МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА РЯДИ

методичні рекомендації
для практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
ОПП «Публічне управління та адміністрування»
спеціальності 281 - «Публічне управління та адміністрування»,
ОПП «Менеджмент»
спеціальності 073 - «Менеджмент»
та ОПП «Економіка»
спеціальності 051 «Економіка»
денної та заочної форм навчання

МИКОЛАЇВ
2024

УДК 517.91
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету МНАУ (протокол № 8 від 06.05.2024р.)

Укладачі:

О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;

В.М. Дармосюк – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;

Рецензенти:

Махровська Н.А. – к.ф.-м.н., доцент кафедри теорії й методики природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Миколаївського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

Пархоменко О.Ю. – к.ф.-м.н., доцент кафедри економічної кібернетики, комп’ютерних наук та технологій Миколаївського національного аграрного університету.

ЗМІСТ

ВСТУП

У методичних рекомендаціях з наступних змістовних модулів «Звичайні диференціальні рівняння», «Числові та функціональні ряди» розглядаються методи розв’язування диференціальних рівнянь першого порядку, диференціальних рівнянь вищих порядків та диференціальних рівнянь другого порядку; дослідження числових рядів на збіжність, визначення області збіжності степеневих рядів. Наводяться приклади застосувань диференціальних рівнянь та рядів. Кожна тема містить коротке викладення теорії, достатню кількість розв’язаних прикладів з докладними поясненнями щодо розв’язування, що допоможе закріпити теоретичний матеріал, а також запропоновано задачі для самостійного розв’язування, контрольні запитання, що дозволить студентам оволодіти матеріалом.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для здобувачів освітнього рівня «бакалавр» спеціальностей 281 «Публічне управління та адміністрування», 073 «Менеджмент», 051 «Економіка», але їх можуть використовувати студенти інших спеціальностей, для яких програмою передбачено вивчення курсу «Вища математика», зокрема при дистанційній формі навчання.

МОДУЛЬ 9 «ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»

Диференціальні рівняння І порядку з відокремлюваними змінними

1. Основні поняття та теореми

Диференціальні рівняння – рівняння, що встановлюють залежність між незалежними змінними, числами і невідомими функціями та їхніми похідними. Тобто це ті ж рівняння, але замість невідомого числа x у нас буде невідома функція під знаком похідної (або наявні окремо dy, dx).

Наприклад: 1) $y'' - 3y' - 4y = 1 + x^2$; 2) $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$; 3) $\mathrm{tg}y dx - x \ln x dy = 0$.

Порядок найвищої похідної встановлює порядок диференціального рівняння: $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$ – диференціальне рівняння І порядку; $y'' - 3y' - 4y = 1 + x^2$ – диференціальне рівняння ІІ порядку.

Розв'язок диференціального рівняння – така функція $y(x)$, що при підстановці в це диференціальне рівняння перетворює його в тотожність.

Покажемо, що розв'язком диференціального рівняння $y'\mathrm{tg}x - y = 27$ є функція $y = C\sin x - 27$.

Підставимо в рівняння $y'\mathrm{tg}x - y = 27$ функцію $y = C\sin x - 27$ та її похідну $y' = C\cos x$. Маємо $C\cos x \cdot \mathrm{tg}x - (C\sin x - 27) = 27$ або $C\sin x - C\sin x + 27 = 27$, звідки $27 = 27$.

Отримали правильну рівність, тому $y = C\sin x - 27$ є розв'язком $y'\mathrm{tg}x - y = 27$.

Розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти всі такі функції $y(x)$, які при підстановці в це диференціальне рівняння перетворюють його в тотожність.

Розглянемо диференціального рівняння І порядку з відокремленими змінними. Якщо диференціальне рівняння має вигляд $f(x)dx + g(y)dy = 0$ або $f(x)dx = -g(y)dy$, то це рівнянням з відокремленими змінними. Проінтегруємо: $\int f(x)dx = -\int g(y)dy + C$ (сталу досить додати з однієї сторони). Після знаходження інтегралів знайдемо розв'язок.

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y'}{y+27} = \mathrm{ctg}x$.

Підставимо в рівняння вираз $y' = \dfrac{dy}{dx}$, маємо $\dfrac{dy}{(y+27)dx} = \mathrm{ctg}x$. Відокремимо dy і dx по різні сторони рівняння (домножимо на dx), маємо $\dfrac{dy}{y+27} = \mathrm{ctg}x dx$.

Проінтегруємо обидві частини: $\int \dfrac{dy}{y+27} = \int \mathrm{ctg}x dx$. Застосуємо табличні інтеграли $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$; $\int \mathrm{ctg}x = \ln|\sin x| + C$, маємо $\ln|y+27| = \ln|\sin x| + \ln C$ (це загальний інтеграл).

Зверніть увагу: стала інтегрування C додається тільки з однієї сторони, сталу інтегрування можна записати в довільному вигляді. Нам зручно записати сталу інтегрування як $\ln C$, бо це дає можливість позбавитись від логарифмів.

Сума логарифмів дорівнює логарифму добутку $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, тоді $\ln|y+27| = \ln|C\sin x|$.

Прирівняємо вирази під логарифмами: $y + 27 = C\sin x$ або $y = C\sin x - 27$ (це загальний розв'язок).

Загальним розв'язком диференціального рівняння називається функція, яка містить стільки сталих, який порядок диференціального рівняння, і підстановка якої в дане диференціальне рівняння перетворює його в тотожність.

Загальний розв'язок, який не розв'язаний відносно функції, називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Розв'язок, знайдений із загального розв'язку при фіксованих значеннях сталих називається частинним розв'язком диференціального рівняння.

Розв'язок, знайдений із загального інтеграла при фіксованих значеннях сталих називається частинним інтегралом диференціального рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y'}{y+27} = \mathrm{ctg}x$, що задовольняє початковій умові $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 27$.

Загальний розв'язок вже маємо $y = C\sin x - 27$. Підставимо початкову умову $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 27$. Початкову умову розшифровуємо так: $y = 27$ при $x = \dfrac{\pi}{6}$. Маємо $27 = C\sin\dfrac{\pi}{6} - 27$, $27 = \dfrac{C}{2} - 27$, $\dfrac{C}{2} = 54$, $C = 108$. Частинний розв'язок $y = 108\sin x - 27$ (просто в загальний розв'язок підставили знайдене значення *C*, що відповідає початковій умові).

Якщо диференціальне рівняння можна представити у вигляді $f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot dx + \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot dy = 0$ або $f_1(x)\cdot f_2(y)\cdot dx = -\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)\cdot dy$, то це ***рівняння з відокремлюваними змінними***. Після ділення обох частин рівняння на $\varphi_1(x)\cdot f_2(y)$ рівняння матиме вигляд: $\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\cdot dx = -\dfrac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\cdot dy$. Це ***рівняння з відокремленими змінними***. Інтегруємо обидві частини: $\int\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx = -\int\dfrac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy + C$, після знаходження інтегралів знайдемо загальний інтеграл.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{dy}{y-1} = xdx$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 144$.

Розв'язання:

В рівняння вже відокремленні змінні, тому інтегруємо $\int\dfrac{dy}{y-1} = \int xdx$. Маємо $\ln|y-1| = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Підставимо початкову умову $x = 0$, $y = 144$: $\ln|144-1| = 0 + C$, тоді $C = \ln 143$.

Підставимо $C = \ln 143$ в $\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$, маємо $\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + \ln 143$ (це частинний інтеграл), звідки $\ln|y-1| - \ln 143 = \frac{x^2}{2}$ або $\ln\frac{y-1}{143} = \frac{x^2}{2}$ (так як різниця логарифмів дорівнює логарифму частки). Так як $\ln a = b$ еквівалентне $a = e^b$, то $\frac{y-1}{143} = e^{\frac{x^2}{2}}$. Тоді $y - 1 = 143e^{\frac{x^2}{2}}$, $y = 143e^{\frac{x^2}{2}} + 1$ – частинний розв'язок.

Відповідь: $y = 143e^{\frac{x^2}{2}} + 1$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot y^2}$.

Розв'язання:

Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$, маємо $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot y^2}$. Відокремимо dy і dx по різні сторони рівняння, для цього домножимо обидві частини на dx, маємо $dy = \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot y^2}$.

Відокремимо змінні, для цього домножимо обидві частини на y^2, маємо $y^2 dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Інтегруємо обидві частини рівняння $\int y^2 dy = \int x^{-\frac{1}{2}} dx$, отримаємо $\frac{y^3}{3} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$ або $\frac{y^3}{3} = 2\sqrt{x} + C$ (загальний інтеграл, бо не виражене *y*). Виразимо *y*, маємо $y = \sqrt[3]{3\left(2\sqrt{x} + C\right)}$ – загальний розв'язок.

Відповідь: $y = \sqrt[3]{3\left(2\sqrt{x} + C\right)}$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{\cos x}{e^y}$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 0$.

Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$, маємо $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{e^y}$. Відокремимо dy і dx по різні сторони рівняння, для цього домножимо обидві частини на dx, маємо $dy = \frac{\cos x dx}{e^y}$. Відокремимо змінні, домноживши обидві частини на e^y, маємо $e^y dy = \cos x dx$.

Інтегруємо обидві частини рівняння $\int e^y dy = \int \cos x dx$, маємо $e^y = \sin x + C$ – загальний інтеграл.

Прологарифмуємо обидві частини $\ln\left(e^y\right) = \ln(\sin x + C)$, звідки $y = \ln(\sin x + C)$ – загальний розв'язок.

Щоб знайти частинний розв'язок, підставимо початкову умову $y=0$ при $x=0$, маємо $0=\ln(\sin 0+C)$ або $0=\ln C$, звідки $C=1$, $y=\ln(\sin x+1)$ – частинний розв'язок.

Відповідь: $y=\ln(\sin x+1)$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\mathrm{tg}y-x\ln x\, y'=0$, що задовольняє початковій умові $y(e)=\dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання:

Та як $y'=\dfrac{dy}{dx}$, то маємо $\mathrm{tg}y-x\ln x\dfrac{dy}{dx}=0$ або $\mathrm{tg}y=x\ln x\dfrac{dy}{dx}$. Відокремимо dy і dx по різні сторони рівняння, домноживши обидві частини на dx, маємо $\mathrm{tg}y dx=x\ln x dy$. Відокремимо змінні, поділивши обидві частини на $\mathrm{tg}y\cdot x\ln x$, маємо $\dfrac{dx}{x\ln x}=\dfrac{dy}{\mathrm{tg}y}$.

Проінтегруємо обидві частини рівняння $\int\dfrac{dx}{x\ln x}=\int\dfrac{\cos y dy}{\sin y}$. Внесемо $\dfrac{1}{x}$ і $\cos y$ під знак диференціала $\dfrac{dx}{x}=d(\ln x)$, $\cos y dy=d(\sin y)$, тоді отримаємо $\int\dfrac{d(\ln x)}{\ln x}=\int\dfrac{d(\sin y)}{\sin y}$, $\ln|\ln x|=\ln|\sin y|+\ln C$ або $\ln|\ln x|=\ln|C\sin y|$. Прирівняємо вирази під логарифмами $\ln x=C\sin y$. Це загальний інтеграл.

Визначимо C, підставивши початкову умову $y(e)=\dfrac{\pi}{2}$: $\ln e=C\sin\dfrac{\pi}{2}$, $1=C$. Тоді частинний інтеграл $\ln x=\sin y$.

Відповідь: частинний розв'язок $y=\arcsin\ln x$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{dy}{y-1}=xdx$, що задовольняє початковій умові $y(0)=\alpha^2$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y'}{y+\alpha}=\mathrm{ctg}x$, що задовольняє початковій умові $y\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\alpha$.

3. Знайти частинний інтеграл диференціального рівняння $x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0$, що задовольняє початковій умові $y(\sqrt{\alpha})=\sqrt{\alpha}$.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням?
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?
3. Що є розв'язком диференціального рівняння?
4. Який вигляд має диференціальне рівняння I порядку з відокремленими змінними?
5. Що є загальним розв'язком, загальним інтегралом диференціального рівняння?
6. Як знайти частинний розв'язок диференціального рівняння?
7. Який вигляд має диференціальне рівняння I порядку з відокремлюваними змінними?

Однорідні відносно змінних диференціальні рівняння I порядку

1. Основні поняття та теореми

Якщо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ або $p(x, y) \cdot dx + q(x, y) \cdot dy = 0$ не змінюються при заміні x на kx і y на ky, то воно називається ***однорідним відносно змінних***.

Так, диференціальне рівняння $y^2 + x^2 y' = xyy'$ є однорідним відносно змінних, бо $k^2 y^2 + k^2 x^2 y' = k^2 xyy'$, $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

Інше означення: якщо диференціальне рівняння зводиться до $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, то воно однорідне відносно змінних.

Так диференціальне рівняння $y^2 + x^2 y' = xyy'$ можна записати як $x^2 y' - xyy' = -y$, $x \cdot y'(x - y) = -y^2$, $\frac{xy'(x-y)}{x^2} = -\frac{y^2}{x^2}$, $y'\left(1 - \frac{y}{x}\right) = -\left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \div \left(\frac{y}{x} - 1\right)$. Рівняння однорідне відносно змінних.

Підстановка $y = u \cdot x$, де u – нова шукана функція, перетворює однорідне відносно змінних рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними.

Зробимо заміну $y = u \cdot x$, $y' = u'x + u$: маємо $u'x + u = \frac{u^2}{u-1}$, $u'x = \frac{u^2}{u-1} - u$; $u'x = \frac{u^2}{u-1} - \frac{u(u-1)}{u-1}$; тоді $u'x = \frac{u}{u-1}$. Це вже рівняння з відокремлюваними змінними.

Підставимо $u' = \frac{du}{dx}$, маємо $\frac{du}{dx}x = \frac{u}{u-1}$. Відокремимо диференціали $xdu = \frac{u}{u-1}dx$. Відокремимо змінні $\frac{u-1}{u}du = \frac{dx}{x}$; $\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо обидві частини рівняння $\int\left(1 - \frac{1}{u}\right)du = \int \frac{dx}{x}$, маємо $u - \ln|u| = \ln|x| + \ln C$ або $u = \ln|u| + \ln|x| + \ln C$, звідки $u = \ln|Cux|$.

Після того як нове рівняння проінтегровано, слід замінити u на $\frac{y}{x}$, маємо $\frac{y}{x} = \ln\left|C \cdot \frac{y}{x} \cdot x\right|$ або $\frac{y}{x} = \ln|Cy|$, звідки $y = x\ln|Cy|$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

Розв'язання:

Рівняння однорідне відносно змінних, зробимо заміну $y = ux$, $y' = u'x + u$: маємо $u'x + u = u + \frac{1}{u}$, тоді $u'x = \frac{1}{u}$. Це вже рівняння з відокремлюваними змінними.

Підставимо $u' = \frac{du}{dx}$, маємо $\frac{du}{dx}x = \frac{1}{u}$.

Відокремимо диференціали $xdu = \frac{1}{u}dx$. Відокремимо змінні $udu = \frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо обидві частини $\int udu = \int \frac{dx}{x}$, маємо $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln C$ або $\frac{u^2}{2} = \ln|Cx|$.

Повернемося до змінної y, замінивши u на $\frac{y}{x}$, маємо $\frac{y^2}{2x^2} = \ln|Cx|$, звідки $y^2 = 2x^2 \ln|Cx|$. Загальний розв'язок $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

Відповідь: загальний розв'язок $y = \pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

Розв'язання:

$y' = \frac{x^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$; $y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$. Це рівняння однорідне відносно змінних.

Виконаємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$; маємо $u'x + u = 1 + u + u^2$ або $u'x = 1 + u^2$. Це вже рівняння з відокремлюваними змінними.

Підставимо $u' = \frac{du}{dx}$, маємо $\frac{du}{dx}x = 1 + u^2$.

Відокремимо диференціали $xdu = \left(1 + u^2\right)dx$. Відокремимо змінні $\frac{du}{1+u^2} = \frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо обидві частини рівняння $\int \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{dx}{x}$, маємо $\operatorname{arctg} u = \ln|x| + \ln C$ або $\operatorname{arctg} u = \ln|Cx|$, звідки $u = \operatorname{tg}\ln|Cx|$.

Повернемося до змінної y, замінивши u на $\frac{y}{x}$, маємо $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\ln|Cx|$ або $y = x\operatorname{tg}\ln|Cx|$.

Відповідь: $y = x\operatorname{tg}\ln|Cx|$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0$ при $y(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Розв'язання:

$y' + \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = 0$; $y' = -\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$. Переконались, що рівняння однорідне відносно змінних.

Зробимо заміну $y = ux$, $y' = u'x + u$: маємо $u'x + u = -\frac{1}{u} - u$. Виконаємо перетворення $u'x = -2u - \frac{1}{u}$; $u'x = -\frac{2u^2 + 1}{u}$. Це рівняння з відокремлюваними змінними.

Підставимо $u' = \frac{du}{dx}$, маємо $\frac{du}{dx}x = -\frac{2u^2 + 1}{u}$.

Відокремимо диференціали $xdu = -\frac{2u^2+1}{u}dx$; відокремимо змінні $\frac{udu}{2u^2+1} = -\frac{dx}{x}$.

Проінтегруємо обидві частини рівняння $\int \frac{udu}{2u^2+1} = -\int \frac{dx}{x}$. Домножимо обидві частини на 4 і внесемо $4u$ під знак диференціала: $\int \frac{d(2u^2)}{2u^2+1} = -4\int \frac{dx}{x}$. Проінтегруємо $\ln(2u^2+1) = -4\ln|x| + \ln C$ або $\ln(2u^2+1) = \ln\frac{C}{x^4}$, звідки $2u^2+1 = \frac{C}{x^4}$.

Повернемося до змінної y, маємо $\frac{2y^2}{x^2}+1 = \frac{C}{x^4}$ або $2y^2+x^2 = \frac{C}{x^2}$.

Підставимо початкову умову $y(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$: $\pi^2+\pi^2 = \frac{C}{\pi^2}$; $2\pi^2 = \frac{C}{\pi^2}$; $C = 2\pi^4$.

Тоді $2y^2+x^2 = \frac{2\pi^4}{x^2}$, $2y^2 = \frac{2\pi^4 - x^4}{x^2}$, $y = \pm\sqrt{\frac{2\pi^4 - x^4}{2x^2}}$.

Відповідь: $y = \pm\sqrt{\frac{2\pi^4 - x^4}{2x^2}}$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha+1}$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{(\alpha+1)^2x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + \frac{x^2 + (\alpha+1)y^2}{xy} = 0$, що задовольняє початковій умові $y(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+1}}$.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається диференціальним рівнянням однорідним відносно змінних?
2. Як розв'язують диференціальне рівняння однорідне відносно змінних?

