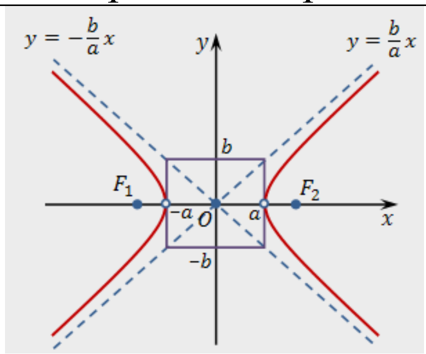

Рис. 6

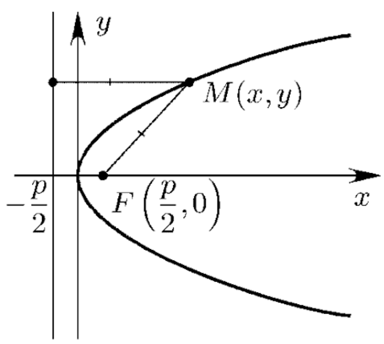

Рис. 7

2. Приклади виконання завдань

1. Записати канонічне рівняння еліпса $16x^2+25y^2=400$, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс.

Розв'язування:

Поділимо обидві частини $16x^2+25y^2=400$ на 400, отримаємо $\frac{16x^2}{400}+\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400}$ або $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. Тоді канонічне рівняння $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Це еліпс з центром $(0;0)$ і півосями $a=5$ (по Ox), $b=4$ (по Oy) (рис. 8).

Визначаємо $c^2=a^2-b^2=25-16=9$, тоді $c=3$, отже фокусами є $F_1(-3;0)$ та $F_2(3;0)$, фокальна відстань $2c=6$.

Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$. Рівняння директрис $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{3}$.

2. Записати канонічне рівняння гіперболи $25x^2-144y^2=3600$, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, зобразити гіперболу.

Розв'язування:

Поділимо $25x^2-144y^2=3600$ на 3600, маємо $\frac{25x^2}{3600}-\frac{144y^2}{3600}=\frac{3600}{3600}$ або $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$. Тоді канонічне рівняння $\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$. Це гіпербола з центром $(0;0)$ і півосями $a=12$ (дійсна), $b=5$ (уявна) (рис. 9).

Визначаємо $c^2=a^2+b^2=144+25=169$, тоді $c=13$, отже фокусами є $F_1(-13;0)$ та $F_2(13;0)$, фокальна відстань $2c=26$.

Ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}$. Рівняння директрис $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{144}{13}$.

Рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{5}{12}x$.

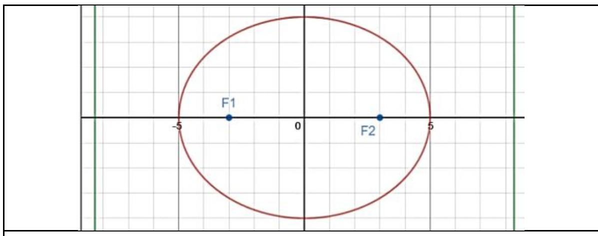

Рис. 8

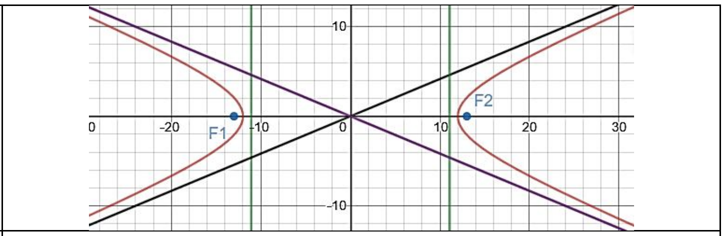

Рис. 9

3. Записати канонічне рівняння гіперболи $9y^2-16x^2=144$, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот, зобразити гіперболу.

Розв'язування:

Поділимо $9y^2-16x^2=144$ на 144, маємо $\frac{9y^2}{144}-\frac{16x^2}{144}=\frac{144}{144}$, $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$.

Тоді канонічне рівняння $\frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{3^2}=1$. Це гіпербола з центром $(0;0)$ і півосями $b=4$ (дійсна по осі Oy), $a=3$ (уявна по осі Ox). Вітки гіперболи розташовані зверху і знизу, а не зліва і справа (рис. 10).

Визначаємо $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, тоді $c = 5$, отже фокусами є $F_1(0;-5)$ та $F_2(0;5)$, фокальна відстань $2c = 10$.

Ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{5}{4}$. Рівняння директрис $y = \pm\dfrac{b^2}{c} = \pm\dfrac{16}{5}$.

Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm\dfrac{4}{3}x$.

4. Записати канонічне рівняння, визначити параметр, фокус, рівняння директриси параболи $y^2 + 20x = 0$, зобразити її.

Розв'язування:

Канонічне рівняння $y^2 = -20x$. Це парабола з вершиною $(0;0)$, параметром $p = -10$, фокусом $F(-5;0)$, директрисою $x = 5$ (рис. 11).

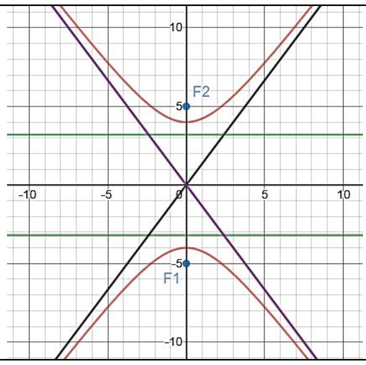

Рис. 10.

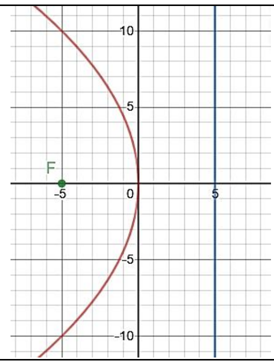

Рис. 11.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Записати канонічне рівняння, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси еліпса $\alpha^2 x^2 + (\alpha+2)^2 y^2 = \alpha^2(\alpha+2)^2$, зобразити еліпс.

