Міністерство аграрної політики та продовольства України

Миколаївський національний аграрний університет

Степанов С.М.

Конспект лекцій

з курсу “Нарисна геометрія та КГ“

Миколаїв
2014

ВСТУПНА ЛЕКЦІЯ

Предмет нарисної геометрії. Метод проектування. Центральне та паралельне проектування. Комплексний рисунок Монжа

План лекції

1.1.Вступ. Центральна проекція (перспектива).

1.2.Паралельна проекція.

1.3.Ортогональна проекція.

1.4.Комплексне креслення точки.

Нарисна геометрія – це наука про проекційні відображення, які використовуються в техніці, в будівництві і в живопису.

Нарисна геометрія вивчає:

- геометричні методи відображення просторових фігур на площині, за допомогою яких фігури, які мають три виміри – широту, висоту та глибину – знаходять відображення на площинному рисунку і мають тільки два виміри;
- геометричні властивості фігур за їх відображенням;
- геометричні методи рішення геометричних задач, пов'язаних з визначенням розмірів, форми і взаємного розташування фігур.

Нарисна геометрія сприяє розвитку просторового абстрактного мислення, яке необхідне для інженерної та проекційної діяльності.

Зображеннями просторових форм користуються представники різних спеціальностей. Інженеру-механіку вони потрібні під час проектування машин і механізмів, архітектору та інженеру-будівнику – під час проектування і будівництва будинків і споруд, топографу – під час вивчення поверхні землі, художнику – під час малювання і т.д.

Перший систематичний виклад методу проекційного зображення просторових форм на площині як системи двох проекцій дав французький геометр та військовий інженер Гаспар Монж (1746 – 1818 рр.) у своїй праці „Geometrie Descriptive" („Нарисна геометрія"), виданий у 1798 р. Першим російським вченим у галузі нарисної геометрії і першим викладачем курсу цієї дисципліни російською мовою був

Севастьянов Я.О. (1746 – 1849). У його працях визначалось прикладне значення нарисної геометрії в техніці.

Ідеї Севастьянова продовжували розвивати та поглиблювати Галактионов П.А., Макаров М.І., Курдюмов В.І., Є.С. Федоров, Сомов І.І., Рінін М.О., Добряков О.І. та ін.

Слід визначити велику наукову роботу на Україні в галузі геометричного моделювання для авіа- та сільськогосподарського машинобудування д.т.н., професора Королевича О.Й. та київської школи геометрів під керівництвом професорів Михайленко В.Є. та Ковальова С.М.

У зв'язку з необхідністю підняття на чинний рівень промисловості в нашій країні, проектувальників та інженерів чекає розробка проектів найскладніших споруд, конструкцій, механізмів. Ця робота вимагає від виконавця глибоких знань теорій проекційних зображень.

Систематичне та глибоке вивчення курсу нарисної геометрії сприяє розвитку просторового мислення, вмінню уявляти просторові форми предметів за їх зображеннями та зображати об'єкти, що проектуються.

Студент може вивчати нарисну геометрію за одним із запропонованих підручників:

1. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1973.
2. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1981.
3. Гордон В.О., Семенцов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. М., Физмашгиз, 1971.
4. Колотов С.М., Евстифеев М.Ф., Михайленко В.Е., Подгорный А.Л., Пономарев А.М. Начертательная геометрия, К., «Вища школа», 1993.
5. Михайленко А.Є., Євстифєєв М.Ф., Ковальов С.М., Кащенко О.В., Нарисна геометрія. К., „Вища школа", 1993.
6. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии, М.
7. Четвертухин Н.Ф. и др., Начертательная геометрия. М., «Высшая школа», 1974.
8. Бергер Е.Г., Осадчий В.С. Нарисна геометрія. Херсон, ХДТУ, 1997.

В курсі „Нарисна геометрія” прийнято такі позначення:

- Точки в просторі (в натурі) позначають великими буквами латинського алфавіту: *A, B, C, D, E…*
- Прямі та криві лінії в просторі позначають малими буквами латинського алфавіту: *a, b, c, d, e…* Лінії рівня (в тому числі й сліди площини) позначають буквами горизонталі – *h,* фронталі – *f*, профільні – *p*.
- Площини в просторі позначають малими буквами грецького алфавіту: *α, β, γ, δ...*
- Плоскі кути позначають такими самими буквами та значком $\angle$ або з написанням слова „кут”: $\angle\alpha$, або „кут α”.
- Площини проекцій позначають грецькою буквою П з індексам *1, 2, 3, 4, 5...* і т.д. Основні площини проекцій: $П_1$ – горизонтальна, $П_2$ – фронтальна, $П_3$ – профільна. Бісекторну площину четвертого кута позначають буквою К.
- Проекції точок, прямих. Площин, кутів позначають тими самими буквами, що й у просторі з додаванням підрядкового індексу відповідної площини проекції A_1, α_1, α_1...
- Натуральну систему координат позначають через *Oxyz*.
- Осі проекцій на рисунку позначають через x_{12}, y_{13}, z_{23}, початок координат – буквою *O*.
- Центри проектування і напрямки проектування позначають відповідно буквами *S, T, U* та *s, t, u*. При зміні площин проекцій нову вісь позначають буквою *x* з відповідним індексом площин, які по ній перетинаються x_{14}, x_{25} і т.д.
- Нове положення точки *A* після одного перетворення проекції позначають через $\overline{A}$, після двох – через $\overline{A}$.
- Нову допоміжну проекцію позначають з надрядковим штрихом та підрядковим індексом тієї площини, на якій її одержано: на горизонтальній площині – A'_2...
- Площину аксонометричних проекцій позначають буквою П з надрядковим штрихом: *П'*.
- Аксонометричні проекції точок, прямих, площин та кутів позначають тими самими буквами з надрядковим штрихом: *A', α', α'...*
- Вторинні проекції, крім штриха, зверху мають підрядковий індекс прямокутних проекцій: A'_1, A'_2, A'_3, a'_1, a'_2, a'_3, α'_1, α'_2, α'_3.

- Аксонометричні осі позначають буквами x'_1, y'_1, z'_1; початок координат – буквою O'.
- Прямий кут на рисунках позначають дугою з точкою в середині одержаного сектора.
- Шукані натуральні лінійні величини позначають подвійною лінією, шукані натуральні величини кутів – подвійною дугою.
- Умовні знаки, що визначають положення геометричних сегментів та дії над ними:

  // – паралельності;

  $\perp$ – перпендикулярності;

  $\times$ – перетину чи перерізу;

  = – результату дії;

  $\equiv$ – збігу, тотожності;

  $\in$ – належності.

1.1.Центральна проекція (перспектива).

Нехай дана деяка площина П, яку називають площиною проекцій, і поза нею точка S, котру називають центром проекцій.

Для побудови зображення або проекції A' деякої точки A проводять через точку A та центр проекцій S пряму SA, яку називають проектуючою прямою, а потім знаходять точку A' перетину цієї прямої з площиною $П'$, (рис. 1.1).

Метод центрального проектування точок простору на площину проекцій $П'$ можна записати за допомогою наступної символічної рівності

$$A'=Ï'\times SA$$

(A' є точка перетину площини $Ï'$ з прямою SA).

Проектування можна виконувати для будь-якої точки простору, за виключенням точок, які лежать в площині, що проходить через центр проекцій S і паралельній площині проекцій $Ï$.

На рис. 1.1 зображено побудову проекцій точок A, B, C, D, неоднаково розміщених відносно площини проекцій $Ï'$ і центра проекцій S. Взагалі проекціями точок, що лежать в площині, яка проходить через центр проекцій $Ï'$, прийнято вважати нескінченно віддалені точки площини $Ï'$, так як для цих точок проектуючи прямі будуть паралельними площинами проекцій $Ï'$. Але для центра проекцій S не можливо побудувати проекцію, так як проектуюча пряма буде при цьому невизначеною, разом з цим стає невизначеною і проекція точки S' на площину $Ï'$.

Так як кожна геометрична фігура є деяка сукупність точок, будемо називати проекцією фігури сукупність проекцій всіх її точок.

Проте для побудови проекції фігури зовсім не обов'язково проектувати всі її точки. Так, проекція відрізка або прямої лінії виконується проекціями двох точок; проекція трикутника або площини виконується проекціями трьох точок; проекція будь-якого багатокутника виконується проекціями його вершин.

Зображення предметів за допомогою центрального проектування має більшу наочність, так як процес людського зору в геометричному відношенні співпадає з операцією центрального проектування (оптичний центр кришталика ока можна вважати центром проекцій, а ділянка задньої стінки сітчатки може бути прийнята приблизно за площину проекцій). Метод центрального проектування дуже важкий і в значному ступені спотворює форму та розміри оригінала, так як не зберігає паралельності прямих та відношення відрізків. Тому на практиці частіше використовують метод паралельного проектування (зокрема ортогональне проектування). Цей метод є особливим випадком центрального проектування, коли центр проекцій знаходиться в нескінченно віддаленій точці S_∞, дає більш просту побудову зображення та в більшому ступені, як це буде показано в подальшому, зберігає ті властивості оригіналу, від яких залежить його форма та розмір.

1.2.Паралельна проекція.

Нехай дано площину проекцій $Ï'$ та напрям проектування S, не паралельний площині проекцій. Коли ми віддаляємо центр проекцій S в нескінченно віддалену точку S_∞, то всі проектуючі прямі, які перетинаються в нескінченно віддаленій точці, будують паралельні деякому напрямку S. Щоб побудувати проекцію A' будь-якої точки A, проводять через A проектуючу пряму паралельного напрямку S, а потім знаходять точку A' перетину цієї прямої з площиною $П'$ (рис. 1.2).

Розглянемо деякі властивості паралельної проекції:

1. *Проекцією точки є точка.*

Ця властивість витікає з самого способу побудови проекції точки.

2. Проекцією прямої лінії є пряма лінія.

Усі прямі, проектуючі точки *A, B, C...* даної прямої *l* (рис. 1.2), лежить в одній площині, яка проходить через пряму *l* і паралельно напрямку проектування *S.* Ця площина, яка називається проектуючою площиною, перетинає площину проекцій *П′* по прямій лінії *l,* яка, відповідно визначенню проекцій фігури, як сукупності проекцій усіх її точок, і є проекцією цієї прямої. Цю властивість будемо називати властивістю прямолінійності. Очевидно, що якщо пряма *l* буде проектуючою прямою, то її проекція вироджиться в точку.

3. Проекцію точки, яка лежить на деякій прямій, є точка, яка лежить на проекції даної прямої.

Ця властивість, яка називається властивістю належності, безпосередньо витікає з визначення проекції фігури, як сукупності проекцій усіх її точок. Розглянуті три властивості мають місце також і в випадку центральної проекції. Однак паралельна проекція має ще інші властивості, котрих не має центральна проекція.

4. Проекціями паралельних прямих є паралельні прямі.

Дійсно, якщо прямі *l* і *m* паралельні, то і проектуючі їх площини будуть паралельні як такі, що утримують по парі паралельних прямих, що перетинаються (*l // m* *і AA′ // MM′*). Звідси випливає, що *l′ // m′* як прямі перетину паралельних площин іншою площиною. Ця властивість називається властивістю збереження паралельності. Очевидно, якщо прямі *l* і *m* будуть проецюючими прямими, то вказана властивість втратить зміст, так як проекціями цих прямих будуть дві точки.

5. Відношення проекцій відрізків, які лежать на паралельних прямих або на одній і тій же прямій, дорівнює відношенню самих відрізків.

Нехай *AB* та *MN* – відрізки, які лежать на паралельних прямих *l* і *m,* а *A′B′* та *M′N′* – їх проекції на площину *П′* (рис. 1.2). Проведемо в проецюючих площинах відрізки *AB** та *MN**, відповідно паралельні відрізкам *AB′* та *MN′*. При цьому *AB*= A′B′* та *MN*= M′N′*. Видно, що трикутники *ABB** та *MNN** подібні, так як їх відповідні сторони паралельні. Звідси отримаємо:

$$\frac{\text{À'Â'}}{\text{M'N'}} = \frac{\text{ÀÂ*}}{\text{MN*}} = \frac{\text{ÀÂ}}{\text{MN}}$$

6. Проекція фігури не змінюється при паралельному переносі площини проекцій.

