МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА
Випадкові величини

Завдання та методичні рекомендації
для виконання самостійної роботи
здобувачами першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»
денної форми здобуття вищої освіти

Миколаїв
2024

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 5 від 05. 02 2024 р.).

Укладач:

Є. Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, МНАУ

Рецензенти:

Р.В. Дінжос – д.т.н., професор, завідуючий кафедри фізики, математики та інформаційних технологій, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського;

О. С. Садовий – к.т.н, доцент кафедри електроенергетики, електротехніки та електромеханіки, Миколаївський національний аграрний університет.

© Миколаївський національний аграрний університет, 2024

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для здобувачів вищої освіти ступеня "Бакалавр" спеціальностей 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка” і 208 "Агроінженерія"

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв’язання. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв’язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики.

Тема 2. Закони розподілу імовірностей цілочислових випадкових величин.

Тема 3. Інтегральна функція розподілу імовірностей випадкової величини.

Тема 4. Диференціальна функція розподілу імовірностей неперервної випадкової величини.

Тема 5. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Тема 6. Рівномірний закон розподілу випадкової величини.

Тема 7. Показниковий закон розподілу випадкової величини.

Тема 8. Нормальний закон розподілу випадкової величини.

.

Тема 1. Дискретні випадкові величини та їх числові характеристики

1.1 Основні теоретичні відомості

Нехай задано простір елементарних подій Ω.

Випадкова величина — це однозначна числова функція $X = f(\Omega)$, яку задано на просторі елементарних подій

Випадкова величина дискретна — якщо простір Ω дискретний.

Випадкова величина неперервна — якщо простір Ω неперервний.

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення між значеннями випадкової величини і їх ймовірностями.

Для дискретних випадкових величин закони розподілу можуть задаватися множиною значень, що їх набуває випадкова величина, і ймовірностями цих значень.

Якщо $p_i = P(X = x_i)$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, або, якщо величина набуває зліченної множини значень, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Закони розподілу дискретних випадкових величин задаються в табличній формі (подаються значення випадкової величини і їхні ймовірності), аналітичній (наводиться формула, за якою обчислюються ймовірності для заданих значень випадкової величини), графічній (у прямокутній системі координат задається набір точок $(x_i; p_i)$; сполучивши точки відрізками прямих, дістанемо многокутник розподілу ймовірностей).

Математичним сподіванням, або середнім значенням, *M(X)* дискретної випадкової величини, називається ряд $\sum\limits_{i} x_i p_i$, якщо він абсолютно збіжний.

Математичне сподівання має такі властивості:

1) $M(C) = C$ (C — стала);
2) $M(CX) = CM(X)$;
3) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$;
4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, якщо X і Y — незалежні випадкові величини.

Дисперсія (позначається через $D(X)$ дискретної випадкової величини X визначається за формулою:

$$D(X) = M\left(X - M(X)\right)^2 = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2.$$

Основні властивості дисперсії:

1) $D(C)=0;$
2) $D(CX)=C^2D(X);$
3) $D\left(X+Y\right)=D(X)+D(Y),$ якщо випадкові величини незалежні.

Середнє квадратичне відхилення (позначається літерою σ) є квадратним коренем із дисперсії.

1.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Імовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини X — кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти $M(X)$ і $D(X),$ а також σ(X).

Розв'язання: Подамо закон розподілу для випадкової величини X у табличній формі. Очевидно, що випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення X = 1 буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює 0,75. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь, а з другої — придатну. За теоремою множення ймовірностей імовірність цієї події $P\left(X=2\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}.$ Аналогічно, X = 3, якщо деталі, виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки — придатна. $P\left(X=3\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}.$ Нарешті, X = 4, якщо деталі, виготовлені з перших трьох заготівок, браковані. $P\left(X=4\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}.$ Запишемо закон розподілу:

x_i	1	2	3	4
$p\left(x_i\right)$	0,75	0,1875	0,046875	0,015625

Легко перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює 1. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за наведеними щойно формулами.

$$M(X)=1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+4\cdot\frac{1}{64}=\frac{85}{64};$$

$$M(X^2)=1\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{3}{16}+9\cdot\frac{3}{64}+16\cdot\frac{1}{64}=\frac{139}{64};$$

$$D(X)=\frac{139}{64}-\left(\frac{85}{64}\right)^2=\frac{1671}{4096};\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1671}{4096}}=64.$$

Приклад 2. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини $Z = 2X - 5Y - 30$, якщо X та Y – незалежні випадкові величини, $D(X) = 0{,}25$, $D(Y) = 0{,}2$.

Розв'язання: Рівність випадкових величин зумовлює рівність їх дисперсій: $D(Z) = D(2X - 5Y - 30)$. Використання властивостей дисперсії та умов задачі дає такий ланцюжок рівностей:

$$D(Z) = D(2X + (-5Y) + (-30)) = D(2X) + D(-5Y) + D(-30) =$$
$$= 2^2D(X) + (-5)^2D(Y) + 0 = 4\cdot 0{,}25 + 25\cdot 0{,}2 = 6.$$

Тоді $\sigma(Z)=\sqrt{D(Z)}=\sqrt{6}\;;\;2{,}45$.

Приклад 3. За заданим у табличній формі законом розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_i$	–2,5	1	3,5	5	6,5	8
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

побудувати ймовірнісний многокутник.

Розв'язання: Імовірнісний многокутник зображено на рис. 1

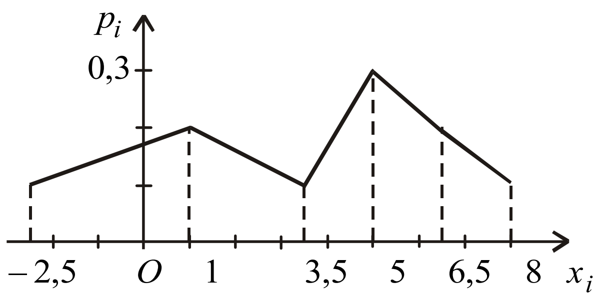

Рис.1

1.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з імовірністю $q = 0{,}1$ ($p = 1 - q = 0{,}9$ — імовірність того, що в лампочці дефект відсутній). Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. Під час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X — число лампочок, які будуть випробувані. Обчислити $\sigma(X)$.

3. Відомі значення:

$$M(X) = -2; \quad D(X) = 4.$$

Знайти $M(-4X + 5)$, $D(-4X + 5)$.

4. За заданим імовірнісним многокутником (рис. 2) обчислити $M(-4X + 1)$; $D(-4X + 1)$.

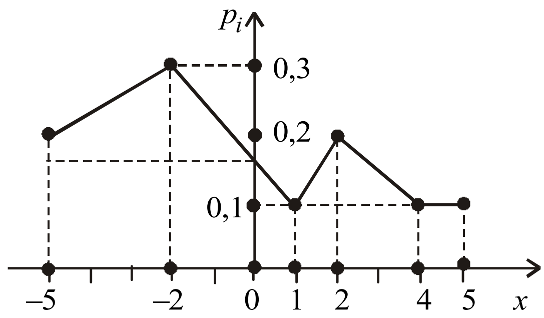

Рис. 2

Тема 2. Закони розподілу імовірностей цілочислових випадкових величин

2.1 Основні теоретичні відомості

Біноміальний закон розподілу. Імовірності в цьому законі визначаються за формулою $P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$, $m = 0,1,2, \ldots, n$. Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія A настає з імовірністю p. Частота настання події A має біноміальний закон розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$M(X) = np, \;\; D(X) = np(1-p).$$

Закон розподілу Пуассона. Дискретна випадкова величина має розподіл Пуассона, якщо вона набуває зліченної множини значень $(m = 0,1,2,...)$ з імовірностями $P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, (a > 0)$. Цей розподіл описує кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю. Розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. Математичне сподівання і дисперсія в цьому розподілі однакові і дорівнюють a. Для цього розподілу складено таблиці щодо різних значень a (0,1—20). У таблицях для відповідних значень a наведено ймовірності $P(X = m)$ і $P(X \geq m)$.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n велике і p або $1 - p$ прямують до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, коли $a = np$.

Геометричний розподіл. Закон подається формулою:
$P(X = m) = p(1-p)^{m-1}, m = 1, 2, \ldots$.

Геометричний закон розподілу має частоту настання події у схемі незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події. У формулі p — імовірність настання події в кожному випробуванні. Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності. Числові характеристики розподілу: $M(X) = \frac{1}{p}, \quad D(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Гіпергеометричний розподіл. Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X = m) = \frac{C_k^m \cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, \;\; m = 0,1,2,...,n; \; k \geq n.$$

Наприклад, імовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N, m виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (k — кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$M(X)=\frac{kn}{N},\ D(X)=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p=\frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $a=\frac{nk}{N}$.

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання: Імовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює 0,8. Тому справджується біноміальний закон розподілу: $P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $m=0,1,2,...,n;$

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X\geq 3)=C_5^3\cdot 0,8^3\cdot 0,2^2+C_5^4\cdot 0,8^4\cdot 0,2+0,8^5=$$
$$=0,2048+0,4096+0,32768=0,94208.$$

Приклад 2. Визначити ймовірність потрапляння за контрольні межі не менш ніж 2 деталей із проби з 5 деталей, якщо автомат, із продукції якого беруться проби, обробляє 2 деталі за 1 хв. і за зміну у його продукції виявляється 38 деталей, які виходять за контрольні межі. Застосувати для розв'язування задачі закон розподілу Пуассона.

