МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Контрольні завдання для самостійної роботи з теми:

Числові та функціональні ряди,

для студентів денної форми навчання напрямів підготовки
6.030509 – Облік та аудит,
6.030601 – Менеджмент,
6.030601 – Менеджмент ЗЕД,
6.030508 – Фінанси та кредит,
6.100102 – Процеси, машини та обладнання в агропромисловому виробництві,
6.100101 – Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі.

МИКОЛАЇВ
2015

УДК 517.911/.958
ББК 22.161.61
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 26.11.2015 р., протокол № 3.

Укладачі:
В. С. Шебанін – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївського національного аграрного університету
І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, доцент, завідувач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
В. Г. Богза – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
О. В. Цепуріт – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
С. І. Богданов – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
О. В. Шептилевський– асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету
С. В. Євстрат'єв – асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету

Рецензенти:
К. В. Дубовенко – д-р техн. наук, доцент, зав. кафедри електротехнологій і електропостачання Миколаївського національного аграрного університету,
Д. Д. Марченко – канд. техн. наук, асистент кафедри тракторів та сільськогосподарських машин, експлуатації і технічного сервісу Миколаївського національного аграрного університету.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є однією з основних при підготовці висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах.

Числові та функціональні ряди є одним з основних розділів курсу вищої математики, має велике практичне значення і застосовується в різних областях наукової та практичної діяльності.

Студентам для самостійної роботи запропоновані завдання з наступних розділів: числові ряди, знакозмінні ряди, функціональні ряди, степеневі ряди, ряди Фур'є. Дані теми є базовими при вивчені теорії рядів, і без опанування даним матеріалом неможливо вивчити курс вищої математики в цілому.

Наведений матеріал складається з двох основних частин: розрахункових завдань та методичних рекомендацій, що до їх розв'язання. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв'язання. Студент за своїм варіантом, у відповідності зі списком групи, обирає завдання з кожної групи задач, підставляючи замість параметра β номер своєї групи. Наприклад якщо студент групи Б 1/4, то $\beta = 4$. В методичних рекомендаціях надано приклади розв'язання задач з кожної групи з повним обґрунтуванням. До деяких завдань надано по декілька прикладів розв'язання, які відображають різні можливі випадки.

Типовий розрахунок № 2 оцінюється згідно рейтингової оцінки знань при структурно – модульній системі навчання. Для оцінювання ТР № 2 пропонується наступний розрахунок балів:

незадовільно: 0 – 0,5 бали;

задовільно: 0,6 – 1,5 бали;

добре: 1,6 – 3,5 бали;

відмінно: 3,6 – 5 балів.

Кожне завдання роботи оцінюється 1балом з коефіцієнтом вагомості $\frac{1}{3}$.

Теоретичні питання.

1. Збіжність і сума ряду. Необхідна умова збіжності ряду.
2. Ознаки порівняння.
3. Ознака збіжності Даламбера.
4. Радикальна ознака збіжності Коші.
5. Інтегральна ознака збіжності Коші.
6. Теорема Лейбніца. Оцінка залишку рядів, знаки членів якого чергуються.
7. Абсолютна та умовна збіжність ряду. Властивості абсолютно збіжних рядів.
8. Функціональні ряди. Область збіжності.
9. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності.
10. Інтегрування та диференційовання степеневих рядів.
11. Розкладання функцій в степеневі ряди. Ряд Тейлора.
12. Розкладання по степенях x. Функції e^x, cosx, sinx, $(1+x)^{\alpha}$, $\ln(1+x)$.
13. Застосування степеневих рядів до розв'язання диференціальних рівнянь. Наближені обчислення.
14. Розкладання в ряд Фур'є функцій, що задані на інтервалі (- p;p); (- l;l).
15. Розкладання функцій в ряд Фур'є „по косинусам" і „по синусам"

Розрахункові завдання.

1. В задачах 1.1 – 1.31 знайти суму ряду.