За проектуючу фігуру візьмемо трикутник *ABC* і спроектуємо його за напрямком *S* на площини *П'* та *П''*, паралельні між собою (рис. 1.3). Так як відрізки *A'A'',B'B'',C'C''* паралельні між собою, то чотирикутники *A'B'B''A'', B'C'C''B''* та *C'A'A''C''* є паралелограми. Тому у трикутників *A'B'C'* та *A''B''C''* відповідні сторони рівні і, тому, ці трикутники рівні між собою. Очевидно, що ці міркування можна застосувати і для проекції будь-якої іншої фігури. Розглядаючи вказані вище властивості паралельної проекції, бачимо, що її три останні властивості забезпечують більш просте побудування зображення, котре разом з тим менше потворить форму та розміри оригіналу у порівнянні з центральною проекцією. Дійсно, властивість 4 вказує на збереження паралельності прямих, тому паралельна проекція трапеції є трапеція; паралельна проекція паралелограма є паралелограм, в той час коли в центральній проекції ці фігури проектуються в чотирикутнику загального виду. За властивістю 5 ми маємо для проекцій двох паралельних відрізків співвідношення:

$$\frac{\grave{A}'\hat{A}'}{M'N'} = \frac{\grave{A}\hat{A}}{MN}$$

звідки

$$\frac{\grave{A}'\hat{A}'}{AB} = \frac{M'N'}{MN} \text{ (рис. 1.2),}$$

тобто при паралельному проектуванні викривлення для всіх паралельних відрізків постійне.

Звідси, зокрема, випливає, що середина відрізка проектується в середину проекції відрізка.

Остання властивість дозволяє переносити площину проекції паралельно самій собі, тобто відмовитись від фіксації площини проекції. При цьому говорять, що положення площини проекцій визначається лише з точністю до паралельності. Це дуже зручно і тому широко використовується при побудові технічного креслення.

1.3.Ортогональна проекція.

Ще більше спрощення побудови креслення дає застосування ортогонального проектування, яке є окремим випадком паралельного проектування, коли напрям проектування S перпендикулярно площині проекцій *П'*. В цьому випадку неважко встановити співвідношення між довжиною натурального відрізка і довжиною його проекції. Якщо відрізок AB утворює з площиною проекції кут α, то провівши AB^* // $A'B'$ (рис. 1.4), отримаємо з прямокутного трикутника AB^*B:

$$AB^* = AB\cos\alpha$$

чи

$$A'B' = AB\cos\alpha\ .$$

Ортогональна проекція найбільш поширена в технічних кресленнях, так як вона дозволяє найбільш легко судити про розміри предметів.

Розглянуті вище методи проектування дозволяють вирішувати пряму задачу, по заданому оригіналу побудувати його проекційне креслення. Однак зворотна задача – за даним проекційним кресленням відтворити оригінал – не вирішується однозначно. Ця задача допускає нескінченну множину рішень, так як кожну точку A' площини проекцій Π' можна враховувати проекцією будь-якої точки працюючої прямої, яка проходить через A' (рис. 1.1, 1.2 і 1.4).

Таким чином, розглянуті нами проекційні креслення не дають можливості визначити оригінал, не мають властивості зворотності. Для отримання зворотних креслень доповнюють проекційне креслення необхідними даними. Існують різні методи такого доповнення. В даному курсі будуть застосовуватись тільки два види зворотного креслення. Це комплексне креслення в ортогональних проекціях та аксонометричне креслення.

1.4.Комплексне креслення точки.

Найбільше поширення в технічній практиці отримало креслення, яке з'єднане з двох або більше зв'язаних між собою ортогональних проекцій оригіналу. Таке креслення називається комплексним кресленням в ортогональних проекціях або комплексним кресленням.

Принцип побудови такого креслення складається з того, що даний оригінал проектується ортогональною проекцією на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій, котрі потім відповідним чином з'єднуються з площиною креслення. Одна з площин проекцій Π_1 розташовується горизонтально і її називають горизонтальною площиною проекцій. Площина Π_2 розташовуються вертикально, ця площина розміщена перед спостерігачем, її називають фронтальною площиною проекцій (рис. 1.5).

Пряму перетину площин проекцій називають віссю проекцій.

Спроектуємо ортогонально на площини проекцій $П_1$ та $П_2$ яку-небудь точку A, тоді одержимо дві її проекції: горизонтальну проекцію A, на площині $П_1$, та фронтальну проекціюA_2 на площині $П_2$.

Проектуючи прямі AA_1 і AA_2, за допомогою яких точка A проектується на площину проекцій, визначає проектуючу площину A_1AA_2, яка перпендикулярна до двох площин проекцій і до всіх проекцій x.

Навпаки, кожна пара точок A_1 і A_2, які відповідно належать площинам проекцій $П_1$ та $П_2$, будуть перпендикулярні до вісі проекцій x.

Якщо провести через точки A_1 і A_2 перпендикуляри AA_1 і AA_2 відповідно до площин $П_1$ та $П_2$ то вони, знаходячись в одній площині, перетнуться в деякій точці A.

Відстань AA_1 точки A, від горизонтальної площини проекцій називаються висотою h точки A, а відстань AA_2 від фронтальної площини проекцій – глибиною f точки A.

Щоб отримати плоске креслення, з'єднаємо площину проекцій $П_1$ з площиною проекцій $П_2$, обертаючи площину проекцій $П_1$ навколо вісі х в напрямку, вказаному на рис. 1.5а. Тоді отримаємо комплексне креслення точки A (рис. 1.5б), який складається з двох проекцій A_1 і A_2 точки A, яке лежить на одній прямій, перпендикулярній до вісі х. Пряма A_1A_2, яка з'єднує дві проекції точки, називається лінією зв'язку.

Отримане комплексне креслення буде зворотнім кресленням, за цим кресленням, за цим кресленням можна визначити, або, як говорять, реконструювати оригінал. Дійсно, розглядаючи, наприклад, фронтальну проекцію A_2 точки A, та маючи на кресленні її глибину $f{=}A_xA_1$ можна реконструювати точку A. Для цього необхідно побудувати перпендикуляр до площини креслення в його точці A_2 і від площини креслення відкласти глибину шуканої точки, тоді кінець перпендикуляра визначить положення точки A.

Розглянутий принцип утворення комплексного креслення одержав з часу Гаспара Монжа широке застосування.

Ортогональні проекції, або комплексний рисунок Монжа, відзначаються точністю та однозначністю зображення.

Єдиним недоліком є недостатня наочність. В цих випадках застосовують аксонометричне або перспективне зображення.

Питання для самоконтролю:

1. В чому полягає суть центральної проекції?
2. Навіть основні властивості паралельної проекції.
3. Чим відрізняється паралельна проекція від ортогональної?
4. В чому суть комплексного рисунка Г. Монжа?

ЛЕКЦІЯ № 2

Прямокутні проекції елементарних геометричних фігур

План лекції

2.1. Проекція точки.

2.2. Проекція прямої.

2.3. Проекція площини.

В цій лекції ми розглянемо проекції точки, прямої та площини, бо вони є основними геометричними фігурами.

2.1. Проекція точки.

Проекцією точки є точка. При двох напрямах проектування точка зображується парою точок. Винятком є точки, що належить осі $x_{1,2}$.

Розглянемо просторову модель координатних площин проекцій і т. *A* відносно цієї просторової моделі (рис. 2.1).

Рисунок, що містить проекції на двох полях проекцій, є позиційно повним та метрично визначеним; він визначає форму та розміри зображуваної фігури. Проте в наслідок тривимірності просторової фігури, а також у зв'язку з тим що за двома зображеннями не завжди просто прочитати конструкцію складеного об'єкта, його комплексний рисунок стає більш зрозумілим, коли крім двох основних проекцій дано ще проекцію на третю площину. За цю площину обирають профільну площину проекцій Π_3, перпендикулярну до Π_1 і Π_2 (рис. 2.2а).

Площини проекцій Π_1, Π_2 і Π_3 перетинаються у просторі по трьох лініях, які утворюють просторову Декартову систему координат. Точка O є початком координат, вісь X – віссю абсцис, вісь Y – віссю ординат, вісь Z – віссю аплікат.

При побудові комплексного рисунку з трьох прямокутних проекцій площину Π_2 заміняють нерухомою, а площини Π_1 і Π_3 обертають навколо осей X_{12} і Z_{23} до положення нерухомої площини Π_2 (рис. 2.2б).

Площинний рисунок, який несе вичерпну інформацію про положення в просторі геометричного образу називають комплексним, або епюром Монжа.

Площини проекцій $П_1$ і $П_2$ ділять тривимірний простір на чотири чверті. Розглянемо комплексний рисунок точок А, В, С і Д в різних чвертях (рис. 2.3). Точка А – у першій, т. В – у другій, т. С – у третій, т. Д – у четвертій. Далі викладення матеріалу буде вестися відносно першої чверті. Якщо задано три прямокутні Декартові координати точки, то легко побудувати комплексний рисунок, наприклад А (10; 5; 15) (рис. 2.4).

2.2. Проекції прямої.

Пряму в нарисній геометрії розглядають, як множину точок, її проекції в загальному випадку – як множину проекцій всіх її точок. Пряма, довільно розташована по відношенню до площин проекцій, називається прямою загального положення. В системі площин $П_1$ і $П_2$ пряму загального положення зображують двома прямими. Перетин прямої з площинами проекцій називають слідами прямої (Н – горизонтальним, F – фронтальним), назви яких залежать від відповідної площини проекції (рис. 2.5а).

Крім загального положення, пряма може займати окреме положення відносно площин проекцій. Вона може бути паралельна їм або перпендикулярна до них. На рис. 2.5б зображено прямокутний паралелепіпед і три площини проекцій (три поля) – $П_1$, $П_2$, $П_3$. Через вершину паралелепіпеда А проведено шість відрізків прямих окремого положення, прямокутні проекції яких представлені на рисунку 2.5в.

Прямі, паралельні площинам проекцій, належать до так званих площин рівня і називаються: АС – горизонтальна пряма, AF – фронтальна пряма, АН – профільна пряма. Відрізки таких прямих зображуються в натуральну величину на площині проекції, якій вони паралельні.

Прямі, перпендикулярні до площин проекцій, називають проектуючи ми: АЕ – горизонтально проектуючи, або вертикальна, АД – фронтально проектуючи, АВ – профільно-проектуюча. Такі прямі зображують точкою на площині проекцій, до якої вони перпендикулярні. При цьому вони паралельні двом іншим площинам проекцій.

При розгляді відрізка прямої часто виникає потреба у визначенні його натуральної величини та кутів нахилу до площини П і П. Іншими словами, доводиться розв’язувати першу основну метричну задачу. Дійсно, відстані між двома фігурами виміряються відстанню між найближчими точками цих фігур.

Для визначення натуральної величини відрізка прямої загального положення треба виконати деякі побудови. На рис. 2.6 зображено відрізок АВ і дві площини проекцій – $П_1$ та $П_2$. Якщо з точки А провести відрізок АС, паралельний його горизонтальній проекції A_1B_1, то утвориться прямокутний трикутник АВС, гіпотенузою якого є відрізок АВ. Розглянувши цей трикутник, можна зробити висновок, що натуральна величина відрізка прямої загального положення дорівнює гіпотенузі прямокутного трикутника, один катет якого – одна з проекцій відрізка, а другий – різниця відстані кінців другої проекції відрізка до осі X_{12} (в безосній системі – до довільної горизонтальної прямої). Відповідно побудову виконано на рис. 2.6б, одночасно визначився і кут α нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій. Щоб визначити кут нахилу до фронтальної площини проекцій, таку ж побудову треба виконати на фронтальній площині проекцій. Цей спосіб визначення величини відрізка прямої називають способом прямокутного трикутника.

Точки, що належать (інцідентні) одній проектуючий прямій, носять назву конкуруючих; на одній з площин проекцій вони збігаються. За допомогою таких точок визначають видимість геометричних фігур на рисунку в прямокутних проекціях.

На рис. 2.7 зображено такі проектуючи прямі: горизонтальна проектуючи *m* та фронтально проектуючи *n*. На *m* задано точки А і В, а на *n* – точки С і Д. З двох точок А і В на вертикальній прямій *m* видимою на полі $П_1$ вважається та, що розміщена вище, в даному випадку це точка А. Відносно поля $П_2$ видимою вважається точка, що знаходиться ближче до спостерігача, - точка Д. Далі буде показано, як конкуруючи точки використовують при визначенні видимості геометричних фігур.