Розв'язання: Застосуємо формулу розподілу Пуассона: $P(X=m)=$ $=\frac{(\lambda t)^m}{m!}$, m=0,1,…. Знайдемо λ — середню кількість бракованих деталей, які виготовляються за 1 хв. Якщо тривалість зміни 480 хв, то $\lambda=\frac{38}{480}\approx 0,08.$ Пробу з 5 деталей виготовляють за $t=\frac{5}{2}=2,5$ хв,

$\lambda t = 0,08 \cdot 2,5 = 0,2.$ Знайдемо шукану ймовірність: $P\left(X \geq 2\right) = \sum_{m=2}^{5} \frac{\left(\lambda t\right)^m}{m!} = 0,0175.$ Значення ймовірності знайдемо в таблицях при $\lambda t = 0,8$ і $m = 2.$

Приклад 3. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p = 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Розв'язання: Нехай випадкова величина X — кількість деталей, виготовлених до заміни цим інструментом. Ця випадкова величина може набувати значень 0, 1, 2, …. Побудуємо закон розподілу цієї величини. Вона набуває значення, що дорівнює нулю, якщо при виготовленні першого виробу інструмент буде пошкоджено; $P\left(X = 0\right) = p = 0,2.$ Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні другого виробу, то X = 1; $P\left(X = 1\right) = p\left(1 - p\right).$ Аналогічно $P\left(X = 2\right) = p\left(1 - p\right)^2$, $P\left(x = 3\right) = p\left(1 - p\right)^3$, …, $P\left(X = k\right) = p\left(1 - p\right)^k$,… . Для обчислення математичного сподівання і дисперсії зіставимо здобутий закон розподілу з геометричним законом розподілу $P\left(Y = m\right) = p\left(1 - p\right)^{m-1}, m = 1, 2, ...$ Очевидно, що $X = Y - 1.$ Скориставшись властивостями математичного сподівання та дисперсії, дістанемо:

$$M(X) = M\left(Y - 1\right) = M(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = 5 - 1 = 4.$$

$$D(X) = D\left(Y - 1\right) = D(Y) = \frac{1 - p}{p^2} = 20.$$

Приклад 4. Партія містить 200 виробів, серед яких 25 бракованих. Для перевірки якості з партії відібрали 10 виробів. Якщо при цьому кількість бракованих виробів не перевищує одиниці, то партія приймається. Знайти ймовірність того, що партію буде прийнято. Визначити цю саму ймовірність, якщо апроксимувати гіпергеометричний розподіл біноміальним розподілом і законом розподілу Пуассона.

Розв’язання: Застосуємо формулу гіпергеометричного закону розподілу. Партію буде прийнято, якщо кількість бракованих серед дібраних 10 дорівнюватиме нулю або одиниці.

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{C_{175}^{10}}{C_{200}^{10}} + \frac{C_{25}^{1} \cdot C_{175}^{9}}{C_{200}^{10}} \approx 0,638.$$

Обчислимо цю саму ймовірність за допомогою формули біноміального закону розподілу, $p = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{9} \approx 0,639.$$

Обчислимо, нарешті, цю саму ймовірність за допомогою закону розподілу Пуассона:

$$a = np = 10 \cdot \frac{1}{8} = 1,25.$$

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-1,25} + 1,25e^{-1,25} \approx 0,644.$$

Як бачимо, похибки обчислення в разі апроксимації гіпергеометричного розподілу порівняно невеликі.

2.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Брак при виготовленні деталей становить у середньому 5 %. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання взятих деталей: а) не виявиться жодної бракованої; б) буде дві браковані деталі.

2. У деякій місцевості на кожні 100 кавунів припадає в середньому один, маса якого не менша за 10 кг. Знайти ймовірність того, що в партії із 400 кавунів буде:

а) 3 кавуни масою не менш як 10 кг;

б) не менш ніж 2 такі кавуни.

3. П’ять із шести космічних кораблів виводяться на орбіту без екіпажу. Якщо всі п’ять запусків будуть успішними, то останній корабель буде запущено з екіпажем. За якої ймовірності успішного запуску корабля ймовірність невдалого шостого запуску буде найбільшою? Знайти цю ймовірність.

4. Із партії, в якій 25 електронних ламп, вибрано для випробувань на довговічність 5 ламп. Партія приймається, якщо вийде із ладу не більш як

одна з випробуваних ламп. Яка ймовірність того, що партію буде прийнято, якщо із 25 ламп 4 дефектні?

Тема 3. Інтегральна функція розподілу імовірностей випадкової величини.

3.1 Основні теоретичні відомості

Функцію аргументу x, що визначає імовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією (інтегральною) розподілу імовірностей*:

$$F(x) = P(X < x)$$

Властивості $F(x)$:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Із другої властивості $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1) Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції *F(x)* на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1)$$

2) Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

3. Якщо $X \in \left]-\infty; \infty\right[$, виконуються два подані далі співвідношення.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

3) Якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку $[a; b]$, то

$$F(x) = 0 \quad при \quad x \le a; \quad F(x) = 1 \quad при \quad x > b.$$

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язання: Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення.

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;

2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0{,}1$;

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$;

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 +$

$+ 0{,}1 = 0{,}4$;

5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) =$

$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$;

6) $F(12) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) =$

$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) +$
$+ P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.

Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 12; \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 3.

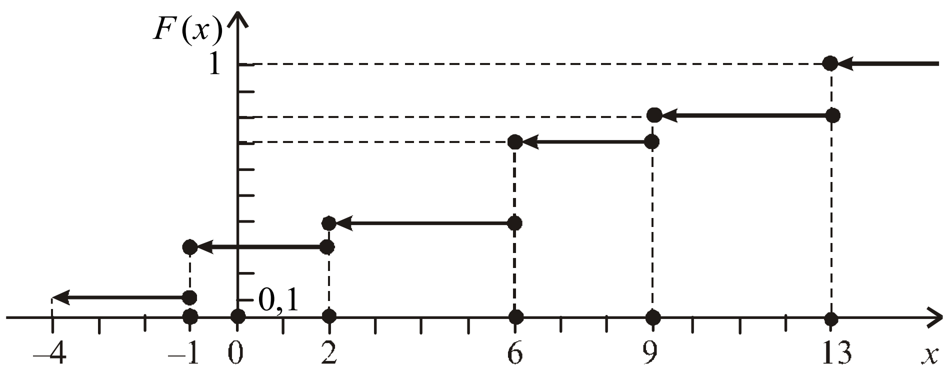

Рис.3

Приклад 2. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3;\\ \dfrac{(x+3)^2}{49}, & -3<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Побудувати графік функції $F(x)$ і обчислити $P(-1 < X < 2)$.

Розв'язання: $F(x)$ графічно зображено на рис. 4.

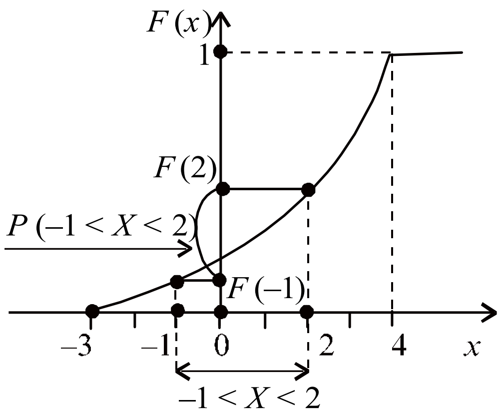

Рис.4

Використовуючи перший висновок з властивості 2, обчислимо

$$P(-1< X <2)=F(2)-F(-1)=\left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=2}-\left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=-1}=$$

$$=\frac{25}{49}-\frac{4}{49}=\frac{21}{49}=\frac{3}{7}.$$

Приклад 3. Функція розподілу ймовірностей має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ ax+b, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Знайти значення сталих a і b і накреслити графік $F(x)$.

Обчислити $P(1 < \text{X} < 4)$.

Розв'язання: Згідно з висновком 3 третьої властивості $F(x)$ маємо:

$$\begin{cases}-2a+b=0\\ 5a+b=1\end{cases}\rightarrow a=\frac{1}{7},\quad b=\frac{2}{7}.$$

Коли $a = \frac{1}{7}, \quad b = \frac{2}{7}$ функція розподілу ймовірностей набирає вигляду

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{x+2}{7}, & -2 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Графік $F(x)$ зображено на рис. 5.

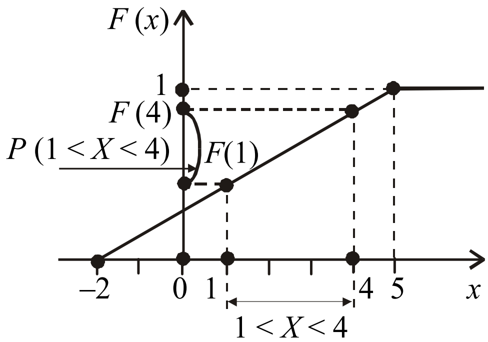

Рис.5

Обчислюємо ймовірність події $1 < X < 4$:

$$P(1 < X < 4) = F(4) - F(1) = \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}.$$

3.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. За заданою функцією розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \dfrac{\sqrt{x+3}}{2}, & -3 < x \le 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

побудувати її графік і обчислити $P(-2 < X < 0)$.

2. Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Імовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей, побудувати $F(x)$ і накреслити її графік.

Тема 4. Диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини

4.1 Основні теоретичні відомості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати за допомогою диференціальної функції розподілу (щільності)ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

Диференціальною функцією розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Властивості $\boldsymbol{f(x)}$:

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ за умови, що $F(x)$ є неспадною функцією.
2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1. \qquad (2)$$

Якщо неперервна випадкова величина X визначена лише на проміжку $[a; b]$, то умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{a}^{в} f(x)dx = 1. \qquad (3)$$

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha;\beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (4)$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (5)$$

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу $[a; b]$, то

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx. \qquad (6)$$

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

Обчислити $P(0<X<2)$

Розв’язання:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{3}{64}(x+1)^2, & -1<x\le 3;\\ 0, & x<3.\end{cases}$$

Графіки функцій $F(x)$, $f(x)$ зображено відповідно на рис. 6 і 7.

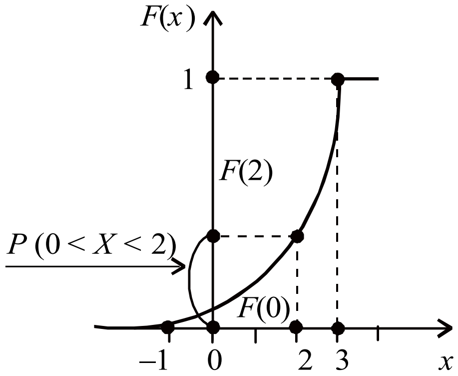

Рис.6

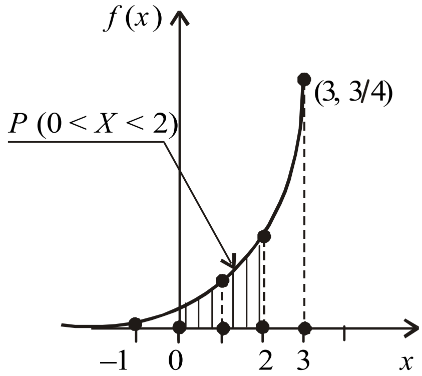

Рис.7

Імовірність події $0<X<2$ обчислимо за (1):

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32};$$

далі згідно із (4) маємо

$$P(0<X<2)=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{3}{64}(x+1)^2dx=\frac{3}{64}\int_0^2(x+1)^2dx=\frac{3}{64}\left.\frac{(x+1)^3}{3}\right|_0^2=$$

$$=\frac{27}{64}-\frac{1}{64}=\frac{26}{64}=\frac{13}{32}.$$

Приклад 2. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\ \sin\ x, & 0<x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити

$P\left(\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{2}\right).$

Розв'язання: Згідно із (6) маємо:

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{1}{2}\ \sin dx=\frac{1}{2}\int_0^x\sin dx=\frac{1}{2}(-\cos x\,|_0^x)=\frac{1}{2}(-\cos x+1)=$$
$$=\frac{1-\cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 8 і 9.

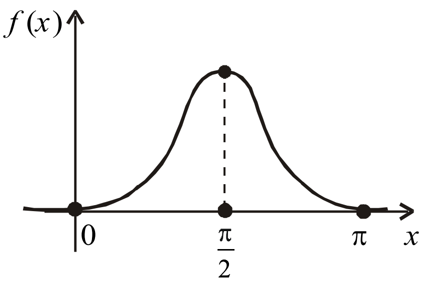

Рис.8

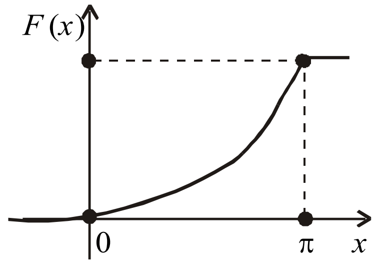

Рис.9

Імовірність події $\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{2}$ можна обчислити згідно з (1) або (4). Застосуємо формулу (4):

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 3. За заданою щільністю ймовірностей маємо:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ a\sqrt{x+2}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Знайти значення сталої *a* та функцію *F*(*x*). Побудувати графіки функцій *f*(*x*), *F*(*x*).

Розв'язання: Значення сталої *a* визначаємо з умови нормування (71):

$$\int_{-2}^{7} f(x)dx=1\to\int_{-2}^{7} a\sqrt{x+2}\,dx=1\to a\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx=1\to a=\frac{1}{\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx}.$$

Тут $\int_{-2}^{7}\sqrt{x+2}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{7}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3}-\sqrt{0}\right)=\frac{2}{3}27=18.$

Отже, $a=1/18$.

При знайденому значенні *a* щільність імовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей визначається так:

$$F(x)=\int_{-2}^{x} f(x)dx=\int_{-2}^{x}\frac{1}{18}\sqrt{x+2}\,dx=\frac{1}{18}\int_{-2}^{x}\sqrt{x+2}\,dx=\frac{1}{18}\left.\frac{(x+2)^3}{\frac{3}{2}}\right|_{-2}^{x}=$$

$$=\frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{x}=\frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

Графіки функцій *f*(*x*), *F*(*x*) зображені відповідно на рис. 10 і 11.

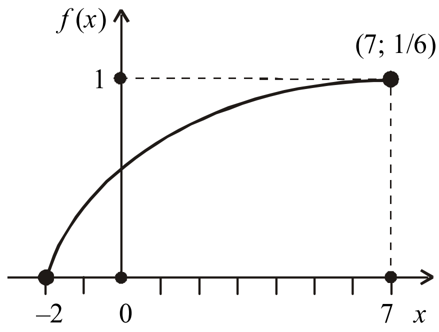

Рис.10

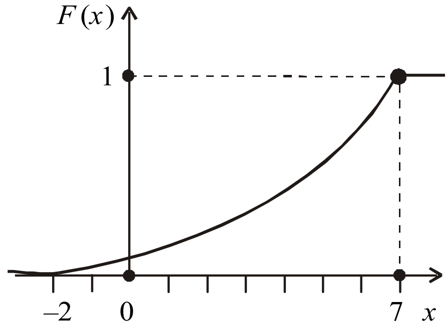

Рис.11

4.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Задано функцію розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$. Побудувати графіки $F(x), f(x)$ і обчислити $P\left(\dfrac{\pi}{6} < X < \dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. Випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей Коші:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Знайти $F(x)$.

Тема 5. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

5.1 Основні теоретичні відомості

Нехай простір елементарних подій Ω є неперервним.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X) = \int_{\Omega} x\, f(x)dx\,.$$

Якщо Ω = (– ∞; ∞), то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx\,. \qquad (7)$$

Якщо $\Omega = [a; b]$, то

$$M(X) = \int_a^в x\,f(x)dx. \tag{8}$$

Дисперсія неперервної випадкової величини X визначається наступним чином:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \tag{9}$$

Якщо $X \in [a; b]$,

то $$D(X) = \int_a^ъ (x - M(X))^2 f(x)dx. \tag{10}$$

Зауважимо, що визначення середнього квадратичного відхилення і властивості математичного сподівання та дисперсії для неперервної величини мають такий же самий вигляд , як для дискретної.

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Задано щільність імовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Обчислити M(X); $D(X)$; $\sigma(X)$.

Розв'язання:

$$M(X) = \int_0^\pi xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ \sin dx = dv \to & \\ \to v = -\cos x & \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos x dx = \frac{-x\cos x}{2}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{2}\sin x\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{-\pi\cos\pi + 0\cos 0}{2} + \frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X) = \frac{\pi}{2};$$

$$M(X^2)=\int_0^{\pi} x^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=x^2, \quad du=2xdx \\ \sin xdx=dv\rightarrow \\ \rightarrow v=-\cos x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi} x\cos xdx\right)=\left|\begin{array}{l} u=x, \quad du=dx \\ \cos dx=dv \\ v=\sin x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin xdx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+2\left(x\sin x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_0^{\pi}\right)\right]=\frac{1}{2}(\pi^2-2)=\frac{\pi^2-2}{2};$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{\pi^2-2}{2}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{2\pi^2-4-\pi^2}{4}=\frac{\pi^2-4}{4};$$

$$D(X)=\frac{\pi^2-4}{4};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{\pi^2-4}}{2}.$$

5.3 Завдання для самостійного розв'язання

Неперервну випадкову величину **X** задано функцією розподілу **F(x)**, де ***a*** - параметр, який треба визначити. Знайти: 1) функцію щільності розподілу *f*(x); 2) математичне сподівання **M(X),** дисперсію **D(X)** та середньоквадратичне відхилення σ **(X)** випадкової величини **X**; 3) імовірність того, що **X** прийме значення з інтервалу (1/2; 3/2).