Лінійні диференціальні рівняння I порядку (метод Лагранжа)

1. Основні поняття та теореми

Рівняння виду $y' + P(x)y = Q(x)$ (функція y і її похідна y' входять до рівняння в першому степені) – ***лінійне неоднорідне диференціальне рівняння I порядку*** (ЛНДР I порядку).

Якщо права частина рівняння рівна нулю ($y' + P(x)y = 0$), то рівняння є ***лінійним однорідним*** диференціальним рівнянням першого порядку (ЛОДР I порядку).

Алгоритм розв'язання ЛНДР I порядку $y' + P(x)y = Q(x)$ методом Лагранжа (***варіації сталої***):

I. розв'язуємо відповідне ЛОДР $y' + P(x)y = 0$. Розв'язуємо рівняння з відокремлюваними змінними або застосуємо формулу $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

II. Варіюємо C (замінюємо сталу на функцію $C(x)$). Маємо $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Це роз'язок ЛНДР. Треба тільки знайти $C(x)$. Для цього підставляємо в умову y і $y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}$, знаходимо вираз для $C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$ і визначаємо $C(x)$ інтегруванням.

2. Приклади виконання завдань

лінійне однорідне диференцільне рівняння I порядку $y' + P(x)y = 0$

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + y = 0$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$.

Розв'язання:

розв'язуємо рівняння з відокремлюваними змінними		або застосовуємо формулу $y = Ce^{-\int P(x)dx}$	
Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} + y = 0$, $\frac{dy}{dx} = -y$.	визначаємо $P(x)$	$P(x) = 1$.
Відокремимо змінні	$dy = -ydx$, $\frac{dy}{y} = -dx$.	Підставляємо $P(x)$	$y = Ce^{-\int 1dx}$.
Проінтегруємо	$\ln\lvert y\rvert - \ln C = -x$, $\ln\frac{\lvert y\rvert}{C} = -x$, $\frac{\lvert y\rvert}{C} = e^{-x}$, $y = Ce^{-x}$.	Інтегруємо (плюс сталу в показнику не пишемо)	загальний розв'язок $y = Ce^{-x}$.
Визначимо сталу C використовуючи початкову умову $y(0) = 1$. Маємо $1 = Ce^{-0}$; $C = 1$. **Частинний розв'язок** диференціального рівняння $y = e^{-x}$.			

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + y\sin x = 0$, що задовольняє початковій умові $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Розв'язання:

розв'язуємо рівняння з відокремлюваними змінними		або застосовуємо формулу $y = Ce^{-\int P(x)dx}$	
Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} + y\sin x = 0$, $\frac{dy}{dx} = -y\sin x$.	визначаємо $P(x)$	$P(x) = \sin x$.
Відокремимо змінні	$dy = -y\sin xdx$, $\frac{dy}{y} = -\sin xdx$.	Підставляємо $P(x)$	$y = Ce^{-\int \sin xdx}$.
Проінтегруємо	$\ln\lvert y\rvert - \ln C = \cos x$, $\ln\frac{\lvert y\rvert}{C} = \cos x$, $\frac{\lvert y\rvert}{C} = e^{\cos x}$, $y = Ce^{\cos x}$.	Інтегруємо (плюс сталу в показнику не пишемо)	загальний розв'язок $y = Ce^{\cos x}$.
Визначимо сталу C використовуючи початкову умову. Маємо $1 = Ce^{0}$; $C = 1$. **Частинний розв'язок** диференціального рівняння $y = e^{\cos x}$.			

лінійне неоднорідне диференцільне рівняння I порядку $y' + P(x)y = Q(x)$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - 21y = e^x$.

Розв'язання:

I. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y' - 21y = 0$.

Застосовуємо формулу $y = Ce^{-\int P(x)dx}$	$y = Ce^{\int 21dx} = Ce^{21x}$.

II. Розв'яжемо неоднорідне рівняння $y' - 21y = e^x$, маючи розв'язок однорідного.

Запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (варіація сталої)	$y = C(x)e^{21x}$ (*). Знайдемо $C(x)$.
Знайдемо y'	$y' = C'(x)e^{21x} + 21e^{21x}C(x)$.
Підставляємо y і y' у вихідне рівняння:	$C'(x)e^{21x} + 21C(x)e^{21x} - 21C(x)e^{21x} = e^x$.
Отримали рівняння відносно $C'(x)$:	$C'(x)e^{21x} = e^x$, $C'(x) = e^{-20x}$.
Знаходимо $C(x)$ інтегруванням	$C(x) = \int e^{-20x}dx = \dfrac{e^{-20x}}{-20} + C_1$.
Підставимо функцію $C(x)$ в (*), маємо **загальний розв'язок**	$y = \left(C_1 - 0{,}05e^{-20x}\right)e^{21x}$, $y = C_1e^{21x} - 0{,}05e^x$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + 5y = e^{3x}$, що відповідає початковій умові $y(0) = \dfrac{1}{8}$.

Розв'язання:

I. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y' + 5y = 0$.

Застосовуємо формулу $y = Ce^{-\int P(x)dx}$	$y = Ce^{-\int 5dx} = Ce^{-5x}$.

II. Розв'яжемо неоднорідне рівняння, маючи розв'язок однорідного.

Запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (варіація сталої)	$y = C(x)e^{-5x}$ (*). Знайдемо $C(x)$.
Знайдемо y'	$y' = C'(x)e^{-5x} - 5e^{-5x}C(x)$.
Підставляємо y і y' у вихідне рівняння:	$C'(x)e^{-5x} - 5e^{-5x}C(x) + 5C(x)e^{-5x} = e^{3x}$.
Отримали рівняння відносно $C'(x)$:	$C'(x)e^{-5x} = e^{3x}$, $C'(x) = e^{8x}$.
Знаходимо $C(x)$ інтегруванням	$C(x) = \int e^{8x}dx = \dfrac{1}{8}\int e^{8x}d(8x) = \dfrac{e^{8x}}{8} + C_1$.
Підставимо функцію $C(x)$ в (*), маємо загальний розв'язок	$y = \left(\dfrac{e^{8x}}{8} + C_1\right)e^{-5x}$.
Підставимо початкову умову $y(0) = \dfrac{1}{8}$:	$\dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{8} + C_1\right)\cdot 1$, звідки $C_1 = 0$.
Підставимо C_1 в загальний розв'язок, маємо **частинний розв'язок**	$y = \left(\dfrac{e^{8x}}{8}\right)e^{-5x} = \dfrac{e^{3x}}{8}$.

5. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$.

Розв'язання:

I. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0$.

Застосовуємо формулу $y = Ce^{-\int P(x)dx}$	$y = Ce^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = Ce^{\int \frac{d(x^2)}{1+x^2}} = Ce^{\ln(1+x^2)} = C(1+x^2)$.

II. Розв'яжемо неоднорідне рівняння, маючи розв'язок однорідного.

Запишемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (варіація сталої)	$y = C(x)\cdot(1+x^2)$ (*). Знайдемо $C(x)$.
Знайдемо y'	$y' = C'(x)\cdot(1+x^2) + 2xC(x)$.
Підставляємо y і y' у вихідне рівняння:	$C'(x)\cdot(1+x^2) + 2xC(x) - 2xC(x) = 1 + x^2$.
Отримали рівняння відносно $C'(x)$:	$C'(x)\cdot(1+x^2) = 1 + x^2$, $C'(x) = 1$.
Знаходимо $C(x)$ інтегруванням	$C(x) = \int 1dx = x + C_1$.
Підставимо функцію $C(x)$ в (*), маємо загальний розв'язок	$y = (x + C_1)\cdot(1+x^2)$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' + \alpha y = e^{2x}$, що задовольняє початковій умові $y(0) = \alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y' - \alpha y = 2$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'\cos x + y\sin x = 1$, що задовольняє початковій умові $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \alpha$.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням І порядку?
2. Який розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння І порядку?
3. Що називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням І порядку?
4. У чому полягає метод Лагранжа варіації сталої?

Лінійні диференціальні рівняння І порядку (метод Бернуллі)

1. Основні поняття та теореми

Розв'язок лінійного диференціального рівняння І порядку $y' + P(x)y = Q(x)$ шукаємо у вигляді добутку $y(x) = u(x)\cdot v(x)$ або $y = u \cdot v$ (для зручності x в дужках при u і v опускаємо), тоді $y' = u'v + v'u$. Підставивши ці вирази у вихідне рівняння, отримаємо $u'v + \underline{[v' + vP(x)]}u = Q(x)$. Задаємось метою знайти $v(x)$ таким, щоб підкреслене дорівнювало нулю, тоді маємо систему диференціальних рівнянь для визначення функцій $u(x)$ і $v(x)$, а саме $\begin{cases} v' + vP(x) = 0; \\ u'v = Q(x). \end{cases}$

Перше рівняння має розв'язок $v = e^{-\int P(x)dx}$ (тут сталу не додаємо). З другого рівняння виразимо $u' = \frac{Q(x)}{v}$, тоді $u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx$. Маємо готові формули для визначення функцій $u(x)$ і $v(x)$, добуток яких є розв'язком вихідного диференціального рівняння.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння $y' + y\cos x = e^{-\sin x}\cos x$.

Розв'язання:

Шукаємо розв'язок у вигляді $y = u \cdot v$.

$v(x)$ знаходимо з формули $v = e^{-\int P(x)dx}$, маємо $v = e^{-\int \cos x dx} = e^{-\sin x}$.

$u(x)$ знаходимо як $u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx$, маємо $u = \int \frac{e^{-\sin x}\cos x}{e^{-\sin x}}dx = \int \cos x dx = \sin x + C$.

Підставимо знайдені функції u і v в $y = u \cdot v$, отримаємо $y = (\sin x + C)\cdot e^{-\sin x}$.

Відповідь: $y = (\sin x + C)\cdot e^{-\sin x}$.

2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{2}{x^2}$.

Розв'язання:

Шукаємо розв'язок у вигляді $y = u \cdot v$.

$v(x)$ знаходимо як $v = e^{-\int P(x)dx}$, маємо $v = e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$. $u(x)$ знаходимо як $u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx$, маємо $u = \int \frac{-\frac{2}{x^2}}{x}dx = -\int \frac{2}{x^3}dx = -2\int x^{-3}dx = -2\frac{x^{-2}}{-2} + C = x^{-2} + C$.

Підставимо знайдені функції u і v в $y = u \cdot v$, отримаємо $y = \left(\frac{1}{x^2} + C\right)\cdot x = \frac{1}{x} + Cx$.

Відповідь: $y = \frac{1}{x} + Cx$.

3. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння $y' - \frac{2y}{x} = \frac{x}{2}$, що задовольняє початковій умові $y(e) = 0$.

Розв'язання:

Шукаємо розв'язок у вигляді $y = u \cdot v$.

$v(x)$ знаходимо як $v = e^{-\int P(x)dx}$, маємо $v = e^{-\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^2 = x^2$.

$u(x)$ знаходимо як $u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx$, маємо $u = \int \frac{\frac{x}{2}}{x^2}dx = \int \frac{x}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$.

Підставимо знайдені функції u і v в $y = u \cdot v$, отримаємо $y = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)x^2$. Це загальний розв'язок.

Підставимо початкову умову $y(e) = 0$: $0 = \left(\frac{1}{2}\ln e + C\right)e^2$, тоді $\frac{1}{2} + C = 0$, $C = -\frac{1}{2}$.

Тоді частинний розв'язок $y = \left(\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\right)x^2 = \frac{x^2}{2}\left(\ln|x| - 1\right)$.

Відповідь: $y=\frac{x^2}{2}\left(\ln|x|-1\right)$.

Розпишемо розв'язування без застосування готових формул.

4. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння $y'+y\cos x=\cos x$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=2$.

Розв'язання:

Застосовуємо підстановку $y=u\cdot v$, $y'=u'v+v'u$. Маємо	$u'v+v'u+uv\cos x=\cos x$.
Згрупуємо доданки з u:	$u'v+\left(v'+v\cos x\right)u=\cos x$.
Задаємось метою знайти $v(x)$ таким, щоб дужка дорівнювала нулю, тоді маємо систему диференціальних рівнянь	$\begin{cases} v'+v\cos x=0, \\ u'v=\cos x. \end{cases}$

Перше рівняння $v'+v\cos x=0$:

відокремлюємо змінні	$\frac{dv}{dx}=-v\cos x$, $dv=-v\cos xdx$, $\frac{dv}{v}=-\cos xdx$;
інтегруємо	$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos xdx$, $\ln\|v\|=-\sin x$, $v=e^{-\sin x}$ (тут сталу не додаємо).

Друге рівняння $u'v=\cos x$:

підставимо v в рівняння:	$u'e^{-\sin x}=\cos x$;
виразимо u	$u'e^{-\sin x}\cdot e^{\sin x}=\cos x\cdot e^{\sin x}$;
інтегруємо	$u=\int e^{\sin x}\cos xdx=\int e^{\sin x}d\left(\sin x\right)=e^{\sin x}+C$.

Підставимо знайдені функції u і v в $y=u\cdot v$. Отримаємо $y=\left(e^{\sin x}+C\right)\cdot e^{-\sin x}$ або $y=1+Ce^{-\sin x}$. Це загальний розв'язок.

Підставимо початкову умову $y(0)=2$: маємо $2=1+Ce^{-\sin 0}$, $2=1+C$, $C=1$, тоді частинний розв'язок $y=1+e^{-\sin x}$.

Відповідь: $y=1+e^{-\sin x}$.

5. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y'-\frac{y}{x}=-\frac{\ln x}{x}$, що задовольняє початковій умові $y(1)=5$.

Розв'язання:

Шукаємо розв'язок у вигляді $y=u\cdot v$.

$v(x)$ знаходимо з формули $v=e^{-\int P(x)dx}$, маємо $v=e^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$.

$u(x)$ знаходимо як $u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx$, маємо $u=-\int\frac{\ln x}{x^2}dx$. Застосуємо інтегрування частинами $\left[\begin{matrix} u^*=\ln x & du^*=\frac{dx}{x} \\ dv^*=\frac{dx}{x^2} & v^*=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x} \end{matrix}\right]$, маємо $u=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$.

Підставимо знайдені функції $u=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-C$ і $v=x$ в $y=u\cdot v$, отримаємо загальний розв'язок $y=\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-C\right)\cdot x=\ln x+1-Cx$.

Підставимо початкову умову $y(1)=5$: $5=\ln 1+1-C\cdot 1$, тоді $C=1-5=-4$. Частинний розв'язок $y=\ln x+1+4x$.

Відповідь: $y=\ln x+1+4x$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'+y\sin x=\sin x$, що задовольняє початковій умові $y(0)=\alpha$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'-y\cos x=\alpha e^{\sin x}$, що задовольняє початковій умові $y(0)=\alpha$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'-\frac{(2+\alpha)y}{x}=\frac{x^{\alpha+1}}{2}$, що задовольняє початковій умові $y(e)=0$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'+\frac{y}{x}=-2\frac{\ln x}{x}$, що задовольняє початковій умові $y(1)=\alpha$.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Як методом Бернуллі розв'язують лінійні диференціальні рівняння першого порядку?

Рівняння I порядку в повних диференціалах

1. Основні поняття та теореми

Рівняння виду $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ називається ***рівнянням в повних диференціалах***, якщо вираз $P(x;y)dx+Q(x;y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $z(x;y)$, тобто справедлива формула $dz(x;y)=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$.

Розв'язати рівняння в повних диференціалах – означає знайти функцію $z(x;y)$, що задовольняє умовам: $\frac{\partial z(x;y)}{\partial x}=P(x;y)$, $\frac{\partial z(x;y)}{\partial y}=Q(x;y)$, $dz(x;y)=0$. Тому загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд $z(x;y)=C$.

Необхідною і достатньою умовою того, що дане диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах, є рівність між собою частинних похідних $\frac{\partial P(x;y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$, що еквівалентно $\frac{\partial^2 z(x;y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z(x;y)}{\partial x\partial y}$ (мішані похідні функції рівні).

Алгоритм розв'язування рівняння в повних диференціалах $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$:

1. Визначити попередньо функцію $z(x;y)$ як $z(x;y)=\int P(x;y)dx+C(y)$ або $z(x;y)=\int Q(x;y)dy+C(x)$.

2. Взяти похідну від $z(x;y)$ по іншій змінній і прирівняти до іншої частинної похідної: $\frac{\partial z(x;y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x;y)dx\right)+\frac{dC(y)}{dy}=Q(x;y)$ (це дасть вираз для $\frac{dC(y)}{dy}$) чи $\frac{\partial z(x;y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x;y)dy\right)+\frac{dC(x)}{dx}=P(x;y)$ (це дасть вираз для $\frac{dC(x)}{dx}$).

3. Знайти $C(y)$ чи $C(x)$ і записати остаточний вираз $z(x;y)=C$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти загальний інтеграл рівняння: $\underbrace{\left(3y^2+2xy+2x\right)}_{P(x;y)}dx+\underbrace{\left(6xy+x^2+3\right)}_{Q(x;y)}dy=0$.

Розв'язання:

Переконаємось, що це рівняння в повних диференціалах:

$\frac{\partial P(x;y)}{\partial y}=6y+2x$, $\frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}=6y+2x$. Це рівняння в повних диференціалах.

Застосуємо алгоритм розв'язування:

1. $z(x;y)=\int P(x;y)dx+C(y)=\int\left(3y^2+2xy+2x\right)dx+C(y)=3y^2x+2y\frac{x^2}{2}+2\frac{x^2}{2}+C(y)$.

2. $\frac{\partial z(x;y)}{\partial y}=\frac{\partial\left(3y^2x+x^2y+x^2+C(y)\right)}{\partial y}=3x\cdot 2y+x^2\cdot 1+0+\frac{dC(y)}{dy}$.

Прирівняємо до $Q(x;y)$, маємо $6yx+x^2+\frac{dC(y)}{dy}=6xy+x^2+3$. Тоді $\frac{dC(y)}{dy}=3$.

3. $dC(y)=3dy$, $\int dC(y)=\int 3dy$, $C(y)=3y-C$. Тоді $z(x;y)=3y^2x+x^2y+x^2+3y-C$ або $3y^2x+x^2y+x^2+3y-C=0$.

Відповідь: загальний інтеграл $3y^2x+x^2y+x^2+3y=C$.

2. Знайти загальний інтеграл рівняння: $\underbrace{\left(y^3+\cos x\right)}_{P(x;y)}dx+\underbrace{\left(3xy^2+e^y\right)}_{Q(x;y)}dy=0$.