2.3. Проекція площини.

Якщо точка є нуль-вимірною геометричною фігурою, пряма – одновимірною, то площина – двовимірна геометрична фігура. Задавати площину можуть три точки, що не лежать на одній прямій, точка і пряма, дві паралельні (пересічні) прямі, трикутник. Для завдання площини необхідно використати три параметри (наприклад, точки перетину її з трьома осями координат). Площина, перетинаючись з площинами проекцій, утворює прямі лінії, що звуться слідами площини. Найпростіше площину можна задати її слідами (рис. 2.8). На цьому рисунку площину Г задано так званою точкою збігу слідів $X_Г$, що знаходиться на осі Ох, та двома точками перетину слідів з осями координат Оу та Oz. Замість цих параметрів можна задати точку збігу слідів, а також кути, які сліди утворюють з віссю Ох.

Можна сформулювати властивість проекцій площини загального положення: проекції площини збігаються з полями проекцій так, що проекції їхніх точок вертикально відповідні. Залежно від положення, що займає площина відносно площин проекції, розрізняють: площини проектуючи – перпендикулярні до площин проекцій; площини рівня – паралельні площинам проекцій; площини загального положення – довільно розташовані відносно площин проекцій.

Пряма належить (інцидентна) площині, якщо дві її точки належать площині або якщо вона проходить через точку, інцидентну площині, та паралельна другій прямій, що належить площині. Площину зручно задавати трикутним відсіком. Для задання прямої, що належить площині (наприклад), пряма 1 – 2 на рис. 2.9), досить задати її горизонтальну чи фронтальну проекцію. Для цього треба використати два параметри (точки перетину проекції з двома осями координат або одну точку перетину та кут з віссю Ох). Другу проекцію визначають за вертикальною відповідністю.

Точка належить площині, якщо вона інцидент на прямій, що належить цій площині. Таким чином, щоб знайти другу проекцію точки, наприклад Д (рис. 2.10), необхідно провести через неї довільну пряму *l*, для задання точки в площині необхідно витратити два параметри, задаючи, наприклад, її горизонтальну чи фронтальну проекції.

Лінії рівня площини – це лінії, що належать даній площині та паралельні одній з площин проекцій.

Горизонталь – це лінія, що лежить у площині та паралельна $П_1$ (лінія АД на рис. 2.11а).

Фронталь – це лінія, що лежить у площині та паралельна $П_2$ (лінія ЕС на рис. 2.11а).

Горизонталь і фронталь дуже часто використовують для задання площини, що дозволяє виявити її орієнтацію відносно площини проекцій. Сліди площини, про які йшла мова вище, також є горизонталлю h чи фронталлю f, їх у цьому випадку називають нульовим (рис. 2.11б).

Профільна пряма – це лінія, що належить площині та паралельна профільній площині проекцій $П_3$.

Лінії нахилу площини до площини проекцій – це лінії, що належать площині та утворюють найбільший кут з відповідною площиною проекцій; зокрема відносно поля $П_1$ їх ще називають лініями найбільшого скату або, коротше, лініями скату.

На рис. 2.11а проведено лінію скату BF. На горизонтальній проекції ця лінія утворює прямий кут з проекцією горизонталі. Лінія скату відносно фронтальної площини проекцій $П_2$ зберігає прямий кут з фронтальною проекцією фронталі.

На рис. 2.12 зображено шість випадків площин особливого положення: проектуючи та площин рівня. На рис. 2.12а площини задано трикутними відсіками, а на рис. 2.12б – слідами. Площина буде перпендикулярною до площини проекції, якщо вона містить хоча б одну пряму, перпендикулярну до цієї площини. Відсіки площин рівня Г, Ф, Ω на відповідних полях проекцій зображуються в натуральну величину.

При задані площин слідами ознакою горизонтально чи фронтально проектуючої площини є вертикальність одного з слідів. Горизонтальну та фронтальну площини рівня задавати слідами на зручно і не наочно, бо один із слідів на рисунку відсутній.

Питання для самоконтролю:

1. Як задати точку в площині?
2. Як звуться прямі перпендикулярні до площин проекцій?
3. Які існують способи завдання площини на епюрі Монжа?
4. Як визначити натуральну величину відрізка?
5. Які лінії називаються лініями рівня площини?

ЛЕКЦІЯ № 3

Позиційні властивості проекцій геометричних фігур

План лекції

3.1. Взаємний порядок точки та прямої.

3.2. Взаємна належність геометричних фігур.

3.3. Взаємний перетин геометричних фігур.

У нарисній геометрії розглядають дві групи задач: позиційні та метричні. В основі таких задач лежать позиційні та метричні властивості проекцій пар геометричних фігур. Групу позиційних задач складають задачі: 1) на взаємний порядок геометричних фігур; 2) на взаємність геометричних фігур; 3) на взаємний перетин геометричних фігур.

3.1. Взаємний порядок точки і прямої.

Побудуємо т. С, яка знаходиться між т. А і В відрізка АВ (рис. 3.1).

3.2. Взаємна належність геометричних фігур.

Точка та пряма. Точка може належати або не належати прямій. Точка належить прямій, якщо її проекції належать відповідним проекціям прямої (рис. 3.2).

Точка та площина. Точка належить площині, якщо обидві її проекції інцидентні відповідним проекціям прямої, що належить площині (рис. 3.3).

Пряма та площина. Пряма належить площині, якщо її будь-які дві точки належать даній площині (рис. 3.4).

Точка та поверхня. Точка належить поверхні, якщо вона лежить на лінії, інцидентній поверхні (рис. 3.5).

3.3. Взаємний перетин геометричних фігур.

Перетин двох прямих. Прямі перетинаються, якщо мають одну власну чи невласну спільну точку; прямі мимобіжні, якщо не мають спільної точки (рис. 3.6).

Перетин прямої та площини. Задача на перетин прямої з площиною є першою основною позиційною задачею. Тут виникає три різних випадки розміщення двох геометричних фігур: 1) обидві геометричні фігури є проектуючими відносно однієї й тієї є площини проекцій; 2) одна геометрична фігура є проектуючою, а друга – загального положення; 3) обидві геометричні фігури займають загальне положення.

На рис. 3.7а зображено перший випадок, коли площина – трикутний відсік АВС і пряма l займають горизонтально проектуючи положення. Горизонтальна проекція трикутного відсіку ніби збирає на себе проекції всіх фігур, що належать площині відсіку. Інцидентність горизонтальних проекцій відсіку та прямої дає змогу стверджувати, що в цьому випадку пряма l належить площині відсіку.

На рис. 3.7б зображено другий випадок, коли площина Σ у вигляді трикутного відсіку знаходиться в горизонтально-проектуючому положенні, а пряма l займає загальне положення. У цьому випадку точку D – точку перетину прямої з площиною – визначають безпосередньо на полі Π_1 як точку перетину проекцій прямої та площини. Фронтальну проекцію точки D визначають за вертикальною відповідністю. В символічному записі $\Sigma \cap l_1 = D_1$, $D_1\ D_2 \cap l_2 = D_2$. З метою підвищення наочності малюнка вважаємо трикутний відсік непрозорим, і тоді частина відрізка прямої буде невидимою, бо він „перекривається” на полі Π_2 площиною Σ_2. Позначимо на полі Π_2 точку перетину прямої l_2 з стороною відсіку B_2C_2, за допомогою вертикальної лінії сполучення визначимо точку l_1 на прямій l_1 та точку 2_1 на площині Σ_1. Оскільки точка 1 ближче до спостерігача, ніж точка 2, то пряма в цій точці „перекриває” сторону ВС і тому відрізок прямої до точки перетину з відсіком є видимим, а далі частина його закривається відсіком.

На рис. 3.7в представлено третій випадок, коли і площина і пряма займають загальне положення. Для визначення точки перетину прямої з площиною в цьому випадку доцільно застосовувати спосіб допоміжних січних площин. Алгоритм розв’язування задачі складається з трьох операцій: 1) через пряму проводять допоміжну площину; 2) знаходять лінію перетину заданої площини з допоміжною; 3) визначають точку перетину двох прямих – заданої та лінії перетину. На рисунку через пряму проведено горизонтально проектуючу площину Г ($l_1 \subset \Gamma_1$), знайдено лінію перетину двох площин – пряму 1 – 2 (її горизонтальна проекція $1_1 2_1$), за горизонтальною проекцією визначено фронтальну проекцію $1_2 2_2$. У перетині l_2 *і* $1_2 2_2$ знайдемо шукану точку D_2 – перетин прямої з площиною. Її горизонтальну проекцію визначають за вертикальною відповідністю. Видимість відрізків прямої *l* визначено за допомогою конкуруючих точок 3 і 4.

У символьному записі: $l_1 \subset Г_1$; $A_1B_1C_1 \cap Г_1=1_1 2_1$; $1_1 1_2 \cap A_2B_2$; $2_1 2_2 \cap A_2C_2$; $1_2 2_2 \cap l_2=D_2$; $D_2D_1 \cap l_1=D_1$.

Для з'ясування взаємного положення прямої і площини загального положення також доцільно скористатися способом допоміжних площин. При визначенні взаємного положення заданої прямої і знайденої лінії перетину двох площин можливі три випадки: 1) дві прямі перетинаються в одній точці, отже, задана пряма перетинається з площиною в цій точці; 2) дві прямі паралельні, тобто пряма паралельна площині; 3) дві прямі зливаються, тобто пряма є підмножиною площини.

На рис. 3.8а зображено трикутний відсік АВС і пряму загального положення *l*. Для визначення їхнього взаємного положення використано фронтально проектуючу площину Σ, проведену через пряму *l*, і знайдено лінію перетину двох площин – пряму 1 – 2. З розгляду горизонтальних проекцій прямих l_1 і $1_1 2_1$ видно, що пряма *l* перетинає площину АВС в точці D.

На рис. 3.8б побудовано пряму *m*, паралельну площині відсіку АВС. Для цього також було побудовано пряму 1 – 2, одержану в результаті перетину трикутного відсіку з фронтально проектуючою площиною Г. Горизонтальна проекція прямої m_1 повинна бути паралельною горизонтальній проекції прямої 1 – 2.

Нарешті, на рис. 3.8в показано пряму *n*, проекції якої збігаються з проекціями прямої 1 – 2, що належить площині, тобто пряма є підмножиною площини.

Перетин двох площин. Дві площини завжди між собою перетинаються. Якщо лінія їхнього перетину – невласна пряма, то площини паралельні. Для того щоб з'ясувати взаємне положення двох площин, знаходять лінію їхнього перетину, що є другою основною позиційною задачею. Як і при розв'язанні першої основної позиційної задачі, тут мають місце ті ж три випадки: 1) обидві площини є проектуючими відносно однієї й тієї ж площини проекції; 2) одна з площин – проектуючи, а друга – загального положення; 3) обидві площини загального положення.

На рис. 3.9а представлено два вертикальних трикутних відсіки. Перетин їхніх горизонтальних проекцій дає вертикальну лінію перетину двох площин, яку за вертикальною відповідністю визначають на полі $П_2$.

На рис. 3.9б один з відсіків, що перетинаються, займає загальне положення, а другий – горизонтально проектуючий. Лінія взаємного перетину площин у даному випадку збігається на полі $П_1$ з горизонтальною проекцією проектуючого відсіку DEF – це пряма $1_1 2_1$. За вертикальною відповідністю визначають фронтальну проекцію лінії перетину двох площин. У символічному записі: $D_1F_1 \cap A_1B_1 = 1_1$; $1_1 1_2 \cap A_2B_2 = 1_2$; $D_1F_1 \cap A_1C_1 = 2_1$; $2_1 2_2 \cap A_2C_2 = 2_2$.