Варіант №

1. $F(\text{x})=\{0, \text{при } x<0;\ a\text{x}^2, \text{при } 0\le x\le 2; 1, \text{при x}>2\}$

2. $F(x)=\{0,\ \text{при } x<-1; a(1+x)^2, \text{при } -1\le x\le 1; 1, \text{при } x>1\}$

3. $F(x)=\{0,\ \text{при } x<-1; a(1+x)^3, \text{при } -1\le x\le 2; 1, \text{при } x>2\}$

4. $F(x)=\{0,\ \text{при } x<0;\ ax^3, \text{при } 0\le x\le 3; 1, \text{при } x>3\}$

5. $F(x)=\left\{\begin{matrix}0,\ \text{при } x<-2;\ a(x+2)^2, \text{при } -2\le x\le 2; 1, \text{при} \\ x>2\end{matrix}\right\}$

6. $F(x) = \{0,$ при $x < 1/2\,;\ a(x-1/2)^2,$ при $1/2 \le x \le$ *32;1, при x>32*

7. $F(x) = \{0,$ при $x < 0;\ a\sin x\,,$ при $0 \le x \le \pi/2\,; 1,$ при $x > \pi/2\}$

8. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{ при } x < 0;\ a(1-\cos x), \text{ при } 0 \le x \le \pi; 1, \text{при} \\ x > \pi \end{Bmatrix}$

9. $F(x) = \{0,$ при $x < 0;\ atgx,$ при $0 \le x \le \pi/4\,; 1,$ при $x > \pi/4\}$

10. $F(x) = \{0,$ при $x < -\pi/2\,;\ a(1-\sin x),$ при $-\pi/2 \le x \le$ *≤π2;1, при x>π2*

11. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^2,$ при $0 \le x \le 10; 1,$ при $\mathrm{x} > 10\}$

12. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^3,$ при $0 \le x \le 9; 1,$ при $\mathrm{x} > 9\}$

13. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^2,$ при $0 \le x \le 8; 1,$ при $\mathrm{x} > 8\}$

14. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^3,$ при $0 \le x \le 7; 1,$ при $\mathrm{x} > 7\}$

15. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^2,$ при $0 \le x \le 6; 1,$ при $\mathrm{x} > 6\}$

16. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^4,$ при $0 \le x \le 5; 1,$ при $\mathrm{x} > 5\}$

17. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^2,$ при $0 \le x \le 4; 1,$ при $\mathrm{x} > 4\}$

18. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^3,$ при $0 \le x \le 3; 1,$ при $\mathrm{x} > 3\}$

19. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^2,$ при $0 \le x \le 1; 1,$ при $\mathrm{x} > 1\}$

20. $F(\mathrm{x}) = \{0,$ при $x < 0;\ a\mathrm{x}^3,$ при $0 \le x \le 2; 1,$ при $\mathrm{x} > 2\}$

21. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{ при } x < -2;\ a(x+2)^2, \text{при} - 2 \le x \le 2; 1, \text{при} \\ x > 2 \end{Bmatrix}$

22. $F(x) = \{0,$ при $x < 1;\ a(x-1)^4,$ при $1 \le x \le 3; 1,$ при $x > 3\}$

23. $F(x) = \{0,$ при $x < 1/2\,;\ a(x-1/2)^2,$ при $1/2 \le x \le$ $\le 3; 1,$ при $x > 3\}$

24. $F(\text{x}) = \{0, \text{при } x < 0;\ ax^3, \text{при } 0 \le x \le 1; 1, \text{при x} > 1\}$

25. $F(x) = \begin{Bmatrix} 0, \text{ при } x < 1/3\,;\ a(x - 1/3)^2, \text{при } 1/3 \le x \le 4; 1, \text{при} \\ x > 4 \end{Bmatrix}$

Тема 6. Рівномірний закон розподілу випадкової величини

6.1 Осовні теоретичні відомості

Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона має *рівномірний закон розподілу*.

Щільність рівномірного закону розподілу має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases} \qquad (11)$$

Функція розподілу рівномірного закону розподілу має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases} \qquad (12)$$

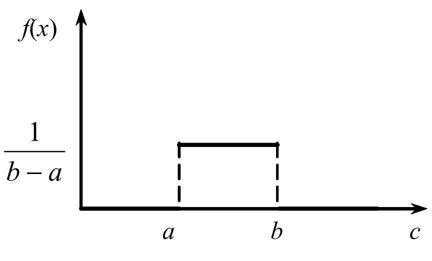

Рис. 12

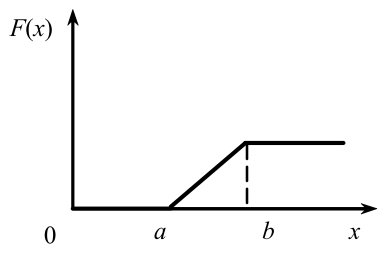

Рис. 13

Математичне сподівання та *дисперсія* рівномірного закону розподілу дорівнюють

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \qquad (13)$$

Графіки щільності ймовірності і функції ріномірного закону розподілу наведено на рис. 12 і 13.

6.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Випадкова величина X розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P\left(X \geq 3\right) = 0{,}4,$ а $M(X) = 2.$

Розв'язання: Щільність рівномірного розподілу $f\left(x\right) = \dfrac{1}{b-a}.$ Отже, потрібно визначити область зміни випадкової величини. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \int\limits_3^b \dfrac{1}{b-a} dx = 0{,}4; \\ \int\limits_a^b \dfrac{x}{b-a} dx = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{b-3}{b-a} = 0{,}4; \\ \dfrac{a+b}{2} = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}6b + 0{,}4a = 3; \\ b = 4 - a. \end{cases} \quad b = 7, \;\; a = -3.$$

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq -3; \\ 0{,}1, & \text{якщо } -3 < x \leq 7; \\ 0, & \text{якщо } x > 7. \end{cases}$$

.

Приклад 2. Перехрестя обладнане автоматичним світлофором, на якому зелене та червоне світло горить протягом 1 хв. та 0,75 хв. відповідно. Автомобіль під'їжджає до перехрестя у випадковий момент часу, не пов'язаний із роботою світлофора. Знайти імовірність того, що він проїде перехрестя, не зупиняючись.

Розв'язання: Позначимо випадкову величину X – момент приїзду автомобіля до перехрестя. Її можливі значення знаходяться в проміжку (0; 1,75), довжина якого визначається періодом зміни кольорів на світлофорі. Зрозуміло, що можливість приїзду автомобілем в будь-який момент часу даного інтервалу з (0; 1,75) рівна можливості приїзду в момент часу іншого інтервалу такої ж довжини. Тому X – рівномірно розподілена з густиною розподілу (11), де a = 0, b = 1,75. Автомобіль проїде, не зупиняючись, перехрестя, якщо відбудеться випадкова подія ($0 < X < 1$), тобто під час «дії» зеленого світла світлофора. Тоді за формулою (4)

$$P(0 < X < 1) = \frac{1}{1{,}75}\int\limits_0^1 f(x)dx. = 4/7.$$

6.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Час відправлення міжміського автобуса рівномірно розподілений на часовому проміжку від 0.00 до 20.00. Визначити ймовірність того, що пасажир, який прибув на станцію о 16.00, встигне на автобус.

2. Шкала секундоміра має ціну поділки 0,2 с. Яка ймовірність відлічити час за цим секундоміром із похибкою, більшою за 0,04 с, якщо відлік здійснюється з точністю до цілої поділки з округленням у найближчий бік?

3. Хвилинна стрілка електронного годинника переміщується стрибком через кожну хвилину. Дійсний час у фіксований момент часу буде випадковою величиною, що має рівномірний закон розподілу. Звіряється час за електронним годинником, заокруглюючи положення хвилинної стрілки до найближчої хвилинної поділки циферблата. Яка імовірність того, що похибка заокруглення часу не перевищить 15 с?

Тема 7. Показниковий закон розподілу випадкової величини.

7.1 Основні теоретичні відомості

Щільність розподілу випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, задається формулою:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x>0.\end{cases} \tag{14}$$

Функція розподілу показникового закону розподілу задається формулою:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x>0.\end{cases} \tag{15}$$

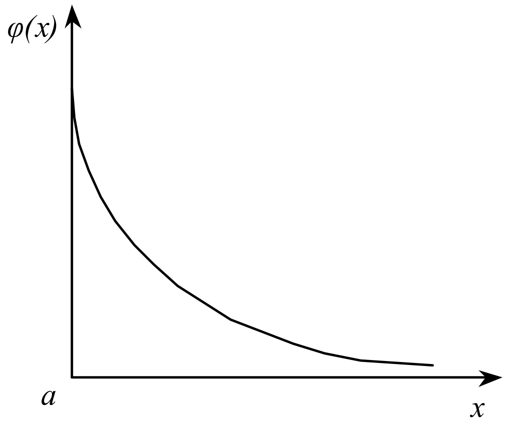

Рис.14

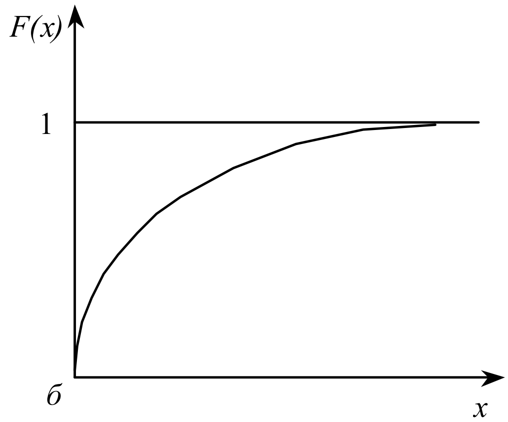

Рис.15

Математичне сподівання та дисперсія величини *X*, розподіленої за показниковим законом розподілу можна знайти за формулами:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{16}$$

Графік показникового розподілу зображено на рис. 13,14.