2. Записати канонічне рівняння, визначити півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис, рівняння асимптот гіперболи $(\alpha+2)^2 x^2 - \alpha^2 y^2 = (\alpha+2)^2 \alpha^2$, зобразити гіперболу.

3. Записати канонічне рівняння, визначити параметр, фокус, рівняння директриси параболи $y^2 - 2\alpha x = 0$, зобразити параболу.

ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ НА ПЛОЩИНІ

1. Основні поняття та теореми

Координати точок площини при паралельному перенесенні (перетворенні із збереженням напрямку осей, але із зміною положення початку координат) змінюються за формулами $x = x' + a$, $y = y' + b$, де $(a;b)$ – координати початку відліку старої системи координат в новій системі осей.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, зобразити коло.

Розв'язування:

Виділимо повні квадрати у рівнянні $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$, маємо $x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 6y + 9 - 9 - 3 = 0$, $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$. Тоді центр кола $(2;-3)$, радіус $r = 4$ (рис. 12).

2. Записати канонічне рівняння, визначити центр, півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси еліпса $25x^2 + 16y^2 - 50x + 32y - 359 = 0$, зобразити еліпс.

Розв'язування:

Згрупуємо доданки x та y, маємо $25(x^2 - 2x) + 16(y^2 + 2y) - 359 = 0$. Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів і виконаємо для компенсації протилежну дію $25(x^2 - 2x + 1 - 1) + 16(y^2 + 2y + 1 - 1) - 359 = 0$, зайве винесемо за дужки $25(x^2 - 2x + 1) - 25 + 16(y^2 + 2y + 1) - 16 - 359 = 0$, звідки маємо $25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 - 400 = 0$ або $25(x-1)^2 + 16(y+1)^2 = 400$. Поділимо обидві частини на 400, маємо $\frac{25(x-1)^2}{400} + \frac{16(y+1)^2}{400} = \frac{400}{400}$, звідки $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$.

Отримали канонічне рівняння $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y+1)^2}{5^2} = 1$. Отже це еліпс з центром $(1;-1)$ і півосями $a = 4$ (по осі Ox), $b = 5$ (по осі Oy) (рис. 13). Визначаємо $c^2 = 25 - 16 = 9$, тоді $c = 3$, отже фокальна відстань $2c = 6$. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$.

У системі координат, пов'язаній з центром еліпса, фокусами є $F_1'(0;-3)$ та $F_2'(0;3)$ (розташовані на осі Oy), рівняння директрис $y' = \pm\frac{b^2}{c} = \pm\frac{25}{3}$.

З урахуванням, що центр еліпса $(1;-1)$, фокусами є $F_1(1;-4)$ та $F_2(1;2)$, рівняння директрис: $y = -\frac{25}{3} - 1 = -\frac{28}{3}$ та $y = \frac{25}{3} - 1 = \frac{22}{3}$.

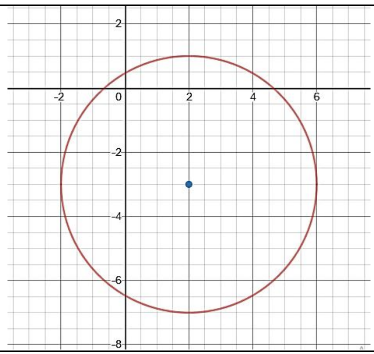

Рис. 12

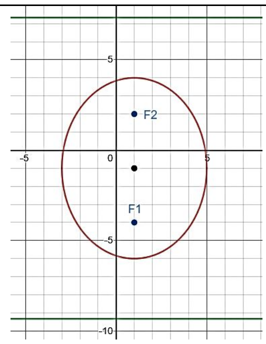

Рис. 13

3. Записати канонічне рівняння, визначити центр, півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис гіперболи $4x^2-9y^2-8x+18y-41=0$, зобразити гіперболу.

Розв'язування:

Згрупуємо доданки x та y, маємо $4(x^2-2x)-9(y^2-2y)-41=0$. Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів і виконаємо для компенсації протилежну дію $4(x^2-2x+1-1)-9(y^2-2y+1-1)-41=0$, зайве винесемо за дужки $4(x^2-2x+1)-4-9(y^2-2y+1)+9-41=0$, маємо $4(x-1)^2-9(y-1)^2-36=0$ або $4(x-1)^2-9(y-1)^2=36$. Поділимо обидві частини на 36, маємо $\frac{4(x-1)^2}{36}-\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$, звідки $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$.

Отримали канонічне рівняння $\frac{(x-1)^2}{3^2}-\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$. Отже це гіпербола з центром $(1;1)$ і півосями $a=3$ (по осі Ox дійсна), $b=2$ (по осі Oy уявна) (рис. 14).

Визначаємо $c^2=9+4=13$, тоді $c=\sqrt{13}$, отже фокальна відстань $2c=2\sqrt{13}$. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

У системі координат, пов'язаній з центром гіперболи, фокусами є $F_1'\left(-\sqrt{13};0\right)$ та $F_2'\left(\sqrt{13};0\right)$, рівняння директрис $x'=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{9}{\sqrt{13}}$, рівняння асимптот мають вигляд $y=\pm\frac{2}{3}x$.

З урахуванням, що центр гіперболи $(1;1)$, фокусами є $F_1\left(1-\sqrt{13};1\right)$ та $F_2\left(1+\sqrt{13};1\right)$, рівняння директрис: $x=\pm\frac{9}{\sqrt{13}}+1$, рівняння асимптот $y-1=\pm\frac{2}{3}(x-1)$, $y=\pm\frac{2}{3}x\mp\frac{2}{3}+1$ або $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ і $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

4. Записати канонічне рівняння параболи $y^2-24x+4y+76=0$, визначити вершину, параметр, фокус, рівняння директриси, зобразити параболу.

Розв'язування:

Згрупуємо доданки з y, маємо $(y^2+4y)-24x+76=0$. Доповнимо вираз в дужках до повного квадрату і виконаємо для компенсації протилежну дію $(y^2+4y+4-4)-24x+76=0$, зайве винесемо за дужки $(y^2+4y+4)-4-24x+76=0$, звідки маємо $(y+2)^2-24x+72=0$ або $(y+2)^2=24x-72$.

