



## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГОВОГО ТОНКОГО УПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ТЕЛЕ

Larysa Vakhonina

Mykolayiv State Agrarian University, Ukraine  
Krylova Street 17a, Mykolayiv 54040, Ukraine  
e-mail: vakhonina-l@rambler.ru

**Аннотация.** Решена задача об изгибных колебаниях тонкого включения в виде круглой упругой пластины. Колебания происходят в результате действия на включение нормальной гармонической нагрузки. Метод решения состоит в том, что перемещения вызванные волнами источником которых является включение, представляются в виде разрывного решения уравнений Ламе. В результате задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции связанной с неизвестным скачком нормальных напряжений на включении.

**Ключевые слова:** тонкие включения, гармонические колебания, сингулярные интегральные уравнения, коэффициент интенсивности напряжений.

### ВСТУПЛЕНИЕ

При решении задач о колебаниях упругих тел, содержащих тонкие включения, часто считается, что включение является абсолютно жестким. Такое допущение значительно облегчает математическое решение, но с другой стороны не позволяет учитывать влияние упругих свойств включения на концентрацию напряжений вблизи него. То, что это влияние может быть существенным показано в работах [Литвин О.В. Попов В.Г., 2002; Кит Г.С., Михаськів В.В., Хай О.М., 2002; Михаськів В.В., Хай О.М., 1993; Михаськів В.В., Калиняк О.І., 2005], где рассматривались колебания неограниченного тела с полосовыми включениями. Колебания тел с включениями, имеющими малую жесткость, рассматривались в работах [Kit, H.S., Kunets, Ya. I., Yemets, V.F., 1999; Кит Г.С., Кунец В.В., Михаськів В.В., 2004]. В настоящей работе методом, основанным на применении разрывных решений, решается задача о гармонических колебаниях тела с включением в виде круглой упругой пластины.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в неограниченном теле (матрице) находится упругое включение в виде тонкой круглой пластины толщины  $h$ . Если ввести цилиндрическую систему координат, начало которой совпадает с центром включения, то в плоскости  $z = 0$  включение займет круг радиуса  $a$ . В теле происходят гармонические колебания в результате действия на включение нормальной нагрузки интенсивности  $p(r)e^{-i\omega t}$ . Множитель  $e^{-i\omega t}$ , определяющий зависимость от времени, далее отброшен. Включение считается настолько тонким, что граничные условия на нем можно сформулировать относительно его срединной плоскости  $z = 0$ . Тогда при условии полного сцепления будут выполняться условия равенства:

$$\sigma_z(r, +0) - \sigma_z(r, -0) = \chi(r), \quad u_z(r, \pm 0) = W(r). \quad (1)$$



В (1)  $W(r)$  – изгиб срединной плоскости включения. Последний находится из уравнения изгибных колебаний пластин [Перцев А.К., Платонов Э.Г., 1987г.]

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 W - m\omega^2 W = \chi(r) + p(r), \quad 0 \leq r \leq a \quad (2)$$

где  $D = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu_0^2)}$  - цилиндрическая жесткость включения,

$E_0, \nu_0$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона включения.

Так как воздействие внешней среды на боковые кромки не учитывается, то уравнение (2) рассматривается с граничными условиями свободного края:

$$M(a) = -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0; \quad Q(a) = -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} = 0. \quad (3)$$

Так же решение этого уравнения должно быть ограниченным при  $r \rightarrow 0$ .

### МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Для решения сформулированной задачи представим перемещение в матрице разрывным решением уравнений Ламе [Попов Г.Я., 1999, Попов Г.Я. 1982,] со скачком (1).

Тогда перемещение  $u_z$  определится по формуле:

$$u_z = \int_0^a \eta \frac{\chi(\eta)}{\mu_1} g_{31}(\eta, r, z) d\eta; \quad (4)$$

$$g_{31}(\eta, r, z) = \frac{1}{2\kappa_2^2} \int_0^\infty \lambda \left[ \sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_1^2}|z|} - \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - \kappa_2^2}|z|} \right] J_0(\lambda r) J_0(\lambda \eta) d\lambda$$

где

$$\mu_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}, \quad \kappa_j = \frac{\omega}{c_j}, \quad j = 1, 2,$$

$E_1, \nu_1$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона внешней среды.