7.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Випадкова величина розподілена показниково з параметром *a*. При якому значенні параметра ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок $[\alpha;\beta]$ буде найбільшою?

Розв'язання: Нехай параметр *a* — неперервна й диференційована величина. Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок і дослідимо здобуту функцію на екстремум:

$$P(\alpha\le X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}ae^{-ax}dx=e^{-a\alpha}-e^{-a\beta};\ P(a)=e^{-a\alpha}-e^{-a\beta};$$

$$P'(a)=-\alpha e^{-a\alpha}+\beta e^{-a\beta};\ -\alpha e^{-a\alpha}+\beta e^{-a\beta}=0;\ \beta e^{-a\beta}=\alpha e^{-a\alpha};$$

$$\ln\beta-a\beta=\ln\alpha-a\alpha;\ a=\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}.$$

Покажемо, що при даному значенні *a* досягається максимум $P(a)$. Знайдемо другу похідну:

$$P''(a)=\alpha^2e^{-a\alpha}-\beta^2e^{-a\beta};$$

$$P''\left(\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\alpha^2e^{-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}}-\beta^2e^{-\beta\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}}=$$

$$=\alpha^2e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}-\beta^2e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}=\alpha^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}-\beta^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}=\alpha\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}-\beta\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}=$$

$$=\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}(\alpha-\beta)<0,$$ оскільки $\alpha<\beta$. Друга похідна у критичній точці від'ємна, тому $P(a)$ в ній досягає максимуму.

Приклад 2. Час безвідмовної роботи приладу – випадкова величина X, що задана щільністю ймовірностей $f(t)=0,08e^{-0,08t}$, $t>0$. Знайти: а) середній час безвідмовної роботи приладу; б) ймовірність безвідмовної роботи приладу протягом 4годин; в) ймовірність відмови приладу в інтервалі часу (4, 20) годин.

Розв'язання: а) Середній час безвідмовної роботи приладу є математичним сподіванням величини X. З вигляду щільності розподілу ймовірностей випливає, що X розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 0.08$. Отже, $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,08} = 12,5$ *год*.

б) Ймовірність безвідмовної роботи приладу знайдемо за формулою

$$P(X \ge t) = 1 - P(X < t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

При $\lambda = 0,08$, $t = 4$, маємо $P(X \ge 4) = e^{-0,08 \cdot 4} = e^{-32} \approx 0,726.$

в) Щоб знайти ймовірність відмови приладу в інтервалі часу (4,20), знайдемо спочатку ймовірність протилежної події, того, що прилад працює безвідмовно $P(4 < X < 20) = F(20) - F(4) = e^{-0,32} - e^{-1,6} \approx 0,524.$

Тоді ймовірність відмови приладу в цьому інтервалі

$$P = 1 - P(4 < X < 20) = 1 - 0,524 = 0,476.$$

Приклад 3. Середній час безвідмовної роботи приладу складає 750 годин. Яка ймовірність того, що прилад безперервно пропрацює не менш ніж 1000 годин?

Розв'язання: Час безвідмовної роботи приладу є випадкова величина T, що розподілена за показниковим законом $F(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t > 0 \end{cases}$, де λ – параметр розподілу, а саме число відмов за одиницю часу.

Середній час безвідмовної роботи приладу – це математичне сподівання випадкової величини. З тексту задачі $M(X) = 750$ год. Оскільки $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ для показникового розподілу, то $\lambda = \frac{1}{M(X)} = \frac{1}{750}$.

Обчислимо $P(T \ge 1000) = 1 - P(T < 1000) = 1 - F(1000) =$

$$= 1 - (1 - e^{-\frac{1000}{750}}) = e^{-\frac{4}{3}} \approx 0,274.$$

7.3 Завдання для самостійного розв'язання

1. Час безперервної роботи автоматичного верстата розподіляється за

показниковим законом. При якому значенні параметра a з ймовірністю не менше 0,98 буде гарантована неперервна робота верстата протягом 4 годин?

2. Вантажі із залізничної станції вивозять автомобілями за кільцевими маршрутами. Визначити вантажопідйомність автомобіля на маршруті *M(X)*, якщо обсяг перевезень розподіляється за показниковим законом, коли $a = 0,25$. Яка ймовірність того, що всі вантажі буде вивезено?

3. Неперервна випадкова величина роподілена за показниковим законом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 4e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що у результаті випробування X попаде в інтервал (0,2;0,5); математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

4. Час безвідмовної роботи елемента розподілено за показниковим законом $f(t) = 0,02e^{-0,02t}$ $(t \ge 0)$. Знайти ймовірність того, що елемент пропрацює безвідмовно 100 годин.

Тема 8. Нормальний закон розподілу випадкової величини.

8.1 Основні теоретичні відомості

Нормальний закон розподілу задається щільністю

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметри a і σ, які входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням випадкової величини. Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини X має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}dt}.$$

Графіки функцій розподілу і щільності ймовірності наведено відповідно на рис. 16 і 17.

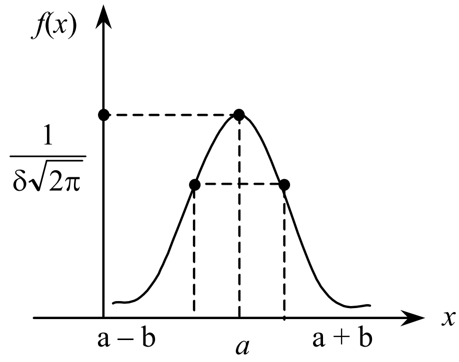

Рис. 16

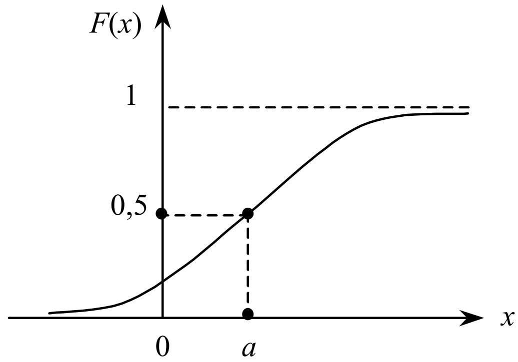

Рис.17

Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Головна особливість нормального закону полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за типових умов.

Для обчислення ймовірності потрапляння випадкової величини, розподіленої нормально, на проміжок використовується функція Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \qquad (17)$$

$$P(\alpha \le X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (18)$$

Часто застосовується також формула:

$$P\left(\left|X - a\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (19)$$

Для того, щоб розв'язати рівняння виду (19), його переписують у вигляді

$$\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{P\left(\left|X - a\right| < \varepsilon\right)}{2}.$$

Значення виразу $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ знаходять із останнього рівняння за допомогою таблиці 1 значень функції Лапласа.

8.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Відомо, що випадкова величина X розподілена за нормальним законом із математичним сподіванням $a = -4$ і середньоквадратичним

ТАБЛИЦЯ 1. ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0.1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0.2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0.3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0.4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0.5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0.6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0.7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0.8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0.9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1.0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1.1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1.2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1.3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1.4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1.5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1.6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1.7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1.8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1.9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2.0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2.1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2.2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2.3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2.4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2.5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2.6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2.7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2.8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2.9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3.0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3.1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3.2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3.3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3.4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3.5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3.6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3.7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3.8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3.9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

відхиленням $\sigma=2$. Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і накреслити їх графіки. Обчислити $P(-6<x<3)$, $P(|x+4|<4)$.

Розв'язання:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+4)^2}{3}},\quad -\infty<x<\infty;$$

$$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x+4)^2}{3}}dx.$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ наведені на рис. 18 і 19.

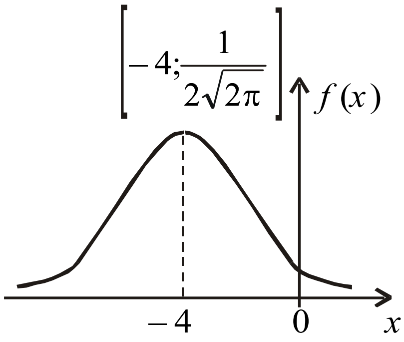

Рис.18

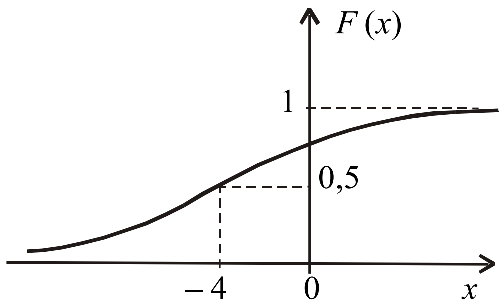

Рис. 19

Використовуючи формули (18), (19), обчислюємо ймовірності:

1) $P(-6<x<3)=\Phi\left(\frac{3-(-4)}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-6-(-4)}{2}\right)=\Phi\left(\frac{3+4}{3}\right)-\Phi\left(\frac{-6+4}{2}\right)=$

$=\Phi(3{,}5)-\Phi(-1)=\Phi(3{,}5)+\Phi(1)=0{,}49966+0{,}3413=0{,}84096;$

$P(-6<x<3)=0{,}84096.$

2) $P\left(\left|x+4\right|<4\right)=2\Phi\left(\frac{4}{2}\right)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$

$P\left(\left|x+4\right|<4\right)=0{,}9544.$

Зауважимо, що для обчислення значень функції $\Phi(x)$ використовувалась таблиця 1.