Отримали канонічне рівняння $(y+2)^2 = 24(x-3)$. Отже, вершина параболи $(3;-2)$, параметр $p = 12$ (рис. 15).

У системі координат, пов’язаній з вершиною параболи, фокусом є $F'(6;0)$, рівняння директриси $x' = -6$.

З урахуванням, що вершина параболи $(3;-2)$, фокусом є $F'(9;-2)$, рівняння директриси має вигляд $x' = -6 + 3 = 3$.

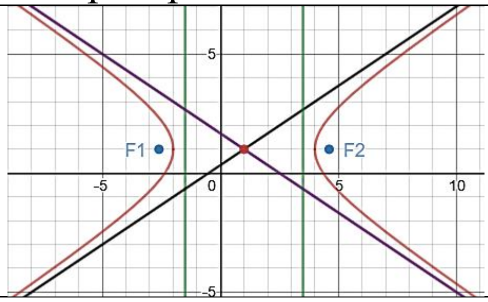

Рис. 14

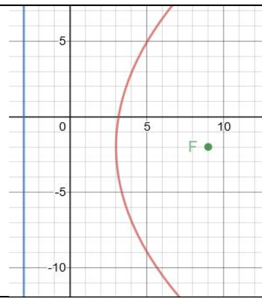

Рис. 15

3. Завдання для самостійного виконання

1. Визначити центр і радіус кола $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 4y - 5 + \alpha^2 = 0$, зобразити коло.

2. Записати канонічне рівняння еліпса, визначити центр, півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, директриси, зобразити еліпс $25x^2 + 16y^2 - 50\alpha x - 64y - 336 + 25\alpha^2 = 0$.

3. Записати канонічне рівняння гіперболи, визначити центр, півосі, фокуси, фокальну відстань, ексцентриситет, рівняння директрис, зобразити гіперболу $4x^2 - 9y^2 - 8\alpha x + 36y - 72 + 4\alpha^2 = 0$.

4. Записати канонічне рівняння параболи $y^2 - 24x - 4y + 4 + 24\alpha = 0$, визначити вершину, параметр, фокус, рівняння директриси, зобразити параболу.

ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ

1. Основні поняття та теореми

Полярна система координат – двовимірна система координат – задається променем (полярна вісь) і точкою (полюс), з якої виходить цей промінь.

Будь-яка інша точка на площині визначається двома полярними координатами (рис 16): радіальною ρ (відстань від точки до полюса); кутовою φ (полярний кут – кут між полярною віссю та напрямком на точку).

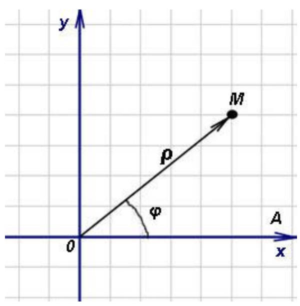

Рис. 16

Якщо полюс полярної системи координат знаходиться в початку прямокутної системи координат, вісь Ox співпадає з полярною віссю, вісь Oy спрямована так, що їй відповідає полярний кут $\varphi=\frac{\pi}{2}$, то формули переходу від полярних координат точки до її прямокутних координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Формули переходу від прямокутних координат точки до її полярних координат: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}$. Кут φ визначають з урахуванням координатної чверті, де розташована точка. При розрахунках іноді зручні формули $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

В полярних координатах рівняння деяких ліній на площині мають компактніший вигляд. Так рівняння кола з центром у початку координат має вигляд $\rho=r$.

2. Приклади виконання завдань

1. Полярні координати точки $\left(52;-\frac{\pi}{4}\right)$. Знайти декартові координати точки.

Розв'язування:

З дано маємо $\rho=52$, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$. Тоді $x=52\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=52\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=26\sqrt{2}$, $y=52\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=52\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-26\sqrt{2}$. Отже, точка в прямокутній системі координат має координати $\left(26\sqrt{2};-26\sqrt{2}\right)$.

2. Знайти полярні координати точки з декартовими координатами $\left(-50;50\sqrt{3}\right)$.

Розв'язування:

З дано маємо $x=-50$, $y=50\sqrt{3}$. Тоді $\rho=\sqrt{2500+7500}=100$; $\mathrm{tg}\varphi=\frac{50\sqrt{3}}{-50}=-\sqrt{3}$. Так як $x<0$, $y>0$, то точка лежить в другій координатній чверті, $\varphi=\pi-\mathrm{arctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$. Отже, точка в полярній системі координат має координати $\left(100;\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Знайти радіус та центр кола з рівнянням у полярних координатах $\rho=70\cos\varphi$.

Розв'язування:

Домножимо обидві частини $\rho=70\cos\varphi$ на ρ, маємо $\rho^2=70\rho\cos\varphi$.

Підставимо формули $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho\cos\varphi$, маємо $x^2 + y^2 = 70x$.

Перетворимо рівняння кола до вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$, маємо $x^2 - 70x + 35^2 + y^2 = 35^2$ або $(x - 35)^2 + y^2 = 35^2$. Маємо рівняння кола з центром у точці $(35;0)$ та радіусом 35.

4. Знайти радіус та центр кола з рівнянням у полярних координатах $\rho = 70\sin\varphi$.

Розв'язування:

Домножимо обидві частини $\rho = 70\sin\varphi$ на ρ, маємо $\rho^2 = 70\rho\sin\varphi$.

Підставимо формули $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \rho\sin\varphi$, маємо $x^2 + y^2 = 70y$.

Перетворимо рівняння кола до вигляду $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$, маємо $x^2 + y^2 - 70y + 35^2 = 35^2$ або $x^2 + (y - 35)^2 = 35^2$. Маємо рівняння кола з центром у точці $(0;35)$ та радіусом 35.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Полярні координати точки $\left(2 + \alpha; \frac{\pi}{3}\right)$. Знайти декартові координати точки.

2. Знайти полярні координати точки з декартовими координатами $(-\alpha; \alpha\sqrt{3})$.