На рис. 3.9в показано визначення лінії перетину двох відсіків загального положення. Лінію перетину знайдено за точками перетину двох сторін одного відсіку з площиною другого. З цією метою через пряму DE проведено фронтально проектуючу площину Ω_2, а через пряму DE – фронтально проектуючи площину Φ_2. На цих двох прямих знайдено точки перетину NM, які й визначають лінію перетину двох площин. У символічному записі: $\Omega_2 \supset D_2E_2$; $\Omega_2 \cap B_2C_2 = 1_2$; $1_2 1_1 \cap B_1C_1 = 1_1$; $\Omega_2 \cap A_2C_2 = 2_2$; $2_2 2_1 \cap A_1C_1 = 2_1$; $1_1 2_1 \cap D_1E_1 = N_1$; $\Phi_2 \cap D_2F_2$; $\Phi_2 \cap B_2C_2 = 3_2$; $3_2 3_1 \cap B_1C_1 = 3_1$; $\Phi_2 \cap A_2C_2 = 4_2$; $4_2 4_1 \cap A_1C_1 = 4_1$; $3_1 4_1 \cap D_1F_1 = M_1$; N_1M_1 – шукана лінія перетину.

Питання для самоконтролю:

1. Що таке позиційні властивості геометричних фігур?
2. В якому випадку точка належить прямій?
3. В якому випадку точка належить площині?
4. В чому заключається спосіб допоміжних січних площин?
5. Як знайти лінію перетину двох площин?

ЛЕКЦІЯ № 4

Перпендикулярність прямих і площин. Метричні задачі

План лекції

4.1. Ортогональна проекція прямого кута.

Крім позиційних задач в технічній практиці доводиться розв'язувати задачі, в яких треба визначити натуральні величини відрізків, кутів, площинних кутів і т.і. Такі задачі звуться метричними.

Для їх розв'язання треба визначитись з умовами перпендикулярності прямих і площин і встановити властивості ортогональної проекції прямого кута.

Для того, щоб дві взаємно перпендикулярні прямі (які перетинаються, або мимобіжні проектувались ортогонально у вигляді двох взаємно перпендикулярних прямих, необхідно і достатньо, щоб одна з цих прямих була паралельна, а друга не перпендикулярна площині проекцій).

Відносно комплексного рисунку отримаємо наступне формулювання:
Дві взаємно перпендикулярні прямі (які перетинаються або мимобіжні) тоді і тільки тоді зберігають свою перпендикулярність в горизонтальній, фронтальній або профільній проекції, коли одна з цих прямих відповідно є горизонталлю, фронталлю або профільною прямою (рис. 4.1).

4.2. Прямі найбільшого нахилу площини.

Прямі площини, перпендикулярні до прямих рівня цієї площини, називаються прямими найбільшого нахилу даної площини до відповідної площини проекцій.

Така назва цих прямих пояснюються тим, що між різних прямих якої-небудь площини, прямі найбільшого нахилу, перпендикулярні горизонталям площини, утворюють найбільший кут з горизонтальною площиною проекцій; прямі найбільшого нахилу, перпендикулярні фронталями площини, утворюють найбільший кут з фронтальною площиною проекцій; прямі найбільшого нахилу, перпендикулярні профільним прямим площини, утворюють найбільший кут з профільною площиною проекцій.

Дійсно, якщо провести в площині Θ пряму AB, перпендикулярну до горизонталі h цієї площини, і довільну пряму AC, відмінну від прямої AB (рис. 4.2), то неважко показати, що пряма AB утворює більший кут нахилу з площиною проекцій $П_1$, ніж пряма AC.

Перенесемо площину проекцій $П_1$ паралельно самій собі так, щоб вона пройшла через вибрану горизонталь h площині Θ. При такому переносі кути прямих AB і AC з площиною $П_1$ не змінюються. Так як кут нахилу прямої до площини вимірюється кутом між прямою і її ортогональною проекцією на цю площину, то кути прямих AB і AC з площиною $П_1$ будуть відповідно вимірюватись кутами $\alpha = \angle ABA_1$ і $\beta = \angle ACA_1$. Покажемо, що $\alpha > \beta$.

Для цього розглянемо два прямокутних трикутника ΔAA_1B і ΔAA_1C з загальним катетом AA_1. В цих трикутниках маємо $AB < AC$, так як AB – перпендикуляр, а AC – похила по відношенню до горизонталі h. Тому, якщо з'єднати обертання навколо AA_1 площини розгляданих трикутників, то пряма AB займе положення AB_1 в середині трикутника AA_1C. Тепер можна стверджувати, що $\angle AB_1A_1 = \alpha$ більше $\angle ACA_1 = \beta$, так як зовнішній кут трикутника AB_1C_1 більше внутрішнього, з ним суміжним.

Таким чином, пряма AB площини Θ, перпендикулярна до її горизонталі h, яка являється прямою найбільшого нахилу до горизонтальної площини проекцій.

Аналогічно можна довести, що пряма площини Θ, перпендикулярна до фронталі або профільній прямій площини, являється відповідно прямою найбільшого нахилу до фронталі та горизонтальної площин проекцій.

Пряма найбільшого нахилу площини Θ до якої-небудь площини проекцій з своєю проекцією на цю площину утворює лінійний кут двогранного кута площини Θ з відповідною площиною проекцій.

Тому вимірювання двогранного кута між площиною Θ загального положення і площиною проекцій може бути зведено до вимірювання кута між відповідною прямою найбільшого нахилу площини Θ і її проекцією на вибрану площину проекцій.

Пряму найбільшого нахилу до горизонтальної площини проекцій часто називають лінією ската, так як матеріальна частинка, яка знаходиться на площині, буде скатуватися по цій лінії.

Приклад.

Провести в площині Θ (A, B, C) загального положення через її точку B прямі найбільшого нахилу u^1 і u^2 відповідно до горизонтальної і фронтальної площин проекцій (рис. 4.3).

Спочатку побудуємо пряму найбільшого нахилу u^1 до площини проекцій Π_1. Для цього попередньо побудуємо в площині Θ горизонталь h за допомогою точок A і l. Так як пряма найбільшого нахилу u^1 перпендикулярна горизонталям площини Θ, а ця перпендикулярність зберігається в горизонтальній проекції, то горизонтальну проекцію u_1^1 будуємо перпендикулярно проекції h_1 (провести її, наприклад, через точку B_1). Фронтальну ж проекцію u_2^1 знаходимо з умов належності прямої u^1 площині Θ, для цього використовуємо точки B і 2.

Тепер побудуємо пряму найбільшого нахилу u^2 проекцій Π_2. Для цього проводимо в площині Θ фронталь f за допомогою точок A і 3. Будуємо пряму найбільшого нахилу u^2 до площини проекцій Π_2. Для цього проводимо в площині Θ фронталь f за допомогою точок A і 3. Так як пряма найбільшого нахилу u_2 перпендикулярна до фронталей площини Θ, а ця перпендикулярність зберігається в фронтальній проекцій, фронтальну проекцію u_2^2 проводимо через точку B_2 перпендикулярно до f_2. Горизонтальну проекцію u_1^2 находимо за допомогою точок B і 4, виділених на площині Θ.

4.3. Перпендикулярність прямої і площини.

Як відомо, пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до всякої прямої цієї площини. Тому, якщо деяка пряма *n* перпендикулярна до якої-небудь площини Θ, то вона перпендикулярна до всякої горизонталі *h* і до всякої фронталі *f* цієї площини, тобто $n \perp h$ і $n \perp f$ (рис. 4.4а). Ця перпендикулярність зберігається для горизонталі в горизонтальній проекції, і для фронталі – в фронтальній проекції.

Тому проекції n_1 і n_2 прямої n, перпендикулярної до площини Θ, повинні задовольняти умовам: $n_1 \perp h_1$ і $n_2 \perp f_2$, де h_1 і f_2 – відповідні проекції довільних горизонталі h і фронталі f площини Θ (рис. 4.4б).

Справедливо і зворотне положення: якщо горизонтальна проекція n_1 якої-небудь прямої n перпендикулярна до горизонтальної проекції h_1 любої горизонталі h даної площини, а фронтальна проекція n_2 прямої n перпендикулярна до фронтальної проекції f_2 любої фронталі f площини Θ, то пряма n і площина Θ взаємно перпендикулярні.

Насправді з умов $n_1 \perp h_1$ і $n_2 \perp f_2$ виходить, що $n \perp h$ і $n \perp f$, це означає, що пряма n перпендикулярна двом прямим площини Θ. В загальному випадку горизонталь h і фронталь f якої-небудь площини є перетинаючимися прямими, тому пряма n, будучи перпендикулярна двом перетинаючимся прямим площини Θ, буде перпендикулярна і до самої площини.

Виключенням є профільно проектуюча площина, у якої горизонталь і фронталь паралельні між собою. Пряма, перпендикулярна до такої площини, буде профільною прямою. В цьому випадку, перпендикулярність прямої і площини встановлюється по перпендикулярності їх профільній проекції.

Аналогічно, пряма, перпендикулярна до горизонтально або фронтально проектуючої площини, буде відповідно горизонталлю або фронталлю, і тоді перпендикулярність прямої і площини встановлюються по перпендикулярності їх горизонтальних або фронтальних проекцій.

Таким чином, пряма і площина загального положення взаємно перпендикулярні і тому і тільки у тому випадку, коли проекції прямої перпендикулярні однойменними проекції прямої перпендикулярні однойменним проекціями відповідних ліній рівня площини, тобто горизонтальна проекція прямої перпендикулярна горизонтальній проекції горизонталі, а фронтальна проекція прямої перпендикулярна фронтальної проекції фронталі.

Якщо площина являється проектуючою, то пряма, перпендикулярна до неї, буде лінією рівня і тоді їх взаємна перпендикулярність зберігається між вираженою проекцією площини і відповідною проекцією прямої.

Розглянемо приклади побудови прямої, перпендикулярної площині, і площини, перпендикулярної прямої.

Приклад 1. Через точку А площини Θ (А, В, С) провести пряму *n*, перпендикулярну до даної площини (рис. 4.5).

Спочатку побудуємо в площині Θ довільну горизонталь *h* і довільну фронталь *f*, а потім через проекції A_1 і A_2 точки А проводимо відповідно перпендикулярно h_1 і f_2 проекції n_1 і n_2 шуканого перпендикуляра *n* до площини Θ.

Якщо точка, через яку потрібно провести перпендикуляр *n* до площини Θ, знаходиться не в площині, то побудова перпендикуляра проходить згідно умов: $n_1 \perp h_1$ і $n_2 \perp f_2$. При цьому для визначення основи цього перпендикуляра на площини Θ потрібно побудувати точку перетину прямої *n* з площиною Θ.

Приклад 2. Через точку А провести площину Θ, перпендикулярна даній прямій *n* (рис. 4.6).

Проводимо через точку А горизонталь *h* і фронталь *f*, перпендикулярні даній прямій *n*. Для цього з умов перпендикулярності повинно бути $h_1 \perp n_1$ і $f_2 \perp n_2$. Шукана площина Θ визначається двома перетинаючимися прямими: горизонталь *h* і фронталь *f*.

Приклад 3. Побудувати проекції і натуральну величину перпендикуляра, опущеного з даної точки М на профільно проектуючу площину Σ (а || б) (рис. 4.7).

У даному випадку можна використовувати збереження перпендикулярності між виродженою проекцією площини і відповідною проекцією шуканого перпендикуляра. Виродженою проекцією профільно-проектуючої площини є її профільна проекція. Тому слідує побудувати профільні проекції M_3 і Σ_3 даної точки М і даної площини Σ.

Це побудування виконано за допомогою базової площини Ф, від горизонтальної проекції $Ф_1$, якою вимірювались глибини даних елементів, а від її профільної проекції $Ф_3$ ці глибини відкладалися по новим лініям зв'язку.

Опустивши з проекції M_3 перпендикуляр M_3N_3 на проекцію Σ_3 знайдемо натуральну величину перпендикуляра MN. Повертаючись в систему площин $П_1$, $П_2$, отримаємо проекції M_1N_1 і M_2N_2 шуканого перпендикуляра.

4.4. Взаємна перпендикулярність площин.

Як відомо, якщо дві площини Θ і Λ взаємно перпендикулярні, то кожна з них проходить через перпендикуляр до другої площини.

Справедливо і зворотня пропозиція, тобто дві площини Θ і Λ взаємно перпендикулярні, якщо одна з них проходить через перпендикуляр до іншої.

Звідси слідують два способи побудови взаємно перпендикулярних площин Θ і Λ: чи площина Λ проводиться через пряму *n*, перпендикулярну площині Θ, чи площина Λ проводиться перпендикулярно прямої *n*, належній площині Θ.

Таким чином, побудування взаємно перпендикулярних площин зводиться до побудування взаємно перпендикулярних прямої і площини.