Приклад 2. Відомо, що діаметр кульки підшипника D є випадковою величиною, що має нормальний закон розподілу. Бракування кульок здійснюється за таким алгоритмом: якщо кулька не проходить через отвір із діаметром 5,5 мм, але проходить через отвір із діаметром 5,58 мм, то її розмір відповідає стандарту. Якщо будь-яка із наведених умов не виконується, то кулька бракується. Визначити σ_d, якщо брак становить 10%.

Розв'язання: Середній діаметр кульки

$$m_d=\frac{5{,}5+5{,}58}{2}=\frac{11{,}08}{2}=5{,}54\,\text{мм}.$$

Якщо позначимо d_1 = 5,5мм, d_2 = 5,58 мм, то ймовірність того, що кулька буде забракована, визначається як:

$$P=1-P(d_1<d<d_2)=1-\left[\Phi\left(\frac{d_2-m_d}{\sigma_d}\right)-\Phi\left(\frac{d_1-m_d}{\sigma_d}\right)\right].$$

Оскільки $m_d = \frac{d_1 + d_2}{2}$ — математичне сподівання, то виконуються рівності:

$$P = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - \frac{d_1 + d_2}{2}}{\sigma_d} \right) \right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma_d} \right) \right] = 1 - \left[\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) + \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) \right] =$$

$$= 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right).$$

Далі маємо:

$$2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) = 0,9 \to \Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} \right) = 0,45 \to \frac{d_2 - d_1}{2\sigma_d} =$$

$$= 1,65 \to \sigma_d = \frac{d_2 - d_1}{3,3} = \frac{5,58 - 5,5}{3,3} = 0,024 \text{ мм}; \ \sigma_d = 0,024 \text{ мм}.$$

Приклад 3. Похибка спостереження X при вимірюванні довжини розподілена нормально з $\alpha = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.

Розв'язання: Згідно з умовою потрібно знайти $P(|X| \geq 10)$. Виразимо цю ймовірність через ймовірність протилежної події:

$$P(|X| \geq 10) = 1 - P(|X| < 10) = 1 - P(-10 < X < 10) = 1 - \Phi\left(\frac{10 - 5}{4} \right) +$$

$$+\Phi\left(\frac{-10 - 5}{4} \right) = 1 - \Phi(1,25) - \Phi(3,75) = 1 - 0,3944 - 0,4999 = 0,1057.$$

8.3 Завдання для самостійного розв'язання

Задано математичне сподівання M(X) і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти: 1) імовірність того, що X набуде значення, яке належить інтервалу (α,β); 2) імовірність того, що. абсолютна величина відхилення $|x - M(X)|$ буде менше за δ.

№ варіанта	M(X)	σ	α	β	δ
1.	15	2	16	25	4
2.	14	4	18	34	8
3.	13	4	15	17	6
4.	12	5	17	22	15
5.	11	3	17	26	12
6.	10	2	11	13	5
7.	9	4	15	19	18
8.	8	2	6	15	8
9.	7	5	2	22	20
10.	6	3	0	9	9
11.	15	2	9	19	3
12.	14	4	10	20	4
13.	13	4	11	21	8
14.	12	5	12	22	10
15.	11	4	13	23	6
16.	10	8	14	18	2
17.	9	3	9	18	6
18.	8	4	8	12	8
19.	7	2	6	10	4
20.	6	2	4	12	4
21.	12	4	2	11	6
22.	8	3	3	13	8
23.	10	4	3	8	10
24.	7	3	8	16	6
25.	9	2	6	12	5

Завдання для виконання контрольної роботи

Варіант №1

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини x заданий таблицею:

x	–7	– 6	–5	– 4	–3
p	0,2	0,25	0,1	0,15	0,3

Знайти функцію розподілу випадкової величини x і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини x.

2. Інтегральна функція розподілу випадкової величини x має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0; \\ ax^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1; \\ 1 & \text{при} \quad 1<x.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію щільності розподілу $f(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти імовірність того, що випадкова величина $X(\delta,\delta)$ набуде значення з інтервалу]0,25; 0,5[.

3. Відомо, що випадкова величина $X(\delta,\delta)$ може набувати значення 1, 2 і 3. Знайти імовірності цих значень, якщо математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює 1,8, а дисперсія дорівнює 0,56.

4. 50 % помилок приладу не виходить за межі ±10 м. Знайти процент помилок приладу, що не виходить за межі ±20 м, якщо відомо, що прилад не має систематичних помилок. Випадкові помилки підкоряються нормальному розподілу.

Варіант №2

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини x задано таблицею

x	1	3	5	7	9	11
p	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,4

Знайти функцію розподілу випадкової величини $X(\delta,\delta)$ і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини x.

2. Випадкова величина $X(\delta,\delta)$ задана функцією щільності розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1;\\ 1/3 & \text{при} \quad 1<x\le 2;\\ a & \text{при} \quad 2<x\le 3;\\ 0 & \text{при} \quad 3<x.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X.

3. Екзаменатор задає студентові додаткові питання. Імовірність того, що студент відповість на задане питання дорівнює 0,9. Викладач перериває іспит, як тільки студент виявляє незнання заданого питання або коли кількість запитань досягає 5. Знайти закон розподілу числа додаткових питань. Визначити математичне сподівання випадкової величини.

4. Імовірність прийняття випадковою величиною, що має закон нормального розподілу, значення з інтеграла $]-5,5[$ дорівнює $0{,}0455$. Знайти дисперсію розподілу, якщо відомо, що математичне сподівання дорівнює 0.

Варіант №3

1. Закон розподілу дискретної випадкової величин X задано таблицею

X	–2	0	2	4	6	8
p	0,05	0,2	0,15	0,1	0,25	0,25

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графіки. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

2. Випадкова величини X задана наступною функцією щільності розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ a\sin x & \text{при} \quad 0\le x\le \pi\\ 0 & \text{при} \quad \pi<x.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$; г) знайти імовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

3. В двох ящиках лежать по десять шарів з цифрами. В першому лежить один шар з цифрою 1, 5 шарів з цифрою 2 і 4 шари з цифрою 3. У другому

ящику лежать два шари з цифрою 1, 7 шарів з цифрою 2 і 1 шар з цифрою 3. Одночасно виймаємо по одному шару з обох ящиків. Добуток цифр, що написані на витягнутих шарах, є випадковою величиною. Знайти закон розподілу і математичне сподівання цієї випадкової величини.

4. Розподіл заводів по проценту виконання плану підпорядковується закону нормального розподілу з середнім арифметичним 103,3 % і середнім квадратичним відхиленням 1,5 %. Визначити, яка частина заводів не виконує план.

Варіант №4

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини x заданий таблицею

x	1	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,09	0,01

Знайти функцію розподілу $X(\delta, \delta)$ і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X(\delta, \delta)$.

2. Випадкова величина задана функцією щільності розподілу

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти імовірність того, що випадкова величина $X(\delta, \delta)$ набуде значення з інтервалу $]-1, 1[$.

3. Два мисливця стріляють по качкам. Для першого мисливця імовірність влучити в качку при одному пострілі дорівнює 0,6. Кількість качок, збитих мисливцями, що зробили по одному пострілу, є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 1,3. Яка ймовірність збити качку для другого мисливця?

4. Помилка при вимірюванні деталей підпорядкована закону нормального розподілу з середнім квадратичним відхиленням 0,2. Визначити ймовірність того, що помилка вимірювання не перевищить за абсолютною величиною 0,4.

Варіант №5

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини $X(\delta, \delta)$ заданий таблицею

x	–5	–4	–3	–2	–1	0
p	0,05	0,15	0,2	0,25	0,3	0,05

Знайти функцію розподілу випадкової величини $X(\delta,\delta)$ і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X(\delta,\delta)$.

2. Випадкову величину *X* задано такою функцією щільності розподілу:

$$f(x) = ae^{-|x|}.$$

Потрібно: а) Знайти коефіцієнт а; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти $M(X)$ і $D(X)$.

3. З урни, що містить 7 білих і 3 чорних кулі, витягається по одній колі без повернення до появи білої кулі. Знайти закон розподілу числа витягнутих чорних куль. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини.

4. Помилка при вимірюванні дальності підпорядковані нормальному закону. Імовірність того, що виміряне значення дальності буде за абсолютною величиною відхилятися від справжнього більше, ніж на 40 м, дорівнює 0,5. Знайти імовірність того, що виміряне значення за абсолютною величиною буде відхилятися від справжнього не більше, ніж на 5 м.

Варіант №6

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* задано таблицею:

x	1	5	9	13	17
p	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1

Знайти функцію розподілу випадкової величини $X(\delta,\delta)$ і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини $X(\delta,\delta)$.