3. Знайти радіус та центр кола з рівнянням у полярних координатах $\rho = 2\alpha\cos\varphi$ або $\rho = 2\alpha\sin\varphi$.

Модуль 03 "Аналітична геометрія в просторі"
ПЛОЩИНА ЯК ПОВЕРХНЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ
1. Основні поняття та теореми

Загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$. Вектор $\vec{n}(A;B;C)$ – є нормаллю до площини.

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A;B;C)$ має вигляд $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Рівняння площини, яка проходить через задані точки $(x_1;y_1;z_1)$, $(x_2;y_2;z_2)$, $(x_3;y_3;z_3)$ знаходиться як $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$.

Рівняння площини у відрізках на координатних осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Нормальне рівняння площини записується у вигляді $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, де p – довжина перпендикуляра, який опущено з початку координат на площину (рис. 17), α, β, γ – кути, які цей перпендикуляр утворює з додатніми напрямками осей Ox, Oy, Oz відповідно.

Для приведення загального рівняння площини до нормального вигляду обидві його частини потрібно помножити на нормуючий множник $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Знак множника вибирається протилежним знаку D у загальному рівнянні площини.

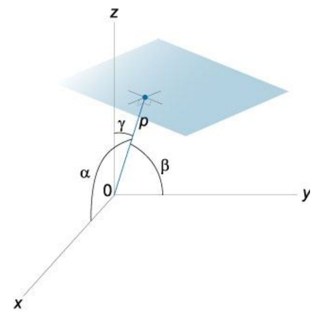

Рис. 17

2. Приклади виконання завдань

1. Записати рівняння площини, що проходе через точку $(2;1;-1)$ і має нормаль $\vec{n}(1;-2;3)$. Які відрізки відтинає площина на координатних осях?

Розв'язування:

Підставимо координати точки і нормалі у рівняння $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, маємо $1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0$, звідки $x-2-2y+2+3z+3=0$ або $x-2y+3z+3=0$.

Перетворимо отримане загальне рівняння площини у рівняння площини у відрізках на осях $x-2y+3z=-3$, $\frac{x}{-3}-\frac{2y}{-3}+\frac{3z}{-3}=\frac{-3}{-3}$ або $\frac{x}{-3}+\frac{y}{\frac{3}{2}}+\frac{z}{-1}=1$. Площина відтинає відрізок -3 на осі абсцис (тобто з від'ємної сторони), відрізок $\frac{3}{2}$ на осі ординат і відрізок -1 (тобто з від'ємної сторони) на осі аплікат.

2. Яка відстань від площини $10x+15y-6z-380=0$ до початку відліку?

Розв'язування:

Приведемо загальне рівняння площини до нормального вигляду. Нормуючий множник $\mu=+\frac{1}{\sqrt{10^2+15^2+(-6)^2}}=\frac{1}{19}$. Тоді нормальне рівняння площини $\frac{10}{19}x+\frac{15}{19}y-\frac{6}{19}z-\frac{380}{19}=0$ або $\frac{10}{19}x+\frac{15}{19}y-\frac{6}{19}z-20=0$. Відстань від площини до початку відліку $d=20$.

3. Які кути з координатними осями утворює перпендикуляр до площини $x+y+\sqrt{2}z=0$, поставлений у початку відліку?

Розв'язування:

Приведемо загальне рівняння площини до нормального вигляду. Нормуючий множник $\mu = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2}} = \frac{1}{2}$. Тоді нормальне рівняння площини $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$. Звідки $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{2}$, $\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тому $\alpha = \beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

4. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $(3;-1;2)$, $(4;-1;-1)$, $(2;0;2)$.

Розв'язування:

Підставимо точки у рівняння площини $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$, маємо $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, розкриваємо визначник $\left|\begin{matrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} x-3 & y+1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 3(y+1) + (z-2) + 3(x-3) = 0$, тоді $3x + 3y + z - 8 = 0$.

5. Задано точки $M_1(-1;1;-2)$, $M_2(1;0;4)$, $M_3(3;2;1)$. Знайти рівняння площини, що проходить через ці точки; рівняння площини у загальному вигляді; вектор нормалі до площини; рівняння площини у відрізках на осях; рівняння площини у нормальному вигляді.

Розв'язування:

Підставивши координати точок у рівняння площини через три точки, дістанемо $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 1+1 & 0-1 & 4+2 \\ 3+1 & 2-1 & 1+2 \end{vmatrix} = 0$ або $\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

Для отримання загального рівняння площини розкриємо визначник, $-3(x+1) + 24(y-1) + 2(z+2) + 4(z+2) - 6(x+1) - 6(y-1) = 0$, зведемо подібні доданки $-9(x+1) + 18(y-1) + 6(z+2) = 0$, звідки отримаємо $3(x+1) - 6(y-1) - 2(z+2) = 0$ або $3x - 6y - 2z + 5 = 0$.

Вектор нормалі до площини – $\vec{n}(3;-6;-2)$.

Для отримання рівняння площини у відрізках на осях виконаємо перетворення загального рівняння площини $3x - 6y - 2z + 5 = 0$, маємо

$3x-6y-2z=-5$, $\frac{3x}{-5}-\frac{6y}{-5}-\frac{2z}{-5}=1$ або $\frac{x}{-\frac{5}{3}}+\frac{y}{\frac{5}{6}}+\frac{z}{\frac{5}{2}}=1$.

Нормуючий множник $\mu=-\frac{1}{\sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2}}=-\frac{1}{7}$. Тоді нормальне рівняння площини має вигляд $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z-\frac{5}{7}=0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Задано точки M_1, M_2, M_3. Знайти рівняння площини, що проходить через ці точки; рівняння площини у загальному вигляді; вектор нормалі до площини; рівняння площини у відрізках на осях; рівняння площини у нормальному вигляді.