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\beta}{9n^2+12n-5}$

1.2 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{24\beta}{9n^2-12n-5}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\beta}{9n^2+6n-8}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9\beta}{9n^2+21n-8}$

1.5 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\beta}{4n^2+8n+3}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14\beta}{49n^2-28n-45}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\beta}{9n^2+3n-2}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\beta}{49n^2-7n-12}$

1.9 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta}{n^2+n-2}$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14\beta}{49n^2-14n-48}$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\beta}{36n^2-24n-5}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14\beta}{49n^2-84n-13}$

1.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\beta}{4n^2+4n-3}$

1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\beta}{49n^2+35n-6}$

1.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9\beta}{9n^2+3n-20}$

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14\beta}{49n^2-42n-40}$

1.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\beta}{16n^2-8n-15}$

1.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\beta}{49n^2-21n-10}$

1.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\beta}{25n^2+5n-6}$

1.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\beta}{4n^2-9}$

1.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\beta}{49n^2-35n-6}$

1.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta}{n^2+n-2}$

1.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\beta}{36n^2+12n-35}$

1.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\beta}{49n^2+21n-10}$

1.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\beta}{9n^2-3n-2}$

1.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\beta}{25n^2-5n-6}$

1.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\beta}{16n^2+8n-15}$

1.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14\beta}{49n^2-56n-33}$

1.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\beta}{36n^2-12n-35}$

1.30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7\beta}{49n^2+7n-12}$

1.31 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14\beta}{49n^2-70n-24}$

2. В задачах 1.1 – 1.31 дослідити ряд на збіжність за допомогою ознаки Даламбера.

2.1 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta n+1}{2^n(n-1)!}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^{2\beta}}{2^{n^2}}$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+\beta)!}$

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\beta n!}{(2n)!}$

2.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{\beta n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$

2.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{(\beta+1)^n}$

2.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,\frac{\beta}{n}}{n!}$

2.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(\beta+2)^n n!}$

2.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\beta n)!}tg\,\frac{1}{5^n}$

2.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta+3)^n(n^2-1)}{n!}$

2.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+\beta)!}$

2.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{((n+\beta)!)^2}$

2.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta+3)^{2n}}{(\beta n-1)!}$

2.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\beta n)!}$

2.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(\beta+1)^n(n+1)!}$

2.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-\beta}}$

2.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(\beta+2)^n(2n)!}$

2.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta+2)^n}{n!}$

2.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+\beta)!}{n^n}$

2.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta+1)^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+\beta)!}$

2.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+\beta)^n n!}{n^n}$

2.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+\beta)!}{(\beta n)!}$

2.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta+2)^n}{(n+2)!\cdot4^n}$

2.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta+1)^n n^2}{5^n}$

2.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(n+\beta)!}$

2.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n!}{(\beta+2)^n}$

2.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^\beta}$

2.28 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{n-1}(\beta+2)^n}{(n-1)!}$

2.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\beta)!\sqrt[3]{n}}{3^n}$

2.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(\beta n)!}$

2.31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot(3n-2)}{2^{n+\beta} n!}$.

3. В задачах 3.1 – 3.31 дослідити ряд на збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші.

3.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+\beta}\right)^{n-2}$

3.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\beta}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{(\beta+1)^n}$

3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(\beta+1)n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

3.4 $\sum_{n=1}^{\infty} (\beta+1)^n \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$

3.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$

3.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta n+2}{3n+1}\right)^n (\beta+2)^n$

3.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta n-3}{5n+1}\right)^{n^3}$

3.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\beta n}{10n+\beta}\right)^{n^2}$

3.9 $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \frac{\pi}{\beta n}$

3.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+\beta}{\beta n-1}\right)^{n^2}$

3.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{\beta}{(\beta+1)^{n}}$

3.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta n+3}{n+1}\right)^{n^{2}}$

3.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}\frac{2}{\beta^{n}}$

3.14 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\beta n+1}{2n-3}\right)^{n^{2}}$