2. Випадкова величина *x* задана наступною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ x/4 & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ 3/4\,x-1/2 & \text{при} \quad 1<x\le 2; \\ 1 & \text{при} \quad 2<x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти функцію щільності розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *X*.

3. Стрілець стріляє по мішені до першого влучення, маючи в запасі 4 патрони. Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0.6. Знайти закон розподілу випадкової величини, значення якої дорівнюють кількості витрачених патронів. Визначити математичне сподіванняі дисперсію випадкової величини.

4. Довжина деталі, виготовленої на верстаті, розподілена по нормальному закону із середнім значенням 22 мм і дисперсією 0,04 мм^2. Знайти імовірність того, що довжина деталі буде між 21,6 мм і 22,4 мм.

Варіант №7

1. Закон розподілу дискретної величини *X* заданий таблицею

x	–2	–1	0	2	4
p	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\sigma(X)$.

2. Випадкову величину *X* задано такою функцією щільності розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 1; \\ \dfrac{a}{x^2} & \text{при} \quad 1<x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподіл $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти імовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення з інтервалу $]2,\,3[$.

3. Стрілець робить три постріли по мішені. Імовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,4. За кожне влучення стрільцю

зараховується 5 балів. Знайти закон розподілу кількості вибитих балів. Визначити математичне сподіванняі дисперсію випадкової величини.

4. Розмір деталей підпорядкований закону нормального розподілу з середнім арифметичним 15 мм і дисперсією 0,25. Визначити очікуваний процент браку, якщо допустимі розміри знаходяться в границях від 14 до 17 мм.

Варіант №8

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* задано таблицею:

X	2	5	8	11	14	17
p	0,4	0,29	0,15	0,1	0,05	0,01

Знайти функцію розподілу випадкової величини $F(X)$ і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини $\sigma(X)$.

2. Випадкову величину *X* задано такою функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 0; \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ 1-\dfrac{(x-2)^2}{2} & \text{при} \quad 1<x\le 2; \\ 1 & \text{при} \quad 2<x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти функцію щільності розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *x*.

3. В партії з 6 деталей є 4 стандартних. Випадково відібрані 3 деталі. Скласти закон розподілу кількості стандартних деталей серед відібраних. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини.

4. Обчислити імовірність потрапляння значення випадкової величини, що має закон нормального розподілу, на інтервалі $]20, 25[$, якщо відомо, що центр розсіювання знаходиться в точці $a=15$, а міра точності попадання дорівнює 0,059.

Варіант №9

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* задано таблицею:

x	1	2	3	4	5	6
p	0,01	0,09	0,17	0,26	0,34	0,13

Знайти функцію розподілу випадкової величини *x* і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

2. Випадкову величину *X* задано такою інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -3 \\ \dfrac{x^3}{54}+\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad -3 < x \le 3; \\ 1 & \text{при} \quad 3 < x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти диференційну функцію розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини *x*.

3. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,2. Постріли здійснюються до першого влучення і потім припиняються. Знайти закон розподіл для числа зроблених пострілів. Знайти математичне сподівання випадкової величини.

4. Випадкова величина підкорена закону нормального розподілу з середньою арифметичною 75. Визначити дисперсію випадкової величини, якщо відомо, що імовірність того, що випадкова величина набуде значення більшого за 80, дорівнює 0,1.

Варіант №10

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* задано таблицею:

X	–1	0	3	4
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Знайти функцію розподілу випадкової величини *X* і побудувати її графіки. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

2. Випадкову величину *X* задано такою диференційною функцією розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le -1;\\ a\left(1-x^2\right) & \text{при} \quad -1<x\le 1;\\ 0 & \text{при} \quad 1<x.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки диференційної і інтегральної функції розподілу; г) знайти імовірність того, що випадкова величина набуде значення, що лежить на проміжку $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3. В ящику лежать 50 куль з цифрами 1, 2 і 3. Куль з цифрою 2 в два рази більше, ніж куль з цифрою 3. Нехай значення випадкової величини є цифра, що стоїть на вийнятій кулі. Знайти кількість куль кожного виду, якщо математичне сподіванняцієї випадкової величини дорівнює 1,4. Знайти дисперсію цієї випадкової величини.

4. Випадкова величина підпорядкована закону нормального розподілу. Знайти параметри розподілу, якщо відомо, що випадкова величина набуває значення менше 35 з імовірністю 0,2, а значення, більшого за 0,5 — з імовірністю 0,1.

Варіант №11

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* задано таблицею

x	–1	1	2	3	5
p	0,3	0,25	0,2	0,1	0,15

Знайти функцію розподілу випадкової величини *X* і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

2. Випадкову величину *X* задано такою диференціальною функцією розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}ae^{x-1} & \text{при} \quad x\le 1;\\ 0 & \text{при} \quad 1<x.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти імовірність того, що дана випадкова величина набуде значення із інтервалу $]-1, 1[$.

3. Відомо, що в даному водоймищі 40 % коропів і 60 % інших риб. Всі риби з рівною імовірністю потрапляють на гачок. Рибалка вивуджує 5 риб.

Знайти закон розподілу числа спійманих коропів. Визначити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

4. Встановлено, що за великої кількості вимірювань 75 % помилок, розподілених нормально, не перевершують за абсолютною величиною 1,25 мм. Знайти відсоток помилок, які не перевершують за абсолютною величиною 1 мм.

Варіант №12

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* задано таблицею:

X	–2	–1	0	1	2
p	0,25	0,2	0,1	0,3	0,15

Знайти функцію розподілу випадкової величини *X* і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

2. Випадкову величину *X* задано такою інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1; \\ -\dfrac{x^3}{4} & \text{при} \quad -1\le x<1; \\ 1 & \text{при} \quad 1\le x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти диференційну функцію розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподіванняі і дисперсію випадкової величини *x*.

3. Два стрільці вибивають 8, 9 і 10 балів з такими законами розподілу:

I		
8	9	10
0,1	0,1	0,8

II		
8	9	10
0	0,3	0,7

Скласти закон розподілу для суми числа балів, вибитих обома стрільцями, і двома способами обчислити математичне сподіванняі і дисперсію для цього закону.

4. Якої ширини має бути інтервал, щоб можна було гарантувати попадання в нього значення випадкової величини з імовірністю 0,8? Випадкова величина

має нормальний закон розподілу з центром, що співпадає з серединою шуканого інтервалу і з середнім квадратичним відхилення, рівним 0,05.

Варіант №13

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	–2	–1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,15	0,4	0,15

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

2. Випадкову величину X задано такою інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ \ln x & \text{при} \quad 1 < x \le e; \\ 1 & \text{при} \quad e < x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти диференційну функцію розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподіванняі дисперсію випадкової величини x.

3. Випадкова величина x може набувати значень 1, 2, і 3. Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює 2, 3, а математичне сподівання квадрата випадкової величини X дорівнює 5, 6. Знайти закон розподілу X.

4. Автомат штампує деталі, ширина яких дорівнює a см. Відхилення ширини деталі від a підкоряється закону нормального розподілу. 55 % деталей відхиляється за шириною від a не більше, ніж на 0,15 см (в обидва боки). Який процент деталей буде за шириною відхилятися від a не більше, ніж на 0,3 см (в обидва боки)?

Варіант №14

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	–2	–1	0	1	2	3
p	0,5	0,3	0,05	0,05	0,08	0,02

Знайти функцію розподілу випадкової величини x і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини x.

2. Випадкову величину X задано такою диференціальною функцією розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ a\left(x^2+x\right) & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ 0 & \text{при} \quad 2 < x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини x.

3. На верстаті виготовляється 90 % деталей без дефектів. Скласти закон розподілу числа дефектних деталей, виявлених в результаті перевірки 3-х довільних деталей. Знайти математичне сподіванняі дисперсію випадкової величини.

4. Завод виробляє кульки для підшипників. Бракуються кульки, діаметр яких відрізняється від стандарту на 0,1 мм. Знайти дисперсію нормального розподілу діаметрів кульок, якщо бракуються 4,6 % виробів.

Варіант №15

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	–4	–3	–2	–1	0
p	0,15	0,2	0,04	0,02	0,59

Знайти функцію розподілу випадкової величини x і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини x.

2. Випадкову величину X задано такою інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ 4x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le \frac{1}{2} \\ x & \text{при} \quad \frac{1}{2} < x \le 1; \\ 1 & \text{при} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти диференційну функцію розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподівання і дисперсію величини x.

3. Здійснюються послідовні незалежні випробування 5 приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовується лише в тому випадку, коли попередній виявився надійним. Знайти закон розподілу випадкової

кількості випробовуваних приладів, якщо імовірність витримати випробовування для кожного з них дорівнює 0,9. Знайти математичне сподіванняі дисперсію випадкової величини.

4. Заряд мисливської рушниці пороху зважується на вагах з середнім квадратичним відхилення маси 150 мг. Математичне сподівання маси порохового заряду дорівнює 2,3 г. Яка ймовірність того, що зважування дасть результати у межах від 2,24 г до 2,33 г, якщо маса порохового заряду підпорядковується закону нормального розподілу?

Зразок розв’язування варіанта контрольної роботи

Задача 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	–1	0	1	2	3	4
p	0,05	0,1	0,55	0,1	0,05	0,15

Знайти функцію розподілу випадкової величини x і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини x.

