УДК 539.3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВІЛЬНОГО РУХУ В’ЯЗКОПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА В КАНАЛІ

Борчик Є. Ю., канд. фіз.-мат. наук, доцент
e-mail: borchikeu@gmail.com
Миколаївський національний аграрний університет

Математичне моделювання процесів деформування сипучих середовищ визначається в наш час задачами, які виникають в геомеханіці та техніці (моделювання руху зерна в елеваторі, пневматичне транспортування сипучих матеріалів в хімічній промисловості, моделювання сходу сніжних лавин, рух магми на поверхні Землі і в каналах, тощо). В механіці суцільних середовищ існує два основних підходи до моделювання сипучих матеріалів. Перший заснований на рівняннях гідромеханіки [1] і використовується в тому випадку, коли щільність матеріалу низька. Якщо щільність матеріалу висока, використовується підхід, заснований на теорії пластичності [2]. В даній роботі для моделювання в’язкої течії матеріалу використовується узагальнена умова пластичності Мізеса – Шлейхерта [3], що залежить від швидкості деформації. Закон пластичної течії обирається асоційованим з умовою пластичності. Така модель дозволяє описувати ефект ділатансії і суттєву залежність напруженого стану сипучих матеріалів від швидкості деформування.

Припускається, що деформації досить малі. Причому:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^v,$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ - тензори малих повних, пружних і пластичних деформацій.

Поведінка матеріалу описується за допомогою пружного потенціалу:

$$\rho u = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{I})^2 + \mu \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e; \qquad \lambda = const, \mu = const.$$

та закону пластичної течії:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^v \equiv \boldsymbol{\Psi} = \frac{S - 3\alpha \cdot p}{\sigma_* \cdot \tau \cdot \sqrt{1 + 3\alpha^2}} \cdot (\alpha \cdot \mathbf{I} + \frac{\mathbf{s}}{S}),$$

де $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \cdot \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$ - девіатор тензору механічних напружень, $\mathbf{I}$ - одиничний тензор, $p = -\frac{1}{3} \cdot \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}$ - тиск, $S = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}$, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напружень, τ – час релаксації, σ_* – характерне напруження, α - коефіцієнт ділатансії, який входить в узагальнену умову пластичності Мізеса-Шлейхерта, що залежить від швидкості деформації.

Тут $k = const \ge 0$, $\alpha = const \ge 0$, $\sigma_* = const \ge 0$.

Розглядається задача про квазистатичний (число $Eu \ll 1$) несталий рух в’язкопружного середовища в каналі, що обмежений двома паралельними стінками, під дією сили тяжіння $\vec{\mathbf{b}} = (0, b, 0)$. Вводиться прямокутна система координат $Oxyz$ з центром, розташованим на осі каналу, а вісь y спрямована в напрямку руху середовища. Відстань між стінками дорівнює $2h$.

З урахуванням одновимірності задачі (всі невідомі величини залежать від однієї просторової змінної x), повна система рівнянь, що описує повільний рух в'язкопружного матеріалу, представляється у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} = 0; \qquad \dfrac{\partial\sigma_{12}}{\partial x} + \rho\cdot b = 0, \\ \dot{\sigma}_{jj} = \lambda\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x} + 2\mu\dfrac{\partial v_j}{\partial x}\delta_{1j} - 3\alpha\psi\right) - 2\mu\psi\left(\alpha + \dfrac{s_{jj}}{S}\right), \\ \dot{\sigma}_{12} = \mu\dfrac{\partial v_2}{\partial x} - 2\mu\psi\dfrac{s_{12}}{S}; \qquad \Psi = \dfrac{S + \alpha\cdot\sigma_{kk}}{2\mu\tau\cdot\sqrt{1+3\cdot\alpha^2}}, \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

Вважається, що в початковий момент часу $t = 0$ матеріал знаходиться в стані гідростатичного стиску:

$$\sigma_{11}(0) = \sigma_{22}(0) = \sigma_{33}(0) = -p_0, \quad p_0 = const. > 0.$$

Такий вибір початкового напруженого стану не суперечить рівнянням руху системи .

Граничні умови задаються як умови прилипання матеріалу до стінок каналу:

$$v_1 = v_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = -h; \quad v_1 = v_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = h.$$

Коефіцієнт ділатансії α приймає значення на порядок менший за одиницю [3]. Тому для розв'язання повної системи рівнянь використовується метод малого параметру (метод збурень).