Через довільну точку простору можна провести нескінченну множину площин, перпендикулярних до даної площини. Всі ці площини будуть проходить через перпендикуляр до даної площини, проведеної через дану точку. Тому для визначення рішень необхідно мати додаткові умови.

Приклад. Через пряму *l* провести площину Λ, перпендикулярну до даної площини Θ (A, B, C) (рис. 4.8).

Через довільну точку і прямої *l* проводимо пряму *n*, перпендикулярну до площини Θ, для чого заздалегідь в площини Θ будуємо довільні горизонталь *h* і фронталь *f*, а потім проводимо $h_1 \perp n_1$ і $f_2 \perp n_2$. Перетинаючись прямі *l* і *n* визначають шукану площину А, перпендикулярну площині Θ.

4.5. Взаємна перпендикулярність прямих загального положення.

Так як прямий кут між прямими загального положення спостерігається на обох площинах проекцій, то перпендикулярність прямих загального положення потрібно зводити до перпендикулярності прямої і площини. При цьому використовується відоме положення, що дві прямі перпендикулярні в тому і тільки в тому випадку, якщо через кожну з них можна провести площину, перпендикулярну до другої прямої.

Таким чином, побудова взаємно перпендикулярних прямих загального положення зводиться до побудови взаємно перпендикулярних прямої і площини.

Розглянемо приклад взаємної перпендикулярності прямих загального положення.

Приклад 1. З даної точки А опустити перпендикуляр на пряму загального положення.

Якщо через точку А провести допоміжну площину Θ, перпендикулярну прямої l з площиною Θ і, нарешті, з'єднати точку А з точкою В, то пряма АВ буде перпендикулярна до прямої l. Допоміжну площину Θ визначаємо горизонталлю h і фронталлю f, проведеним через точку А перпендикулярно прямій l, для чого проводимо $h_1 \perp l_1$ і $f_2 \perp l_2$ (рис. 4.9б). Далі, за допомогою допоміжної прямої t, фронтально конкуруючою з прямою l, знайдемо точку В перетину прямої l з площиною Θ (h f). З'єднати точку А з точкою В, отримаємо шуканий перпендикуляр АВ до прямої l.

Приклад 2. Визначити, перпендикулярні чи ні прямі l і m?

Для вияснення питання перпендикулярності даних прямих необхідно побудувати допоміжну площину, перпендикулярну одній з даних прямих, і встановити відносне положення другої прямої і допоміжної площини. Якщо друга пряма буде належати допоміжній площині чи буде їй паралельна, то данні прямі взаємно перпендикулярні.

Через довільну точку А проведемо горизонталь h і фронталь f, перпендикулярні до однієї є даних прямих, наприклад прямої l, при цьому $h_1 \perp l_1$ і $f_2 \perp l_2$ (рис. 4.10). Тоді площина Θ, визначаємо прямими h і f, буде перпендикулярна до прямої l.

Вияснимо відносне положення прямої m і площини Θ. Для цього проведемо в площині Θ допоміжну пряму t, фронтально конкуруючою з прямою m. Якщо зараз розглянути відносне положення прямих m і t, то неважко встановити, що вони паралельні. Значить пряма m паралельна і площині Θ.

Таким чином, пряма m, будучи паралельна площині Θ, перпендикулярної прямої l, буде перпендикулярна прямій l.

Питання для самоконтролю:

1. В якому випадку прямій кут проекціюється без спотворення на площину проекцій?
2. Яка пряма називається прямою найбільшого нахилу площини до площини проекцій?

3. В якому випадку пряма і площина загального положення взаємно перпендикулярні?
4. Як побудувати площину перпендикулярну до даної?

ЛЕКЦІЯ № 5

Перпендикулярність прямих і площин. Метричні задачі

План лекції

5.1. Спосіб обертання навколо осі, перпендикулярній площині проекцій.

5.2. Обертання площини навколо лінії рівня.

5.3. Спосіб плоскопаралельного переміщення.

5.4. Спосіб заміни площин проекцій.

Якщо прямі лінії чи плоскі фігури розташовані паралельно чи перпендикулярно площинам проекцій, то визначення на комплексному кресленні відстані кутів істинних величин виконується безпосередньо без додаткових побудов.

У випадку загальних положень прямих, площин і фігур визначення натуральних величин потребує спеціальних побудов, за допомогою яких виконується перехід до більш зручних проекцій.

5.1. Спосіб обертання навколо осі, перпендикулярній площині проекцій.

Згідно цього способу основні площини проекцій $П_1$ і $П_2$ залишаються незмінними, а проектуючи відрізки прямих плоским фігурам придають шляхом обертання навколо осей нові положення, при яких на комплексному кресленні отримають їх натуральні величини.

<u>Обертання точки</u>. В якості осей вибираємо прямі, перпендикулярні площинам проекцій.

<u>Обертання прямої</u>. Вісь обертання $BB_1 \perp П_1$. Площина обертання $ΣП_1$. Точка A переміщується по радіусу $R \perp BB_1$ в площині обертання. На площині $П_1$ траєкторія точки A проектується в натуральну величину, а на площині $П_2$ по прямій паралельній осі Ξ.

5.2. Обертання площини навколо лінії рівня.

В цьому випадку вісь обертання паралельна площині проекцій. Точки площини, які лежить на осі обертання в обертанні не приймають участь. Всі останні точки обертаються по радіусам в площинах перпендикулярних осі обертання.

5.3. Спосіб плоскопаралельного переміщення.

Плоскопаралельним переміщенням фігури в просторі називається таке її переміщення, при якому всі точки фігури переміщуються в площинах, паралельні між собою.

Задача. Двома плоскопаралельними переміщеннями спроектувати пряму АВ в точку.

Проекція A_2B_2 дорівнює дійсній величині відрізка АВ.

5.4. Спосіб заміни площин проекцій.

Згідно цьому способу геометричні елементи залишаються нерухомими. Для отримання зручних проекцій виконується заміна площин проекцій Π_2 на Π_4, Π_4 на Π_5 і т.д. При цьому кожна нова площина проекцій повинна бути перпендикулярна площині, з якою утворює систему двогранного кута $\Pi_4 - \Pi_1$, а $\Pi_5 - \Pi_4$.

Задача. Двома замінами площин проекцій спроектувати пряму СД в точку.

Питання для самоконтролю:

1. Назвіть мету перетворення комплексного рисунка.
2. Чим відрізняється плоскопаралельне переміщення від заміни площин проекцій?
3. Скільки замін площин проекцій треба зробити, щоб відрізок прямої загального положення спроектувати в точку?

ЛЕКЦІЯ № 6

Багатогранники. Перетин багатогранників з площиною та прямою

План лекції

6.1. Загальні відомості.

Багатогранники, як один із видів просторових геометричних форм, знаходять широке застосування в різноманітних інженерних спорудах і конструкціях сучасних будинків.

Багатогранною поверхнею, або багатогранником, називають поверхню, складену з кінцевого числа плоских багатокутників, що не лежать в одній площині.

Елементами багатогранника являються його грані, ребра і вершини. Лінії перетину суміжних граней називають ребрами, точки перетину ребер – вершинами багатогранника. Сукупність всіх ребер багатогранника називають його сіткою. На кресленнях, як правило, багатогранники зображаються проекціями своїх сіток.

Між кількістю вершин (В), ребер (Р) та граней (Г) багатогранника існує співвідношення (теорема Ейлера):

$$В + Г – Р = 2.$$

Багатогранники поділяються на опуклі, та не опуклі. Опуклими називається багатогранник, який розміщається на один бік від площини будь-якої його грані.

Багатогранники можуть бути незамкненими, наприклад призматична поверхня та багатогранний кут (рис. 6.1, 6.2) та замкненими. Якщо площини, що утворюють грану поверхню, замикають простір з усіх боків, то вони формують замкнений багатогранник (рис. 6.3.).

Серед множини багатогранників в одну групу можна виділити правильні опуклі багатогранники (тіла Платона). У таких багатогранників усі ребра, грані, плоскі двогранні та просторові кути дорівнюють один одному.

Існують п’ять правильних багатогранників або тіл:

- ✓ *Тетраедр* (чотиригранник). Гранями якого є чотири рівносторонніх трикутники (рис. 6.4). Побудову тетраедра зручно починати з горизонтальної проекції.
- ✓ *Октаедр* (восьмигранник), гранями якого є вісім рівносторонніх трикутників (рис. 6.6). На обох проекціях октаедр зображено квадратом з діагоналям.
- ✓ *Ікосаедр* (двогранник). Утворений з двадцяти рівносторонніх трикутників (рис. 6.6); побудову цього багатогранника також зручно починати з горизонтальної проекції, де зображуються дві співосні правильні п’ятикутні піраміди, основи яких повернуті одна відносно другої. На полі $П_2$ поводять загальну вертикальну вісь, з точки D_2, розміром сторони трикутника роблять засічку, що проходить через B_1, і таким чином визначають точку B_2, а отже, і площину основи нижньої піраміди. Вершину нижньої піраміди. Вершину нижньої піраміди визначають засічкою того ж радіуса з точки A_2.
- ✓ *Гексаедр* (шестигранник), або куб, гранями якого є шість квадратів (рис. 6.7).
- ✓ *Додекаедр* (двадцятигранник), утворений з дванадцяти правильних п’ятикутників (рис. 6.8), побудову його доцільно починати з горизонтальної проекції, де зображується кожна основа у вигляді правильного п’ятикутника. З точок нижньої основи проводять бісектриси всіх п’яти кутів. Нижню основу повертають навколо фронтально проектуючого ребра, що проходить через точку F_2. Щоб знайти проекцію C_2, визначають спочатку її горизонтальну проекцію C_1 на перетині фронтальної траєкторії обертання точки A_1 з бісектрисою, проведеною через F_1. З точки C_1 проводять вертикальну лінію сполучення до перетину з дугою радіуса F_2A_2, проведено з точки F_2, і в тій же фронтально проектуючий грані визначають точку D_2. На горизонтальній проекції точки зовнішнього контуру визначають за допомогою кола, описаного з центра п’ятикутника. Побудову верхньої основи додекаедра показано на рисунку. Її можна одержати засічкою D_2G_2, що дорівнює стороні п’ятикутника на вертикальній лінії сполучення, проведеній з проекції G_1.

Навколо всіх правильних багатогранників можна описати сферу.

6.2. Піраміди, призми та призматоїди.

Багатогранник називають простим, якщо: а) усі його грані є простими багатокутниками, тобто такими, у яких жодна пара несуміжних сторін немає спільних точок; б) жодні дві несуміжні грані не мають спільних точок (за винятком, може, загальної); в) дві суміжні грані мають лише одне спільне ребро і не мають інших спільних точок.

З усіх простих багатогранників найбільш практичний, крім правильних багатогранників, викликають піраміди, призми та призматоїди.

Пірамідою називають багатогранник, усі грані якого, крім одної, мають спільну вершину (рис. 6.9). Піраміду можна одержати, якщо перерізати багатогранний кут площиною, що не проходить через вершину, перетинає всі ребра цієї поверхні та утворює основу. Оскільки всі бічні грані піраміди – трикутники, піраміда цілком визначається заданням її основи та вершини.

Призмою називають багатогранник, обмежений призматичною поверхнею та двома паралельними площинами, не паралельними ребрами призми (рис.6.10). Ці дві грані звуться основами призми, грані призматичної поверхні – бічними гранями, а її ребра – ребрами призми. Основами призми є рівні між собою багатокутники, бічні ребра призми дорівнюють одне одному. Якщо основи не паралельні між собою, призму називають зрізаною. Коли основами призми є перпендикулярні перерізи призматичної поверхні, призму називають прямою, якщо ця умова не виконується, - похилою.

Призми розрізняють за числом бічних граней, що дорівнюють числу сторін багатокутника основи. Якщо в основі лежить правильний багатокутник, призми та піраміди називають правильними.

Призматоїдом називають багатогранник, усі бічні грані якого є трикутниками або трапеціями. Основи призматоїда найчастіше паралельні одна одній і являють собою багатокутники з довільним числом сторін. На рис. 6.11 зображено призматоїд, нижньою і верхньою основами якого є квадрати ABCD і EFGH.

6.3. Перетин багатогранників з площиною.

При перетині багатогранника площиною слід визначити перетин кожного ребра багатогранника окремо заданою площиною і одержаний багатогранник є шуканим перерізом (рис. 6.12).