Для того чтобы через скачок напряжений выразить изгиб срединной плоскости включения необходимо решить граничную задачу (2), (3). Это решение имеет вид:

$$W(r) = \int_0^a \eta \frac{\chi(\eta)}{D} G(\eta, r) d\eta. \quad (5)$$

Здесь  $G(\eta, r)$  - функция Грина задачи (2), (3) которая равна

$$G(\eta, r) = g(\eta, r) - \frac{1}{q^2} (J_0(q\eta)G_1(r) + I_0(q\eta)G_2(r)) \quad (6)$$

$$g(\eta, r) = \frac{1}{2q^2} (g^-(\eta, r) + g^+(\eta, r)); \quad g^\pm(\eta, r) = \int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda r) J_0(\lambda \eta)}{\lambda^2 \pm q^2} d\lambda;$$

$$G_1(r) = \frac{1}{2\Delta(q_0)} \left( A_1(q_0) J_0(qr) + \frac{I_0(qr)}{q_0} \right); \quad G_2(r) = \frac{1}{2\Delta(q_0)} \left( A_2(q_0) J_0(qr) + \frac{I_0(qr)}{q_0} \right);$$



$$A_1(q_0) = I_1(q_0)a_2(q_0) + \frac{\pi i}{2} h_1(q_0)H_1^{(1)}(q_0);$$

$$A_2(q_0) = a_1(q_0)K_1(q_0) - J_1(q_0)h_2(q_0);$$

$$\Delta(q_0) = a_1(q_0)I_1(q_0) + J_1(q_0)h_1(q_0);$$

$$a_1(q_0) = J_0(q_0) - (1 - \nu_0) \frac{J_1(q_0)}{q_0}; \quad a_2(q_0) = \frac{\pi i}{2} (H_0^{(1)}(q_0) - (1 - \nu_0) \frac{H_1^{(1)}(q_0)}{q_0});$$

$$h_1(q_0) = I_0(q_0) - (1 - \nu_0) \frac{I_1(q_0)}{q_0}; \quad h_2(q_0) = K_0(q_0) + (1 - \nu_0) \frac{K_1(q_0)}{q_0}; \quad q^4 = \frac{m\omega^2}{D};$$

$$q_0 = qa.$$

После того как перемещения матрицы и изгиб включения выражены через неизвестный скачок нормальных напряжений, этот скачок может быть определен из граничного условия (1). В результате подстановки в это условие (4) и (5) получим интегральное уравнение относительно  $\chi(r)$ . Это уравнение с помощью преобразований детально изложенных в [Попов В. Г. 2010, Вахоніна Л.В. 2006, Попов В.Г. 1998, Крылов В.И. 1967, Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. 1985] приводится к виду

$$\frac{1 + \xi^2}{4} g(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g(\zeta) [Q(\zeta - y) - F(\zeta, y)] d\zeta = f(y); \quad -1 < y < 1, \quad (7)$$

В этом уравнении  $g(y)$  - новая неизвестная функция, связанная со скачком напряжений формулами:

$$g(y) = \varphi(ay), \quad \varphi(\tau) = \int_{\tau}^a \frac{r\chi_1(r)}{\sqrt{r^2 - \tau^2}} dr, \quad \chi(r) = \frac{2}{\pi} \int_r^a \varphi(\tau) \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \right) d\tau. \quad (8)$$

Функция в правой части уравнения (7) определяется видом действующей на включение нагрузки и находится по формуле:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 S(\zeta) F(\zeta, y) d\zeta; \quad S(y) = \frac{P_0(ay)}{a\mu_1}; \quad P_0(\tau) = \int_r^a \frac{rp(r)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}. \quad (9)$$

