

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВІСНИК
АГРАРНОЇ НАУКИ ПРИЧОРНОМОР'Я
Науковий журнал

Виходить 4 рази на рік
Видається з березня 1997 р.

Випуск 3 (91) 2016

Миколаїв
2016

Засновник і видавець: Миколаївський національний аграрний університет.

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ №19669-9469ПР від 11.01.2013 р.

Збірник включено до переліку наукових фахових видань України, затвердженого наказами Міністерства освіти і науки України від 13.07.2015 р. №747 та від 16.05.2016 №515.

Головний редактор: В.С. Шибанін, д.т.н., проф., чл.-кор. НААН

Заступники головного редактора:

І.І. Червен, д.е.н, проф.

І.П. Атаманюк, д.т.н., доц.

В.П. Клочан, к.е.н., доц.

М.І. Гиль, д.с.-г.н., проф.

В.В. Гамаюнова, д.с.-г.н., проф.

Відповідальний секретар: Н.В. Потриваєва, д.е.н., проф.

Члени редакційної колегії:

Економічні науки: О.В. Шибаніна, д.е.н., проф.; Н.М. Сіренко, д.е.н., проф.; О.І. Котикова, д.е.н., проф.; Джулія Олбрайт, PhD, проф. (США); І.В. Гончаренко, д.е.н., проф.; О.М. Вишневська, д.е.н., проф.; А.В. Ключник, д.е.н., проф.; О.Є. Новіков, д.е.н., доц.; О.Д. Гудзинський, д.е.н., проф.; О.Ю. Єрмаков, д.е.н., проф.; В.М. Яценко, д.е.н., проф.; М.П. Сахацький, д.е.н., проф.; Р. Шаундерер, Dr.sc.Agr. (Німеччина)

Технічні науки: Б.І. Бутаков, д.т.н., проф.; К.В. Дубовенко, д.т.н., проф.; В.І. Гавриш, д.е.н., проф.; В.Д. Будак, д.т.н., проф.; С.І. Пастушенко, д.т.н., проф.; А.А. Ставинський, д.т.н., проф.; А.С. Добишев, д.т.н., проф. (Республіка Білорусь).

Сільськогосподарські науки: В.С. Топіха, д.с.-г.н., проф.; Т.В. Підпала, д.с.-г.н., проф.; Л.С. Патрєва, д.с.-г.н., проф.; В.П. Рибалко, д.с.-г.н., проф., академік НААН України; І.Ю. Горбатенко, д.б.н., проф.; І.М. Рожков, д.б.н., проф.; І.П. Шейко, д.с.-г.н., професор, академік НАН Республіки Білорусь (Республіка Білорусь); С.Г. Чорний, д.с.-г.н., проф.; М.О. Самойленко, д.с.-г.н., проф.; Л.К. Антипова, д.с.-г.н., проф.; В.І. Січкарь, д.б.н., проф.; А.О. Лимар, д.с.-г.н., проф.; В.Я. Щербаков, д.с.-г.н., проф.; Г.П. Морару, д.с.-г.н. (Молдова)

Рекомендовано до друку вченою радою Миколаївського національного аграрного університету. Протокол № 11 від 23.06.2016 р.

Посилання на видання обов'язкові.

Точка зору редколегії не завжди збігається з позицією авторів.

Адреса редакції, видавця та виготовлювача:

54020, Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9,

Миколаївський національний аграрний університет,

тел. 0 (512) 58-05-95, <http://visnyk.mnau.edu.ua>, e-mail: visnyk@mnau.edu.ua

© Миколаївський національний аграрний університет, 2016

UDC 539.3

INTERACTION OF HARMONIC WAVES WITH A THIN ELASTIC CIRCULAR INCLUSION UNDER CONDITIONS OF SMOOTH CONTACT

L. Vakhonina, *candidate of Physical and Mathematical sciences
Mykolayiv National Agrarian University*

We solve an axisymmetric problem of the interaction of harmonic waves with a thin elastic circular inclusion located in an elastic isotropic body (matrix). On both sides of the inclusion, between it and the body (matrix), conditions of smooth contact are realized. The method of solution is based on the representation of displacements in the matrix in terms of discontinuous solutions of Lamé equations for harmonic vibrations. This enables us to reduce the problem to Fredholm integral equations of the second kind for functions related to jumps of normal stress and radial displacement on the inclusion.