Розв'язання:

Так як $\frac{\partial P}{\partial y}=3y^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=3y^2$, то це рівняння в повних диференціалах.

Застосуємо алгоритм розв'язування:

1. $z(x;y)=\int Q(x;y)dy+C(x)=\int\left(3xy^2+e^y\right)dy+C(x)=3x\frac{y^3}{3}+e^y+C(x)=xy^3+e^y+C(x)$.

2. $\frac{\partial z(x;y)}{\partial x}=\frac{\partial\left(xy^3+e^y+C(x)\right)}{\partial x}=y^3\cdot 1+0+\frac{dC(x)}{dx}$.

Прирівняємо до $P(x;y)$, маємо $y^3+\frac{dC(x)}{dx}=y^3+\cos x$. Тоді $\frac{dC(x)}{dx}=\cos x$.

3. $dC(x)=\cos x dx$, $\int dC(x)=\int\cos x dx$, $C(x)=\sin x-C$.

Тоді $z(x;y)=xy^3+e^y+\sin x-C$ або $xy^3+e^y+\sin x-C=0$.

Відповідь: загальний інтеграл $xy^3+e^y+\sin x=C$.

3. Знайти загальний інтеграл рівняння: $\underbrace{\left(e^y\right)}_{P(x;y)}dx+\underbrace{\left(xe^y-2y\right)}_{Q(x;y)}dy=0$.

Розв'язання:

Так як $\dfrac{\partial P}{\partial y} = e^y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^y$, то це рівняння в повних диференціалах.

Застосуємо алгоритм розв'язування:

1. $z(x;y) = \int P(x;y)dx + C(y) = \int e^y dx + C(y) = e^y \cdot x + C(y)$.

2. $\dfrac{\partial z(x;y)}{\partial y} = \dfrac{\partial\left(xe^y + C(y)\right)}{\partial y} = x \cdot e^y + \dfrac{dC(y)}{dy}$.

Прирівняємо до $Q(x;y)$, маємо $xe^y + \dfrac{dC(y)}{dy} = xe^y - 2y$. Тоді $\dfrac{dC(y)}{dy} = -2y$.

3. $\int dC(y) = -\int 2ydy$, $C(y) = -y^2 - C$. Тоді $z(x;y) = xe^y - y^2 - C$ або $xe^y - y^2 - C = 0$.

або

1. $z(x;y) = \int Q(x;y)dy + C(x) = \int\left(xe^y - 2y\right)dy + C(x) = x \cdot e^y - 2\dfrac{y^2}{2} + C(x) = xe^y - y^2 + C(x)$.

2. $\dfrac{\partial z(x;y)}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(xe^y - y^2 + C(x)\right)}{\partial x} = e^y + \dfrac{dC(x)}{dx}$.

Прирівняємо до $P(x;y)$, маємо $e^y + \dfrac{dC(x)}{dx} = e^y$. Тоді $\dfrac{dC(x)}{dx} = 0$.

3. $C(x) = -C$. Тоді $z(x;y) = xe^y - y^2 - C$ або $xe^y - y^2 - C = 0$.

Відповідь: загальний інтеграл $xe^y - y^2 = C$.

3. Питання для самоконтролю

1. Що називається рівнянням в повних диференціалах?
2. Який вигляд має загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах?
3. Як перевірити, що диференціальне рівняння є рівнянням в повних диференціалах?
4. Який алгоритм розв'язування рівняння в повних диференціалах?

Розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків

1. Основні поняття та теореми

Диференціальні рівняня вищих порядків:

Рівняння, що містять тільки одну похідну	Рівняння, що не містять шукану функцію і кілька нижчих похідних	Рівняння, що не містять шукану функцію	Рівняння, що не містять незалежну змінну
$y^{(n)} = f(x)$	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$	$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$	$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$
треба n разів проінтегрувати функцію $f(x)$	порядок рівняння знижують на k підстановкою $y^{(k)} = p(x)$	порядок рівняння знижують на 1 підстановкою $y' = p(x)$	порядок рівняння знижують на 1 підстановкою $y' = p(y)$
	1. Розв'язування $f(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0$	1. Розв'язування $f(x, p, p', \ldots, p^{n-1}) = 0$	1. Розв'язування $f\left(y, p, \dfrac{dp}{dy}, \ldots, \dfrac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$
	2. Розв'язування $y^{(k)} = p(x)$	2. Розв'язування $y' = p(x)$	2. Розв'язування $y' = p(y)$

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' = \cos x$.

Розв’язання:

Маємо рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.

Після першого інтегрування отримуємо	$y' = \int \cos x dx = \sin x + C_1$;
після другого інтегрування одержимо	$y = \int (\sin x + C_1) dx = -\cos x + C_1 x + C_2$.

Відповідь: загальний розв’язок $y(x) = -\cos x + C_1 x + C_2$.

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y''' = \frac{1}{x^3} - \sin 4x + 3$.

Розв’язання:

Маємо рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.

Після першого інтегрування отримуємо	$y'' = \int \left(x^{-3} - \sin 4x + 3\right) dx = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{\cos 4x}{4} + 3x + C_1$;
після другого інтегрування одержимо	$y' = \int \left(\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{\cos 4x}{4} + 3x + C_1\right) dx \frac{1}{2x} + \frac{\sin 4x}{16} + 3\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$;
після третього інегрування маємо	$y = \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sin 4x}{16} + \frac{3x^2}{2} + C_1 x + C_2\right) dx =$ $= \frac{\ln\lvert x\rvert}{2} - \frac{\cos 4x}{64} + \frac{x^3}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

Відповідь: загальний розв’язок $y = \frac{\ln\lvert x\rvert}{2} - \frac{\cos 4x}{64} + \frac{x^3}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

3. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' = x + \sin x$ при початкових умовах $y(\pi) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв’язання:

Маємо рівняння вигляду $y^{(n)} = f(x)$.

Після першого інтегрування отримуємо	$y' = \int (x + \sin x) dx = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$;
підставимо початкову умову $y'(0) = 0$, отримаємо	$0 = 0 - 1 + C_1$, $C_1 = 1$, $y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + 1$.
Після другого інтегрування одержимо	$y = \int \left(\frac{x^2}{2} - \cos x + 1\right) dx = \frac{x^3}{6} - \sin x + x + C_2$;
підставимо початкову умову $y(\pi) = 0$, отримаємо	$0 = \frac{\pi^3}{6} + \pi + C_2$, $C_2 = -\frac{\pi^3}{6} - \pi$, $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + x - \frac{\pi^3}{6} - \pi$.

Відповідь: частинний розв’язок $y(x) = \frac{x^3 - \pi^3}{6} - \sin x + x - \pi$.

4. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння $y'' = 5y'$ при початкових умовах $y(0) = 3$; $y'(0) = 2$.

Розв’язання:

Дане рівняння не містить шукану функцію.

Застосуємо підстановки $y' = p$, $y'' = p'$, маємо	$p' = 5p$ або $\frac{dp}{dx} = 5p$.
Це рівняння з розділяючимися змінними, відокремимо змінні	$dp = 5pdx$, $\frac{dp}{p} = 5dx$;
інтегруємо обидві частини рівності	$\int \frac{dp}{p} = 5\int dx$, $\ln\|p\| - \ln C = 5x$;
виконаємо перетворення	$\ln\left\|\frac{p}{C}\right\| = 5x$, $e^{\ln\left\|\frac{p}{C}\right\|} = e^{5x}$, $\frac{p}{C} = e^{5x}$, $p = Ce^{5x}$.
зворотня заміна $p = y'$ дає	$y' = Ce^{5x}$;
застосуємо початкову умову $y'(0) = 2$:	$2 = Ce^0$, звідки $C = 2$, тоді $y' = 2e^{5x}$. Це рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$.
Інтегруємо, маємо	$y = \int 2e^{5x}dx = \frac{2}{5}e^{5x} + C_1$;
застосуємо початкову умову $y(0) = 3$:	$3 = \frac{2}{5} + C_1$, звідки $C_1 = \frac{13}{5}$, тоді $y = \frac{2}{5}e^{5x} + \frac{13}{5}$.

Відповідь: частинний розв'язок $y = 0{,}4e^{5x} + 2{,}6$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy^{(5)} = y^{(4)}$ при початкових умовах $y(1) = \frac{1}{20}$; $y'(1) = \frac{1}{4}$; $y''(1) = 5$; $y'''(1) = 9$; $y^{(4)}(1) = 6$.

Розв'язання:

Рівняння не містить шукану функції і похідні першого, другого, третього порядку.

Замінимо $y^{(4)} = p$, $y^{(5)} = p'$, маємо	$xp' = p$ або $x\frac{dp}{dx} = p$.
Це рівняння з розділяючимися змінними, відокремимо змінні	$xdp = pdx$, $\frac{xdp}{xp} = \frac{pdx}{xp}$, $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$;
інтегруємо обидві частини рівності	$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln\|p\| = \ln\|x\| + \ln C$;
виконаємо перетворення	$\ln\|p\| = \ln\|Cx\|$, $p = Cx$;
зворотня заміна $p = y^{(4)}$ дає	$y^{(4)} = Cx$.
Застосуємо початкову умову $y^{(4)}(1) = 6$:	$6 = C \cdot 1$, звідки $C = 6$, тоді $y^{(4)} = 6x$. Це рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$.
Після першого інтегрування маємо	$y''' = \int 6xdx = 3x^2 + C_1$;
застосуємо початкову умову $y'''(1) = 9$:	$9 = 3 + C_1$, звідки $C_1 = 6$, $y''' = 3x^2 + 6$.
Після другого інтегрування маємо	$y'' = \int (3x^2 + 6)dx = x^3 + 6x + C_2$;
застосуємо початкову умову $y''(1) = 5$:	$5 = 1 + 6 \cdot 1 + C_2$, звідки $C_2 = -2$, $y'' = x^3 + 6x - 2$.
Після третього інтегрування отримаємо	$y' = \int (x^3 + 6x - 2)dx = \frac{x^4}{4} + 6\frac{x^2}{2} - 2x + C_3$;

застосуємо початкову умову $y'(1)=\frac{1}{4}$:	$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+3-2+C_3$, $C_3=-1$, $y'=\frac{x^4}{4}+3x^2-2x-1$.
Після четвертого інтегрування отримаємо	$y=\int\left(\frac{x^4}{4}+3x^2-2x-1\right)dx=\frac{x^5}{20}+x^3-x^2-x+C_4$;
застосуємо початкову умову $y(1)=\frac{1}{20}$:	$\frac{1}{20}=\frac{1}{20}+1-1-1+C_4$, звідки маємо $C_4=1$, $y=\frac{1}{20}x^5+x^3-x^2-x+1$.

Відповідь: частинний розв'язок $y=0{,}05x^5+x^3-x^2-x+1$.

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$.

Розв'язання:

Рівняння не містить явно незалежної змінної x.

Замінимо $y'=p(y)$, $y''=p'y'=p'p$, маємо	$p'p+\frac{2}{1-y}p^2=0$. Це рівняння в змінних p, y.
Це рівняння зрозділяючимися змінними, відокремимо змінні	$\frac{dp}{dy}+\frac{2}{1-y}p=0$, $dp=\frac{2}{y-1}pdy$, $\frac{dp}{p}=\frac{2}{y-1}dy$;
інтегруємо обидві частини рівності	$\int\frac{dp}{p}=2\int\frac{dy}{y-1}$, $\ln\lvert p\rvert=2\ln\lvert y-1\rvert+\ln C$;
виконаємо перетворення, маємо	$\ln\lvert p\rvert=\ln(y-1)^2+\ln C$, $p=C(y-1)^2$.
Зворотня заміна $p=y'$ дає	$y'=C(y-1)^2$. Це рівняння в змінних y, x.
Відокремимо змінні	$\frac{dy}{dx}=C(y-1)^2$, $dy=C(y-1)^2dx$, $\frac{dy}{(y-1)^2}=Cdx$.
Проінтегруємо	$\int(y-1)^{-2}dy=C\int dx$, $\frac{(y-1)^{-1}}{-1}=Cx+C_1$.
Виконаємо перетворення	$\frac{1}{1-y}=Cx+C_1$, $1-y=\frac{1}{Cx+C_1}$, $y=1-\frac{1}{Cx+C_1}$.

Відповідь: загальний розв'язок $y=1-\frac{1}{Cx+C_1}$.

7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2yy''=3+(y')^2$ при початкових умовах $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Розв'язання:

Рівняння не містить явно незалежної змінної x.

Замінимо $y'=p(y)$, $y''=p'y'=p'p$,	маємо $2yp'p=3+p^2$. Це рівняння в змінних p, y.
Це рівняння зрозділяючимися змінними, відокремимо змінні	$2y\frac{dp}{dy}p=3+p^2$, $\frac{2pdp}{3+p^2}=\frac{dy}{y}$;
інтегруємо обидві частини рівності	$\int\frac{d(p^2)}{3+p^2}=\int\frac{dy}{y}$, $\ln(3+p^2)=\ln\lvert y\rvert+\ln C$;

виконаємо перетворення, маємо	$\ln\left(3+p^2\right)=\ln\left\|Cy\right\|$, $3+p^2=Cy$, $p=\sqrt{Cy-3}$.
Зворотня заміна $p=y'$ дає	$y'=\sqrt{Cy-3}$. Це рівняння в змінних y, x.
Підставимо початкові умови $y(1)=1$, $y'(1)=0$, маємо	$0=\sqrt{C\cdot 1-3}$, звідки $C=3$, тоді $y'=\sqrt{3y-3}$.
Відокремимо змінні	$\frac{dy}{dx}=\sqrt{3y-3}$, $(y-1)^{-\frac{1}{2}}dy=\sqrt{3}dx$.
Проінтегруємо	$\int(y-1)^{-\frac{1}{2}}dy=\int\sqrt{3}dx$, $2(y-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}x+C_1$.
Підставимо початкову умову $y(1)=1$, маємо	$0=\sqrt{3}+C_1$, $C_1=-\sqrt{3}$, $2(y-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.
Виконаємо перетворення	$4(y-1)=3(x-1)^2$, $y=0{,}75(x-1)^2+1$.

Відповідь: частинний розв'язок: $y=0{,}75(x-1)^2+1$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''=2$ при початкових умовах $y(\alpha)=0$, $y'(\alpha)=0$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'''=1+\cos x$ при початкових умовах $y(\pi)=\alpha$, $y'(0)=\alpha$, $y''(0)=0$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''=\alpha y'$ при початкових умовах $y(0)=2\alpha$, $y'(0)=1$.

4. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy'''=y''$ при початкових умовах $y(\alpha)=2\alpha$; $y'(\alpha)=1$; $y''(\alpha)=0$.

5. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''(x^2+1)=2xy'$ при початкових умовах $y(1)=\alpha$, $y'(1)=6$.

6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(y')^2+2yy''=0$ при початкових умовах $y(1)=\alpha^2$, $y'(1)=\alpha$.

7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $2yy''=3+(y')^2$ при початкових умовах $y(1)=\alpha$, $y'(1)=0$.

4. Питання для самоконтролю

1. Як розв'язують рівняння, що містять тільки одну похідну?
2. Як розв'язують рівняння, що не містять шукану функцію і нижчі похідні?
3. Як розв'язують рівняння, що не містять шукану функцію?
4. Як розв'язують рівняння, що не містять незалежну змінну?

Лінійні диференціальні рівняння II порядку

1. Основні поняття та теореми

Лінійне диференціальне рівняння II порядку має вигляд

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ – ЛНДР (лінійне неоднорідне диференціальне рівняння) II порядку,

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ – ЛОДР (лінійне однорідне диференціальне рівняння) II порядку.

y, y', y'' входять в лінійне диференціальне рівняння ІІ порядку в першому степені.

Якщо відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$ ЛОДР ІІ порядку, то загальний розв'язок шукають у вигляді $y(x)=u(x)\cdot y_1(x)$, де $u(x)=\int \frac{C_1}{y_1^2}\cdot e^{-\int p(x)dx}dx+C_2$.

Якщо $\bar{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, то загальний розв'язок ЛНДР ІІ порядку можна знайти методом варіації довільних сталих $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$.

Система рівнянь для визначення $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$: $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$

Інтегруючи $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, знаходять $C_1(x)$ і $C_2(x)$ та записують загальний розв'язок ЛНДР $y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти загальний розв'язок ЛОДР ІІ порядку $xy''+y'-\frac{y}{x}=0$, якщо $y_1=x$ – один з його частинних розв'язків.

Розв'язання:

Загальний розв'язок має вигляд $y=u\cdot y_1=ux$, де $u(x)=\int \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx+C_2$.

Для розглядуваного рівняння $y''+\underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)}y'-\frac{1}{x^2}y=0$ маємо $\int p(x)dx=\int\frac{dx}{x}=\ln x$, тоді

$u(x)=\int\frac{C_1}{x^2}e^{-\ln x}dx+C_2=\int\frac{C_1}{x^2}\frac{1}{x}dx+C_2=C_1\int x^{-3}dx+C_2=-\frac{C_1}{2x^2}+C_2$, загальний розв'язок ЛОДР $y=u(x)\cdot y_1=-\frac{C_1}{2x}+C_2x$.

Відповідь: $y=-\frac{C_1}{2x}+C_2x$.

2. Знайти загальний розв'язок ЛОДР ІІ порядку $x\cdot y''-(2x+1)\cdot y'+(x+1)\cdot y=0$, якщо $y_1=e^x$ – один з його частинних розв'язків.

Розв'язання:

Загальний розв'язок має вигляд $y=u\cdot y_1=ux$, де $u(x)=\int \frac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx+C_2$.

Для розглядуваного рівняння $y''\underbrace{-\frac{2x+1}{x}}_{p(x)}y'+\frac{x+1}{x}y=0$ маємо $\int p(x)dx=-2x-\ln x$,

тоді $u(x)=\int\frac{C_1}{e^{2x}}e^{2x+\ln x}dx+C_2=\int C_1e^{\ln x}dx+C_2=\int C_1xdx+C_2=C_1\frac{x^2}{2}+C_2$, загальний розв'язок ЛОДР $y=u(x)\cdot y_1=C_1\frac{x^2}{2}e^x+C_2e^x$.

Відповідь: $y=C_1\frac{x^2}{2}e^x+C_2e^x$.

3. Знайти загальний розв’язок ЛОДР II порядку $y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$, якщо $y_1=\frac{1}{x}$ – один з його частинних розв’язків.