В деяких випадках більш ефективними при знаходженні натуральної величини перерізу багатогранника є використання методу перетворення комплексного рисунку (рис. 6.13 і 6.14).

6.4. Перетин багатогранників з прямою лінією.

Для того, щоб знайти точки перетину прямої з багатогранником слід: а) провести через пряму проектуючу допоміжну площину (рис. 6.15); б) знайти переріз багатогранника з проектуючою площиною; в) визначити точки перетину контуру перерізу з прямою (т. MN). Це й будуть шукані точки перетину прямої з багатогранником (рис. 6.15 і 6.16).

6.5. Взаємний перетин багатогранників

Лінія перетину двох багатогранників зветься лінією переходу і є якась ломана лінія, яка може розпадатися на дві і більше частини. Ці частини, в окремому випадку, можуть бути плоскими багатокутниками.

Вершини лінії перетину багатогранників є точки перетину ребер першого багатогранника з гранями другого, а також ребер другого багатогранника з гранями першого. Сторонами, або ланками лінії перетину є відрізки прямих, по яким перетинаються грані обох багатогранників.

По цьому побудову вершин лінії перетину багатогранників зводиться до багаторазового рішення задачі на перетин прямої (ребра) з площиною (гранню), а побудова сторін цієї лінії – до багаторазового рішення на перетин двох площин, а її сторони знаходять з’єднання відповідних вершин, які одночасно знаходяться в грані першого і в грані другого багатогранника.

При з’єднанні вершин лінії перетину необхідно враховувати видимість її ланок. Видимими ланками будуть тільки ті, які належать одночасно видимим граням як першого, так і другого багатогранника.

На прикладі рис. 6.17 (а, б) показана послідовність побудови лінії перетину тригранної призми з трикутною пірамідою.

Питання для самоконтролю:

1. Що називається багатогранником?
2. Які багатогранники відносяться до правильних?
3. Які знайти фігуру перетину багатогранника площиною?
4. Як визначити точки перетину прямої з багатогранником?
5. Як будується лінія взаємного перетину багатогранників?

ЛЕКЦІЯ № 7

Розгортки багатогранників

Розгорткою поверхні називають плоску фігуру, що утворюються при суміщенні відсіку поверхні з площиною при його розгортанні. Деякі геометричні властивості елементів поверхонь не змінюються при розгортанні. Так, лінія поверхні переходить в лінію розгортки; довжина ліній, величини плоских кутів та площ, обмежених замкненими лінями, зберігаються.

Поверхню багатогранника завжди можна сумістити з площиною, тому що вона складається з плоских відсіків. Лише для багатогранників може бути побудована точна розгортка, тому що вона складається з плоских відсіків, які можна сумістити з площиною.

Для побудови розгортки багатогранника усі його грані суміщають з площиною проекції або з площиною, яка паралельна площині проекцій, для того, щоб усі грані зобразилися не спотвореними. Для цього можна рекомендувати два способи: обертання граней навколо спільних ребер, які перелельні площині проекцій, та побудову неспотворених величин граней за визначеними довжинами ребер (для трикутників граней).

На рис. 7.1 побудовано розгортку тригранної піраміди ABCS на горизонтальну площину її основою. Для цього кожну грань обертаємо навколо її горизонталі – ребра основи. Побудову розгортки починаємо з обертання грані SBC навколо горизонталі BC. Проекції B_1 і C_1 при обертанні не змінюють свого положення, а вершина S переміщується у просторі по колу, площина якого перпендикулярна до осі обертання BC. Горизонтальною проекцією площини є пряма, перпендикулярна до проекції B_1C_1. Щоб визначити положення точки S_1 розгортки, спочатку знаходимо натуральну величину $S_1^1B_1$ ребра SB за допомогою способу прямокутного трикутника, а потім відстань $S_1^1B_1$ відкладаємо від точки B_1 на перпендикулярі S_1B. Трикутник $S_1^1B_1C_1$ є натуральною величиною грані SBC. Бічні грані SAB та SAC піраміди обертаємо навколо AB і AC. Для побудови використано натуральні величини ребер $S_1^1B_1$ і $S_1^1C_1^1$, одержані при обертанні першої грані. Побудована плоска фігура є розгорткою поверхні піраміди на горизонтальну площину її основи.

На рис. 7.2 показано побудову розгортки бічної поверхні призми з фронтальними ребрами послідовними обертаннями граней навколо бічних ребер до суміщення граней з фронтальною площиною, що проходить через ребро CF. Вершини багатогранника переміщуються у фронтально-проектуючих площинах, перпендикулярних до ребра CF. Для побудови використано те, що ребра основ призми горизонтальні і зображуються на горизонтальній проекції без спотворення.

Якщо всі ребра багатогранника знаходяться в загальному положенні, спочатку визначаємо їх натуральні величини, а потім будуємо розгортку. На рис. 7.3а зображено триграну піраміду в загальному положенні. За допомогою способу прямокутного трикутника знаходимо натуральні величини усіх ребер. На рис. 7.3б спочатку побудовано грань ABS. Для цього на довільній прямій відкладаємо натуральну величину ребра AB і з точок A та B засічками, які дорівнюють натуральним величинам ребер AS і BS, знаходимо точку S. Точки C^{1}, C^{11} і C^{111} розгортки будуємо за допомогою засічок із вершини A, B і S грані ASB.

В тому випадку, коли основи призми не являють собою натуральних величин, доцільно використати метод „нормального перерізу” призми, тобто ввести допоміжну площину Σ перпендикулярно відносно натуральних величин ребер частин похилої призми ABCEFG (рис. 7.4) і знайти натуральну величину периметру Δ123 (побудову розгортки призми легко прослідкувати за рис. 7.4).

<u>Задача 7.1</u>

Побудувати повну розгортку похилої чотирикутної піраміди з вершиною S і основою ABCD в горизонтальній площині проекцій $П_1$.

Примітка. Для побудови розгортки піраміди використовувати спосіб розкатки – послідовного суміщення граней піраміди з площиною. Всі грані піраміди сумістити з фронтальною площиною ребра SA піраміди.

<u>Задача 7.2</u>

Побудувати повну розгортку усіченої похилої трикутної піраміди.

Питання для самоконтролю:

1. Що називають розгорткою поверхні?

2. В чому полягає суть метода „нормального перерізу”?
3. Як виконують розгортку піраміди способом розкатки?

ЛЕКЦІЯ № 8

Криві лінії і поверхні

План лекції

8.1. Вступ.

8.2. Криві лінії.

8.3. Циліндричні і конічні гвинтові лінії.

8.4. Криві поверхні.

8.5. Розгортні лінійчаті поверхні.

8.1. Вступ.

Криві лінії і поверхні знаходять широкий вжиток в науці і техніці. Кривими поверхнями обмежуються будівельні конструкції, корпуса судів, різноманітні машини і їх окремі деталі. Тому важко вказати таку область техніки де інженеру не приходилось би зустрічатися з кривими лініями і поверхнями.

8.2. Криві лінії.

Криві лінії поділяються на плоскі і просторові. Крива називається плоскою, якщо всі її точки належать деякій площині.

В точці перегину крива лінія поступово переходить на другу сторону дотичної.

В вузловій точці крива лінія сама себе перетинає.

В точці повернення дотична являється загальною для обох гілок кривої.

В точці повторення крива торкається сама себе.

Крива називається просторовою якщо вона не лежить усіма точками в одній площині.

Приблизне визначення довжини просторової кривої.

8.3. Циліндричні і конічні гвинтові лінії.

8.4. Криві поверхні.

Крива поверхня утворює рух лінії по визначеному закону.

Ця лінія називається твірною, а нерухома лінія по якій рухається твірна кривої поверхні називається спрямовуючою.

Всі поверхні в залежності від виду твірної поділяються на два основних типи: лінійчаті у яких твірна пряма лінія і поверхні з криволінійними твірними.

Лінійчаті поверхні в свою чергу можуть бути розгортними і нерозгортними.

8.5. Розгортні лінійчаті поверхні.

1. Циліндрична поверхня.

Циліндрична поверхня утворюється при переміщенні прямої твірної вздовж кривої спрямовуючої, яка має постійний напрямок.

2. Конічна поверхня.

Конічна поверхня утворюється прямою лінією, яка рухається вздовж кривої лінії і яка має нерухому точку.

3. Поверхня з ребром повернення (торс).

Ця поверхня утворюється безперервним рухом прямолінійної твірної, яка торкається в усіх своїх положеннях деякої просторової кривої, називаємої ребром повернення. Якщо ребром повернення є циліндрична гвинтова лінія, то утворена поверхня називається розгортним евольвентним гелікоїдом.

Питання для самоконтролю:

1. Яка крива називається плоскою?
2. Які поверхні відносяться до розгортних лінійчатих?
3. Яким чином утворюється торс?

ЛЕКЦІЯ № 9

Криві поверхні

План лекції

9.1. Нерозгортні лінійчаті поверхні.

9.2. Поверхні обертання.

9.3. Поверхні нелінійчаті.

9.1. Нерозгортні лінійчаті поверхні.

Це такі поверхні, які утворюються рухом прямої, яка в усіх своїх положеннях перетинає дві напрямляючі і залишається паралельною площині паралелелізму (поверхні Каталана).

Циліндроїд – утворюється при переміщенні лінійчатої твірної по двум кривим, яка залишається при цьому в усіх своїх положеннях паралельною заданій площині паралелелізма.

Приклад: поверхню циліндроїда мають культурний та полугвинтовий корпус плуга.

Кут α в перерізі площини ZOX зветься кутом трощення; кут β – пл. ZOY – кут обертання; кут γ – пл. XOY – кут сдвигу.

Корпус плуга з циліндроїдною поверхнею однаково добре троще та повертає пласт. У культурного отвала кути такі: $\alpha = 30^0...130^0$; $\beta = 40^0...45^0$; $\gamma_{max} = 5^0...7^0$.

Полугвинтовий корпус плуга відрізняється ще більшим розвитком кутів γ та β. Тому полугвинтовий корпус плуга добре обертає, та слабше трощить, а культурний навпаки. Гвинтова поверхня (гелікоїд) корпуса плуга дає повний оберт пласта.

Коноїд – є часним випадком циліндроїда, коли пряма твірна переміщується паралельно площині паралелелізма по двом спрямовуючим: прямої та кривої.

Гіперболічний параболоїд (скісна площина) – є також часним випадком циліндроїда, коли пряма твірна переміщується по двом мимобіжним прямим – спрямовуючим.

9.2. Поверхні обертання.

Поверхні утворенні обертанням прямолінійною або криволінійною твірною навколо нерухомої вісі, називаються поверхнями обертання.

Однополостний гіперболоїд обертання

Властивість однополостного гіперболоїда, який має дві серії прямолінійних твірних, використав в будівельній техніці російський інженер Шухов В.Г. (1853 – 1939). Він конструював радіомачти, опори та башти.

9.3. Поверхні нелінійчаті.

A. Другого порядку. Вище були розглянуті лінічасті поверхні другого порядку: циліндр, конус, гіперболічний параболоїд і однополостний гіперболоїд. Зараз розглянемо інші поверхні другого порядку нелінійчаті: еліпсоїд, еліптичний параболоїд і двополостний гіперболоїд.

B. Циклічні поверхні утворюються окружністю змінного радіусу, центр якої переміщується по якій-небудь просторовій кривій. Коли окружність перпендикулярна до кривої, така поверхня називається каналовою.

Циліндричні поверхні знаходять використання в газопроводах, гідротурбінах, центр обіжних насосах.

C. Поверхня, яка здається каркасом.

Поверхня, що задається сукупністю ліній, які на ній лежать.

Така поверхня не зовсім визначена, так як можуть існувати інші поверхні з тим же каркасом, але які трохи відрізняються одна від іншої. Такий спосіб задання поверхні на кресленні служить для відображення поверхні, утворення якої не підкоряється ніякому геометричному закону.

Він знаходить використання при виготовленні кузовів автомобілів, в літакобудуванні і суднобудуванні.

D. Поверхні лекальні (графічні)

Якщо в якості ліній каркаса беруться горизонталі рельєфу земної поверхні, то поверхня називається топографічною.

Питання для самоконтролю:

1. Які поверхні називають поверхнями Каталана?
2. Що таке циліндроїд?
3. Як утворюються поверхні обертання?
4. Які криві поверхні вам відомі?