1.	$(0;-2;-1)$, $(2;4;-2)$, $(3;2;0)$	2.	$(-1;0;-2)$, $(-2;4;-5)$, $(7;2;5)$
3.	$(4;0;3)$, $(-1;2;-3)$, $(2;0;1)$	4.	$(8;7;4)$, $(2;1;1)$, $(6;1;5)$
5.	$(5;8;0)$, $(2;4;-1)$, $(3;0;2)$	6.	$(3;-2;3)$, $(6;6;2)$, $(1;4;-2)$
7.	$(6;8;1)$, $(9;4;6)$, $(0;2;-2)$	8.	$(2;8;-3)$, $(10;4;7)$, $(4;8;-1)$
9.	$(0;6;-4)$, $(2;-4;3)$, $(6;4;3)$	10.	$(-2;0;-3)$, $(3;10;-3)$, $(2;6;-2)$
11.	$(5;6;1)$, $(4;-2;4)$, $(7;8;2)$	12.	$(-3;-2;-4)$, $(-4;2;-7)$, $(5;0;3)$
13.	$(2;-2;1)$, $(-3;0;-5)$, $(0;-2;-1)$	14.	$(5;4;1)$, $(-1;-2;-2)$, $(3;-2;2)$
15.	$(3;6;-2)$, $(0;2;-3)$, $(1;-2;0)$	16.	$(1;-4;1)$, $(4;4;0)$, $(-1;2;-4)$
17.	$(4;6;-1)$, $(7;2;4)$, $(-2;0;-4)$	18.	$(0;6;-5)$, $(8;2;5)$, $(2;6;-3)$
19.	$(-2;4;-6)$, $(0;-6;1)$, $(4;2;1)$	20.	$(-4;-2;-5)$, $(1;8;-5)$, $(0;4;-4)$
21.	$(3;4;-1)$, $(2;-4;2)$, $(5;6;0)$	22.	$(7;9;2)$, $(10;5;7)$, $(1;3;-1)$
23.	$(0;1;-1)$, $(-1;5;-4)$, $(8;3;6)$	24.	$(5;1;4)$, $(0;3;-2)$, $(3;1;2)$
25.	$(6;9;1)$, $(3;5;0)$, $(4;1;3)$	26.	$(4;-1;4)$, $(7;7;3)$, $(2;5;-1)$
27.	$(6;7;2)$, $(5;-1;5)$, $(8;9;3)$	28.	$(3;9;-2)$, $(11;5;8)$, $(5;9;0)$
29.	$(1;7;-3)$, $(3;-3;4)$, $(7;5;4)$	30.	$(-1;1;-2)$, $(4;11;-2)$, $(3;7;-1)$

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПЛОЩИН І ТОЧОК У ПРОСТОРІ

1. Основні поняття та теореми

Кут між площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ рівний куту міжнормалями цих площин і визначається формулою

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова паралельності двох площин має вигляд $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Умова перпендикулярності двох площин має вигляд $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Відстань від точки $(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ визначається формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти кут між площинами $x+2y+2z-3=0$ та $16x+12y-15z-1=0$.

Розв'язування:

Використовуючи формулу кута між площинами, дістанемо $\cos\varphi=\dfrac{|1\cdot16+2\cdot12+2\cdot(-15)|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{16^2+12^2+(-15)^2}}=\dfrac{10}{3\cdot25}\approx0{,}1333$, $\varphi\approx82^0$.

2. При якому значенні параметра k площина $72x+36y-kz+5=0$ паралельна площині $2x+y-3z-1=0$?

Розв'язування:

Використаємо умову паралельності двох площин $\dfrac{72}{2}=\dfrac{36}{1}=\dfrac{-k}{-3}$, звідки $\dfrac{36}{1}=\dfrac{k}{3}$, звідки $k=108$.

3. При якому значенні параметра k площина $72x+36y-kz+5=0$ перпендикулярна площині $2x+y-3z-1=0$?

Розв'язування:

Згідно умови перпендикулярності площин $72\cdot2+36\cdot1+(-k)\cdot(-3)=0$, звідки $144+36+3k=0$, $3k=-180$, звідки $k=-60$.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1;-2;-3)$ і паралельна до площини $2x-3y+5z+2=0$.

Розв'язування:

В якості нормалі шуканої площини візьмемо нормаль даної паралельної площини $\vec{n}(2;-3;5)$, тоді рівняння шуканої площини $2(x-1)-3(y+2)+5(z+3)=0$ або $2x-3y+5z+7=0$.

5. Знайти відстань від точки $(-10;6;-8)$ до площини $3x-6y-2z+5=0$.

Розв'язування:

Скористаємось формулою відстанівід площини до точки, маємо $d=\dfrac{|3\cdot(-10)-6\cdot6-2\cdot(-8)+5|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+(-2)^2}}=\dfrac{77}{7}=11$.

6. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;-2)$ і $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно до площини $x-2y+3z-5=0$.

Розв’язування:

Нормаль шуканої площини $\vec{n}^*$ перпендикулярна нормалі даної площини $\vec{n}$ і вектору $\overrightarrow{M_1M_2}(2;2;3)$, що лежить в шуканій площині, тому знайдемо $\vec{n}^*$ за формулою векторного добутку, тому маємо

$$\vec{n}^* = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} - 2\vec{k} + 6\vec{i} - 6\vec{j} = 12\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Тобто маємо нормаль $\vec{n}^*(12;-3;-6)$ або $\vec{n}^*(4;-1;-2)$.

Рівняння шуканої площини знайдемо, використовуючи знайдену нормаль і координати будь-якої точки з дано, маємо $4(x-1)-(y+1)-2(z+2)=0$, $4x-y-2z-9=0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. При якому значенні параметра k площина $(4+2\alpha)x+(2+\alpha)y-kz+5=0$ паралельна площині $2x+y-2z-1=0$?

2. При якому значенні параметра k площина $(4+2\alpha)x+(2+\alpha)y-kz+5=0$ перпендикулярна лощині $2x+y-2z-1=0$?

3. Знайти відстань від точки $(\alpha;\alpha+1;-3\alpha)$ до площини $2x+y-2z-1=0$.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1+\alpha;-1;-2)$ і $M_2(3;1;1)$ перпендикулярно площині $x-2y+3z-5=0$.