Key words: *harmonic wave of thin elastic circular inclusion, Bursting decision Lamé equations, fluctuations Fredholm second kind.*

The strength and durability of structures and machine components are substantially influenced by the presence of defects in the form of thin foreign inclusions, specifically, thin disks, in them. The problems of the determination of the stressed state in the vicinity of these inclusions under dynamic loading are particularly complex. Since, in most cases, inclusions have a larger rigidity than that of a matrix (the reinforcement and reinforcing elements in composites), an approach that assumes that inclusions are absolutely rigid is extensively used. For instance, this assumption was realized in [8, 10, 11, 17]. The number of works in which elastic properties of an inclusion are taken into account is much smaller. First and foremost, we note a work [12], in which the problem of wave loading of bodies with a compliant disk-shaped inclusion was solved by the asymptotic method. However, in all aforementioned works, it is assumed that conditions of complete adherence between a matrix and an inclusion are satisfied. In the present paper, we propose a

© Vakhonina L., 2016

solution of the problem of harmonic vibrations of an infinite body with a disk-shaped elastic inclusion in the case of conditions of smooth contact. This problem was earlier solved for an absolutely rigid inclusion [3].

1. Statement of the Problem. Let us consider an infinite elastic body (matrix) containing an inclusion in the form of an elastic disk with a thickness h and a radius a , $h \ll a$. If we introduce a cylindrical coordinate system, then, in the plane $z = 0$, it occupies a circle $r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. The inclusion is under the action of waves propagating in the matrix. Consider several examples of wave action. In the first case, in the medium, a plane longitudinal wave, whose front is parallel to the plane of the inclusion, propagates. This wave is set by the potential and causes displacements in the matrix

$$\varphi_0 = \frac{A_0 e^{i\alpha_1 z}}{\alpha_1}, \quad u_z^0 = iA_0 e^{i\alpha_1 z}, \quad u_r^0 \equiv 0. \quad (1)$$

In the second case, in the matrix, cylindrical expansion-compression waves propagate. Then the potential and displacements are determined by the formulas [6]

$$\varphi_0(r, z) = \frac{A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z}, \quad u_r^0 = -A_0 J_1(\beta_1 r) e^{i\gamma z}, \quad u_z^0 = \frac{i\gamma A_0}{\beta_1} J_0(\beta_1 r) e^{i\gamma z} \quad (2)$$

In the third case, a cylindrical shear wave with a potential interacts with the inclusion [6] and causes displacements in the medium,

$$\psi_0(r, z) = \frac{B_0}{\beta_2} J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z}, \quad u_z^0 = B_0 J_0(\beta_2 r) e^{i\gamma z}, \quad u_r^0 = -\frac{i\gamma B_0}{\beta_2} J_1(\beta_2 r) e^{i\gamma z}. \quad (3)$$

In formulas (1)-(3), we take the following notation:

$$\alpha_k = \frac{\omega}{c_k}, \quad \beta_k = \sqrt{\alpha_k^2 - \gamma^2}, \quad k = 1, 2, \quad c_1^2 = \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, \quad c_2^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1}, \quad (4)$$

where λ_1 , μ_1 are the Lamé constants of the matrix, and ρ_1 is the density of the matrix. The multiplier $e^{-i\omega t}$, which determines the dependence on time, is omitted here and in what follows.

Taking into account the small thickness of the inclusion, we formulate conditions of interaction of the inclusion with the matrix relative to the middle plane. Under smooth contact, the normal stress and radial displacement are discontinuous, and, for their jumps, we introduce the notation

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z \rangle &= \sigma_z(r, +0) - \sigma_z(r, -0) = \chi_1(r); \\ \langle u_z \rangle &= u_r(r, +0) - u_r(r, -0) = \chi_4(r) / \end{aligned} \quad (5)$$

On both sides of the inclusion, the following equalities are satisfied:

$$\tau_{rz}(r, \pm 0) = 0, \quad u_z(r, \pm 0) = w_0(r), \quad 0 \leq r < a. \quad (6)$$

Here, $w_0(r)$ is the bending displacement of the middle plane of the inclusion, which is determined from the equation of bending vibrations of circular plates [13] under conditions of axial symmetry

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w_0 - m\omega^2 w_0 = \chi_1(r), \quad 0 \leq r < a, \quad (7)$$

where $D = \frac{E_0 h^3}{12(1 - \nu_0^2)}$ is the cylindrical rigidity, $m = h\rho_0$ is the mass

of the unit area of the inclusion.