Розв’язання:

Загальний розв’язок має вигляд $y=u\cdot y_1=u\cdot\frac{1}{x}$, тоді отримаємо $y'=u'\cdot\frac{1}{x}-u\cdot\frac{1}{x^2}$, $y''=u''\cdot\frac{1}{x}-u'\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2+u\cdot\frac{2}{x^3}$, $u''\cdot\frac{1}{x}-u'\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2+u\cdot\frac{2}{x^3}+u'\cdot\frac{1}{x^2}-u\cdot\frac{1}{x^3}-u\cdot\frac{1}{x^3}=0$, звідки $u''\cdot\frac{1}{x}-u'\cdot\frac{1}{x^2}=0$ або $u''-\frac{u'}{x}=0$. Це рівняння, що не містить шукану функцію.

Замінимо $u'=p$, $u''=p'$, маємо $p'-\frac{p}{x}=0$, $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$, проінтегруємо $\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}$, отримаємо $\ln|p|=\ln|x|+\ln C$, $p=Cx$.

Виконаємо зворотню заміну $u'=Cx$, тоді $u=\frac{Cx^2}{2}+C_1$, $y=\frac{Cx}{2}+\frac{C_1}{x}$.

Відповідь: $y=\frac{Cx}{2}+\frac{C_1}{x}$.

4. Знайти загальний розв’язок рівняння $xy''-y'=x$, враховуючи, що загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $xy''-y'=0$ є $y_{одн}=C_1+C_2x^2$.

Розв’язання:

Шукаємо розв’язок ЛНДР у вигляді $y=C_1(x)+C_2(x)\cdot x^2$.

Система для визначення $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ має вигляд $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0, \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \end{cases}$

Так як $y_{одн}=C_1\cdot\underbrace{1}_{y_1}+C_2\cdot\underbrace{x^2}_{y_2}$, то $y_1=1$, $y_2=x^2$, тоді $y_1'=0$ і $y_2'=2x$.

Маємо $\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1+C_2'(x)\cdot x^2=0, \\ C_1'(x)\cdot 0+C_2'(x)\cdot 2x=x \end{cases}$ або $\begin{cases} C_1'(x)=-C_2'(x)\cdot x^2, \\ C_2'(x)\cdot 2=1. \end{cases}$ З другого рівняння маємо $C_2'(x)=\frac{1}{2}$, тоді з першого рівняння $C_1'(x)=-\frac{x^2}{2}$.

Інтегруючи $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, знаходимо сталі інтегрування $C_1(x)$ і $C_2(x)$: маємо $C_1(x)=-\int\frac{x^2}{2}dx=-\frac{x^3}{6}+\widetilde{C}_1$; $C_2(x)=\int\frac{1}{2}dx=\frac{x}{2}+\widetilde{C}_2$.

Загальний розв’язок $y=\left(-\frac{x^3}{6}+\widetilde{C}_1\right)+\left(\frac{x}{2}+\widetilde{C}_2\right)\cdot x^2$ або $y=\frac{x^3}{3}+\widetilde{C}_2x^2+\widetilde{C}_1$.

Відповідь: $y=\frac{x^3}{3}+\widetilde{C}_2x^2+\widetilde{C}_1$.

5. Знайти загальний розв’язок рівняння $y''+y=\frac{1}{\sin x}$, враховуючи, що загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння $y''+y=0$ є $y_{одн}=C_1\sin x+C_2\cos x$.

Розв'язання:

Це ЛНДР ІІ порядку.

Так як $y_{одн} = C_1\underbrace{\sin x}_{y_1} + C_2\underbrace{\cos x}_{y_2}$, то $y = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$.

Система для визначення $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ має вигляд $\begin{cases} C_1'(x)\cdot\sin x + C_2'(x)\cdot\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cdot\cos x - C_2'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$

Домножимо перше рівняння на $\cos x$, а друге на $-\sin x$: $\begin{cases} C_1'(x)\cdot\sin x\cos x + C_2'(x)\cdot\cos^2 x = 0, \\ -C_1'(x)\cdot\cos x\sin x + C_2'(x)\sin^2 x = -1, \end{cases}$ додамо рівняння, отримаємо $C_2'(x) = -1$.

Домножимо перше рівняння на $\sin x$, а друге на $\cos x$: $\begin{cases} C_1'(x)\cdot\sin^2 x + C_2'(x)\cdot\cos x\sin x = 0, \\ C_1'(x)\cdot\cos^2 x - C_2'(x)\sin x\cos x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \end{cases}$ додамо рівняння, отримаємо $C_1'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Інтегруючи $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$: $C_1(x) = \int\dfrac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + \widetilde{C}_1$; $C_2(x) = -\int 1dx = -x + \widetilde{C}_2$.

Загальний розв'язок ЛНДР $y = \left(\ln|\sin x| + \widetilde{C}_1\right)\sin x + \left(-x + \widetilde{C}_2\right)\cos x$.

Відповідь: $y = \left(\ln|\sin x| + \widetilde{C}_1\right)\sin x + \left(-x + \widetilde{C}_2\right)\cos x$.

6. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - \dfrac{4}{x}y' + \dfrac{6}{x^2}y = x^2 - 1$, що відповідає початковим умовам $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Розв'язання:

Це ЛНДР ІІ порядку. Відповідне однорідне рівняння $y'' - \dfrac{4}{x}y' + \dfrac{6}{x^2}y = 0$ має один з частинних розв'язків $y_1 = x^2$ (дійсно $2 - \dfrac{4}{x}\cdot 2x + \dfrac{6}{x^2}x^2 = 0$), тоді загальний розв'язок ЛОДР ІІ порядку $y_{одн} = u\cdot y_1 = ux^2$, де $u(x) = \int\dfrac{C_1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx + C_2$.

Оскільки для однорідного рівняння $y'' \underbrace{-\dfrac{4}{x}}_{p(x)}y' + \dfrac{6}{x^2}y = 0$ маємо $\int p(x)dx = -4\ln x$, то

$u(x) = \int\dfrac{C_1}{x^4}e^{4\ln x}dx + C_2 == \int\dfrac{C_1}{x^4}\left(e^{\ln x}\right)^4 dx + C_2\int\dfrac{C_1}{x^4}x^4 dx + C_2 = \int C_1 dx + C_2 = C_1 x + C_2$, тоді $y_{одн} = C_1 x^3 + C_2 x^2$.

Так як $y_{одн} = C_1\underbrace{x^3}_{y_1} + C_2\underbrace{x^2}_{y_2}$, то $y = C_1(x)x^3 + C_2(x)x^2$.

Система $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$ має вигляд $\begin{cases} C_1'(x)\cdot x^3 + C_2'(x)\cdot x^2 = 0, \\ C_1'(x)\cdot 3x^2 + C_2'(x)\cdot 2x = x^2 - 1. \end{cases}$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь за допомогою формул Крамера $\Delta = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 3x^2 & 2x \end{vmatrix} = 2x^4 - 3x^4 = -x^4$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x^2-1 & 2x \end{vmatrix} = -(x^2-1)x^2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & x^2-1 \end{vmatrix} = x^3(x^2-1)$, $C_1'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$, $C_2'(x) = -\dfrac{x^2-1}{x}$.

Інтегруючи $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$, знаходимо $C_1(x) = \int\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)dx = x + \dfrac{1}{x} + \widetilde{C}_1$, $C_2(x) = -\int\left(x - \dfrac{1}{x}\right)dx = -\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + \widetilde{C}_2$, тоді маємо загальний розв'язок ЛНДР $y = \left(x + \dfrac{1}{x} + \widetilde{C}_1\right)x^3 + \left(-\dfrac{x^2}{2} + \ln|x| + \widetilde{C}_2\right)x^2$, $y = 0{,}5x^4 + x^2 + \widetilde{C}_1x^3 + x^2\ln|x| + \widetilde{C}_2x^2$.

Застосуємо початкові умови. Маємо $y(1) = 0{,}5 + 1 + \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 = 1$, похідна $y' = 2x^3 + 2x + 3\widetilde{C}_1x^2 + 2x\ln|x| + x + 2\widetilde{C}_2x$, тоді $y'(1) = 2 + 2 + 3\widetilde{C}_1 + 1 + 2\widetilde{C}_2 = 0$, звідки $\begin{cases} 0{,}5 + \widetilde{C}_1 + \widetilde{C}_2 = 0, \\ 5 + 3\widetilde{C}_1 + 2\widetilde{C}_2 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + 2\widetilde{C}_1 + 2\widetilde{C}_2 = 0, \\ 5 + 3\widetilde{C}_1 + 2\widetilde{C}_2 = 0. \end{cases}$ Віднімемо від другого рівняння перше, маємо $4 + \widetilde{C}_1 = 0$, $\widetilde{C}_1 = -4$, тоді $\widetilde{C}_2 = \dfrac{-2\widetilde{C}_2 - 1}{2} = \dfrac{7}{2}$, $y = 0{,}5x^4 + x^2 - 4x^3 + x^2\ln|x| + 3{,}5x^2$.

Відповідь: $y = 0{,}5x^4 + x^2 - 4x^3 + x^2\ln|x| + 3{,}5x^2$.

3. Питання для самоконтролю

1. Що називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням II порядку?
2. Як знайти загальний розв'язок ЛОДР II порядку, якщо відомий один частинний розв'язок?
3. Що називається лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням II порядку?
4. У чому полягає метод варіації сталих знаходження загального розв'язку ЛНДР II порядку?

Лінійні однорідні диференціальні рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами

1. Основні поняття та теореми

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами має вигляд $y'' + py' + qy = f(x)$ (найбільша похідна друга; y'', y', y входять в рівняння в першому степені; p, q – сталі коефіцієнти).

Якщо права частина рівняння рівна нулю $y'' + py' + qy = 0$, то це ***лінійне однорідне диференціальне рівняння II порядку*** (ЛОДР) ***із сталими коефіцієнтами***.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами $y'' + py' + qy = 0$ має відповідне характеристичне рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то загальний розв'язок диференціального рівняння $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

2. Якщо корені характеристичного рівняння комплексні $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, то загальний розв'язок диференціального рівняння $y = e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right]$.

3. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то загальний розв'язок диференціального рівняння $y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$.

Загальний розв'язок диференціальне рівняння II порядку містить дві сталі інтегрування. З двох початкових умов отримуємо систему двох рівнянь для визначення сталих інтегрування. Підставивши у загальний розв'язок знайдені сталі інтегрування, отримаємо частинний розв'язок, що відповідає заданим початковим умовам.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 7y' + 10y = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9 > 0$.

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{4 \pm 2}{2 \cdot 1}$, корені: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ має вигляд $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$.

Відповідь: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x}$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 144y = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 144 = 0$, $\lambda^2 = 144$, корені: $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = -12$.

Загальний розв'язок $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ має вигляд $y = C_1 e^{12x} + C_2 e^{-12x}$.

Відповідь: $y = C_1 e^{12x} + C_2 e^{-12x}$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 10y' = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 10\lambda = 0$, $\lambda(\lambda + 10) = 0$, корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -10$.

Загальний розв'язок $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ має вигляд $y = C_1 + C_2 e^{-10x}$.

Відповідь: $y = C_1 + C_2 e^{-10x}$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $9y'' + 6y' + y = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$.

Корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{2 \cdot 9} = -\dfrac{1}{3}$.

Загальний розв'язок $y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$ має вигляд $y = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{x}{3}}$.

Відповідь: $y = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{x}{3}}$.

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-6 \pm i\sqrt{16}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4i}{2} = \underbrace{-3}_{\alpha} \pm \underbrace{2}_{\beta} i$, $\alpha = -3$, $\beta = 2$.

Загальний розв'язок $y = e^{\alpha x}[C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x]$ має вигляд $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Відповідь: $y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+144y=0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2+144=0$, корені: $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-144}=\pm 12i$, $\alpha=0$, $\beta=12$.

Загальний розв'язок $y=e^{\alpha x}\left[C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right]$ має вигляд $y=C_1\cos 12x+C_2\sin 12x$.

Відповідь: $y=C_1\cos 12x+C_2\sin 12x$.

7. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-6y'+8y=0$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2-6\lambda+8=0$, $D=b^2-4ac=36-4\cdot 1\cdot 8=4>0$.

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{6\pm 2}{2\cdot 1}$, корені: $\lambda_1=4$, $\lambda_2=2$.

Загальний розв'язок $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ має вигляд $y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}$.

Перша початкова умова дає $1=C_1\cdot 1+C_2\cdot 1$. Так як похідна $y'=C_1e^{4x}\cdot 4+C_2e^{2x}\cdot 2$, то друга початкова умова дає $0=C_1\cdot 1\cdot 4+C_2\cdot 1\cdot 2$. Маємо систему рівнянь $\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ 4C_1+2C_2=0. \end{cases}$ З першого рівняння виразимо C_2, тоді з другого рівняння $2C_1+C_2=0$ після підстановки $C_2=1-C_1$ отримаємо $2C_1+1-C_1=0$, $C_1+1=0$, $C_1=-1$, отже $C_2=1-C_1$, $C_2=2$.

Частинний розв'язок має вигляд $y=-e^{4x}+2e^{2x}$.

Відповідь: $y=-e^{4x}+2e^{2x}$.

8. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-4y'+3y=0$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=6$, $y'(0)=10$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2-4\lambda+3=0$, $D=b^2-4ac=16-4\cdot 1\cdot 3=4>0$.

$\lambda_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{4\pm 2}{2\cdot 1}$, корені: $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$.

Загальний розв'язок $y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ має вигляд $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}$.

Перша початкова умова дає $6=C_1\cdot 1+C_2\cdot 1$. Так як похідна $y'=C_1e^{3x}\cdot 3+C_2e^{x}$, то друга початкова умова дає $10=C_1\cdot 1\cdot 3+C_2\cdot 1$. Маємо систему рівнянь $\begin{cases} C_1+C_2=6, \\ 3C_1+C_2=10, \end{cases}$ віднімемо від другого рівняння перше, маємо $2C_1=4$, $C_1=2$, тоді з першого рівняння системи отримаємо $2+C_2=6$, $C_2=4$.

Частинний розв'язок має вигляд $y=2e^{3x}+4e^{x}$.

Відповідь: $y=2e^{3x}+4e^{x}$.

9. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''+22y'+121y=0$, що задовольняє початковим умовам $y(0)=-1$, $y'(0)=10$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2+22\lambda+121=0$, $D=b^2-4ac=484-4\cdot 1\cdot 121=0$.

Корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-22}{2 \cdot 1} = -11$.

Загальний розв'язок $y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$ має вигляд $y = (C_1 x + C_2)e^{-11x}$.

Похідна $y' = C_1 \cdot e^{-11x} + e^{-11x} \cdot (-11) \cdot (C_1 x + C_2)$ або $y' = C_1 e^{-11x} - 11e^{-11x}(C_1 x + C_2)$.

Підставивши початкові умови, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} -1 = C_2 \cdot 1, \\ 10 = C_1 - 11 \cdot C_2. \end{cases}$ З першого рівняння маємо $C_2 = -1$, тоді з другого рівняння одержимо $10 = C_1 + 11$, $C_1 = -1$.

Частинний розв'язок має вигляд $y = (-x - 1)e^{-11x}$.

Відповідь: $y = (-x - 1)e^{-11x}$.

10. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $4y'' + 4y' + y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$.

Корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{2 \cdot 4} = -0{,}5$.

Загальний розв'язок $y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$ має вигляд $y = (C_1 x + C_2)e^{-0{,}5x}$.

Похідна $y' = C_1 e^{-0{,}5x} + e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5)(C_1 x + C_2)$ або $y' = C_1 e^{-0{,}5x} - 0{,}5e^{-0{,}5x}(C_1 x + C_2)$.

Підставивши початкові умови, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} 2 = C_2 \cdot 1, \\ 0 = C_1 - 0{,}5C_2. \end{cases}$ З першого рівняння маємо $C_2 = 2$, тоді з другого рівняння маємо $0 = C_1 - 1$, $C_1 = 1$.

Частинний розв'язок має вигляд $y = (x + 2)e^{-0{,}5x}$.

Відповідь: $y = (x + 2)e^{-0{,}5x}$.

11. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 6y' + 10y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4 < 0$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-6 \pm i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$, $\alpha = -3$, $\beta = 1$.

Загальний розв'язок $y = e^{\alpha x}[C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x]$ має вигляд $y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Похідна $y' = e^{3x} \cdot (-3) \cdot (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (-C_1 \sin x + C_2 \cos x) \cdot e^{3x}$.

Підставивши початкові умови, маємо систему рівнянь $\begin{cases} 4 = 1 \cdot C_1, \\ 0 = -3 \cdot C_1 + C_2 \cdot 1, \end{cases}$ звідки $C_1 = 4$, тоді $0 = -12 + C_2$, $C_2 = 12$.

Частинний розв'язок має вигляд $y = e^{-3x}(4\cos x + 12\sin x)$.

Відповідь: $y = e^{-3x}(4\cos x + 12\sin x)$.

12. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 2y' + 17y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Розв’язання:

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 17 = -64 < 0$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-64}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm i\sqrt{64}}{2} = \dfrac{2 \pm 8i}{2} = 1 \pm 4i$. Маємо $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

Загальний розв’язок $y = e^{\alpha x}[C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x]$ має вигляд $y = e^x(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$.

Похідна $y' = e^x(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + (-C_1 \sin 4x \cdot 4 + C_2 \cos 4x \cdot 4)e^x$.

Підставивши початкові умови, маємо $\begin{cases} 1 = 1 \cdot C_1, \\ 2 = 1 \cdot C_1 + 4C_2 \cdot 1, \end{cases}$ звідки $C_1 = 1$, тоді $2 = 1 + 4C_2$, $1 = 4C_2$, $C_2 = \dfrac{1}{4}$.

Частинний розв’язок має вигляд $y = e^x\left(\cos 4x + \dfrac{1}{4}\sin 4x\right)$.

Відповідь: $y = e^x(\cos 4x + 0{,}25 \sin 4x)$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' + \alpha y' - 2\alpha^2 y = 0$ (альфа менше 6), $y'' - (\alpha - 5)y' - 2(\alpha - 5)^2 y = 0$ (альфа більше 5).

2. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' - \alpha^2 y = 0$.

3. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' - \alpha y' = 0$.

4. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' + (-1)^{\alpha-1} \cdot 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0$.

5. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' - 2\alpha y' + 5\alpha^2 y = 0$ (альфа менше 6), $y'' - 2(\alpha - 5)y' + 5(\alpha - 5)^2 y = 0$ (альфа більше 5).

6. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y'' + \alpha^2 y = 0$.

7. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' - 3\alpha y' - 4\alpha^2 y = 0$ (альфа менше 6), $y'' + 3(\alpha - 5)y' - 4(\alpha - 5)^2 y = 0$ (альфа більше 5), що задовольняє початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

8. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' - 6\alpha y' + 9\alpha^2 y = 0$ (альфа менше 6), $y'' + 6(\alpha - 5)y' + 9(\alpha - 5)^2 y = 0$ (альфа більше 5), що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

9. Знайти частинний розв’язок рівняння $y'' + 4\alpha y' + 8\alpha^2 y = 0$ (альфа менше 6), $y'' - 4(\alpha - 5)y' + 8(\alpha - 5)^2 y = 0$ (альфа більше 5), що задовольняє початковим умовам $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається ЛОДР ІІ порядку із сталими коефіцієнтами?
2. Що називається ЛНДР ІІ порядку із сталими коефіцієнтами?
3. Як складають характеристичне рівняння для ЛОДР ІІ порядку із сталими коефіцієнтами?
4. Який загальний розв’язок ЛОДР ІІ порядку із сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні?

5. Який загальний розв'язок ЛОДР II порядку із сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння комплексні?

6. Який загальний розв'язок ЛОДР II порядку із сталими коефіцієнтами, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні?

7. Як знаходять частинний розв'язок ЛОДР II порядку із сталими коефіцієнтами?

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами

1. Основні поняття та теореми

Загальний розв'язок ЛНДР II порядку $y'' + py' + qy = f(x)$ шукають у вигляді суми $y = y_{одн} + \bar{y}$, де $y_{одн}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння; $\bar{y}$ – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами знаходять у відповідності до правої частини і коренів відповідного характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

права частина рівняння ЛНДР (вигляд $f(x)$)	Корені характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$	частинний розвязок ЛНДР (вигляд $\bar{y}$)
$f(x) = P_n(x)$ многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$	а) $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$	$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0$
	б) $\lambda_1 = 0$ або $\lambda_2 = 0$	$x\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0\right)$
	в) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$x^2\left(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0\right)$
$f(x) = Ae^{\alpha x}$	а) $\lambda_1 \neq \alpha$, $\lambda_2 \neq \alpha$	$Be^{\alpha x}$
	б) $\lambda_1 = \alpha$ або $\lambda_2 = \alpha$	$Bxe^{\alpha x}$
	в) $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$	$Bx^2 e^{\alpha x}$
$f(x) = e^{\alpha x}\left(C\cos\beta x + D\sin\beta x\right)$	а) $\lambda_1 \neq \alpha + i\beta$, $\lambda_2 \neq \alpha - i\beta$	$e^{\alpha x}\left(C\cos\beta x + D\sin\beta x\right)$
	б) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$e^{\alpha x}x\left(C\cos\beta x + D\sin\beta x\right)$

Якщо права частина ЛНДР має вигляд добутку або суми правих частин, то і частинний розв'язок шукають у вигляді добутку або суми відповідних частинних розв'язків.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 5y' = 7$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' + 5y' = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 5\lambda = 0$, $\lambda(\lambda + 5) = 0$; корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-5x} = C_1 + C_2 e^{-5x}$.

II. Права частина рівняння $y'' + 5y' = 7$ – многочлен нульового степеня $P(x) = 7$. Один з коренів характеристичного рівняння рівний нулю, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = Ax$.

III. Підставимо $\bar{y}' = A$, $\bar{y}'' = 0$ в умову, маємо $0 + 5A = 7$, $A = \dfrac{7}{5}$. Отже $\bar{y} = \dfrac{7}{5}x$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-5x} + 1{,}4x$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

Розв'язання:

І. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda = 0$, $\lambda(\lambda - 3) = 0$; корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1 e^{0x} + C_2 e^{3x} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

ІІ. Права частина рівняння $y'' - 3y' = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ – многочлен третього степеня $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Один з коренів характеристичного рівняння рівний нулю, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$.

ІІІ. Підставимо $\bar{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$, $\bar{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$ в умову, маємо

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C - 3\left(4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D\right) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1;$$

$$\underline{12Ax^2}\underline{\underline{+6Bx}} + 2C - 12Ax^3\underline{-9Bx^2}\underline{\underline{-6Cx}} - 3D = x^3 - 3x^2 + 2x - 1;$$

$$-12Ax^3 + (12A - 9B)x^2 + (6B - 6C)x + (2C - 3D) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях *x*, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -12A = 1, \\ 12A - 9B = -3, \\ 6B - 6C = 2, \\ 2C - 3D = -1; \end{cases} \quad \text{звідки } A = -\frac{1}{12}; \quad \begin{aligned} &-1 - 9B = -3, \\ &-9B = -2, \\ &B = \frac{2}{9}; \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\frac{12}{9} - 6C = 2, \\ &-6C = \frac{2}{3}; \\ &C = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}; \end{aligned} \quad \begin{aligned} &-\frac{2}{9} - 3D = -1, \\ &3D = \frac{7}{9}; \\ &D = \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Отже $\bar{y} = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{27}x$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{7}{27}x$.

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$.

Розв'язання:

І. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

ІІ. Права частина рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$ – многочлен третього степеня $P(x) = 2x^3 - 30$. Жодний з коренів характеристичного рівняння не рівний нулю, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.

ІІІ. Підставимо $\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $\bar{y}'' = 6Ax + 2B$ в умову, маємо

$$6Ax + 2B - 3\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) + 2\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) = 2x^3 - 30;$$

$$6Ax + 2B\underline{\underline{-9Ax^2}} - 6Bx - 3C\underline{+2Ax^3}\underline{\underline{+2Bx^2}} + 2Cx + 2D = 2x^3 - 30;$$

$$2Ax^3 + (-9A + 2B)x^2 + (6A - 6B + 2C)x + (2B - 3C + 2D) = 2x^3 - 30.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях *x*, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ -9A + 2B = 0, \\ 6A - 6B + 2C = 0, \\ 2B - 3C + 2D = -30; \end{cases} \quad \begin{aligned} &A = 1; \\ &-9 + 2B = 0, \\ &2B = 9, \\ &B = \frac{9}{2} = 4{,}5; \end{aligned} \quad \begin{aligned} &6 - 27 + 2C = 0, \\ &-21 + 2C = 0, \\ &2C = 21, \\ &C = \frac{21}{2} = 10{,}5; \end{aligned} \quad \begin{aligned} &9 - 31{,}5 + 2D = -30, \\ &2D = -30 + 31{,}5 - 9, \\ &2D = -7{,}5, \\ &D = -\frac{7{,}5}{2} = -3{,}75. \end{aligned}$$

Отже $\bar{y} = 1x^3 + 4{,}5x^2 + 10{,}5x - 3{,}75$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^x + x^3 + 4{,}5x^2 + 10{,}5x - 3{,}75$.

4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1e^{2x} + C_2e^x$.

II. Права частина рівняння $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$ має вигляд $f(x) = Ae^{\alpha x}$, де $\alpha = -1$ не співпадає з жодним коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = Be^{-x}$.

III. Підставимо $\bar{y} = Be^{-x}$, $\bar{y}' = -Be^{-x}$, $\bar{y}'' = Be^{-x}$ в умову, маємо

$Be^{-x} + 3Be^{-x} + 2Be^{-x} = 10e^{-x}$ або $6Be^{-x} = 10e^{-x}$;

$6B = 10$, $B = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$. Отже $\bar{y} = \dfrac{5}{3}e^{-x}$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^x + \dfrac{5}{3}e^{-x}$.

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1e^{2x} + C_2e^x$.

II. Права частина рівняння $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$ має вигляд $f(x) = Ae^{\alpha x}$, де $\alpha = 2$ співпадає з коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = Bxe^{2x}$.

III. Підставимо $\bar{y} = Bxe^{2x}$, $\bar{y}' = Be^{2x} + 2Bxe^{2x}$, $\bar{y}'' = 2Be^{2x} + 2\bar{y}' = 4Be^{2x} + 4Bxe^{2x}$ в умову, маємо

$4Be^{2x} + 4Bxe^{2x} - 3\left(Be^{2x} + 2Bxe^{2x}\right) + 2Bxe^{2x} = 3e^{2x}$;

$4Be^{2x} \underline{+ 4Bxe^{2x}} - 3Be^{2x} \underline{- 6Bxe^{2x}} \underline{+ 2Bxe^{2x}} = 3e^{2x}$ або $Be^{2x} = 3e^{2x}$; звідки $B = 3$. Отже $\bar{y} = 3xe^{2x}$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + 3xe^{2x}$.

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$.

Розв'язання:

І. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot 1\cdot 2 = 1$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

ІІ. Права частина вихідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x$ не містить множник $e^{\alpha x}$, але містить тригонометричну функцію $\sin x$. Звідси слідує, що $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Корені характеристичного рівняння некомплексні, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = e^{0x}(C\cos x + D\sin x) = C\cos x + D\sin x$.

ІІІ. Підставимо $\bar{y} = C\cos x + D\sin x$, $\bar{y}' = -C\sin x + D\cos x$, $\bar{y}'' = -C\cos x - D\sin x$ в умову, маємо

$-C\cos x - D\sin x - 3(-C\sin x + D\cos x) + 2(C\cos x + D\sin x) = 2\sin x$;

$\underline{-C\cos x}\,\underline{\underline{-D\sin x}} + 3C\sin x - 3D\cos x\,\underline{+2C\cos x}\,\underline{\underline{+2D\sin x}} = 2\sin x$;

$C\cos x + D\sin x + 3C\sin x - 3D\cos x = 2\sin x$.

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} D + 3C = 2, \\ C - 3D = 0; \end{cases}$ з другого рівняння маємо $C = 3D$, тоді з першого рівняння $D + 9D = 2$ маємо $D = 0{,}2$, тоді $C = 0{,}6$. Отже $\bar{y} = 0{,}6\cos x + 0{,}2\sin x$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + 0{,}6\cos x + 0{,}2\sin x$.

7. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 2y' + 5y = -17\cos 2x$.

Розв'язання:

І. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 4 - 4\cdot 1\cdot 5 = -16$.

Корені $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2\cdot 1} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$, $\alpha = -1$, $\beta = 2$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = e^{-x}\left[C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\right]$.

ІІ. Права частина рівняння $y'' + 2y' + 5y = -17\cos 2x$ має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, вона не містить множник $e^{\alpha x}$, але містить тригонометричну функцію $\cos 2x$. Звідси слідує, що $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Альфи коренів характеристичного рівняння і правої частини не співпадають, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = e^{0x}(C\cos 2x + D\sin 2x) = C\cos 2x + D\sin 2x$.

ІІІ. Підставимо в умову $\bar{y} = C\cos 2x + D\sin 2x$, $\bar{y}' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x$, $\bar{y}'' = -4C\cos 2x - 4D\sin 2x$, маємо

$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + 2(-2C\sin 2x + 2D\cos 2x) + 5(C\cos 2x + D\sin 2x) = -17\cos 2x$;

$\underline{-4C\cos 2x}\,\underline{\underline{-4D\sin 2x}} - 4C\sin 2x + 4D\cos 2x\,\underline{+5C\cos 2x}\,\underline{\underline{+5D\sin 2x}} = -17\cos 2x$;

$C\cos 2x + D\sin 2x - 4C\sin 2x + 4D\cos 2x = -17\cos 2x$.

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} D - 4C = 0, \\ C + 4D = -17. \end{cases}$ З першого рівняння одержимо $D = 4C$, тоді з другого рівняння маємо $17C = -17$, звідки $C = -1$. Тоді $D = -4$. Отже $\bar{y} = -\cos 2x - 4\sin 2x$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = e^{-x}\left[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right] - \cos 2x - 4\sin 2x$.

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = \sin x$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' + y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + 1 = 0$, корені: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

II. Права частина рівняння $y'' + 4y = \sin x$ має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$, де $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (що співпадає з коренями характеристичного рівняння). Таким чином частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = x(C\sin x + D\cos x)$.

III. Підставимо $\bar{y} = x(C\sin x + D\cos x)$, $\bar{y}' = (C\sin x + D\cos x) + x(C\cos x - D\sin x)$, $\bar{y}'' = (C\cos x - D\sin x) + (C\cos x - D\sin x) + x(-C\sin x - D\cos x)$ в умову, маємо

$$2(C\cos x - D\sin x) + \underline{x(-C\sin x - D\cos x)} + \underline{x(C\sin x + D\cos x)} = \sin x;$$

$$2C\cos x - 2D\sin x = \sin x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$, отримаємо $C = 0$, $D = -\dfrac{1}{2}$. Отже $\bar{y} = -0{,}5x\cos x$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 0{,}5x\cos x$.

9. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 16 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$.

Корені $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2\cdot 1} = 2$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = (C_1 x + C_2)e^{2x}$.

II. Права частина рівняння $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$ має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$, де $\alpha = 2$, $\beta = 6$. Корені характеристичного рівняння некомплексні, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\bar{y} = e^{2x}(C\cos 6x + D\sin 6x)$.

III. Знайдемо похідні $\bar{y}' = 2e^{2x}(C\cos 6x + D\sin 6x) + e^{2x}(-6C\sin 6x + 6D\cos 6x)$, $\bar{y}'' = 4e^{2x}(C\cos 6x + D\sin 6x) + 4e^{2x}(-6C\sin 6x + 6D\cos 6x) + e^{2x}(-36C\cos 6x - 36D\sin 6x)$.

Підставимо $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в умову, маємо

$$\underline{4e^{2x}(C\cos 6x + D\sin 6x)} + \underline{\underline{4e^{2x}(-6C\sin 6x + 6D\cos 6x)}} + e^{2x}(-36C\cos 6x - 36D\sin 6x) -$$

$$\underline{-8e^{2x}(C\cos 6x + D\sin 6x)} \underline{\underline{-4e^{2x}(-6C\sin 6x + 6D\cos 6x)}} \underline{+4e^{2x}(C\cos 6x + D\sin 6x)} = e^{2x}\sin 6x;$$

$$-36C\cos 6x - 36D\sin 6x = \sin 6x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 6x$ і $\cos 6x$, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} -36C = 0, \\ -36D = 1, \end{cases}$ звідки $C = 0$, $D = -\dfrac{1}{36}$. Тоді $\bar{y} = -\dfrac{1}{36} e^{2x} \sin 6x$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = (C_1 x + C_2) e^{2x} - \dfrac{1}{36} e^{2x} \sin 6x = \left(C_1 x + C_2 - \dfrac{1}{36} \sin 6x \right) e^{2x}$.

10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = 3x + 5\sin 2x$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

II. Права частина рівняння $y'' - 4y' + 4y = 3x + 5\sin 2x$ є сумою многочлена першого степеня $P(x) = 3x$ і $5\sin 2x$. Корені характеристичного рівняння некомплексні, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді суми $\bar{y} = Ax + B + C\sin 2x + D\cos 2x$.

III. Підставимо $\bar{y} = Ax + B + C\sin 2x + D\cos 2x$, $\bar{y}' = A + 2C\cos 2x - 2D\sin 2x$, $\bar{y}'' = -4C\sin 2x - 4D\cos 2x$ в умову, маємо

$$\underline{-4C\sin 2x}\underline{\underline{-4D\cos 2x}} - 3A - 6C\cos 2x + 6D\sin 2x + 2Ax + 2B\underline{+2C\sin 2x}\underline{\underline{+2D\cos 2x}} = 3x + 5\sin 2x;$$

$$-2C\sin 2x - 2D\cos 2x - 3A - 6C\cos 2x + 6D\sin 2x + 2Ax + 2B = 3x + 5\sin 2x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$, $\cos 2x$ і при однакових степенях x, отримаємо системи рівнянь $\begin{cases} -2C + 6D = 5, \\ -2D - 6C = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2A = 3, \\ -3A + 2B = 0. \end{cases}$ З першої системи рівнянь маємо $\begin{cases} D = -3C, \\ -20C = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} C = -0{,}25, \\ D = 0{,}75. \end{cases}$ З другої системи рівнянь маємо $\begin{cases} A = 1{,}5, \\ 2B = 4{,}5; \end{cases}$ $\begin{cases} A = 1{,}5, \\ B = 2{,}25. \end{cases}$ Тоді $\bar{y} = 1{,}5x + 2{,}25 - 0{,}25\sin 2x + 0{,}75\cos 2x$.

Відповідь: $y = y_{одн} + \bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + 1{,}5x + 2{,}25 - 0{,}25\sin 2x + 0{,}75\cos 2x$.

11. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x} - e^{-2x}$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Корені: $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$.

II. Права частина рівняння $y'' - 3y' + 2y = 2e^{x} - e^{-2x}$ є сумою $2e^{x}$ і $-e^{-2x}$ ($\alpha = 1$ співпадає з одним з коренів характеристичного рівняння), тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді суми $\bar{y} = Bxe^{x} + De^{-2x}$.

III. Знайдемо похідні $\bar{y}' = Be^{x} + Bxe^{x} - 2De^{-2x}$, $\bar{y}'' = 2Be^{x} + Bxe^{x} + 4De^{-2x}$.

Підставимо $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в умову, маємо

$$\underline{\underline{2Be^x}}\underline{+Bxe^x}+4De^{-2x}\underline{\underline{-3Be^x}}\underline{-3Bxe^x}+6De^{-2x}\underline{+2Bxe^x}+2De^{-2x}=2e^x-e^{-2x};$$
$$12De^{-2x}-Be^x=2e^x-e^{-2x}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при e^x, e^{-2x}, отримаємо $B=-2$, $D=-\frac{1}{12}$, тоді $\bar{y}=-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$.

Відповідь: $y=y_{одн}+\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^x-2xe^x-\frac{1}{12}e^{-2x}$.

12. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y''-3y'+2y=0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2-3\lambda+2=0$, $D=b^2-4ac=9-4\cdot1\cdot2=1$.

Корені: $\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{3\pm1}{2}$; $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн}=C_1e^{2x}+C_2e^x$.

II. Права частина рівняння $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)$ є добутком e^x ($\alpha=1$ співпадає з одним з коренів характеристичного рівняння) і многочлена першого степеня $P(x)=3-4x$, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді добутку $\bar{y}=xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx)$.

III. Підставимо в умову $\bar{y}=e^x(Ax^2+Bx)$, $\bar{y}'=e^x(Ax^2+Bx)+e^x(2Ax+B)$, $\bar{y}''=e^x(Ax^2+Bx)+2e^x(2Ax+B)+e^x\cdot2A$, маємо

$$\underline{e^x(Ax^2+Bx)}\underline{\underline{+2e^x(2Ax+B)}}+2Ae^x\underline{-3e^x(Ax^2+Bx)}\underline{\underline{-3e^x(2Ax+B)}}\underline{+2e^x(Ax^2+Bx)}=e^x(3-4x);$$
$$2A-(2Ax+B)=3-4x \text{ або } 2A-2Ax-B=3-4x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases}-2A=-4,\\2A-B=3;\end{cases}$ звідки $\begin{cases}A=2,\\4-B=3;\end{cases}$ $\begin{cases}A=2,\\B=1;\end{cases}$ тоді $\bar{y}=e^x(2x^2+x)$.