Так же в (7) приняты обозначения [Кеч В., Теодореску П. 1978]

$$Q(z) = Q_1(z) + iQ_2(z);$$

$$Q_1(z) = \frac{\pi\kappa_0}{2} \operatorname{sign}(z) (-A_2(z) + \xi^3 A_2(\xi z) - \xi^3 J_1(\xi z));$$

$$Q_2(z) = \kappa_0 (-S_1(z) + \xi^3 S_1(\xi z) + \xi^3 S_2(\xi z));$$

$$F(\zeta, y) = \frac{\xi}{\varepsilon^3 q_0^2} (D^-(\zeta - y) - D^+(\zeta - y) - 2(B_1(y) \cos q_0 \zeta + B_2(y) \operatorname{ch} q_0 \zeta));$$

$$A_2(z) = J_1(\kappa_0 z) - 2 \frac{J_1(\kappa_0 z)}{(\kappa_0 z)^2} + \frac{J_0(\kappa_0 z)}{(\kappa_0 z)};$$



$$S_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k, b_k) (\kappa_0 z)^{2k}, a_k = (2k+3)(2k+2)(2k+1)h_{k+1}$$

$$b_k = (2k+1)h_k, \quad h_k = \frac{(-1)^k}{[(2k+1)!!]^2}, \quad S_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k k!},$$

$$D^-(z) = (\ln|z| - ci(q_0 z)) (1 - \cos q_0 z) ci(q_0 z) - \sin(q_0 z) Si(q_0 z);$$

$$D^+(z) = (1 - ch(q_0 z)) \ln|z| - ch(q_0 z) (C + \ln q_0) -$$

$$-\frac{1}{2} (e^{-q_0|z|} S_3(q_0|z|) + e^{q_0|z|} S_3(-q_0|z|));$$

$$B_1(y) = \frac{1}{2\Delta(q_0)} \left( A_1(q_0) \cos q_0 y + \frac{ch(q_0 y)}{q_0} \right);$$

$$B_2(y) = \frac{1}{2\Delta(q_0)} \left( A_2(q_0) ch q_0 y + \frac{\cos(q_0 y)}{q_0} \right);$$

$$\alpha_0 = \frac{A}{a}, \quad \kappa_0 = a\kappa_2, \quad \xi = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad e_0 = \frac{E_1}{E_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a},$$

$$q_0^4 = \frac{6e_0(1-\nu_0^2)}{\varepsilon^2 \bar{\rho}(1+\nu_1)} \kappa_0^2.$$

При выводе уравнения (7) функция  $g(y)$  была продолжена чётно на отрезок  $[-1, 1]$ .

Анализ выше приведенных формул показывает, что ядра уравнения (7) являются функциями непрерывными при  $1 \leq \zeta, y \leq 1$  и оно является уравнением Фредгольма второго рода. Для его решения применим метод, основанный на приближении интегралов квадратурной формулой Гаусса [Назарчук З.Т. 1989]. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений.

$$\frac{1+\xi^2}{4} g_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m g_m [Q(y_m - y_k) - F(y_m, y_k)] = i\alpha_0, \quad (10)$$

$$\text{где } A_m = \frac{2}{(1-y_m^2)[P_n'(y_m)]^2};$$

$y_m$  - корни многочлена Лежандра  $P_n(y)$ ,  $g_m = g(y_m)$ .

После решения системы (10) неизвестная функция может быть приближена интерполяционным многочленом

$$g(y) = \sum_{m=1}^n g_m \frac{p_n(y)}{(y-y_m)P_n'(y_m)}. \quad (11)$$

С целью оценки концентрации напряжений в матрице вблизи включения введем коэффициент интенсивности напряжений (КИН) [Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. 1993, Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. 1975]

$$K = \lim_{r \rightarrow a-0} \sqrt{a-r} \chi(r). \quad (12)$$



Из формулы (12), после подстановки (8) и выполнения предельного перехода найдем следующее значение (КИН)

$$K = \sqrt{2a\mu_1}k; \quad k = \frac{g_2(1)}{\pi}. \quad (13)$$

Подставив (11) в (13) получим выражение для КИН через решение системы (10)

$$k = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^n c_m g_m; \quad c_m = 1/((1-y_m^2)P_n'(y_m)). \quad (14)$$