Equations (7) are considered with conditions of a free edge $M(a) = 0$, $Q(a) = 0$, where $M(a)$ is the bending moment and $Q(a)$ is the transverse force in the inclusion. It follows from the last equalities that

$$\left. \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{\nu_0}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right|_{r=a} = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right|_{r=a} = 0, \quad 0 \leq r < a \quad (8)$$

Moreover, the function $w_0(r)$ must be bounded for $r \rightarrow 0$.

2. Solution of the Problem

To determine displacements and stress in the matrix, which entered into conditions (6), we represent them in the form,

$$u_z = u_z^0 + u_z^1, \quad \tau_{rz} = \tau_{rz}^0 + \tau_{rz}^1. \quad (9)$$

Here, u_z^0 and τ_{rz}^0 are displacements and stresses caused by a propagating wave in the medium. The summands u_z^1 and τ_{rz}^1 are displacements and stresses caused by waves reflected from the inclusion. They are written in terms of jumps (5) using the discontinuous solution of Lamé equations, which, for the case of vibration of the elastic medium under conditions of axial symmetry [14], has the form

$$u_z^1 = \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} g_{31}(\eta, r, z) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4(\eta) g_{34}(\eta, r, z) d\eta;$$

$$\tau_{rz}^1 = \int_0^a \eta \chi_1(\eta) g_{21}(\eta, r, z) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4(\eta) g_{24}(\eta, r, z) d\eta. \quad (10)$$

To solve the boundary-value problem (7), (8), we first construct the Green function, which is determined by the formula

$$G_1(\eta, r) = g_1(\eta, r) - \frac{1}{q_{01}} (J_0(q_{01}\eta)G_1(r) + I_0(q_{01}\eta)G_2(r)). \quad (11)$$

In formula (11), $g_1(\eta, r)$ is the fundamental function of Eq. (7), which is equal to

$$g_1(\eta, r) = \frac{1}{2q_1} (g_1^-(\eta, r) + g_1^+(\eta, r)), \quad g_1^\pm(\eta, r) = \int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda r) I_0(\lambda \eta)}{\lambda^2 \pm q_1^2} d\lambda$$

For the other functions from (11), the following inequalities are true problem (7), (8) in the form

$$w_0(r) = \int_0^a \frac{\chi_1(\eta)}{D} G_1(\eta, r) d\eta, \quad 0 \leq r < a. \quad (12)$$

Then, substituting (9), (10), and (12) into the boundary conditions (6), we get the system of integral equations for unknown jumps

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \eta \chi_1(\eta) F_{21}(\eta, r) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4^*(\eta) F_{24}(\eta, r) d\eta = -\frac{\tau_{rz}^0(r, 0)}{\mu_1} \\
& \int_0^a \eta \frac{\chi_1(\eta)}{\mu_1} F_{31}(\eta, r) d\eta + \int_0^a \eta \chi_4^*(\eta) F_{34}(\eta, r) d\eta = \\
& = \int_0^a \frac{\chi_1(\eta)}{D} G_1(\eta, r) d\eta - u_z^0(r, 0), \quad 0 \leq r < a.
\end{aligned} \tag{13}$$

Deducing systems (13) in integrals containing $x_4(\eta)$, we performed integration in parts and introduced:

$$\chi_4^*(\eta) = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} (\eta \chi_4(\eta)),$$

$$F_{21}(\eta, r) = \frac{1}{2\alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{B(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda^2 J_0(\lambda\eta) J_1(\lambda r) d\lambda,$$

$$F_{24}(\eta, r) = \frac{\mu_1}{2\alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{R(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda J_1(\lambda\eta) J_1(\lambda r) d\lambda,$$

$$F_{31}(\eta, r) = -\frac{1}{2\mu_1 \alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{S(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda J_0(\lambda\eta) J_0(\lambda r) d\lambda,$$

$$F_{34}(\eta, r) = -\frac{1}{2\alpha_2^2} \int_0^\infty \frac{B(\lambda)}{q_2(\lambda)} \lambda^2 J_1(\lambda\eta) J_0(\lambda r) d\lambda$$

where $q_1(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \alpha_1^2}$, $q_2(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \alpha_2^2}$

With the aim to reduce system (13) to a form convenient for the numerical solution and isolate the singular component from kernels

of integral operators, we must perform transformations analogous to those represented in [1].