Відповідь: $y=y_{одн}+\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^x+e^x(2x^2+x)=C_1e^{2x}+e^x(2x^2+x+C_2)$.

13. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y''+5y'=x\sin x$.

Розв'язання:

I. Відповідне однорідне рівняння має вигляд: $y''+5y'=0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2+5\lambda=0$, $\lambda(\lambda+5)=0$, корені: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-5$.

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд $y_{одн}=C_1+C_2e^{-5x}$.

II. Права частина рівняння $y''+5y'=x\sin x$ є добутком многочлена першого степеня $P(x)=x$ і $\sin x$, тому частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді добутку $\bar{y}=(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x$.

III. Знайдемо похідні $\bar{y}'=A\sin x+(Ax+B)\cos x+C\cos x-(Cx+D)\sin x=$ $=(Ax+B+C)\cos x-(Cx+D-A)\sin x$, $\bar{y}''=A\cos x-(Ax+B+C)\sin x-C\sin x-(Cx+D-A)\cos x=$ $=-(Ax+B+2C)\sin x-(Cx+D-2A)\cos x$.

Підставимо $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ в умову, маємо

$$-(Ax+B+2C)\sin x-(Cx+D-2A)\cos x+5(Ax+B+C)\cos x-5(Cx+D-A)\sin x=x\sin x;$$

$$(-Ax-5Cx-B-2C-5D+5A)\sin x+(-Cx+5Ax-D+2A+5B+5C)\cos x=x\sin x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $x\sin x$, $x\cos x$, $\sin x$, $\cos x$, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{l} x\sin x: \\ x\cos x: \\ \sin x: \\ \cos x: \end{array}\begin{cases}-A-5C=1,\\ -C+5A=0,\\ -B-2C-5D+5A=0,\\ -D+2A+5B+5C=0;\end{cases}\quad \begin{array}{l} x\sin x: \\ x\cos x: \\ \sin x: \\ \cos x: \end{array}\begin{cases}-A-5C=1,\\ -C+5A=0,\\ -B-C-5D=0,\\ -D+A+5B=1;\end{cases}\quad \begin{cases}-26A=1,\\ C=5A;\end{cases}\quad \begin{cases}A=-\dfrac{1}{26},\\ C=-\dfrac{5}{26};\end{cases}$$

$$\begin{cases}B-\dfrac{5}{26}+5D=0,\\ -D-\dfrac{1}{26}+5B=1;\end{cases}\quad \begin{cases}B+5D=\dfrac{5}{26},\\ -D+5B=\dfrac{27}{26};\end{cases}\quad +\begin{cases}B+5D=\dfrac{5}{26},\\ -5D+25B=\dfrac{135}{26};\end{cases}\quad -\begin{cases}5B+25D=\dfrac{25}{26},\\ -D+5B=\dfrac{27}{26};\end{cases}\quad B=\frac{140}{26^2}=\frac{35}{169};$$

$$26B=\frac{140}{26}\qquad 26D=-\frac{2}{26}\qquad D=\frac{-2}{26^2}=\frac{-1}{338}.$$

Тоді $\bar{y}=\left(-\dfrac{x}{26}+\dfrac{35}{169}\right)\sin x+\left(-\dfrac{5x}{26}-\dfrac{1}{338}\right)\cos x$.

Відповідь: $y=y_{одн}+\bar{y}=C_1+C_2e^{-5x}+\left(-\dfrac{x}{26}+\dfrac{35}{169}\right)\sin x+\left(-\dfrac{5x}{26}-\dfrac{1}{338}\right)\cos x$.

3. Завдання для самостійного виконання

Записати тільки вигляд часткового розв'язку неоднорідного рівняння

$y''+3y'=9x^2+1$;	$y''+4y'+4y=e^{2x}$;	$y''+2y'+2y=2x$;
$y''+5y'+6y=2e^{-x}$;	$y''+4y'+4y=e^{-2x}$;	$y''+2y'+2y=\cos 2x$;
$y''+5y'+6y=10e^{-2x}$;	$y''+4y'+4y=\sin 5x$;	$y''+2y'+2y=e^{-x}\sin x$.

4. Питання для самоконтролю

1. Яка структура загального розв'язку ЛНДР II порядку?
2. Який вигляд має частинний розв'язок ЛНДР II порядку із сталими коефіцієнтами, якщо права частина є многочленом?
3. Який вигляд має частинний розв'язок ЛНДР II порядку із сталими коефіцієнтами, якщо права частина має вигляд $f(x)=Ae^{\alpha x}$?
4. Який вигляд має частинний розв'язок ЛНДР II порядку із сталими коефіцієнтами, якщо права частина має вигляд $f(x)=e^{\alpha x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x)$?

Задачі на застосування диференціальних рівнянь

1. Приклади виконання завдань

1. Знайти функцію сумарного прибутку фірми від випуску продукції, якщо граничний прибуток фірми визначається співвідношенням $y'(x)=50000-x$, а нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток.

Розв'язання:

Так як $y'(x)=50000-x$, то $y(x)=\int(50000-x)dx$, $y(x)=50000x-0{,}5x^2+C$.

Застосуємо початкову умову $y(0)=0=C$, тоді $y(x)=50000x-0{,}5x^2$.

Відповідь: $y(x) = 50000x - 0{,}5x^2$.

2. Через який проміжок часу відбудеться потроєння сукупного суспільного продукту P, якщо його залежність від часу визначається рівнянням розширеного відтворення $\frac{dP}{dt} = 0{,}5P$?

Розв'язання:

Рівняння розширеного відтворення $\frac{dP}{dt} = 0{,}5P$ є рівнянням з розділяючимися змінними, тоді маємо $\frac{dP}{P} = 0{,}5dt$. Нехай на початку (при $t = 0$) сукупний продукт P_0. Позначимо Δt проміжок часу, через який відбудеться потроєння сукупного продукту, тобто $P = 3P_0$. Проінтегруємо $\int\limits_{P_0}^{3P_0} \frac{dP}{P} = \int\limits_0^{\Delta t} 0{,}5dt$, отримаємо $\ln P\Big|_{P_0}^{3P_0} = 0{,}5t\Big|_0^{\Delta t}$,

$\ln 3P_0 - \ln P_0 = 0{,}5\Delta t$, $\ln \frac{3P_0}{P_0} = 0{,}2\Delta t$, $\ln 3 = 0{,}5\Delta t$, тоді $\Delta t = 2\ln 3$.

Відповідь: $\Delta t = 2\ln 3$.

3. Проінтегрувати диференціальне рівняння розширеного відтворення $\frac{dP}{dt} = \frac{P}{10}$ та визначити через який проміжок часу відбудеться подвоєння сукупного продукту.

Розв'язання:

Відокремимо змінні $\frac{dP}{P} = \frac{dt}{10}$, проінтегруємо $\int \frac{dP}{P} = \int \frac{dt}{10}$, отримаємо $\ln P - \ln C = \frac{t}{10}$, $\ln \frac{P}{C} = \frac{t}{10}$, $\frac{P}{C} = e^{0{,}1t}$, $P = Ce^{0{,}1t}$.

Нехай при $t = 0$ сукупний продукт становив P_0. Тоді $P_0 = Ce^0$, $C = P_0$, $P = P_0e^{0{,}1t}$.

Визначимо проміжок часу, протягом якого відбудеться подвоєння сукупного продукту, тобто $P = 2P_0$. З рівняння $2P_0 = P_0e^{0{,}1\Delta t}$, маємо $2 = e^{0{,}1\Delta t}$, $\Delta t = 10\ln 2$.

Відповідь: $\Delta t = 10\ln 2$.

4. Еластичність функції за чинником x описується співвідношенням $E_x(y) = \frac{x}{1 - x^2}$. Визначити саму функцію, якщо її графік проходить через точку $M_0(1;2)$. За означенням $E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання:

З умови маємо $\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{1 - x^2}$, відокремимо змінні $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 - x^2}$, проінтегруємо $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1 - x^2}$, отримаємо $\ln|y| - \ln C = \operatorname{arctg} x$, $\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \operatorname{arctg} x$, $\frac{y}{C} = e^{\operatorname{arctg} x}$, $y = Ce^{\operatorname{arctg} x}$.

Застосуємо початкову умову $y(1) = 2$, маємо $2 = Ce^{\frac{\pi}{4}}$, $C = 2e^{-\frac{\pi}{4}}$, тоді $y = 2e^{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}$.

Відповідь: $y = 2e^{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}}$.

5. Нехай є 1000 потенційних покупців деякого товару. Після рекламного оголошення, яке чули 10 клієнтів, інформація про даний товар поширюється через спілкування покупців між собою. Враховуючи, що швидкість зміни числа покупців, які знають про товар, пропорційна числу проінформованих про товар, знайти момент часу, після якого про товар знатимуть усі потенційні клієнти, якщо за хвилину кількість тих, хто знає про товар, подвоюється.

Розв'язання:

З умови маємо $\frac{dn}{dt} = kn$, відокремимо змінні $\frac{dn}{n} = kdt$, проінтегруємо $\int \frac{dn}{n} = \int kdt$, отримаємо $\ln n - \ln C = kt$, $\ln \frac{n}{C} = kt$, $\frac{n}{C} = e^{kt}$, $n = Ce^{kt}$.

На початку (при $t = 0$) $n_0 = 10$. Тоді маємо $10 = Ce^0$, звідки $C = 10$, $n = 10e^{kt}$.

Так як за хвилину кількість тих, хто знає про товар, подвоюється, то маємо $20 = 10e^{k \cdot 1}$, звідки $2 = e^k$, $k = \ln 2$, тоді $n = 10e^{t \ln 2}$, $n = 10 \cdot 2^t$.

Знайдемо момент часу, після якого про товар знатимуть усі потенційні клієнти. Маємо $n = 1000$, $1000 = 10 \cdot 2^{\Delta t}$, $100 = 2^{\Delta t}$, звідки $\Delta t = \log_2 100$.

Відповідь: $\Delta t = \log_2 100 хв$.

6. Знайти обсяг реалізованої продукції $y = y(t)$ (логістичну криву), якщо відомо, що попит визначається рівністю $p(y) = 4 - y$, норма акселерації $l^{-1} = 2$, норма інвестицій $m = 0{,}5$; а також відомо, що $y(0) = 0{,}5$. Модель росту в умовах конкурентного ринку має вигляд $y' = mlyp(y)$.

Розв'язання:

З умови маємо $y' = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} y(4 - y)$, $y' = \frac{1}{4} y(4 - y)$ або $\frac{4dy}{dt} = y(4 - y)$.

Відокремимо змінні $\frac{4dy}{y(4 - y)} = dt$ або $\frac{dy}{y} + \frac{dy}{4 - y} = dt$, після інтегрування отримаємо $\ln|y| - \ln|4 - y| + \ln C = t$, $\ln\left|\frac{Cy}{4 - y}\right| = t$, звідки загальний інтеграл $\frac{Cy}{4 - y} = e^t$. Виразимо функцію $Cy = (4 - y)e^t$, $Cy = 4e^t - ye^t$, $Cy + ye^t = 4e^t$, $y\left(C + e^t\right) = 4e^t$, маємо загальний розв'язок $y = \frac{4e^t}{C + e^t}$.

Застосуємо початкову умову $y(0) = 0{,}5$, маємо $\frac{1}{2} = \frac{4}{C + 1}$, $C = 7$, тоді $y = \frac{4e^t}{7 + e^t}$.

Відповідь: $y = \frac{4e^t}{7 + e^t}$.

7. Залежність кількості населення міста від часу t (за роками) описується диференціальним рівнянням $y' = 0{,}1y\left(1 - 10^{-6} y\right)$. Через скільки років кількість населення цього міста зросте з 10^5 до $5 \cdot 10^5$?

Розв'язання:

З умови маємо $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{10} y\left(1 - 10^{-6} y\right)$, відокремимо змінні $\frac{dy}{y\left(1 - 10^{-6} y\right)} = \frac{dt}{10}$.

Так як $\frac{1}{y}+\frac{10^{-6}}{1-10^{-6}y}=\frac{1}{y\left(1-10^{-6}y\right)}$, то маємо $\left(\frac{1}{y}+\frac{10^{-6}}{1-10^{-6}y}\right)dy=\frac{dt}{10}$.

Застосуємо початкову $y(0)=10^5$ і кінцеву $y(\Delta t)=5\cdot 10^5$ умови. Проінтегруємо $\int\limits_{10^5}^{5\cdot 10^5}\left(\frac{1}{y}+\frac{10^{-6}}{1-10^{-6}y}\right)dy=\int\limits_{0}^{\Delta t}\frac{dt}{10}$, $\ln|y|\Big|_{10^5}^{5\cdot 10^5}-\ln\left|1-10^{-6}y\right|\Big|_{10^5}^{5\cdot 10^5}=\frac{t}{10}\Big|_0^{\Delta t}$, $\ln\frac{5\cdot 10^5}{10^5}-\ln\frac{0{,}5}{0{,}9}=\frac{\Delta t}{10}$, $\ln 5-\ln\frac{5}{9}=\frac{\Delta t}{10}$, $\ln 9=\frac{\Delta t}{10}$ звідки $\Delta t=10\ln 9$.

Відповідь: $\Delta t=10\ln 9$.

8. Відомо, що ціна p на деякий товар залежить від часу t, а попит q і пропозиція s визначаються формулами $q=4p'-2p+39$, $s=44p'+2p-1$. Визначити якою повинна бути ціна p, щоб попит і пропозиція зрівноважились, якщо $p(0)=1$.

Розв'язання:

З умови $q=s$ маємо $4p'-2p+39=44p'+2p-1$, $40p'+4p=40$, $p'+\frac{1}{10}p=1$. Це лінійне диференціальне рівняння I порядку.

Застосуємо метод Лагранжа. Маємо $p'+\frac{1}{10}p=0$, $p_{одн}(t)=Ce^{-\int\frac{1}{10}dt}=Ce^{-\frac{1}{10}t}$. Тоді $p(t)=C(t)e^{-0{,}1t}$, $p'(t)=C'(t)e^{-0{,}1t}-0{,}1C(t)e^{-0{,}1t}$.

Після підстановки $p(t)$ і $p'(t)$ у рівняння $p'+\frac{1}{10}p=1$, отримаємо $C'(t)e^{-\frac{1}{10}t}-\frac{1}{10}C(t)e^{-\frac{1}{10}t}+\frac{1}{10}C(t)e^{-\frac{1}{10}t}=1$, звідки $C'(t)e^{-\frac{1}{10}t}=1$, $C'(t)=e^{\frac{1}{10}t}$.

Так як $C(t)=\int e^{\frac{1}{10}t}dt=10e^{\frac{1}{10}t}+C$, то $p(t)=\left(10e^{0{,}1t}+C\right)e^{-0{,}1t}$, $p(t)=10+Ce^{-0{,}1t}$.

Застосуємо початкову умову $p(0)=1$, маємо $1=10+Ce^0$, $C=-9$, $p(t)=10-9e^{-\frac{1}{10}t}$.

Відповідь: $p(t)=10-9e^{-\frac{1}{10}t}$.

9. Знайти функцію прибутку $Y(t)$, якщо відомо, що величина споживання визначається функцією $C(t)=2t$, коефіцієнт капіталоємності приросту прибутку $b=1/2$, $Y(0)=2$, а модель природного росту має вигляд $bY'(t)=I(t)$, де $Y(t)=I(t)+C(t)$, $I(t)$ – сума інвестицій.

Розв'язання:

З умови маємо $I(t)=Y(t)-C(t)=Y(t)-2t$, $\frac{1}{2}Y'(t)=Y(t)-2t$, $Y'(t)-2Y(t)=-4t$. Це лінійне диференціальне рівняння I порядку.

Застосуємо метод Лагранжа. Маємо $Y'(t)-2Y(t)=0$, $Y_{одн}(t)=Ce^{\int 2dt}=Ce^{2t}$. Тоді $Y(t)=C(t)e^{2t}$, $Y'(t)=C'(t)e^{2t}+2C(t)e^{2t}$.

Після підстановки $Y(t)$ і $Y'(t)$ у рівняння $Y'(t)-2Y(t)=-4t$, отримаємо $C'(t)e^{2t}+2C(t)e^{2t}-2C(t)e^{2t}=-4t$, звідки $C'(t)e^{2t}=-4t$, $C'(t)=-4te^{-2t}$.

Так як $C(t) = -\int 4te^{-2t} \begin{bmatrix} u = 4t & du = 4 \\ dv = e^{-2t} & v = -\dfrac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix} = 2te^{-2t} - \int 2e^{-2t} = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C$, то $Y(t) = \left(2te^{-2t} + e^{-2t} + C\right)e^{2t}$ або $Y(t) = 2t + 1 + Ce^{2t}$.

Застосуємо початкову умову $Y(0) = 2$, маємо $2 = 2 \cdot 0 + 1 + Ce^{2\cdot 0}$, $2 = 1 + C$, $C = 1$, отже $Y(t) = 2t + 1 + e^{2t}$.

Відповідь: $Y(t) = 2t + 1 + e^{2t}$.

10. Попит і пропозиція на деякий товар визначаються співвідношеннями $q = 2p'' - p' - p + 15$, $s = 3p'' + p' + p + 5$, де p – ціна товару, p' – тенденція формування ціни, p'' – темп зміни ціни. Знайти залежність ціни від часу за умови, що пропозиція і попит зрівноважені, а $p(0) = 6$, $q(0) = 10$, $s(0) = 10$.

Розв'язання:

З умови $s = q$ маємо $3p'' + p' + p + 5 = 2p'' - p' - p + 15$, $p'' + 2p' + 2p = 10$. Це лінійне диференціальне рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами.

Відповідне однорідне рівняння $p'' + 2p' + 2p = 0$ має характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$, де $D = 4 - 8 = -4$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$. Тоді маємо $p_{одн} = e^{-x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right)$.

Права частина рівняння $p'' + 2p' + 2p = 10$ – многочлен нульового степеня $P(x) = 10$. Жодний з коренів характеристичного рівняння не рівний нулю, тому частинний розвязок ЛНДР шукаємо у вигляді $\overline{p} = A$.

Підставимо $\overline{p} = A$, $\overline{p}' = 0$, $\overline{p}'' = 0$ в умову, маємо $2A = 10$, звідки $A = 5$, тоді $\overline{p} = 5$.

Відповідь: $p = e^{-x}\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) + 5$.

МОДУЛЬ 10 «ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»

Сума і збіжність числового ряду. Необхідна умова збіжності

1. Основні поняття та теореми

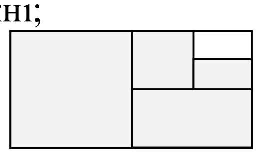
Числовим рядом називається вираз виду $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, де u_1, u_2, …, u_n – дійсні чи комплексні числа, що називаються елементами ряду: u_1 – перший елемент ряду, u_2 – другий елемент ряду, ..., u_n – n-й (загальний) елемент ряду.