3.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta n}{3n+1}\right)^{2n+1}$

3.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{\beta+1}}$

3.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\beta+1)^{n+1}}{n^{n}}$

3.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta n+1}{(\beta+1)n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$

3.19 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{\beta+3}}$

3.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta n}{3n-1}\right)^{n^{3}}$

3.21 $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^{n}\frac{\pi}{(3+\beta)n}$

3.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^{\beta}}{(\beta n+1)^{n}}$

3.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta+2)^{n-1}e^{-n}$

3.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{\beta n}$

3.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^{\beta}}$

3.26 $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{n^{n+\beta}}{(2n^{2}+\beta)^{\frac{n}{2}}}$

3.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\beta n}{3n-1}\right)^{2n}$

3.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^{\beta}}\frac{1}{(\beta+1)^{n}}$

3.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+\beta}}{(\beta+3)^{n}}$

3.30 $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{\beta n-2}{2n+1}\right)^{3n}$

3.31 $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^{2n} \frac{\pi}{(\beta+3)n}$

4. В задачах 4.1 – 4.31 дослідити ряд на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші.

4.1 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{2}(\beta n+1)}$

4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{\beta}(2n+\beta)}$

4.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+\beta)\ln^{2}(2n+1)}$

4.4 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-5)\ln^{2}(\beta n-7)}$

4.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n+4)\ln^{2}(5n+2)}$

4.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta n+1)\ln^{2}(n\sqrt{5}+2)}$

4.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\ln^{2}(n\beta+5)}$

4.8 $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(\beta n-2)\ln(n-3)}$

4.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-\beta)\ln(2n)}$

4.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(\beta n)}$

4.11 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\beta n-1)\ln n}$

4.12 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(\beta n+1)}$

4.13 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\beta n-3)\ln(3n+1)}$

4.14 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^{2}(\beta n)}$

4.15 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+\beta)\ln^{2}(2n)}$

4.16 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\beta n+3)\ln^{2}(n+1)}$

4.17 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n-\beta)}$

4.18 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(\beta n-1)}}$

4.19 $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(\beta n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$

4.20 $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(\beta n-2)}}$

4.21 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\beta n+5)\ln^2(n+1)}$

4.22 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{3}\right)\ln^2(\beta n+7)}$

4.23 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+\beta)\ln n}$

4.24 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-3)\ln^2(\beta n)}$

4.25 $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(\frac{n}{\beta+1}-1)\ln^2(\frac{n}{2})}$

4.26 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln(\beta n)}$

4.27 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(2n^2+\beta)\ln(\beta n)}$

4.28 $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(\beta n-2)}$

4.29 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(\frac{3n^2}{2+\beta}+2)\ln(\frac{n}{2})}$

4.30 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2-1)\ln(\beta n)}$

4.31 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-\beta)\ln(\beta n)}$

5. В задачах 5.1 – 5.31 дослідити знакозмінні ряди на умовну чи абсолютну збіжність.

5.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\beta n+1}{n(n+1)}$

5.2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{\beta n+1}\right)^n$

5.3 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(\beta n+1)}$

5.4 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln\ln n)^{\beta}\ln n}$

5.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{n^4-\beta\cdot n^2+1}$

5.6 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+\beta)\ln n}$

5.7 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^{\beta}(n+1)}$

5.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot\sqrt[\beta+1]{2n+3}}$

5.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}}{\sqrt{(\beta+2)n+1}}$

5.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{\beta n}$

5.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^{\beta} n}$

5.12 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(\beta n)}$

5.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{(n+\beta)!}$

5.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^{\beta+1}}$

5.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(\beta+2)^{2n}}$

5.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot\sqrt[\beta+1]{\ln n}}$

5.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+\beta)\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

5.18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\beta+2)n-1}{3n}$

5.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{(n+4)^{\beta+1}}$

5.20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\beta\cdot n+1}{\sqrt{n^3}}$