To do this, we introduce into consideration the functions

$$\begin{bmatrix} T_1(\lambda) \\ T_4(\lambda) \end{bmatrix} = \int_0^a \eta \begin{bmatrix} \chi_1(\eta) \\ \chi_4^*(\eta) \end{bmatrix} J_0(\lambda\eta) d\eta.$$

Then we act by the operators

$$D_1[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \int_0^y f(r) dr, \quad D_2[f] = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{rf(r)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dr$$

on the first and second equations of the obtained system. The representation of $T_k(k)$ in terms of Fourier cosine integrals

$$\begin{bmatrix} T_1(\lambda) \\ T_4(\lambda) \end{bmatrix} = \frac{2}{\pi} \int_0^a \begin{bmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_4(\tau) \end{bmatrix} \cos \lambda\tau d\tau.$$

As a result of these actions, we establish that the functions are solutions of the following system of integral equations:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y)(R_1(y - \zeta) - R_1(y)) dy + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_2(y)(R_2(y - \zeta) - R_2(y)) dy = f_1(\zeta) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y)R_3(y - \zeta) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_2(y)R_1(y - \zeta) dy = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g_1(y)F(\zeta, y) dy + f_2(\zeta) \end{aligned} \tag{14}$$

Deducting Eqs. (14), we introduce the following notation:

$$\begin{aligned} \tau = ay, \quad x = a\zeta, \quad \varphi_k(ay) = \mu_1 a g_k(y), \quad k = 1, 2 \\ \alpha_0 = a\alpha_2, \quad \frac{\gamma}{\alpha_2} = d_k, \quad \xi = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (15)$$

Depending on the type of the wave incident upon the inclusion, the right-hand sides of system (14) are determined by the following formulas.

Under the interaction with a plane longitudinal wave,

$$f_1(\xi) = 0, \quad f_2(\zeta) = -i\alpha.$$

If cylindrical expansion-compression waves propagate in the medium, then

$$f_1(\xi) = \frac{2i\alpha_0}{d_1} (1 - \cos \xi \alpha_0 b_1 y), \quad f_2(\zeta) = \frac{d_1 \alpha_0 \cos(\xi \alpha_0 b_1 y)}{b_1}.$$

In the case where a cylindrical transverse shear wave acts on the inclusion,

$$f_1(\xi) = \frac{\beta_0 (2b_2^2 - 1)(1 - \cos \alpha_0 b_2 y)}{b_2^2}, \quad f_2(\zeta) = \beta_0 \cos(\alpha_0 \beta_2 y)$$

In the obtained system (14) the function $F(\xi, y)$ has the form represented in [2], and the functions $R_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ are determined by the integrals

$$R_k(x) = \alpha_0 \int_0^\infty B_k(u) \cos u \alpha_0 x \, du, \quad k = 1, 2, 3 \quad (16)$$

We can see that the functions $B_k(u)$, which enter into integrals (16), are bounded for $u \rightarrow \infty$. This is why these integrals must be understood in a generalized sense. To establish this value, we should use formulas (3.753) from [4] and formulas of generalized differentiation functions [7].

$$R_k = R_{k1} + iR_{k2}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (17)$$

After substituting (17) into system (14) and cal

ulating integrals with the δ -function and its derivatives, we obtain a system of integral equations, the matrix representation of which has the form

$$AG(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 Q(\zeta, y)G(\zeta) d\zeta + A_0G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 Q_0(\zeta)G(\zeta) d\zeta = F(y). \quad (18)$$

Since $\det(A) = 1/4 \neq 0$, we can always find the inverse of the matrix A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2\xi^2 & -4(1 - \xi^2) \\ 1 + \xi^2 & -2\xi^2 \end{pmatrix}.$$

Let us multiply both sides of system (18) by the matrix A^{-1} and introduce the notation

$$R = A^{-1}Q, \quad R^0 = A^{-1}Q_0, \quad D^0 = A^{-1}A_0, \quad H^0 = A^{-1}d, \quad H = A^{-1}F.$$

As a result, system (18) is transformed to the form

$$G(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 R(\zeta - y)G(\zeta) d\zeta + D^0G(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 R^0(\zeta)G(\zeta) d\zeta = H(y), \quad (19)$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

The obtained system (19) is a system of Fredholm integral equations of the second kind, which admits an efficient numerical solution.

An approximate solution of system (19) is obtained in the form of the interpolation polynomial

$$G(y) = \sum_{m=1}^n G_m \frac{P_n(y)}{(y - y_m)P'_n(y_m)}, \quad G_m = \begin{pmatrix} g_1(y_m) \\ g_2(y_m) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

where $P_n(y)$ is a Legendre polynomial, and y_m , $m = 1, 2, \dots, n$ are its roots.