Розв’язання. Значення функції розподілу випадкової величини X знаходимо, послідовно додаючи ймовірності, що стоять у другому рядку таблиці. Наприклад, $F(x)=P(X<x)=0$ при $x\le -1$; $F(x)=P(X<x)=0{,}05$ при $-1<x\le 0$; $F(x)=P(X<x)=0{,}05+\ \ +0{,}1=0{,}15$ при $0<x\le 1$ і т. д. У результаті дістанемо

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le -1; \\ 0{,}05 & \text{при} \quad -1<x\le 0; \\ 0{,}15 & \text{при} \quad 0<x\le 1; \\ 0{,}7 & \text{при} \quad 1<x\le 2; \\ 0{,}8 & \text{при} \quad 2<x\le 3; \\ 0{,}85 & \text{при} \quad 3<x\le 4; \\ 1 & \text{при} \quad 4<x \end{cases}$$

і графік $F(x)$ на рис. 20.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i=(-1)\cdot 0{,}05+0\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}55+2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}05+$$
$$+4\cdot 0{,}15=1m45.$$

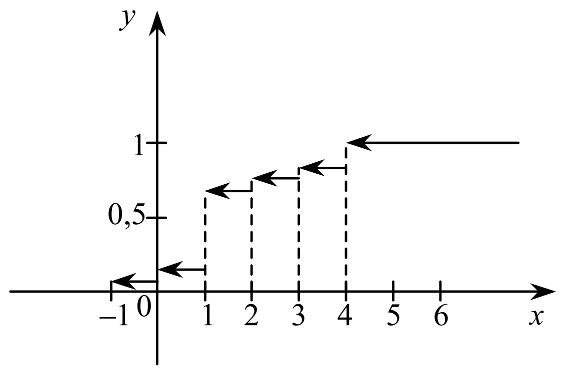

Рис.20

$$D(X)=\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i=\sum_{i=1}^{6}x_i^2 p_i-M^2(X)=1\cdot 0,05+0\cdot 0,1+$$
$$+1\cdot 0,55+4\cdot 0,01+9\cdot 0,05+16\cdot 0,15-(1,45)^2\approx 3,85-2,10=1,75;$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 1,32\,.$$

Відповідь. $\sigma(X)=1{,}32$.

Задача 2. Випадкову величину X задано такою диференціальною функцією розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ a & \text{при} \quad 0<x\le 1;\\ ax & \text{при} \quad 1<x\le 2;\\ 0 & \text{при} \quad 2<x.\end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти інтегральну функцію розподіл $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти математичне сподіванняі дисперсію випадкової величини X.

Розв'язання.

а) Знаходимо a з умови $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Отримуємо

$$\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{1}adx+\int_{1}^{2}axdx+\int_{2}^{\infty}0\,dx=1;$$

$$ax\Big|_0^1+a\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=1+\frac{3}{2}a=\frac{5}{2}a=1;$$

$$a = 0{,}4.$$

б) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

$F(x) = 0$ при $x \le 0$;

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{2}{5}dx = \frac{2}{5}x$ при $0 < x \le 1$;

$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{2}{5}dx + \int\limits_{1}^{x} \frac{2}{5}xdx = \frac{2}{5} + \frac{x^2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{x^2}{5}$ при $1 < x \le 2$;

$F(x) = 1$ при $x > 2$.

Таким чином,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \frac{2}{5}x & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ \frac{1}{5} + \frac{x^2}{5} & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad 2 < x. \end{cases}$$

в) Див. рис. 21 і рис. 22.

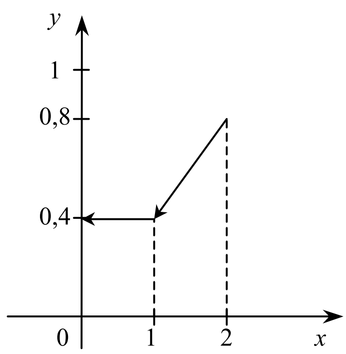

Рис. 21

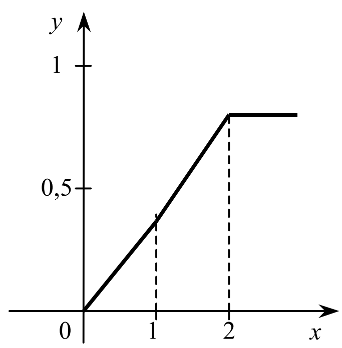

Рис. 22

г) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} \frac{2}{5} x dx + \int_{1}^{2} \frac{2}{5} x^2 dx + \int_{2}^{\infty} 0dx =$$

$$= \frac{x^2}{5}\Big|_0^1 + \frac{2}{15} x^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{5} + \frac{16}{15} - \frac{5}{15} = \frac{17}{15};$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(M(X)\right)^2.$$

$$D(X) = \int_{0}^{1} \frac{2}{5} x^3 dx + \int_{1}^{2} \frac{2}{5} x^4 dx - \left(\frac{17}{15}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^4}{10}\Big|_0^1 + \frac{2}{5} x^5 \Big|_1^2 - \left(\frac{17}{15}\right)^2 \approx 0,1 + 2,43 - 1,28 = 1,25.$$

Відповідь. $a = 0,4;\ M(X) = 1,13;\ D(X) = 1,25.$

Задача 3. Відбуваються три випробування, в кожному з яких подія A з'являється з імовірністю 0,4. Знайти закон розподілу кількості появ події А і математичне сподівання випадкової величини.

Розв'язання. За умовою задачі задано біноміальний розподіл. Закон цього розподілу записується на основі формули Бернуллі і має вигляд:

x	0	1	2	3
p	(0,6)3	$3 \cdot (0,6)^2 \cdot 0,4$	$3 \cdot 0,6 \cdot (0,4)^2$	$(0,4)^3$

або

x	0	1	2	3
p	0,216	0,432	0,288	0,064

Математичне сподіваннявипадкової величини можна обчислити за загальною формулою

$$M(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0,216 + 1 \cdot 0,432 + 2 \cdot 0,288 + 3 \cdot 0,064 = 1,2,$$

або за формулою для математичного сподівання біноміального розподілу

$$M(X) = np = 3 \cdot 0,4 = 1,2.$$

Відповідь. $M(X) = 1,2.$

Задача 4. Знайти імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення з інтервалу $]10, 12[$, якщо ця величина набуде значення більше 14 з імовірністю 0,1, а значення менше 7 з імовірністю 0,05.

Розв'язання. Імовірність того, що випадкова величина, що має нормальний розподіл, набуде значення з інтервалу $]a, b[$, обчислимо за формулою

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - m_X}{6_X}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_X}{6_X}\right),$$

де m_x і 6_x — математичне сподіванняі середнє квадратичне сподівання випадкової величини X, $\Phi(x)$ — функція Лапласа. За умовою

$$P(14 < X < \infty) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{14 - m_X}{6_X}\right) = 0,05.$$

$$P(-\infty < X < 7) = \Phi\left(\frac{7 - m_X}{6_X}\right) - \Phi(-\infty) = 0,05.$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} \dfrac{14 - m_X}{\sigma_X} = 1,3 \\ \dfrac{7 - m_X}{\sigma_X} = -1,65. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь з двома невідомими, маємо

$m_X = 10,93;\ \sigma_X = 2,38.$

Шукану ймовірність знаходимо за початковою формулою

$$P(10 < X < 12) = \Phi\left(\frac{12 - 10,93}{2,38}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 10,93}{2,38}\right) =$$
$$= \Phi(0,45) + \Phi(0,39) = 0,1736 + 0,1517 = 0,325$$

на основі таблиці значень функції $\Phi(X)$.

Відповідь. $P = 0,325.$

Список рекомендованої літератури

Основна:

1. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2005. 340с.

2. Гнєденко Б. В. Курс теорії ймовірностей : підручник. Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010, 464 с.

3. Медведєв М. Г., Пащенко І. О. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник. Київ : Ліра-К, 2008, 536 с.

4. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : навчальний посібник. Львів : ЛьвДУВС, 2017, 292 с.

5. Тюрин О. В., Ахмеров О. Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. Одеса : Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2018. 170 с.

Додаткова:

1. Практикум з теорії імовірностей та математичної статистики: навч. посіб. / А. М. Алілуйко та ін. Тернопіль : Підручники і посібники, 2018. 352 с.

2. Гулівата І. О., Гусак Л. П., Радзіховська Л. М. Вища та прикладна математика.Теорія ймовірностей : навч. посіб. Вінниця : Видавничо-редакційний відділ ВТЕІ КНТЕУ, 2018. 208 с.

3. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В., Орел Б. П., Штабалюк П. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. Київ : НТУУ «КПІ», 2014, 212 с.

4. Синєкоп М. С., Жилюк Н. О., Софронова М. С. Вища та прикладна математика. Частина1. Вища математика. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посібник. Харків : ХДУХТ, 2015. 205 с.

5. Слюсарчук П. В. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник. Ужгород : Карпати. 2005. 178 с.

6. Швець В. Т. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах : навч. посіб. Одеса : Видавництво Т. Швець, 2023. 155 с.

Зміст

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Методичні рекомендації

Укладачі: **Борчик** Євген Юрійович

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк. 2
Тираж 25 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.