Сума скінченого числа n перших елементів ряду – часткова сума ряду $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$.

Якщо існує скінчена границя послідовності часткових сум ряду $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то вона називається ***сумою ряду*** і ряд є ***збіжним***. Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ або не існує, то ряд є ***розбіжним***.

Ряд виду $u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 + \ldots + u_1 \cdot q^{n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ називається ***геометричним рядом***, бо є сумою геометричної прогресії. Число $u_1 \neq 0$ називається першим елементом, а число q – ***знаменником*** геометричної прогресії. Геометричний ряд збіжний при $|q| < 1$ (сума ряду $S = \dfrac{u_1}{1-q}$) і розбіжний при $|q| \geq 1$.

Так, ряди $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$ і $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + \ldots$ – розбіжні; ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \ldots$ збіжний, його сума $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.



Необхідна умова збіжності ряду: якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достатня ознака розбіжності ряду: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ або не існує, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти суму перших десяти елементів ряду $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \ldots$.

Розв'язання:

Складемо часткову суму $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$. Оскільки $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, бо $\dfrac{^{n+1}1}{n} - \dfrac{^{n}1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$, то $S_n = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

Отже, сума перших десяти елементів ряду $S_{10} = 1 - \dfrac{1}{10+1} = 1 - \dfrac{1}{11} = \dfrac{10}{11}$.

Відповідь: $\dfrac{10}{11}$.

2. Знайти суму ряду $40+40\frac{1}{2}+40\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+40\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$.

Розв'язання:

Це геометричний ряд з $u_1=40$ і $q=\frac{1}{2}<1$. Тому $S_{геом.ряд}=\frac{u_1}{1-q}=\frac{40}{1-\frac{1}{2}}=80$.

Відповідь: 80.

3. За допомогою означення збіжності ряду дослідити на збіжність числовий ряд $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$ та обчислити суму п'яти перших елементів ряду.

Розв'язання:

Складемо часткову суму $S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. Подамо загальний елемент u_n у вигляді суми двох елементарних дробів $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1}$, де A і B – невизначені коефіцієнти.

Зведемо праву частину рівності до спільного знаменника $\frac{^{2n+1}A}{2n-1}+\frac{^{2n-1}B}{2n+1}=\frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$. Так як дроби рівні $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)}$, знаменники однакові, то прирівняємо чисельники $1=A(2n+1)+B(2n-1)$ або $1=2An+A+2Bn-B$.

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях n. Отримаємо систему рівнянь $\begin{cases}0=2An+2Bn,\\ 1=A-B\end{cases}$ або $\begin{cases}0=A+B,\\ 1=A-B.\end{cases}$ Додамо рівняння, отримаємо $1=2A$, звідки $A=\frac{1}{2}$; віднімемо рівняння, отримаємо $-1=2B$, звідки $B=-\frac{1}{2}$.

Тоді маємо $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{2n-1}-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$. Враховуючи цю рівність, знаходимо $S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$, тобто $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$.

Згідно означення $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Отже, ряд збігається і його сума $S=\frac{1}{2}$.

Сума перших п'яти елементів ряду рівна $S_5=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\cdot 5+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{11}=\frac{5}{11}\approx 0{,}454$.

Відповідь: 0,5 і 0,454.

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2$.

Розв'язання:

Переконаємось, що необхідна умова збіжності ряду виконується, тобто загальний елемент ряду прямує до нуля: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-4n+3}{100n^2+1}\right)^2=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\left(\dfrac{1}{100}\right)^2\neq 0$.

Необхідна умова збіжності ряду не виконується. Тому ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти суму перших $(\alpha+5)$ елементів ряду $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots$.

2. Знайти суму ряду $\alpha+\alpha\dfrac{1}{3}+\alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\ldots+\alpha\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$.

3. За допомогою означення збіжності ряду дослідити на збіжність числовий ряд $\dfrac{\alpha}{1\cdot 4}+\dfrac{\alpha}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{\alpha}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$ та обчислити суму $(\alpha+10)$ перших елементів ряду.

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n^3-3n+4}{5n^3-1}\right)^2$.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається числовим рядом?
2. Що є загальним елементом ряду?
3. Що називається частковою сумою ряду?
4. Що є сумою ряду?
5. Який ряд збіжний, розбіжний?
6. Що називається геометричним рядом? Коли він збіжний, розбіжний?
7. Чому рівна сума збіжного геометричного ряда?
8. Яка необхідна умова збіжності ряду?
9. Яка достатня ознака розбіжності ряду?

Знакододатні числові ряди

1. Основні поняття та теореми

Якщо в ряді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ всі елементи невід'ємні, тобто $u_n\geq 0$, $n=1,2,\ldots$, то такий ряд ***знакододатний***.

Ознака порівняння: Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ знакододатні, причому $u_n\leq v_n$, $n=1,2,\ldots$ Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$.

Гранична ознака порівняння: Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ знакододатні та $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{u_n}=k$ є числом (не нуль і не безмежність), то ці ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Для порівняння застосовуємо геометричний і узагальнений гармонічний ряди.

Геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_1 q^{n-1}$ збіжний при $|q|<1$ і розбіжний при $|q|\geq 1$.

Наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ – збіжні ряди.

Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (***узагальнений гармонічний***) збіжний при $p>1$ і розбіжний при $p\leq 1$.

Наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ – збіжні ряди, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжні ряди.

Ознака Д'Аламбера: Якщо для знакододатнього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд збіжний, при $l>1$ ряд розбіжний, при $l=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим (ряд може збігатися, може й розбігатися).

Радикальна ознака Коші: Якщо для накододатнього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то при $l<1$ ряд збіжний, при $l>1$ ряд розбіжний, при $l=1$ питання про збіжність ряду залишається відкритим (ряд може збігатися, може й розбігатися).

Інтегральна ознака Коші: Нехай функція $f(x)$, визначена на проміжку $[1;+\infty)$, є додатною та незростаючою на цьому проміжку. Тоді невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збіжний (розбіжний) одночасно із знакододатним числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+\ldots$.

2. Приклади виконання завдань

1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{45\cdot 2^n}$.

Розв'язання:

Маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{45\cdot 2^n}$ $\{u_n\}$. Візьмемо для порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ $\{v_n\}$, який є збіжним як геометричний ряд зі знаменником $q<1$.

Тоді, згідно з граничною ознакою порівняння рядів, отримаємо $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{45\cdot 2^n}{1}=45$. Оскільки отримали скінчену ненульову границю, то обидва ряди є збіжними.

Відповідь: ряд збіжний.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{37n^2+3n+5}$.

Розв'язання:

Маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{37n^2+3n+5}$ $\{u_n\}$. Для порівняння застосуємо $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\{v_n\}$, що є збіжним як узагальнений гармонічний ряд з $p>1$.

Тоді, згідно з граничною ознакою порівняння рядів, отримаємо $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{37n^2+3n+5}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{37n^2+3n+5}{n^2}=\frac{37}{1}=37$. Оскільки отримали скінчену ненульову границю, то обидва ряди є збіжними.

Відповідь: ряд збіжний.

3. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}+...$.

Розв'язання:

Розглянемо допоміжний ряд $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...+\frac{1}{2^{n+1}}+...$ який є збіжним як геометричний ряд зі знаменником $q<1$.

Оскільки $\frac{1}{(n+1)^{n+1}}<\frac{1}{2^{n+1}}$, то за ознакою порівняння рядів заданий ряд також збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

Розв'язання:

Для порівняння застосуємо $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, що є розбіжним як гармонічний.

Так як $\ln n<n$, то $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$, тоді за ознакою порівняння рядів заданий ряд також розбігається.

Відповідь: ряд розбіжний.

5. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+...+\frac{n}{3^n}+...$.

Розв'язання:

Оскільки $u_n=\frac{n}{3^n}$ і $u_{n+1}=\frac{n+1}{3^{n+1}}$, то застосувавши ознаку Д'Аламбера, отримаємо $l=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 3^n}{n\cdot 3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n\cdot 3}=\frac{1}{3}$. Так як $l<1$, то ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

6. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{4}+\frac{4}{49}+\frac{27}{1000}+...+\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n+...$.

Розв'язання:

Оскільки $u_n = \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$, то застосувавши радикальну ознаку Коші, отримаємо $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1} = \dfrac{1}{3}$. Оскільки $l<1$, то ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

7. Дослідити на збіжність ряд $\sin\dfrac{\pi}{10} + 2^2\sin\dfrac{\pi}{10^2} + \ldots + n^2\sin\dfrac{\pi}{10^n} + \ldots$.

Розв'язання:

Оскільки $u_n = n^2\sin\dfrac{\pi}{10^n}$ і $u_{n+1} = (n+1)^2\sin\dfrac{\pi}{10^{n+1}}$, то застосувавши ознаку Д'Аламбера, отримаємо $l = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\sin\dfrac{\pi}{10^{n+1}}}{n^2\sin\dfrac{\pi}{10^n}}$.

Застосуємо наслідок першої чудової границі $\sin\alpha \approx \alpha$ при $\alpha \to 0$. Так як при $n\to\infty$ аргументи синусів прямують до нуля, то синуси можемо замінити їхніми аргументами, тоді $l = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\cdot\dfrac{\pi}{10^{n+1}}}{n^2\cdot\dfrac{\pi}{10^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2}{n^2\cdot 10} = \dfrac{1}{10}$.

Оскільки $l<1$, то ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{100^n}$.

Розв'язання:

Оскільки $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{100^n}$, то застосувавши радикальну ознаку Коші, отримаємо $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{100^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}{100} = \dfrac{1}{100}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{100}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Застосуємо другу чудову границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Тоді маємо $l = \dfrac{e}{100} \approx 0{,}027$.

Оскільки $l<1$, то ряд збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

9. Дослідити на збіжність ряд $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{\ln 3}{3} + \ldots + \dfrac{\ln n}{n} + \ldots$.

Розв'язання:

Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Ця функція задовольняє умови інтегральної ознаки Коші, тому що вона визначена, монотонно спадна і додатна на проміжку $[2;+\infty)$.

Знайдемо невласний інтеграл $\int\limits_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\int\limits_2^{+\infty}\ln x d(\ln x)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_2^{+\infty}=+\infty-\frac{\ln^2 2}{2}=+\infty$.

Оскільки невласний інтеграл розбіжний, то і ряд також розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний.

10. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+100)\cdot\ln^3(n+100)}$.

Розв'язання:

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{(x+100)\cdot\ln^3(x+100)}$. Ця функція задовольняє умови інтегральної ознаки Коші, тому що вона визначена, монотонна спадна і додатна на проміжку $[1;+\infty)$. Знайдемо невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)dx$ від цієї функції

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+100)\cdot\ln^3(x+100)}=\int\limits_1^{+\infty}\ln^{-3}(x+100)d[\ln(x+100)]=-\frac{1}{2}\left.\frac{1}{\ln^2(x+100)}\right|_1^{+\infty}=\frac{1}{2\ln^2 101}.$$

Оскільки невласний інтеграл збіжний, то і ряд також збіжний.

Відповідь: ряд збіжний.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+3)\cdot 2^n}$.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha n^2+3n+5}$.

3. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2^2+\alpha}+\frac{1}{2^3+\alpha}+\frac{1}{2^4+\alpha}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}+\alpha}+\ldots$

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lg n}$.

5. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1\cdot\alpha}{2}+\frac{2\cdot\alpha}{2^2}+\frac{3\cdot\alpha}{2^3}+\ldots+\frac{n\cdot\alpha}{2^n}+\ldots$

6. Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2+\alpha}+\frac{4}{(4+\alpha)^2}+\frac{27}{(6+\alpha)^3}+\ldots+\left(\frac{n}{2n+\alpha}\right)^n+\ldots$

7. Дослідити на збіжність ряд $\sin\frac{\pi}{\alpha+1}+4\cdot\sin\frac{\pi}{(\alpha+1)^2}+\ldots+n^2\cdot\sin\frac{\pi}{(\alpha+1)^n}+\ldots$

8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{\alpha^n}$.

9. Дослідити на збіжність ряд $\frac{\ln^2 2}{2}+\frac{\ln^2 3}{3}+\ldots+\frac{\ln^2 n}{n}+\ldots$

10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)\cdot\ln^2(n+\alpha)}$.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається знакододатним рядом?
2. Що називається гармонічним рядом?
3. Що називається узагальненим гармонічним рядом? Коли він збіжний?
4. В чому полягає ознака порівняння рядів?
5. В чому полягає гранична ознака порівняння рядів?
6. В чому полягає ознака збіжності-розбіжності ряду Д'Аламбера?
7. В чому полягає радикальна ознака збіжності-розбіжності ряду Коші?
8. В чому полягає інтегральна ознака збіжності-розбіжності ряду Коші?

Знакопочережні числові ряди

1. Основні поняття та теореми

Числовий ряд, елементи якого можуть бути як додатними, так і від'ємними, називається ***знакозмінним***.

До знакозмінних належать і ряди виду $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, де $u_n>0$, $n=1,2,\ldots$, в яких знаки елементів строго чергуються. Такі ряди ***знакопочережні.***

Достатня ознака Лейбніца збіжності знакопочережного ряду: знакопочережний ряд збіжний, якщо $u_{n+1}<u_n$, $n=1,2,\ldots$ та $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Наприклад, ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ збігається, бо виконуються умови ознаки Лейбніца.

$$\underbrace{u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n+1}u_n}_{S_n}+\underbrace{(-1)^{n+2}u_{n+1}+\ldots}_{r_n}=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n}_{S}$$

Величина $r_n=S-S_n=(-1)^{n+2}u_{n+1}+(-1)^{n+3}u_{n+2}+\ldots$ називається n-м ***залишком ряду***, тобто це сума ряду, який утворюється із заданого ряду після відкидання перших n його елементів.

Абсолютна похибка від заміни суми S ряду лейбніцового типу будь-якою його частинною сумою S_n не перевищує модуля першого з відкинутих елементів ряду, тобто $|S-S_n|\le u_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$.

Оскільки $|S-S_n|=|r_n|$, то модуль n-го залишку r_n ряду лейбніцового типу не перевищує модуля $(n+1)$-го елемента цього ряду, тобто $|r_n|\le u_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$.

Якщо ряд складений з абсолютних величин заданого знакозмінного ряду збіжний, то збіжний і заданий знакозмінний ряд.

Так, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ збіжний, бо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ збіжний.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, складений з абсолютних величин його елементів, є збіжним.

Наприклад, знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ абсолютно збіжний.

Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, складений з абсолютних величин його елементів, розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ називається ***умовно збіжним.***

Наприклад, знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ умовно збіжний, бо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний.

2. Приклади виконання завдань

1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}$ та оцінити r_5.

Розв'язання:

Ряд знакочережний, $u_n=\frac{1}{3n}$. Застосуємо ознаку Лейбніца, маємо $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0$ і $\frac{1}{3(n+1)}<\frac{1}{3n}$. Отже, знакочережний ряд збіжний.

Встановимо збіжність абсолютна чи умовна. Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин членів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ або $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Так як гармонічний ряд розбіжний, то ряд $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбіжний, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n}$ збіжний умовно.

Залишок оцінимо за формулою $|r_n|\le u_{n+1}$, тоді маємо $|r_5|\le u_6=\frac{1}{3\cdot 6}=\frac{1}{18}$.

Відповідь: ряд збіжний умовно, $|r_5|\le\frac{1}{18}$.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ та оцінити r_4.

Розв'язання:

Ряд знакочережний, $u_n=\frac{1}{n^3}$. Застосуємо ознаку Лейбніца, маємо $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$ і $\frac{1}{(n+1)^3}<\frac{1}{n^3}$. Отже, знакочережний ряд збіжний.

Встановимо збіжність абсолютна чи умовна. Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин елементів заданого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Це узагальнений гармонічний ряд ($p=3$), що є збіжний, тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ збіжний абсолютно.

Залишок оцінимо за формулою $|r_n|\le u_{n+1}$, тоді маємо $|r_4|\le u_5=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$.

Відповідь: ряд збіжний абсолютно, $|r_4| \le \dfrac{1}{125}$.

3. Довести, що ряд $\dfrac{1}{4^2} - \dfrac{1}{9^2} + \dfrac{1}{14^2} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{(5n-1)^2} + \ldots$ абсолютно збіжний.

Розв'язання:

Маємо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(5n-1)^2}$.

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин елементів заданого ряду, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-1)^2}$. Порівняємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-1)^2}$ із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Застосуємо граничну ознаку порівняння $k = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(5n-1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(5n-1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{25n^2-10n+1} = \dfrac{1}{25}$. Так як отримали скінчену ненульову границю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(5n-1)^2}$ також збіжний.

Заданий ряд збіжний абсолютно.

4. Довести, що ряд $\dfrac{1}{1\cdot 37^1} - \dfrac{1}{2\cdot 37^2} + \dfrac{1}{3\cdot 37^3} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\cdot 37^n} + \ldots$ абсолютно збіжний.

Розв'язання:

Маємо знакопочережний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\cdot 37^n}$.

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин елементів заданого ряду, тобто $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 37^n}$. Для встановлення збіжності $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 37^n}$ застосуємо ознаку Д'Аламбера. Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)\cdot 37^{n+1}}}{\frac{1}{n\cdot 37^n}} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(n+1)\cdot 37} = \dfrac{1}{37} < 1$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 37^n}$ збіжний, тоді заданий ряд збіжний абсолютно.

5. Довести, що ряд $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} - \dfrac{1}{\ln 5} + \ldots + (-1)^n\dfrac{1}{\ln n} + \ldots$ умовно збіжний.

Розв'язання:

Маємо знакопочережний ряд. Застосуємо ознаку Лейбніца, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n} = 0$ і $\dfrac{1}{\ln(n+1)} < \dfrac{1}{\ln n}$. Отже, знакопочережний ряд збіжний.

Розглянемо ряд, складений із абсолютних величин елементів заданого ряду, тобто $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$. Порівняємо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ із розбіжним рядом $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Застосуємо ознаку порівняння. Так як $\dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ теж розбіжний.

Таким чином, знакозмінний ряд збіжний за ознакою Лейбніца, а ряд, складений із абсолютних величин, розбіжний, тому знакозмінний ряд є умовно збіжним.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\alpha}{n}$ та оцінити r_5.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\alpha^2}{n^2}$ та оцінити r_4.

3. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n+\alpha)^2}$ абсолютно збіжний.

4. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot\alpha^n}$ абсолютно збіжний.

5. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+\alpha)}$ умовно збіжний.

4. Питання для самоконтролю

1. Що називається знакозмінним рядом?
2. Що називається знакопочережним рядом?
3. В чому полягає ознака збіжності знакопочережного ряду Лейбніца?
4. Що називається є залишком ряду?
5. Чому рівний залишку ряду лейбніцового типу?
6. Який знакопочережний ряд є абсолютно збіжним?
7. Який знакопочережний ряд є умовно збіжним?

Степеневі ряди

1. Основні поняття та теореми

Ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)^1 + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$, де a_0, a_1, a_2, a_3, …, a_n, … – дійсні числа, називається ***степеневим рядом*** за степенями $(x-x_0)$.

Приклад: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!} = \frac{x+3}{1} + \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(x+3)^3}{6}\ldots$

Якщо $x_0 = 0$, то степеневий ряд має вигляд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

Приклад: $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x = 1x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots$

Множина всіх значень x, в яких степеневий ряд збіжний, називається ***областю збіжності*** степеневого ряду.

Інтервалом збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ називається такий інтервал $\langle x_0 - R; x_0 + R\rangle$, що для кожної точки x, що лежить всередині цього інтервалу, ряд збіжний і причому абсолютно, а для точок x, які знаходяться поза цим інтервалом, ряд розбіжний.

Число R – ***радіус збіжності*** степеневого ряду.

R визначається як $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right|$ або $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Збіжність ряду на кінцях інтервалу $\langle x_0-R;x_0+R\rangle$ досліджується додатково.

2. Приклади виконання завдань

1. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Розв'язання:

З умови маємо $x_0=0$, $a_n=n!$. У випадку факторіалів застосовуємо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n!}{(n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$. Отже, область збіжності ряду складається з одієї точки $x=0$.

Відповідь: $x=0$.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n^2}(x-37)^n$.

Розв'язання:

З умови маємо $x_0=37$, $a_n=2^{n^2}$, у випадку *n* в степені застосовуємо $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right|$.

Радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{2^{n^2}}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$. Отже, область збіжності ряду даного ряду складається з одієї точки $x=37$.

Відповідь: $x=37$.

3. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^n}{n!}=\dfrac{x+3}{1}+\dfrac{(x+3)^2}{2}+\dfrac{(x+3)^3}{6}\ldots$.

Розв'язання:

З умови маємо $x_0=-3$, $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$.

Радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{1}=\infty$. Отже, областю збіжності ряду є вся числова пряма $x\in(-\infty;+\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty;+\infty)$.

4. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot113^n}$.

Розв'язання:

З умови маємо $x_0=0$, $a_n=\dfrac{1}{n\cdot113^n}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)\cdot113^{n+1}}$.

Радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{n\cdot 113^n}\cdot\dfrac{(n+1)\cdot 113^{n+1}}{1}\right|=113\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=113$.

Інтервал збіжності ряду $x\in\langle -113;113\rangle$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

Дослідимо заданий степеневий ряд на збіжність при $x=113$. Маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{113^n}{n\cdot 113^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Одержаний числовий ряд розбіжний як гармонічний ряд. Таким чином, точка $x=113$ в область збіжності не входить.

Дослідимо заданий степеневий ряд на збіжність при $x=-113$. Маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-113)^n}{n\cdot 113^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$. Одержаний числовий ряд є знакопочережним. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, і $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$, то за ознакою Лейбніца цей ряд є збіжним. Таким чином, точка $x=-113$ в область збіжності входить.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду є проміжок $[-113;113)$, або $-113\le x<113$.

Відповідь: $[-113;113)$.

5. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\cdot(x-1)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$.

Розв'язання:

З умови маємо $x_0=1$, $a_n=\dfrac{3^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$.

Радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2}{3}\sqrt[n]{\sqrt{n}}\right|=\dfrac{2}{3}\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\dfrac{2}{3}$, так як $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Визначимо інтервал збіжності $\langle x_0-R;x_0+R\rangle$, маємо $\left\langle 1-\dfrac{2}{3};1+\dfrac{2}{3}\right\rangle$ або $\left\langle\dfrac{1}{3};\dfrac{5}{3}\right\rangle$. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x=\dfrac{5}{3}$ маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\left(\dfrac{5}{3}-1\right)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Одержаний числовий ряд розбіжний як узагальнений гармонічний ряд при $p=\dfrac{1}{2}\le 1$. Отже, точка $x=\dfrac{5}{3}$ в область збіжності не входить.

При $x=\dfrac{1}{3}$ маємо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Одержаний числовий ряд є знакопочережним. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, і $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}$, то за ознакою Лейбніца цей ряд є збіжним. Отже, точка $x=\dfrac{1}{3}$ в область збіжності входить.

Отже, областю збіжності даного степеневого ряду є проміжок $\frac{1}{3} \le x < \frac{5}{3}$.

Відповідь: $\left[\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha^{n^2} x^n$.

2. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-\alpha)^n}{n!}$.

3. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot \alpha^n}$.

4. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)^n \cdot (x+2)^n}{\alpha^n \cdot \sqrt{n}}$.

4. Питання для самоконтролю

1. Який ряд називається степеневим рядом?
2. Що називається областю збіжності степеневого ряду?
3. Як визначають інтервал збіжності степеневого ряду?

Ряди Тейлора та Маклорена, застосування рядів Маклорена

1. Основні поняття та теореми

Якщо функцію $f(x)$ на інтервалі $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ можна подати у вигляді степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, то цей ряд є рядом Тейлора даної функції. Кофіцієнти ряду визначаються формулою $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Отже, ряд Тейлора має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots .$$

Для того, щоб ряд Тейлора збігався до функції $f(x)$ в інтервалі $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, тобто для того, щоб справджувалася рівність $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$, необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків і щоб для n-ого залишку її формули Тейлора виконувалось $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0$, $0 < \theta < 1$.

При $x_0 = 0$ маємо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$, де $x \in (-R; R)$, що називається рядом Маклорена для функції $f(x)$.

Наприклад:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;\infty);$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in(-\infty;\infty);$$

$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,$$
$x\in(-1;1)$;

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1;1).$$

Розклад функції в ряди Маклорена дозволяє у багатьох випадках з великою точністю обчислити значення цих функцій. При цьому в якості значення функції береться часткова сума ряду (сума перших елементів ряду). Чим більше елементів ряду взято до суми, тим більша точність. Якщо відома необхідна точність, то необхідна кількість елементів ряду визначається наступним чином:

- якщо в результаті розкладу одержуємо знакопостійний ряд, то похибка оцінюється за залишком, тобто $r_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, де $\theta\in\left(0;1\right)$;

- якщо при обчисленні значення функції одержуємо знакопостійний ряд, то похибка такого обчислення не перевершує першого елемента частини ряду, що відкидається (залишку), тобто $\left|r_n\right|\le u_{n+1}$.

Багато визначених інтегралів не можуть бути обчислені за допомогою формули Ньютона – Лейбніца, тому що часто первісна підінтегральної функції не виражається в елементарних функціях. Якщо функція, яка стоїть під знаком інтегралу, розкладається в степеневий ряд і межі інтегрування належать інтервалу збіжності ряду, то визначений інтеграл можна обчислити з наперед заданою точністю інтегруванням степеневого ряду.

2. Приклади виконання завдань

1. Обчислити коефіцієнт a_2 розкладу функції $y=\sqrt{1-21x}$ за формулою Маклорена.

Розв'язання:

Формула коефіцієнта $a_2=\dfrac{f''(0)}{2!}$. Знаходимо похідні $f'(x)=-\dfrac{1}{2}(1-21x)^{-\frac{1}{2}}\cdot 21$, $f''(x)=-\dfrac{21}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1-21x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-21)=-\dfrac{441}{4}(1-21x)^{-\frac{3}{2}}$. Оскільки $f''(0)=-\dfrac{441}{4}$, то $a_2=-\dfrac{441}{8}$.

Відповідь: $a_2=-\dfrac{441}{8}$.

2. Обчислити $\ln 1{,}3$ з точністю до 0,001.

Розв'язання:

Скористаємось $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots$ Так як $x=0{,}3$, то

$$\ln(1+0{,}3)=0{,}3-\frac{0{,}3^2}{2}+\frac{0{,}3^3}{3}-\frac{0{,}3^4}{4}+\frac{0{,}3^5}{5}-\ldots.$$

Маємо знакочережний ряд, похибка якого не перевершує першого елемента частини ряду, що відкидається (залишку), тобто $|r_n| \le u_{n+1}$. Обчислимо перші елементи ряду $\ln(1+0{,}3) = 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \underbrace{\frac{0{,}3^3}{3}}_{0{,}009} - \underbrace{\frac{0{,}3^4}{4}}_{0{,}002} + \underbrace{\underbrace{\frac{0{,}3^5}{5}}_{0{,}0005} - \ldots}_{r_n}$, так як $\frac{0{,}3^5}{5} < 0{,}001$, то маємо

$$\ln 1{,}3 \approx 0{,}3 - \frac{0{,}3^2}{2} + \frac{0{,}3^3}{3} - \frac{0{,}3^4}{4} \approx 0{,}3 - 0{,}045 + 0{,}009 - 0{,}002 = 0{,}262.$$

Обчислений за допомогою калькулятора результат рівний $\ln 1{,}3 = 0{,}262364...$

Відповідь: $\ln 1{,}3 \approx 0{,}262$.

3. Обчислити $\sin 18^\circ$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання:

Скористаємось $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$ Так як $x = 18^\circ = 18^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{10}$, то $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!\cdot 10^3} + \frac{\pi^5}{5!\cdot 10^5} - \ldots$.

Маємо знакочережний ряд, похибка якого не перевершує першого елемента частини ряду, що відкидається (залишку), тобто $|r_n| \le u_{n+1}$. Обчислимо перші елементи ряду $\sin\frac{\pi}{10} = \underbrace{\frac{\pi}{10}}_{0{,}3142...} - \underbrace{\frac{\pi^3}{3!\cdot 10^3}}_{0{,}0052...} + \underbrace{\underbrace{\frac{\pi^5}{5!\cdot 10^5}}_{0{,}00003...} - \ldots}_{r_n}$, так як $\frac{\pi^5}{5!\cdot 10^5} < 0{,}0001$, то маємо

$$\sin\frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3!\cdot 10^3} \approx 0{,}3142 - 0{,}0052 = 0{,}3090.$$

Обчислений за допомогою калькулятора результат рівний $\sin 18^\circ = 0{,}30901699...$

Відповідь: $\sin 18^\circ \approx 0{,}3090$.

4. Обчислити $\sqrt[5]{e}$ з точністю до 0,001.

Розв'язання:

Скористаємось $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ Так як $\sqrt[5]{e} = e^{\frac{1}{5}}$, то отримаємо $\sqrt[5]{e} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25\cdot 2} + \frac{1}{125\cdot 6} + \frac{1}{625\cdot 24} + \ldots$

Це знакопостійний ряд. Похибка оцінюється за залишком $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, $\theta \in (0;1)$. З $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^\theta}{(n+1)!}\frac{1}{5^n} < \frac{e}{5^n(n+1)!} \le 0{,}001$ отримаємо $n \ge 3$.

Тоді $\sqrt[5]{e} \approx 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25\cdot 2} + \frac{1}{125\cdot 6} = 1 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}001 = 1{,}221$.

Обчислений за допомогою калькулятора результат рівний $\sqrt[5]{e} = 1{,}22140...$

Відповідь: $\sqrt[5]{e} \approx 1{,}221$.

5. Обчислити $\sqrt[4]{15}$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання:

Запишемо задану функцію у вигляді $\sqrt[4]{16-1}=\sqrt[4]{16\left(1-\frac{1}{16}\right)}=2\sqrt[4]{1-\frac{1}{16}}=2\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Скористаємось $(1+x)^m=1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$, де $x=-\frac{1}{16}$, $m=\frac{1}{4}$, отримаємо $\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=1-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}}{1!}-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16^2}}{2!}-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{16^3}}{3!}-\ldots$

Це знакопостійний ряд. Похибка оцінюється за залишком $r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\theta\in(0;1)$. З $r_n(x)=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\left|\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{4}-n\right)}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{16}\right)^n\right|\le 0{,}001$ маємо $n\ge 2$.

Тоді отримаємо $2\left(1-\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}\approx 2\left(1-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}}{1!}-\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16^2}}{2!}\right)=\frac{2\cdot 16^3-128-3}{16^3}=1{,}9680$.

Обчислений за допомогою калькулятора результат рівний $\sqrt[4]{15}=1{,}967989671\ldots$

Відповідь: $\sqrt[4]{15}\approx 1{,}9680$.

6. Обчислити $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання:

Скористаємось $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$. Замінивши x на $\sqrt{x}$, отримаємо $\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\ldots$ Проінтегруємо одержаний степеневий ряд, маємо $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{72}-\frac{x^4}{2880}+\ldots\right)\Big|_0^1=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}+\ldots$.

Маємо знакочережний ряд, похибка якого не перевершує першого елемента частини ряду, що відкидається (залишку), тобто $|r_n|\le u_{n+1}$. Обчислимо перші елементи ряду $\int_0^1\cos\sqrt{x}dx=1-\underbrace{\frac{1}{4}}_{0,25}+\underbrace{\frac{1}{72}}_{0,013(8)}\underbrace{-\underbrace{\frac{1}{2880}}_{0,0003\ldots}+\ldots}_{r_n}$, так як $\frac{1}{2880}<0{,}001$, то маємо $\int_0^1\cos\sqrt{x}\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}=\frac{72-18+1}{72}=\frac{55}{72}\approx 0{,}764$.

Обчислений за допомогою калькулятора інтеграл рівний $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx \approx 0{,}76354658$.

Відповідь: $0{,}764$.

7. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ з точністю до 0,001.

Розв'язання:

Скористаємось $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. Замінивши x на $-x^2$, отримаємо $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$ Проінтегруємо одержаний степеневий ряд, маємо

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \dots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{10\cdot 4^5} - \frac{1}{42\cdot 4^7} + \dots.$$

Маємо знакопочережний ряд, похибка якого не перевершує першого елемента частини ряду, що відкидається (залишку), тобто $|r_n| \le u_{n+1}$. Обчислимо перші елементи ряду $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \frac{1}{4} - \underbrace{\frac{1}{3\cdot 4^3}}_{0{,}0052\dots} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{10\cdot 4^5}}_{0{,}0000977\dots} - \dots}_{r_n}$, так як $\frac{1}{10\cdot 4^5} < 0{,}001$, то маємо

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 4^3} = \frac{3\cdot 4^2 - 1}{3\cdot 4^3} = \frac{47}{192} \approx 0{,}245.$$

Обчислений за допомогою калькулятора інтеграл рівний $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = 0{,}24489\dots$

Відповідь: $0{,}245$.

8. Обчислити $\int_0^1 e^{x^2}dx$ з точністю до 0,01.

Розв'язання:

Скористаємось $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. Замінивши x на x^2, отримаємо $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$ Проінтегруємо одержаний степеневий ряд, маємо

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \int_0^1\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots\right)dx = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} + \dots\right)\Bigg|_0^1 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \dots.$$

Це знакопостійний ряд. Похибка оцінюється за залишком $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\theta \in (0;1)$.

З $\int_0^1 r_n(x)dx = \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(\theta x^2)}{(n+1)!} x^{2n+2}dx = \frac{e^{\theta x^2}}{(n+1)!(2n+3)} x^{2n+3}\Big|_0^1 < \frac{e}{(n+1)!(2n+3)} \le 0{,}01$

маємо $n \ge 3$.

Тоді $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} = \frac{210 + 70 + 21 + 5}{210} = \frac{306}{210} \approx 1{,}46$.

Обчисленний за допомогою калькулятора інтеграл рівний $\int_0^1 e^{x^2} dx \approx 1{,}46265...$

Відповідь: $1{,}46$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити $\ln(1 + 0{,}1 \cdot (\alpha - 5))$ з точністю до 0,001.

2. Обчислити $\cos\alpha^\circ$ з точністю до 0,0001.

3. Обчислити $\int_0^1 \sin\sqrt{x}dx$ з точністю до 0,001.

4. Обчислити $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ з точністю до 0,01.

4. Питання для самоконтролю

1. Який ряд називається рядом Маклорена?

2. Як розкладаються в ряд Маклорена функції $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = (1 + x)^m$, $\ln(1 + x)$?

3. Як розклад функції в ряд Маклорена дозволяє обчислити значення цих функцій?

4. Як за розкладом функції в ряд Маклорена обчислити визначений інтеграл, що не береться?

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів : навчальний посібник. Київ : Центр навчальної літератури, 2019. 448 с.

2. Вища математика : типові завдання до модулів 04 «Диференціальне числення функцій однієї змінної», 05 «Диференціальне числення функцій багатьох змінних», 06 «Інтегральне числення функції однієї змінної», 07 «Диференціальні рівняння», 08 «Числові та функціональні ряди» для виконання контрольних та самостійних робіт студентами напрямів підготовки: 6.030509 «Облік та аудит», 6.030601 «Менеджмент організацій», 6.030601 «Менеджмент ЗЕД» / В.С. Шебанін, О.В. Шебаніна, В.Г. Богза та ін. Миколаїв : МНАУ, 2011. 140 с.

3. Диференціальне та інтегральне числення функцій кількох змінних. Практикум : навчальний посібник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. Київ : НТУУ КПІ, 2013. 194 с.

4. Диференціальні рівняння : навчальний посібник / П. І. Каленюк, Ю. К. Рудавський, Р. М. Тацій та ін. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2014. 380 с.

5. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика : навчальний посібник. Київ : А.С.К., 2003. 648 с.

6. Кагадій Т. С., Щербина Т. С. , Онопрієнко О. Д. Ряди: теорія, приклади, розв`язування : навчальний посібник. Дніпро : ДДАЕУ, 2021. 126 с.

7. Мохонько А. З., Чижиков І. Е. Аналітичні функції-розв’язки диференціальних рівнянь : навчальний посібник. Львів : Львівська політехніка, 2021. 524 с.

8. Практикум з вищої математики. Комп’ютерна система для дистанційного навчання : навчальний посібник / В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, І. П. Атаманюк та ін. У 2-х ч. Ч. 2. Миколаїв : МНАУ, 2017. 388 с. URL: http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/3221

9. Скуратовський Р. В. Вища математика : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с. URL: https://nam.kyiv.ua/files/publications/matematika-2021.pdf

10. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підручник. У 2-х частинах. Ч. 2. Київ : Вища школа, 2005. 510 с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА:

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА РЯДИ

Методичні рекомендації

Укладачі: Бойчук Олена Володимирівна
Дармосюк Валентина Миколаївна

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк.
Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.