Now, using the Darboux-Christoffel identity for Legendre polynomials [15, 16]

$$\frac{P_n(y)}{y - y_m} = -\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n-1} (2j+1) \frac{P_j(y)P_j(y_m)}{P_{n+1}(y_m)}$$

we find

$$G(0) = \sum_{m=1}^n A_m b_m^0 G_m, \quad A_m = \frac{2}{(1 - y_m^2) [P'_m(y_m)]^2} \quad (21)$$

$$b_m^0 = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (2j + 1) P_j(0) P_j(y_m)$$

Let us approximate the integrals in system (19) by the Gaussian quadrature formula [9] and use (21). As a result, we get the following system of linear algebraic equations for the approximate calculation of the values of the unknown functions at interpolation nodes:

$$G_j + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n A_m [R(y_m - y_j) + R^0(y_m) + D^0 b_m^0] G_m = F_j \quad (22)$$

$$F_j = F(y_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

To estimate the stress concentration in the matrix, in the vicinity of the inclusion, we use stress intensity factors (SIF) [1, 5]

$$K_1 = \lim_{r \rightarrow a-0} \sqrt{a-r} \chi_1(r), \quad K_3 = \lim_{r \rightarrow a+0} \sqrt{a-r} \tau_{rz}^1(r, 0)$$

After performing the boundary transition, we establish that

$$K_j = \mu_1 \sqrt{2aN_j}, \quad j=1,3 \quad (23)$$

where

$$N_1 = \frac{g_1(1)}{\pi}, \quad N_3 = \frac{\xi^2}{2} g_1(1) - (1 - \xi^2) g_2(1)$$

Using (23), the dimensionless values of the SIF are expressed in terms of the solution of system (22) by the formulas

$$N_1 = \frac{\sigma_1}{2\pi}, \quad N_3 = \frac{1}{2\pi} (\xi^2 \sigma_1 - 2(1 - \xi^2) \sigma_2)$$

$$\sigma_1 = \sum_{m=1}^n C_m g_j(y_m), \quad C_m = ((1 - y_m) P'_n(y_m))^{-1}. \quad (24)$$

3. Analysis of Results of a Numerical investigation and Conclusions

Let us consider results of a numerical investigation of the frequency-wise dependence of the SIF. On the one hand, the influence of the rigidity of the inclusion on the stress concentration near it was established. For this purpose, we assumed that the inclusion and matrix have equal densities and Poisson's ratios ($\bar{\rho} = 1$, $\nu_0 = \nu_1 = 0.25$). Results of these investigations are shown in Figs. 1 and 2. The curves that correspond to the indicated value of the ratio of the modulus of elasticity of the matrix to the modulus of elasticity of the inclusion. Results of these investigations are shown in Figs. 1 and 2. The curves that correspond to the indicated value of the moduli of elasticity of the matrix and inclusion $e_0 = E_1/E_0$ were constructed under the assumption that the plane longitudinal wave (1) interacts with the inclusion. The curves that correspond to $e_0 = 10^{-5}$ in Fig. 1 and $e_0 = 10^{-4}$ in Fig. 2 coincide completely with analogous curves constructed for an absolutely rigid inclusion [3]. The behavior of both factors becomes more complicated as the rigidity of the inclusion decreases and takes a more complex form with a large number of maximums and minimums. As a rule, the values of $|N_3|$ for the elastic inclusion exceed those for the rigid inclusion, and the difference between them may attain several times. The values of $|N_1|$ for the elastic inclusion are generally smaller than those calculated for the rigid inclusion.