ЛЕКЦІЯ № 10

Перетин кривих поверхонь

План лекції

10.1. Загальний спосіб побудова лінії перетину двох поверхонь.

10.2. Спосіб допоміжних проекціюючих площин.

10.3. Спосіб допоміжних площин загального положення.

10.4. Спосіб допоміжних сфер.

10.5. Особливі випадки перетину поверхонь другого порядку.

Форма багатьох деталей, резервуарів, водопровідних і гідротехнічних споруджень представляють собою перетин кривих поверхонь. Тому графічні способи побудови креслень такого виду мають велике застосування в інженерній практиці.

10.1. Загальний спосіб побудова лінії перетину двох поверхонь.

Лінія перетину двох поверхонь представляє собою просторову чи плоску криву, яку будують по її окремим точкам за допомогою допоміжних січних поверхонь-посередників.

Дано: поверхня F_1 і поверхня F_2. Знайти лінію перетину (сукупність точок k_1, k_2, k_3...).

Алгоритм рішення:

1. Вводимо поверхню посередник Ф.
2. $\Phi \times F_1 = f_1$.
3. $\Phi \times F_2 = f_2$.
4. $f_1 \times f_2 = k$.

Для знаходження точки k_1 слід ввести поверхню Φ_1 і т.д.

10.2. Спосіб допоміжних проекціюючих площин.

Цей спосіб застосовують тоді, коли обидві поверхні можливо перетнути по графічно простим лініям (прямим чи окружностям) деякої сукупності просторових площин чи, зокрема, сукупністю площин рівня.

Для визначення лінії перетину двох поверхонь необхідно:

1. Знайти опорні точки цієї лінії (точки 1 - 4 рис. 10.2).
2. Раціонально розсікти обидві поверхні площиною рівня.
3. Побудувати лінії перетину допоміжної площини з обома даними поверхнями.
4. Знайти загальні точки поверхонь на перетині ліній перерізу.
5. Через опорні і проміжні точки провести шукану лінію перетину.

Розглянемо приклади побудови лінії перетину двох поверхонь вказаним способом.

Приклад 1. Побудувати лінію перетину конуса обертання з циліндром обертання.

Приклад 2. Побудувати лінію перетину двох циліндрів обертання.

Якщо при побудові лінії перетину двох поверхонь хоча б одна з них є проекціюючою, то треба використовувати виродження проекції цієї поверхні в лінію.

10.3. Спосіб допоміжних площин загального положення.

Цей спосіб рекомендується при побудові лінії перетину конічних і циліндричних поверхонь загального виду. У випадку перетину двох конусів допоміжні січні площини повинні проходити через пряму, яка з'єднує вершини конусів.

Кожна з цих площин буде перетинати ці конуси чи торкатися їх по твірним. Всі січні площини в цілому утворюють пучок, вісь якого є пряма. Через горизонтальний слід цієї осі пройдуть сліди простіших січних площин. Розглянута побудова відноситься до способу додаткового центрального проектування (рис. 10.3).

При перетині циліндричної поверхні з конічною потрібно через вершину конуса провести пряму, паралельну твірним похилого циліндра. При цьому всі допоміжні площини, які проходять через цю пряму, будуть розсікати циліндр і конус по твірним, а перетин яких виходять точки, загальні для обох поверхонь (рис. 10.4).

Для побудови перетину двох циліндричних поверхонь треба застосувати січні площини загального положення, які паралельні „площині паралелелізма”. Ця площина задається двома перетинаючимися прямими, які відповідно паралельні твірним двох циліндрів (рис. 10.5).

Кожна січна площина розсікає циліндри по твірним. В перетині яких лежать шукані точки.

10.4. Спосіб допоміжних сфер.

Даний спосіб базується на випадку перетину поверхонь обертання, коли одна з поверхонь є сферою.

Якщо центр сфери знаходиться на вісі якої-небудь поверхні обертання, то сфера соосна з поверхнею обертання і в перетині утворюється окружності.

Допоміжні сфери можуть бути концентричними і ексцентричними.

A. Спосіб концентричних сфер.

Приклад 1. Побудувати лінію перетину двох конусів обертання (вісі перетинаються і паралельні $П_2$).

Приклад 2. Побудувати лінію перетину кулі з довільною поверхнею обертання, вісь якої знаходиться в одній фронтальній площині.

З розглянутих прикладів витікає, що спосіб концентричних сфер можна застосувати при перетині двох поверхонь обертання, які мають загальну площину симетрії і кожна з яких утримує сімейство окружностей, по яким її можуть перетинати концентричні сфери загальні для обох поверхонь.

B. Спосіб січних ексцентричних сфер.

На рисунку 10.10 наведено приклад застосування прийому січних ексцентричних сфер. Перетинаються тор та однопорожнинний гіперболоїд обертання. Вісь тора перетинається з віссю обертання гіперболоїда, і обидві осі належать одній горизонтальній площині. Через прямолінійну вісь тора у зоні орієнтованого перетину поверхонь проведено січну площину Г, яка перетинає тор по окружності з центром Т. На осі гіперболоїда визначають положення центра S_1 січної сфери, що перетинає тор по окружності з центром Т. Ця сфера перетинає гіперболоїд по двох фронтальних окружностях. Менша окружність перетинається з перерізом тора в точці 1. Ще одна січна площина А перетинає тор по окружності з центром U, через який проводять перпендикуляр до перетину з віссю гіперболоїда в точці 0. Ця точка є центром другої січної сфери, за допомогою якої визначають точки 2 і 3. Точки 6, 7, 8 і 9 лінії перетину визначають безпосередньо як точки перетину горизонтальних контурів поверхонь. Шукана лінія перетину має дві замкнені частини симетричні відносно профільної площини, що проходить через вісь гіперболоїда.

10.5. Особливі випадки перетину поверхонь другого порядку.

Як було показано раніше, дві поверхні другого порядку в загальному випадку перетинаються по просторовій кривій четвертого порядку. Просторові криві четвертого порядку можуть приймати різну форму. Види перетину поверхонь другого порядку систематизують за виглядом лінії перетину:

1. Якщо лінія перетину має одну замкнену вітку без особливих точок, перетин поверхонь називають частковим урізуванням (див. рис. 10.4).
2. Повне проникнення – це випадок перетину, коли просторова крива має дві замкнені вітки (рис. 10.11).
3. Однобічне внутрішнє стискання має місце, коли поверхні, що перетинаються, мають в одній точці (точка M на рис. 10.12) спільну площину дотику. Крива лінія в цьому випадку перетинає сама себе в точці дотику.
4. Подвійне стискання – це особливий випадок перетину поверхонь, які мають дві спільні дотичні площини. У цьому випадку просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, які перетинаються в точках дотику M і N (рис. 10.13).

Загальний випадок, коли просторова крива четвертого порядку розпадається на дві плоскі криві другого порядку, визначає теорема Монжа: якщо дві поверхні другого порядку можна вписати в третю поверхню другого порядку або описати навколо неї, то перші дві перетинаються по двох плоских кривих другого порядку (рис. 10.13, рис. 10.14).

На рис. 10.13 показано сферу, яка вписана у два циліндри. Сфера дотикається до вертикального циліндру по окружності, розташованій в горизонтальній площині, яка проходить через точки M і N.

Питання для самоконтролю:

1. Коли застосовують спосіб допоміжних проекціюючих площин?
2. Алгоритм побудови лінії перетину поверхонь за допомогою способу концентричних сфер.

3. В якому випадку користуються способом допоміжних площин загального положення?
4. Які є особливі випадки перетину поверхонь другого порядку?

ЛЕКЦІЯ № 11

Плоский переріз кривих поверхонь та їх розгортки

План лекції

11.1. Січення кривих поверхонь проекціюючими площинами.

11.2. Січення кривих поверхонь площинами загального положення.

11.3. Розгортка похилого циліндра (спосіб розкатки).

11.4. Розгортка похилого конуса.

Побудова плоских перерізів кривих поверхонь виконується аналогічно побудові перерізу багатогранників.

Точки, що належать фігурі січення кривої поверхні будують шляхом проведення допоміжної лінії або шляхом проведення допоміжних площин.

Особливістю побудови плоских січень кривих поверхонь є необхідність знаходження опорних точок, які відрізняються своїм характерним положенням від інших точок фігури.

До них відносяться вища та нижча точки фігури січення з крайніми твірними, найближча й найбільш віддалена точки фігури січення.

11.1. Січення кривих поверхонь проекціюючими площинами.

Для визначення натуральної величини циліндра і кулі застосований спосіб заміни площини проекцій, а натуральна величина фігури січення конуса визначена способом суміщення.

11.2. Січення кривих поверхонь площинами загального положення.

Задача № 1.

Побудувати проекцій фігури січення циліндра площиною загального положення, визначити натуральну величину січення і побудувати розгортку поверхні.

Рішення задачі виконано за допомогою способу заміни площин проекцій так, щоб січна площина перетворилась в проектуючу.

Задача № 2.

Побудувати проекцію фігури січення конуса площиною загального положення, визначити натуральну величину фігури січення і побудувати розгортку поверхні конуса з нанесенням на неї лінії січення.

При вирішенні задачі використовуються горизонтальні січні площини, які перетинають конус по окружностям, а площиною АВС по прямим лініям. Перетин відповідних окружностей і прямих дають точки, які належать фігурі січення.

Задача 3.

Побудувати проекцію фігури січення кулі площиною загального положення, визначити натуральну величину фігури січення і побудувати розгортку поверхні кулі з нанесенням на неї лінії січення.

При вирішенні задачі використовуються заміни площин проекцій так, щоб січна площина перетворилась в проектуючу.

11.3. Розгортка похилого циліндра (спосіб розкатки).

Щоб розгорнути похилий еліптичний циліндр слід, перш за все, знайти натуральну величину його твірної. На приведеному прикладі ми замінили площину проекцій $П_2$ на нову площину $П_4$, твірні циліндра мають натуральні величини. Далі, використовуючи метод розкатки, будуємо розгортку бокової поверхні похилого циліндра. Послідовність побудови розгортки не важко прослідкувати за рисунком.

11.4. Розгортка похилого конуса.

В випадку розгортки похилого еліптичного конуса слід основу його розбити на багатокутник і розгортати як багатокутну піраміду. Цей випадок ми розглядали раніше.

На рисунку ми побудували точки A, B і C та знайшли натуральні величини твірних SA, SB, SC методом обертання. Далі будуємо частину розгортки, яка складається з трикутників SAB, SAC... (метод тріангуляції).

Питання для самоконтролю:

1. В чому полягає особливість побудови плоских січень кривих поверхонь?

2. Як методом розкатки побудувати розгортку бокової поверхні похилого циліндра?
3. Побудувати проекції фігури січення конуса площиною загального положення.

ЛЕКЦІЯ № 12

Аксонометрія

План лекції

12.1. Загальні поняття.

Креслення, які одержують ортогональним проеціюванням на дві і більш площини проекцій з подальшим їх суміщенням (комплексні креслення або епюри Монжа), не мають об'ємні наочності – рис. 12.1а. На кожній з проекцій губиться один з основних вимірів фігури (на фронтальній проекції губиться глибина, на горизонтальній – висота і т.д.). Це відбувається тому, що напрями проеціювання співпадають з напрямами осей прямокутної системи координат, до якої віднесена фігура.

Для одержання наочного зображення фігури напрям проеціювання її на деяку площину П' повинен не співпадати з напрямком жодної з осей координат, тобто з напрямами основних вимірів – 12.1б. При цьому проекція фігури зберігає усі її виміри (жодна з осей не проектується в точку), тобто має достатньо об'ємну наочність. Така проекція називається аксонометрією фігури, проекції осей – аксонометричними осями, а площина П' – аксонометричною площиною.

Якщо напрям проеціювання S перпендикулярний до П', аксонометрія називається прямокутною, в іншому разі – косокутною.

При проеціюванні довжини відрізків змінюються (спотворюються). Значить, замість натуральних координат точки A (X_A, Y_A, Z_A), що визначаються координатними відрізками $O_A=X_A$, $A_XA_1=Y_A$, $A_1A=Z_A$ одержимо аксонометричні координати точки, що будуть визначатися аксонометричними координатними відрізками $O'A'_X = X'_A$, $A'_XA'=Y'_A$, $A'_1A'=Z'_A$. Відношення аксонометричного координатного відрізка до натурального називається показником (коефіцієнтом) спотворення. Показник спотворення абсцис $U = \left| X'_A / X_A \right|$, ординат $V = \left| Y'_A / Y_A \right|$, аплікат $W = \left| Z'_A / Z_A \right|$.