ПРЯМА У ПРОСТОРІ

1. Основні поняття та теореми

Пряму в просторі можна задати як перетин двох площин, тобто

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

Рівняння прямої в просторі, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$, має вигляд $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Канонічне рівняння прямої лінії, яка проходить через відому точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ в заданому вектором $\vec{a}(l;m;p)$ напрямі ($\vec{a}$ – спрямовуючий вектор прямої), має вигляд $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Параметричні рівняння прямої у просторі записують наступним чином: $x=x_0+lt, \quad y=y_0+mt, \quad z=z_0+pt,$ де t – параметр.

Кут між двома прямими визначається як кут між їхніми спрямовуючими векторами, тобто $\cos\varphi = \dfrac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}$.

Умова паралельності двох прямих у просторі має вигляд $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих має вигляд $l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$.

2. Приклади виконання завдань

1. Записати рівняння прямої в канонічному вигляді, якщо вона задана як перетин двох площин $\begin{cases} 2x - y + 3z - 4 = 0, \\ x + 3y + 5z - 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язування:

Для того щоб записати її рівняння в канонічному вигляді необхідно знайти спрямовуючий вектор $\vec{a}$ та координати деякої точки M_0, що належить даній прямій.

Спрямовуючий вектор прямої перпендикулярний нормалям обох площин, тобто $\vec{a} \perp \vec{n}_1(2;-1;3)$, $\vec{a} \perp \vec{n}_2(1;3;5)$. Визначимо спрямовуючий вектор за допомогою векторного добутку, тобто $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$, $\vec{a} = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k} + \vec{k} - 9\vec{i} - 10\vec{j} = -14\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k}$, звідки $\vec{a}(2;1;-1)$.

В якості точки M_0 можна вибрати довільну точку прямої. Для цього підберемо такі координати, що задовольняють рівняння обох площин.

Так як таких точок безліч, то зафіксуємо довільно одну з координат (наприклад, $z = 0$), а дві інші визначимо з отриманої системи рівнянь $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0, \\ x + 3y - 2 = 0. \end{cases}$ Маємо $\begin{cases} y = 2x - 4, \\ x + 3(2x - 4) - 2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 4, \\ 7x = 14, \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0, \\ x = 2. \end{cases}$ Звідки координати точки $M_0(2;0;0)$.

Таким чином канонічне рівняння прямої має вигляд $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

2. Знайти канонічне рівняння та спрямовуючий вектор прямої, що проходить через дві точки $M_1(2;3;5)$ та $M_2(4;8;9)$. Записати рівняння прямої у параметричному вигляді.

Розв'язування:

Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві точки, маємо $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-3}{8-3}=\frac{z-5}{9-5}$, звідки $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-5}{4}$. Це і є канонічне рівняння, звідки спрямовуючий вектор прямої $\vec{a}(2;5;4)$.

Для знаходження параметричних рівнянь прямої прирівняємо до t кожен дріб канонічного рівняння: $\frac{x-2}{2}=t$, $\frac{y-3}{5}=t$, $\frac{z-5}{4}=t$. Звідки $\begin{cases} x-2=2t, \\ y-3=5t, \\ z-5=4t, \end{cases}$ параметричні рівняння $\begin{cases} x=2t+2, \\ y=5t+3, \\ z=4t+5. \end{cases}$

3. Знайти кут між прямими $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-2}$ та $\frac{x}{-4}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{7}$.

Розв'язування: Застосуємо формулу кута між прямими в просторі, маємо $\cos\varphi=\frac{|2\cdot(-4)+1\cdot 4+(-2)\cdot 7|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+4^2+7^2}}=\frac{18}{3\cdot 9}\approx 0{,}6667$, $\varphi\approx 48^0$.

4. Знайти рівняння прямої, що проходе через точку $(4;-1;5)$ паралельно прямій $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}$.

Розв'язування:

В якості спрямовуючого вектора шуканої прямої візьмемо спрямовуючий вектор даної прямої $\vec{a}(1;3;2)$.

Канонічне рівняння прямої, яка проходить через відому точку в заданому напрямі $\vec{a}$, має вигляд $\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$. Що і є рівнянням шуканої прямої.

5. Дано рівняння двох площин $7x-8y-7z+11=0$, $x-2y+z+3=0$ та координати двох точок $(7;-8;-7)$, $(1;-2;1)$. Потрібно знайти: рівняння першої прямої в канонічному вигляді, що є лінією перетину двох площин; канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки; кут між прямими.

Розв'язування:

Для того щоб записати рівняння першої прямої в канонічному вигляді необхідно знайти спрямовуючий вектор $\vec{a}$ та координати деякої точки M_0, що належить даній прямій.

Спрямовуючий вектор першої прямої перпендикулярний нормалям обох площин, тобто $\vec{a}\perp\vec{n}_1(7;-8;-7)$, $\vec{a}\perp\vec{n}_2(1;-2;1)$. Визначимо спрямовуючий вектор за допомогою векторного добутку, тобто

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 7 & -8 & -7\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j}\\ 7 & -8\\ 1 & -2\end{matrix}=-8\vec{i}-7\vec{j}-14\vec{k}+8\vec{k}-14\vec{i}-7\vec{j}=\overline{(-22;-14;-6)}$$

або $\vec{a}(11;7;3)$.

В якості точки M_0 можна вибрати довільну точку прямої. Зафіксуємо довільно одну з координат ($z=1$), а дві інші визначимо з отриманої системи рівнянь $\begin{cases}7x-8y-7+11=0,\\ x-2y+1+3=0.\end{cases}$ Маємо $\begin{cases}7x-8y+4=0, I-4II\\ x-2y+4=0,\end{cases}$ $\begin{cases}3x-12=0,\\ x-2y+4=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\ y=4.\end{cases}$ Звідки координати точки $M_0(4;4;1)$.

Канонічне рівняння першої прямої, яка проходить через точку M_0 в заданому напрямі $\vec{a}$, має вигляд $\frac{x-4}{11}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-1}{3}$.