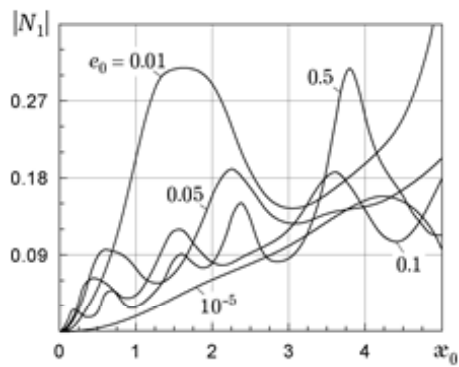


Fig. 1

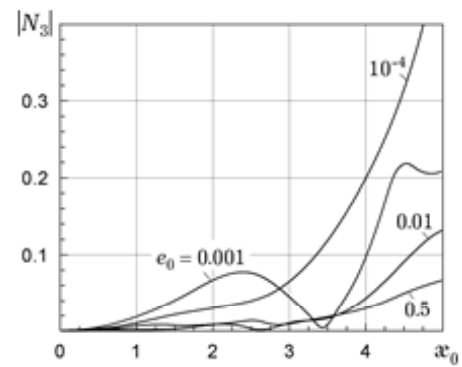


Fig. 2

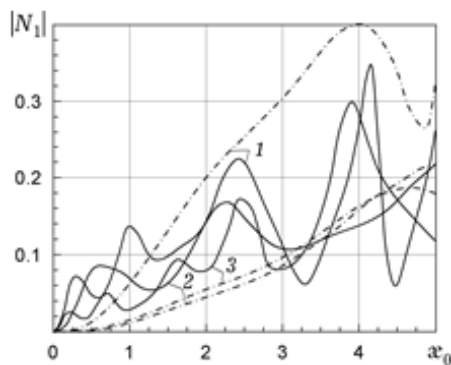


Fig. 3

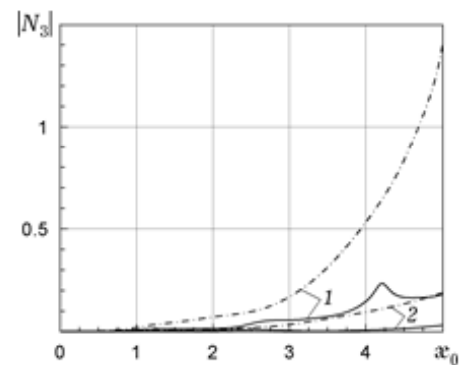


Fig. 4

We also performed calculations of the SIF for inclusions and matrices of real materials. Results of these calculations are illustrated by plots shown in Figs. 3-8. We constructed solid curves with regard to the elasticity of the inclusion and dashed curves according to the assumption that the inclusion is absolutely rigid. The inclusion was considered steel. For the matrix, three materials were chosen. Curves 1 were constructed for the case of a concrete matrix, curves 2 correspond to the case where the material of the matrix is lead, and curve 3 in Fig. 3 corresponds to a copper matrix.

Plots in Figs. 3 and 4 show changes in the SIF depending on the wave number under interaction of a plane longitudinal wave with the inclusion. The results of calculations shown in Figs. 5 and 6 correspond to the case where a longitudinal cylindrical wave acts on the inclusion, and the plots shown in Figs. 7 and 8

were constructed for the case where a transverse cylindrical wave acts on the inclusion.