У косокутній аксонометрії залежність між показниками спотворення задовольняє рівнянню:

$$U^2 + V^2 + W^2 = 2 + ctg^2\varphi \qquad (12.1)$$

де φ – кут між напрямком проеціювання S і площиною П'.

Очевидно, що в прямокутній аксонометрії (φ=90^0) рівняння (12.1) має вигляд:

$$U^2 + V^2 + W^2 = 2 \qquad (12.2)$$

Цими формулами користуються для визначення показників спотворення в різних видах аксонометрій.

Якщо показники не рівні між собою, тобто маємо три різних показника U, V, W, аксонометрія називається триметрією; якщо два з них рівні – диметрією; якщо всі показники рівні, тобто маємо однаковий коефіцієнт по всіх осях, аксонометрія називається ізометрією.

Побудова аксонометрії довільної точки за її ортогональними проекціями виконується у такому порядку (рис. 12.2):

- з ортогональних проекцій A_1, A_2 визначаються натуральні координати точки X_A, Y_A, Z_A (рис. 12.2а);
- враховуючи показники спотворення, обчислюються аксонометричні координати точки:

  $X'_A = U \times X_A$; $\quad Y'_A = V \times Y_A$; $\quad Z'_A = W \times Z_A$;
- по заданих аксонометричних осях будується координатна ламана лінія: по осі X відкладаємо $O'A'_X = X'_A$, відрізок $A'_xA'_1 = Y'_A$ відкладається паралельно осі y; з одержаної точки A'_1 проводиться лінія паралельно осі Z і відкладається $A'_1A' = Z'_A$ (рис. 12.2б).

A' – аксонометрична проекція точки; проекція A'_1 називається вторинною горизонтальною проекцією точки А.

Зауважимо, що як в ортогональних проекціях, так і в аксонометрії одна проекція точки не визначає її положення в просторі. Наприклад, точка B_2 (рис. 12.2а) або B' (рис. 12.2б) не дають можливості визначити координати точки В.

Для визначення положення точки у просторі (визначення її координат) її аксонометрія - A' повинна бути доповнена вторинною горизонтальною проекцією A'_1.

За аксонометричні вісі можна приймати три довільні відрізки, проведені з однієї точки O під довільними кутами. Це випливає як наслідок теореми Польке-Шварда і дає нам повну свободу у виборі напряму аксонометричних осей або показників спотворення.

В залежності від напрямку проеціювання S та положення площини П' можна одержувати безліч видів аксонометрій, кожен з яких буде характеризуватися напрямами аксонометричних осей та показниками спотворення по осям. З множини видів аксонометрій в ГОСТ 2.317 – 69 введено п'ять: прямокутна ізометрія, прямокутна диметрія, косокутна фронтальна ізометрія, косокутна фронтальна диметрія (кабінетна проекція), косокутна горизонтальна ізометрія (військова перспектива). В кресленнях всіх галузей промисловості і будівництва найчастіше використовуються перші три види.

12.2. Прямокутна ізометрія.

Напрям аксонометричних осей. В прямокутній ізометрії осі утворюють між собою кут в 120^0 (рис. 12.3а).

Показники спотворення по всіх трьох осях однакові, тобто U=V=W=K. З формули (12.2) маємо $3K^2 = 2$, звідки K = 0,82.

Таким чином при побудові ізометрії точки кожну її натуральну координату необхідно множити на 0,82. Але на практиці координатні відрізки відкладаються в натуральну величину, тобто практичні показники спотворення прийняті $K_П = 1$. Це означає, що практична ізометрія дає збільшене зображення; показник збільшення $P = 1/0{,}82 = 1{,}22$, тобто масштаб практичної ізометрії буде М 1,22:1.

В загальному випадку аксонометричною проекцією кола є еліпс. Найчастіше доводиться будувати аксонометрії кіл, які лежать в площинах рівня, тобто розташовані паралельно одній з координатних площин (або належать їм). В цих випадках велика ось еліпса розташовується перпендикулярно до тієї координатної осі x, y або z, яка перпендикулярна до площини кола.

Величини осей еліпса в залежності від діаметра кола в ізометрії: велика ось AB = 1,22d; мала ось CD = 0,7ld.

На рис. 12.3а зображено розташування координатних осей в прямокутній ізометрії; на рис. 12.3б – напрямки штриховки в розрізах; на рис. 12.3в – напрями осей еліпсів (проекцій кіл, розташованих в площинах рівня) і їх величина залежно від d.

12.3. Прямокутна диметрія.

Напрям аксонометричних осей в прямокутній диметрії зображені на рис. 12.4а. Для зручності побудови вказаних кутів користуються величинами їх тангенсів: $tg7^0 10' \approx 1/8$; $tg41^0 25' = 7/8$.

Показники спотворення для кращого зорового сприймання прийняті $U = W$, $V = \left(1/2\right)U$, що з формули (12.2) дає U = V = 0,94; V = 0,47.

Практичні показники спотворення прийняті U = W = 1, V = 0,5; при цьому показник збільшення креслення P = 1,06, тобто масштаб практичної диметрії M 1,06:1.

Напрямки штриховки в розрізах – рис. 12.4б.

Величини осей еліпсів. Кола, що лежать в горизонтальних та профільних площинах рівня, зображуються еліпсами з осями AB = 1,06d; CD = 0,35d; кола у фронтальних площинах рівня зображуються з осями AB = 1,06d; CD = 0,94d (12.4в).

12.4. Косокутна фронтальна симетрія (кабінетна проекція).

Напрям аксонометричних осей кабінетної проекції зображені на рис. 12.5а.

Показники спотворення прийняті U = W = 1, V = 0,5. При цьому фігури, що розташовані у фронтальних площинах рівня (паралельно площині XOZ), зображуються без спотворення. Це суттєво спрощує побудову креслень.

Напрями штрихування в розрізах – рис. 12.5б.

Величини осей еліпсів. Кола як і будь-які фігури, що лежать у фронтальних площинах рівня, зображуються в натуральну величину; це виключає трудомістку побудову еліпсів. Кола. що лежать у горизонтальних та профільних площинах рівня, зображується еліпсами з осями AB = 1,07d; CD=0,33d. Напрями осей еліпсів показані на рис. 12.5в.

Звичайно в кабінетній проекції еліпси будуються з спряженими діаметром AB = d; CD = 0,5d, при цьому AB$\perp$OZ для горизонтальних площин рівня і AB$\perp$OX для профільних площин рівня.

12.5. Приклади побудова аксонометрій.

Звичайно аксонометричні проекції об’єктів будуються за їх заданими комплексними кресленнями. При цьому використовуються інваріанти паралельного проеціювання: проекцією прямої є пряма; аксонометричні проекції паралельних прямих паралельні між собою; аксонометричні проекції рівних та паралельних прямих паралельні між собою відрізків теж рівні і паралельні між собою.

Аксонометрія довільної точки будується за її координатами, користуючись координатною ламаною лінією (рис. 12.2), з урахуванням показників спотворення.

Аксонометрія плоских багатокутників (рис. 12.6). Побудова аксонометрій плоского n – кутника зводиться до визначення аксонометричних проекцій його вершин по їх координатам, які надалі з’єднуються між собою прямими. Послідовність побудов розглянемо на прикладі побудови ізометрії та диметрії п’ятикутника ABCDE (рис. 12.6).

Віднесемо п’ятикутник до натуральної системи XOY та будуємо аксонометричні осі X'O'Y' в ізометрії та диметрії. На осі O'Y' відкладаємо: в ізометрії O'A' = OA, O'N' = ON, в диметрії O'A' = 0,5OA, O'N' = 0,5ON.

Оскільки CD // OX, то з точки N' проводимо лінію паралельну O'X' (в обох видах аксонометрії), на якій відкладаємо N'C' = NC, N'D' = ND. На осі O'X' відкладаємо O'K' = OK, O'L' = OL; паралельно O'Y' відкладаємо К'B' = КB, L'E' = LE (в ізометрії) та К'B' = 0,5КB, L'E' = 0,5LE (в диметрії). Знайдені вершини п’ятикутника з’єднуємо прямими.

Аксонометрія кола. Аксонометричною проекцією кола є еліпс. Для побудови еліпса попередньо знаходять його центр (за координатами центра кола), а далі відкладають його осі та спряжені діаметри за правилами, наведеними нижче в пп. 12.2 – 12.4 (рис. 12.3 – 12.5).

На практиці найчастіше еліпси замінюються овалами, що значно спрощує побудову. На рис. 12.7 наведено спосіб побудови овалів, який можна використовувати в будь-якому виді аксонометрії.

Порядок побудови:

- для даного виду аксонометрії визначити центр (за координатами центра кола) і напрями осей; обчислити (в залежності від діаметра кола) і відкласти величини півосей OA = OB = α і OD = OC = b;
- на напрямку меншої осі OC відкласти OA' = OA, а на прямій AC відкласти відрізок CN = CA';
- провести серединний перпендикуляр відрізка AN, який перетинає осі овалу в точках C_1 і C_2. Ці точки і є центрами дуг 1 і 2 овалу;
- з точки C_1 розчином циркуля $R = C_1C$ проводимо дугу 1, а з точки C_2 розчином $R = C_1A$ – дугу 2. Аналогічно (за симетрією) відмічають центри C_1 і C_2 та будують дуги 1' і 2'.

Аксонометрія просторових фігур. Приклади аксонометричних зображень деяких геометричних тіл наведені на рис. 12.8. Їх побудову зручно починати з побудови основи, наприклад, n – кутника, як основи призми або піраміди (рис. 12.8а,б), еліпса, як основи циліндра (рис. 12.8а) та конуса (рис. 12.8г) і т.д., а надалі відкладати висоту тіла h.

Якщо на поверхні тіла лежить певна точка, її аксонометрична проекція знаходиться за її координатами, які визначаються з комплексного креслення, наприклад, точка L на грані призми (рис. 12.8а) і точка К на поверхні циліндра (рис. 12.8в).

Розрізи на аксонометричних проекціях виконуються шляхом перерізу фігури координатними площинами.

На рис. 12.8г виконано розріз конуса двома координатними площинами (виріз ¼ частини конуса).

На рис. 12.8д показані аксонометричні зображення сфер в ізометрії та диметрії. Обрисами зображення є кола, радіуси яких відповідно дорівнюють 1,22R (ізометрія) та 1,06R (диметрія), де R – радіуси даних сфер. Перерізи трьома координатними площинами дають виріз ⅛ частини сфери.

На рис. 12.9 показані комплексні креслення моделі та аксонометричне її зображення (прямокутна ізометрія). Послідовність побудови прямокутної диметрії цієї моделі наведено на рис. 12.10.

На рис. 12.11 показана послідовність побудови ізометрії деталі за даним комплексним кресленням. Зауважимо, що на відміну від ортогональних проекцій в аксонометричних зображеннях ребра жорсткості в повздовжньому розрізі, спиці коліс, інші елементи штрихують у розрізі.

Питання для самоконтролю:

1. В чому суть методу аксонометричного паралельного проеціювання? Чому жодна з аксонометричних осей не проектуються в точку?
2. Що таке показники спотворення по осях?
3. За якими ознаками класифікують аксонометричні зображення?
4. Як розташовуються великі та малі осі еліпсів – проекцій кіл, що лежать у площинах рівня?

ЛІТЕРАТУРА:

1. Бубунников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. «Высшая школа», М., 1985.
2. Гордон В.О., Семенов-Огиевский М.А. Курс начертательной геометрии. «Наука», М., 1988.
3. Иерусалимский А.М. Начертательная геометрия. Росвузиздат. М., 1973.
4. Колотов С.М. та ін. Нарисна геометрія (програмований курс). Вид. КДУ, Київ, 1967.
5. Каміновська та інші. Нарисна геометрія. Київ, НМКВО, 1990.
6. Табацков В.П., Бергер Э.Г. Методические указания по изучению курса начертательная геометрия с использованием комплекта плакатов для студентов инженерно-технических специальностей. Херсон, 1987.

ЗМІСТ