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА И ВЫВОДЫ

Рассмотрим результаты численного исследования концентрации напряжений вблизи включения, выполненных в предположении, что на включение действует равномерно распределенная нагрузка  $p(r) = P = const$ . В этом случае в формулах (9) необходимо положить

$$S(y) = \frac{P_0}{\mu_1} \sqrt{1-y^2}.$$

Так же при расчетах считалось, что  $\varepsilon = 0,05$ , а в системе (10) использовалось до 30 узлов интерполяции, что обеспечило получение значений КИН с относительной погрешностью менее 0,1% для всего диапазона волнового числа.

На значения КИН влияет отношение упругих постоянных матрицы и включения (плотностей, модулей упругости, коэффициентов Пуассона). Чтобы выяснить влияние на КИН жесткости включения считалось, что включение и матрица имеют одинаковую плотность ( $\bar{\rho} = 1$ ) и равные коэффициенты Пуассона ( $\nu_0 = \nu_1 = 0,25$ ). Результаты приведены в виде графиков на рис.1, где каждая кривая отвечает указанному значению отношения модулей упругости  $e_0$ . При  $e_0 = 10^{-5}$  кривая полностью совпадает с соответствующей кривой для абсолютно-жесткого включения [Попов В. Г. 2010, Вахоніна Л.В. 2006].

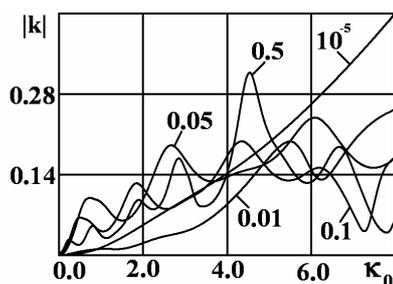


Рис.1. Действие равномерно распределенной загрузки  
Fig. 1. Aktion of uniformly distributed load

Анализ графиков показывает, что с уменьшением жесткости включения зависимость КИН от волнового числа принимает сложный вид с большим количеством минимумов и максимумов. В целом с уменьшением жесткости включения уменьшается и концентрация напряжений вблизи него. Вместе с тем даже для очень жестких включений значение КИН при некоторых частотах, может превысить значения КИН для абсолютно жесткого включения.



С целью выявления возможности рассмотрения включений большей жесткости как абсолютно жестких при реальных расчетах на прочность выполнены расчеты КИН для некоторых конкретных материалов. Результаты этих расчетов можно видеть на рис. 2.

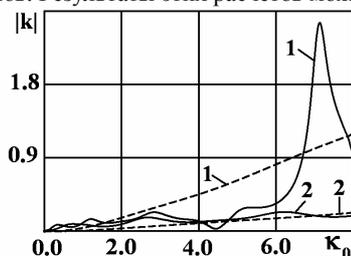


Рис.2. Расчет КИН для реальных материалов  
Fig. 2. The calculation of stress intensity factors for real materials

Сплошные кривые построены при учете упругости включения, пунктирные в предположении, что включение является абсолютно жестким. Кривые 1 соответствуют случаю, когда материал матрицы бетон, а включения сталь ( $\bar{\rho} = 0,305$ ,  $e_0 = 0,071$ ,  $\nu_0 = 0,17$ ,  $\nu_1 = 0,3$ ). Кривые 2 построены для стального включения в свинцовой матрице ( $\bar{\rho} = 1,44$ ,  $e_0 = 0,08$ ,  $\nu_0 = 0,42$ ). Видно, что учет упругости приводит к существенному изменению значений КИН и характера его зависимости от волнового числа.