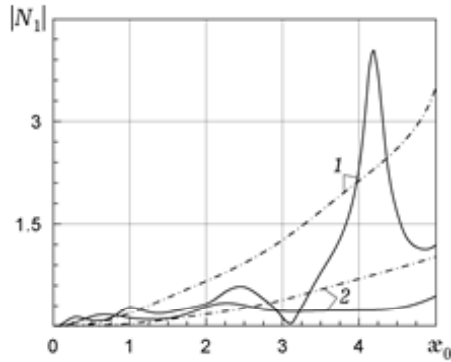


Fig. 5

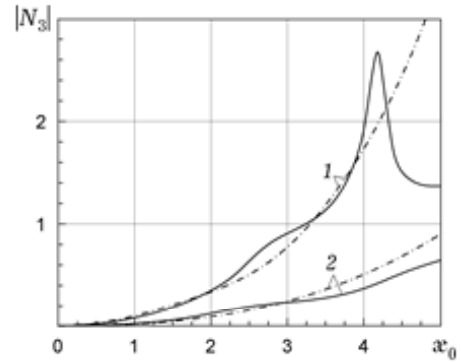


Fig. 6

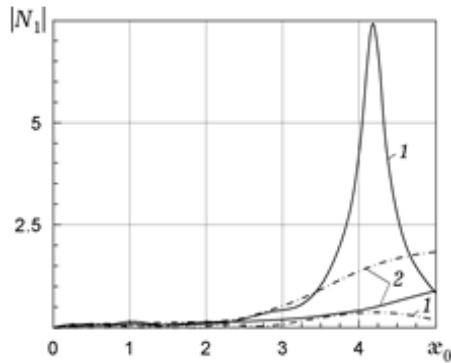


Fig. 7

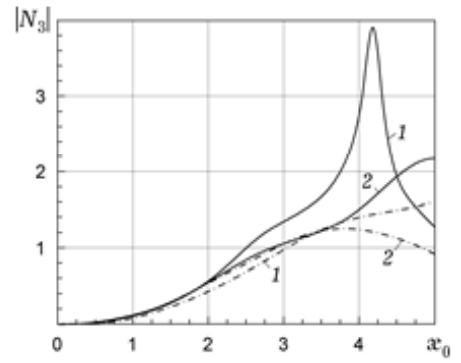


Fig. 8

The analysis of all these plots shows that, in the case of inclusions and matrices of real materials, taking into account the elasticity of inclusions affects substantially the value of the SIF. For some materials, the values of the SIF obtained with regard to elasticity may exceed the values of the SIF that correspond to an absolutely rigid inclusion, and for some other materials may be much smaller. If the rigidity of the inclusion is taken into account, the dependence of the SIF on the wave number also changes significantly. It becomes more complex with a large number of maximums and minimums. Note that the maximum values of the SIF may be several times larger than the corresponding values for absolutely rigid inclusions. All these facts indicate the necessity of taking into account the elasticity of inclusions in the strength

analysis of components of machines and structures containing them.

References:

1. V. M. Aleksandrov, B. I. Smetanin, and B. V. Sobol', Thin Stress Concentrators in Elastic Bodies [in Russian], Fizmatlit, Moscow (1993).
2. L. V. Vakhonina, "Bending vibrations of a circular thin inclusion in an infinite body," Teor. Prak. Prots. Podribn. Rozdil. Zmishuv. Ushchil., Issue 12, 24-31 (2006).
3. L. V. Vakhonina and V. G. Popov, "Interaction of elastic waves with a thin rigid circular inclusion in the case of smooth contact," Teor. Prikl. Mekh., Issue 38, 158-166 (2003).
4. I. S. Gradshtein and I. M. Ryzhik, Tables of Integrals, Sums, Series, and Products [in Russian], Nauka, Moscow (1971).
5. D. V. Grilitskii and G. T. Sulim, "Elastic stresses in a plane with a thin-walled inclusion," Mat. Met. Fiz.-Mekh. Polya, Issue 1, 41-48 (1975).
6. V. T. Grinchenko and V. V. Meleshko, Harmonic Vibrations and Waves in Elastic Bodies [in Russian], Naukova Dumka, Kiev (1981).
7. W. Kecs and P. P. Teodorescu, Introducere in Teoria Distributilor cu Aplicatii in Technica, Editura Tehnica, Bucuresti (1975).
8. G. S. Kit, V. V. Mykhas'kiv, and O. M. Khai, "Analysis of steady-state vibrations of an absolutely rigid inclusion in a three-dimensional elastic body by the boundary element method," Prikl. Mat. Mekh., 66, No. 5, 855-863 (2002).
9. V. I. Krylov, Approximate Calculation of Integrals [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
10. V. V. Mykhas'kiv and O. M. Khai, "On the theory of strength of elastic bodies with plane rigid inclusions in a field of steady-state dynamic loads," Mashynoznavstvo, No. 3, 17-22 (1993).
11. V. V. Mykhas'kiv and O. I. Kalynyak, "Nonstationary perturbations of a three-dimensional elastic matrix containing a rigid disc-shaped inclusion," Fiz.-Khim. Mekh. Mater., 41, No. 2, 7-15 (2005); English translation: Mater. Sci., 41, No. 2, 139-149 (2005).
12. V. V. Mykhas'kiv, Ya. I. Kunets', and V. O. Mishchenko, "Stresses in a three-dimensional body with thin compliant inclusion behind the front of pulsed waves," Fiz.-Khim. Mekh. Mater., 39, No. 3, 63-68 (2003); English translation: Mater. Sci., 39, No. 3, 377-384 (2003).
13. A. K. Pertsev and E. G. Platonov, Dynamics of Shells and Plates [in Russian], Sudostroenie, Leningrad (1987).
14. G. Ya. Popov, "Construction of discontinuous solutions of differential equations of the theory of elasticity for a layered medium with interface defects," Dokl. Ros. Akad. Nauk, 364, No. 6, 769-773 (1999).
15. G. Szego, Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 23, American Mathematical Society, New York (1939).
16. P. K. Suetin, Classical Orthogonal Polynomials [in Russian], Nauka, Moscow (1979).
17. A. Tadeu, P. A. Mendes, and J. Antonio, "The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method," Comput. Struct., 84, No. 31-32, 2244-2253 (2006).