Запишемо рівняння другої прямої, яка проходить через дві точки, маємо $\frac{x-7}{1-7}=\frac{y+8}{-2+8}=\frac{z+7}{1+7}$, звідки $\frac{x-7}{-6}=\frac{y+8}{6}=\frac{z+7}{8}$, $\frac{x-7}{-3}=\frac{y+8}{3}=\frac{z+7}{4}$.

Застосуємо формулу кута між прямими в просторі, маємо $\cos\varphi=\frac{|11\cdot(-3)+7\cdot 3+3\cdot 4|}{\sqrt{11^2+7^2+3^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+3^2+4^2}}=\frac{0}{\sqrt{179}\cdot\sqrt{34}}=0$, $\varphi=90^0$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти канонічне рівняння та спрямовуючий вектор прямої, що проходить через дві точки $M_1(-\alpha-4;\alpha+1;\alpha-5)$ та $M_2(\alpha+7;2\alpha-3;\alpha+2)$. Записати рівняння прямої у параметричному вигляді.

2. Дано дві прямі в просторі $\begin{cases}2x-3y+4z-10=0,\\ (\alpha+10)x-2(\alpha+1)y+3\alpha z-6(\alpha+5)=0\end{cases}$ та $\frac{x-\alpha}{\alpha+1}=\frac{y-(\alpha+1)}{-2}=\frac{z+\alpha}{4}$. Потрібно: записати рівняння першої прямої в канонічному вигляді (в якості точки M_0 взяти точку перетину прямої з координатною площиною Oxz); знайти гострий кут між прямими.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ

1. Основні поняття та теореми

Синус кута, який пряма $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{p}$ утворює з площиною

$Ax+By+Cz+D=0$, визначається як $\sin\varphi=\dfrac{|Al+Bm+Cp|}{\sqrt{l^2+m^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд $\dfrac{A}{l}=\dfrac{B}{m}=\dfrac{C}{p}$. Умова паралельності прямої та площини має вигляд $Al+Bm+Cp=0$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти кут між прямою $\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{6}$ та площиною $4x+4y-7z+3=0$.

Розв'язування:

Кут між прямою і площиною визначимо формулою $\sin\varphi=\dfrac{|4\cdot 3+4\cdot 2-7\cdot 6|}{\sqrt{3^2+2^2+6^2}\cdot\sqrt{4^2+4^2+(-7)^2}}=\dfrac{62}{63}$, тоді $\varphi\approx 80^0$.

2. При якому значенні l площина $3x+2y-7z+1=0$ і пряма $\dfrac{x-2}{l}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z-5}{4}$ будуть паралельні?

Розв'язування:

Використаємо умову паралельності прямої та площини $Al+Bm+Cp=0$. Маємо $3l+2\cdot 5-7\cdot 4=0$, $3l=18$, $l=6$.

3. Знайти канонічне рівняння прямої, що проходе через точку $(2;-3;-5)$ перпендикулярно площині $6x-3y-5z+2=0$.

Розв'язування:

В якості спрямовуючого вектора шуканої прямої візьмемо нормаль даної площини $\vec{a}=\vec{n}(6;-3;-5)$.

Тоді канонічне рівняння прямої лінії, яка проходить через задану точку в заданому вектором $\vec{a}$ напрямі, має вигляд $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$.

4. Знайти рівняння площини, що проходе через точку $(3;-2;1)$ перпендикулярно прямій $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z+5}{3}$.

Розв'язування:

В якості нормалі шуканої площини візьмемо спрямовуючий вектор даної прямої $\vec{n}=\vec{a}(1;-2;3)$.

Тоді рівняння площини, що проходе через задану точку і має нормаль $\vec{n}$, має вигляд $1(x-3)-2(y+2)+3(z-1)=0$ або $x-2y+3z-10=0$.

5. Знайти рівняння площини, що проходе через точку $(1;2;3)$ паралельно прямим $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-4}$ і $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+6}{-5}$.

Розв'язування:

Вектор нормалі площини перпендикулярний спрямовуючим векторам обох прямих, тобто $\vec{n}\perp\vec{a}_1$, $\vec{n}\perp\vec{a}_2$. Вектор $\vec{n}$ можна визначити як векторний добуток спрямовуючих векторів $\vec{a}_1(4;5;-4)$ та $\vec{a}_2(3;4;-5)$, тобто маємо $\vec{n}=\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\left|\begin{array}{ccc|cc}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j}\\ 4 & 5 & -4 & 4 & 5\\ 3 & 4 & -5 & 3 & 4\end{array}\right.$, звідки отримуємо $\vec{n}=-25\vec{i}-12\vec{j}+16\vec{k}-15\vec{k}+16\vec{i}+20\vec{j}=-9\vec{i}+8\vec{j}+\vec{k}$ або $\vec{n}(-9;8;1)$.

Тоді рівняння шуканої площини $-9(x-1)+8(y-2)+(z-3)=0$, $-9x+8y+z-10=0$ або $9x-8y-z+10=0$.

6. Знайти точку перетину площини $2x+3y+z-1=0$ з прямою $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$.

Розв'язування:

Запишемо рівняння прямої в параметричному вигляді: $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t$, $\begin{cases}x-1=1\cdot t,\\ y+1=-2\cdot t,\\ z=6\cdot t,\end{cases}$ $\begin{cases}x=t+1,\\ y=-2t-1,\\ z=6t.\end{cases}$

Підставляючи ці вирази для x, y та z в рівняння площини, одержимо $2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0$, звідки $2t+2-6t-3+6t+1=0$, $2t-2=0$, $t=1$.

Це значення параметра відповідає точці перетину прямої і площини. Таким чином координати точки перетину: $\begin{cases}x_\times=1+1=2,\\ y_\times=-2\cdot 1-1=-3,\\ z_\times=6\cdot 1=6.\end{cases}$

Тобто точка перетину прямої і площини $(2;-3;6)$.

7. Знайти відстань від точки $(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

Розв'язування:

Введемо допоміжну площину, що проходе через задану точку перпендикулярно заданій прямій. Тоді рівняння допоміжної площини $3(x-1)+2(y+1)-2(z+2)=0$ або $3x+2y-2z-5=0$.