За результатами аналітичного розв'язку задачі знаходиться умова старту в'язкої течії в каналі

$$h_* = \frac{3\alpha p_0}{\sqrt{2}\rho b}$$

Якщо ширина каналу $2h$ при заданих параметрах матеріалу α, ρ та початковому тиску p_0 приймає значення менше критичного значення $2h_*$, то має місце в'язка течія матеріалу з пружним ядром у центральній частині каналу. Якщо ширина каналу $2h$ приймає значення більше критичного значення $2h_*$, то весь матеріал знаходиться в пружному стані, в'язкої течії не виникає і канал запирається.

Аналіз характерного розподілу безрозмірної швидкості $\overline{v}_i$ за шириною каналу проводився при наступних значеннях параметрів матеріалу: $\alpha = 0,05$, $\lambda/\mu = 2$, $\mu = 10\sigma_*$.

Розподіл швидкості (рис.1) $\overline{v}_2\,(\overline{x})$, яка спрямована в напрямку дії сили тяжіння, не залежить від часу і є частиною параболи у в'язкій зоні $\overline{x}_* < |\overline{x}| \le 1$.

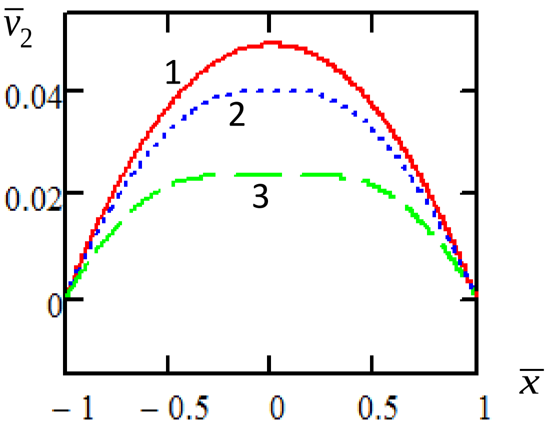

Рис. 1

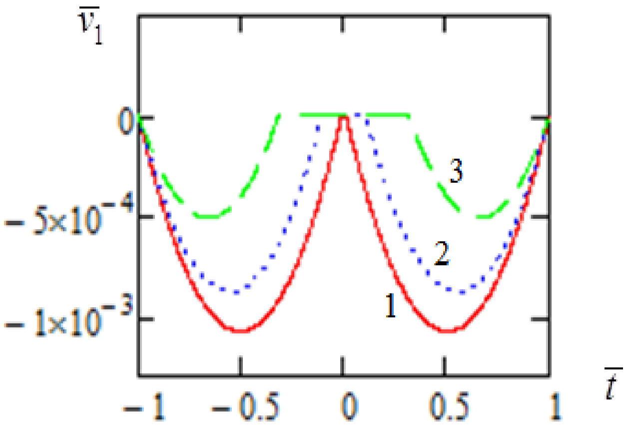

Рис. 2

На рис.1 криві 1, 2, 3 представляють розподіл швидкості $\overline{v}_2\,(\overline{x})$ при різних значеннях початкового тиску: $\overline{p}_0 = 0.1$, $\overline{p}_0 = 1$, $\overline{p}_0 = 3$ відповідно. Як видно з цього рисунка, чим більший тиск $\overline{p}_0$, тим більше ширина пружного ядра, яка дорівнює $2\overline{x}_*$. Ділатансія призводить до виникнення компоненти швидкості $\overline{v}_1\,(\overline{x})$, що спрямована перпендикулярно до $\overline{v}_2\,(\overline{x})$ в напряму від стінок каналу до границі пружного ядра. Швидкість $\overline{v}_1\,(\overline{x})$ розподілена за параболами, симетричними відносно осі Oy. На рис. 2 криві 1, 2, 3 представляють розподіл швидкості $\overline{v}_1\,(\overline{x})$ в момент часу $\overline{t} = 1$ при різних значеннях початкового тиску: $\overline{p}_0 = 0.1$, $\overline{p}_0 = 1$, $\overline{p}_0 = 3$ відповідно.

Список використаних джерел:

1. Островский Г.М. Пневматический транспорт сыпучих материалов в химической промышленности. – Л: Химия, 1984. –104с.

2. Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. – М:Наука, 1971. – 232 с.

3. Бирюков В.А. Анализ зависимости глобальной нагрузки от механических параметров льда при взаимодействии ледяного поля с конструкцией / Миряха В.А., Петров И.Б.//ДАН. Механика. 2016.Т.474, №6. с.696-699.