Л. В. Вахоніна. Осесиметричні коливання необмеженого тіла з тонким пружним круговим включенням за умови гладкого контакту.

Розв'язано осесиметричну задачу про взаємодію гармонічних хвиль з тонким пружним круговим включенням, яке розташоване в пружному ізотропному тілі (матриці). На обох сторонах включення між ним і тілом (матрицею) реалізовані умови гладкого контакту. Метод розв'язування базується на поданні переміщень у матриці через розривні розв'язки рівнянь Ляме для гармонічних

коливань. Це дозволило звести задачу до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду відносно функцій, зв'язаних зі стрибками нормального напруження і радіального переміщення на включенні.

Ключові слова: гармонічні хвилі з тонким пружним коловим включенням, розривні рішення рівнянь Ламе, коливання Фредгольма другого роду.

Л. В. Вахонина. Осесимметричные колебания неограниченного тела с тонким упругим круговым включением при условии гладкого контакта.

Решена осесимметричная задача о взаимодействии гармонических волн с тонким упругим круговым включением, которое расположено в упругом изотропном теле (матрице). На обеих сторонах включения между ним и телом (матрицей) реализованы условия гладкого контакта. Метод решения базируется на представлении перемещений в матрице через разрывные решения уравнений Ламе для гармонических колебаний. Это позволило свести задачу к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно функций, связанных со скачками нормального напряжения и радиального перемещения на включении.

Ключевые слова: гармонические волны с тонким упругим круговым включением, разрывные решения уравнений Ламе, колебания Фредгольма второго рода.

ЗМІСТ

ЕКОНОМІЧНІ НАУКИ

- О. М. Вишнеvsька, Н. В. Бобровська.** Адаптаційний підхід у гарантуванні екологічної безпеки держави3
- Н. М. Сіренко, А. В. Бурковська, Т. І. Лункіна.** Соціальна відповідальність ведення бізнесу в Україні..... 13
- В. І. Криленко.** Регіональні аспекти інноваційної політики розвитку аграрного сектора 20
- І. В. Белоус.** Перспективи розвитку виноградарства і виноробства Миколаївської області України 26
- В. П. Рибачук.** Загальнодержавний та регіональний вимір ефективності аграрного виробництва України..... 38

СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКІ НАУКИ

- В. В. Гамаюнова, В. І. Шевель.** Формування врожайності та якості зерна сортів проса залежно від строку сівби та фону живлення в умовах Півдня України 50
- Л. К. Антипова.** Облистяність – важливий показник якості корму сортозразків люцерни..... 62
- В. Ф. Дворецький, Т. В. Глушко.** Формування продуктивності пшениці ярої під впливом сучасних ристрегулюючих речовин на Півдні України 69
- В. П. Миколайко.** Фотосинтетичний потенціал та інтенсивність квіткоутворення цикорію коренеплідного на насіння залежно від агротехнологічних прийомів його вирощування..... 79
- Ю. І. Івасюк.** Продуктивність посівів сої за роздільного та інтегрованого застосування мікробіологічного препарату, регулятора росту рослин і гербіциду 89
- М. О. Бойко.** Вплив густоти посіву та строків сівби на продуктивність гібридів сорго зернового в умовах Півдня України 96
- Л. В. Постоленко.** Ріст та розвиток смородини чорної залежно від використання мульчування та зрошення 104

А. М. Лихочвор. Вплив добрив на формування продуктивності рижію	116
А. С. Патрєва. Перспективи міжнародного співробітництва України у сфері безпечності та якості харчових продуктів	124
І. Б. Баньковська. Аналіз якості туш і м'яса свиней різних комерційних генотипів	135

ТЕХНІЧНІ НАУКИ

L. Vakhonina. Interaction of harmonic waves with a thin elastic circular inclusion under conditions of smooth contact	145
А. А. Ставинский, О. О. Пальчиков, О. О. Плахтырь. Распределение индукции в рабочем зазоре аксиального асинхронного двигателя	159
D. Marchenko. Tribological research on the process of wear of a friction pair «cable block – rope» considering rolling slippage .	169
Ю. О. Кірічек, В. О. Гряник. Інформаційне забезпечення моніторингу земель та створення територіальних геоінформаційних систем кадастру нерухомості	180
А. П. Галєєва, В. А. Грубань. Обґрунтування параметрів технологічного модуля для збирання кукурудзи на зерно ..	194
Н. А. Доценко. Особливості класифікації системи управління якістю підприємств з урахуванням вимог міжнародних стандартів	202