Знайдемо точку перетину даної прямої з допоміжною площиною. Для цього параметричні рівняння даної прямої $\begin{cases} x = 3t - 3, \\ y = 2t - 2, \\ z = -2t + 8 \end{cases}$ підставимо у рівняння допоміжної площини $3(3t - 3) + 2(2t - 2) - 2(-2t + 8) - 5 = 0$, звідки маємо $17t - 34 = 0$, $t = 2$,тоді координати точки перетину даної прямої з допоміжною площиною $(3;2;4)$.

Шукана відстань є відстанню між даною точкою та точкою перетину даної прямої з допоміжною площиною, тому застосуємо формулу відстані між двома точками $d = \sqrt{(3-1)^2 + (2+1)^2 + (4+2)} = 7$.

8. Дано три точки $D(2;-5;-11)$, $E(5;-7;-16)$, $F(1;0;-6)$. Потрібно: записати канонічне рівняння прямої DE; записати рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно до прямої DE; знайти точку перетину цієї площини з прямою DE; знайти відстань від точки F до прямої DE.

Розв'язування:

Скористуємось рівнням прямої, що проходе через дві точки, маємо $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y+5}{-7+5} = \frac{z+11}{-16+11}$, $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+11}{-5}$. Це канонічне рівняння прямої DE.

Так як спрямовуючий вектор прямої DE беремо в якості нормалі площини, що перпендикулярна прямій DE, тобто $\vec{n} = \vec{a}(3;-2;-5)$. Тоді рівняння шуканої площини $3(x-1) - 2(y-0) - 5(z+6) = 0$, звідки $3x - 3 - 2y - 5z - 30 = 0$ або $3x - 2y - 5z - 33 = 0$.

Знаходимо точку перетину прямої DE з площиною. Для цього параметричні рівняння даної прямої $\begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = -2t - 5, \\ z = -5t - 11 \end{cases}$ підставимо у рівняння знайденої площини $3(3t+2) - 2(-2t-5) - 5(-5t-11) - 33 = 0$, звідки маємо $38t + 38 = 0$, $t = -1$,тоді координати точки перетину прямої з площиною $(-1;-3;-6)$.

Відстань від точки F до прямої DE є відстанню між точкою F та точкою перетину прямої з площиною, тому застосуємо формулу відстані між двома точками $d = \sqrt{(1+1)^2 + (0+3)^2 + (-6+6)} = \sqrt{13}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дано три точки D, E, F. Потрібно: записати канонічне рівняння прямої DE; записати рівняння площини, що проходить через точку F перпендикулярно до прямої DE; знайти точку перетину цієї площини з прямою DE; знайти відстань від точки F до прямої DE.

1.	$(5;1;7)$, $(9;3;3)$, $(6;0;3)$	2.	$(1;4;5)$, $(5;6;1)$, $(2;3;1)$
3.	$(4;-1;9)$, $(8;1;5)$, $(5;-2;5)$	4.	$(2;0;8)$, $(6;2;4)$, $(3;-1;4)$
5.	$(-2;2;3)$, $(2;4;-1)$, $(-1;1;-1)$	6.	$(-1;4;2)$, $(3;6;-2)$, $(0;3;-2)$
7.	$(-2;2;10)$, $(2;4;6)$, $(-1;1;6)$	8.	$(3;6;2)$, $(7;8;-2)$, $(4;5;-2)$
9.	$(6;-2;11)$, $(10;0;7)$, $(7;-3;7)$	10.	$(3;3;2)$, $(7;5;-2)$, $(4;2;-2)$
11.	$(3;-1;5)$, $(7;1;1)$, $(4;-2;1)$	12.	$(-1;2;3)$, $(3;4;-1)$, $(0;1;-1)$
13.	$(2;-3;7)$, $(6;-1;3)$, $(3;-4;3)$	14.	$(0;-2;6)$, $(4;0;2)$, $(1;-3;2)$
15.	$(-3;1;2)$, $(1;3;-2)$, $(-2;0;-2)$	16.	$(-2;3;1)$, $(2;5;-3)$, $(-1;2;-3)$
17.	$(-4;0;8)$, $(0;2;4)$, $(-3;-1;4)$	18.	$(1;4;0)$, $(5;6;-4)$, $(2;3;-4)$
19.	$(4;-4;9)$, $(8;-2;5)$, $(5;-5;5)$	20.	$(5;5;4)$, $(9;7;0)$, $(6;4;0)$
21.	$(1;-1;3)$, $(5;1;-1)$, $(2;-2;-1)$	22.	$(-3;0;1)$, $(1;2;-3)$, $(-2;-1;-3)$
23.	$(1;-4;6)$, $(5;-2;2)$, $(2;-5;2)$	24.	$(1;-1;7)$, $(5;1;3)$, $(2;-2;3)$
25.	$(-5;-1;0)$, $(-1;1;-4)$, $(-4;-2;-4)$	26.	$(-3;2;0)$, $(1;4;-4)$, $(-2;1;-4)$
27.	$(-3;1;9)$, $(1;3;5)$, $(-2;0;5)$	28.	$(-1;2;-2)$, $(3;4;-6)$, $(0;1;-6)$
29.	$(2;-6;7)$, $(6;-4;3)$, $(3;-7;3)$	30.	$(3;3;2)$, $(7;5;-2)$, $(4;2;-2)$

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вища математика. Контрольні завдання та методичні рекомендації для самостійної роботи студентів денної форми навчання напряму підготовки 6.090101 Агрономія / [В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, В.Г. Богза та ін.] – Миколаїв: МНАУ, 2021. – 156 с.
2. Практикум з вищої математики. Комп'ютерна система для дистанційного навчання. – в 2-х ч. – ч. 1 / [В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, І.П. Атаманюк та ін.] – Миколаїв: МНАУ, 2016. – 229 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА. АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ

Методичні рекомендації

Укладачі: Бойчук Олена Володимирівна
Богданов Сергій Іванович
Борчик Євген Юрійович
Шептилевський Олексій Вікторович

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк.
Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.