Результаты численного исследования показывают, что при  $e_0 \rightarrow 0$  значения КИН для упругого включения стремятся к значениям КИН для абсолютно-жесткого включения. Но совпадение наблюдается при отношении модулей упругости порядка  $10^{-5}$ . Такое отношение не реализуется для большинства материалов используемых в деталях машин, строительных конструкциях и композитах. Поэтому при расчетах напряженного состояния тел с тонкими включениями, не всегда допустимо предположение о том, что включение является абсолютно жестким.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Литвин О.В., Попов В.Г. 2002: Изгибные колебания тонкого упругого включения в неограниченной среде при взаимодействии с упругими волнами. Теоретическая и прикладная механика. вип.38. С. 131-140.
- Kit H.S., Kunets Ya. I., Yemets V.F. 1999: Elastodynamics scattering from a thinwalled inclusions of low rigidity. Int. J. of Engineering Science. v. 37, P. 331-343.
- Кит Г.С., Кунец В.В., Михаськів В.В. 2004: Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости. Известия РАН Мех. Твердого тела. №5 – С. 83-89.
- Перцев А.К., Платонов Э.Г. 1987: Динамика оболочек и пластин. Л. Судостроение. 316 с.
- Попов Г.Я. 1999: Построение разрывных решений дифференциальных уравнений теории упругости для сложной среды с межфазными дефектами. Доклады РАН. Механика твердого тела. т. 364. - №6 - С. 759 - 763.
- Назарчук З.Т. 1989: Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. К. Наукова думка, -256с.
- Попов Г.Я. 1982: Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, плоских включений и подкреплений. М.: Наука, 342 с.



- Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. 1993: Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 224 с.
- Попов В.Г. 1998: Дифракция плоских упругих волн на отслоившемся жестком включении в случае гладкого контакта в области отслоения. ПММ т.625, вып.2, с. 290-296.
- Попов Г.Я. 1999: Построение разрывных решений дифференциальных уравнений теории упругости для слоистой среды с межфазными дефектами. Доклады РАН. т.364. №6. с. 759-763.
- Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. 1985: Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 253с.
- Крылов В.И. 1967: Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 500с.
- Кит Г.С., Михаськів В.В., Хай О.М. 2002: Анализ установившихся колебаний плоского абсолютно жесткого включения в трехмерном упругом теле методом граничных элементов. Прикл. математика и механика.– Т. 66, вып. 5. – С. 855–863.
- Михаськів В.В., Хай О.М. 1993: До теорії міцності пружних тіл з плоскими жорсткими включеннями в полі усталених динамічних навантажень. Машинознавство -№3 – С. 17-22.
- Михаськів В.В., Калиняк О.І. 2005: Нестационарні збурення тривимірної пружної матриці з жорстким дисковим включенням. Фізико-хімічна механіка матеріалів.– Т. 41, № 2. – С. 7–15.
- Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. 1975: Упругие напряжения в плоскости с тонкостенными включениями. Мат. методы и физ.-мех. поля. –вып. 1. –С. 41 -48.
- Кеч В., Теодореску П. 1978: Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М.: - 520с.
- Попов В. Г. 2010: Осесиметричні коливання необмеженого тіла з тонким пружним круговим включенням за умови гладкого контакту. Математичні методи та фізико – механічні поля. Львів: — Т. 53. — №1. — С. 88 — 97.
- Вахоніна Л.В. 2006: Изгибные колебания кругового тонкого упругого включения в неограниченном теле. Теорія і практика процесів подрібнення, розділення, змішування і ущільнення. — Одеса: ОНМА. — Вип.12 — С. 24 — 31.

## SOLUTION OF THE BENDING VIBRATIONS CIRCULAR THIN ELASTIC INCLUSION IN THE UNLIMITED BODY

**L.V.Vakhonina**

**Summary** The problem about the bent oscillations of the thin inclusion in the form of a circle elastic plate is solved. Oscillations are the result of the action of the normal harmonic loading on inclusion. The method of the solution consists in the presentation of displacements, provoked by waves which source is the inclusion, by the discontinuous solution of Lamé equations. As a result the problem is reduced to the solution of the Fredholm integral equation of the second type concerning the function, connected with the unknown jump of normal stresses on the inclusion.

**Key words:** thin inclusions, harmonic oscillations, singular integral equations, the stress intensity factor.

**Reviewer:** Natalya Vaisveld, Prof. Sc. D.