5.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(\beta+2)^n}$

5.22 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta\cdot n+1)2^{2n+1}}$

5.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(\beta n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}$

5.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(\beta+1)^n}$

5.25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\ln^2(\beta n)}$

5.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\beta n}$

5.27 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{3^{\beta\cdot n}}$

5.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{n^2+\beta}{n^2}\right)$

5.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot\sqrt[\beta+3]{n}}$

5.30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta n+2)}{(\beta+2)^n}$

5.31 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^{\beta+2}}{(n+1)!}$

6. В задачах 6.1 – 6.31 знайти суму ряду с заданою точністю a.

6.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\beta n^2}, \alpha = 0{,}01$

6.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+\beta)!}, \alpha = 0{,}01$

6.3 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(\beta n)^3}, \alpha = 0{,}001$

6.4 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(\beta\cdot n+1)}, \alpha = 0{,}001$

6.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^{\beta+1}(n+1)}, \alpha = 0{,}01$

6.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta n+1)!}, \alpha = 0{,}0001$

6.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(\beta+1)^n}, \alpha = 0{,}1$

6.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{\beta+2}}{3^n}, \alpha = 0{,}1$

6.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(\beta\cdot n-1)^2(\beta\cdot n+1)^2}, \alpha = 0{,}001$

6.10 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta n+1)!!}, \alpha = 0{,}0001$

6.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta n)!!}, \alpha = 0{,}001$

6.12 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\beta}{10}\right)^n, \alpha = 0{,}01$

6.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+\beta)!!},\alpha=0{,}001$

6.14 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\beta}{12}\right)^n,\alpha=0{,}1$

6.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta\cdot n)!},\alpha=0{,}001$

6.16 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta\cdot n!},\alpha=0{,}01$

6.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta\cdot n)!\,n},\alpha=0{,}00001$

6.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta\cdot n+1)}{(\beta\cdot n)!\,n!},\alpha=0{,}001$

6.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta+2)^n n!},\alpha=0{,}001$

6.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+\beta)!},\alpha=0{,}001$

6.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta\cdot n)!\,n!},\alpha=0{,}00001$

6.22 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{3^n(\beta\cdot n+1)},\alpha=0{,}001$

6.23 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(\beta\cdot n+1)},\alpha=0{,}001$

6.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}5)^n}{n^3},\alpha=0{,}01$

6.25 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\beta+2)^n}{(n+1)^n},\alpha=0{,}001$

6.26 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\beta\cdot n+1)^n},\alpha=0{,}001$

6.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi n)}{\beta\cdot n^3+1},\alpha=0{,}01$

6.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2(\beta\cdot n+3)},\alpha=0{,}01$

6.29 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{cos(\pi n)}{(n^3+\beta)^2},\alpha=0{,}001$

6.30 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\beta\cdot n^3},\alpha=0{,}01$

6.31 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(\beta+n^3)^2},\alpha=0{,}001$

7. В задачах 1.1 – 1.31 довести правильність рівностей за допомогою необхідної ознаки збіжності.

7.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+\beta)!}{n^n} = 0$

7.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(\beta n)!} = 0$

7.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\beta n)!}{n^n} = 0$

7.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\beta n)^n}{(2n-1)!} = 0$

7.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\beta n)!}{2n^2!} = 0$

7.6 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^{\beta}} = 0$

7.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(\beta+4)^{n^2}} = 0$

7.8 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\beta+1}}{n!} = 0$

7.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+\beta)!}{n^n} = 0$

7.10 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{((\beta+1)n+1)!} = 0$

7.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{(\beta n)^n} = 0$

7.12 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n-\beta)!} = 0$

7.13 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{((\beta+1)\cdot n)!}{2^{n^2}} = 0$

7.14 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\beta n)^n}{(n!)^3} = 0$

7.15 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\beta+4}}{(2n)!} = 0$

7.16 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\beta\cdot n}}{n!} = 0$

7.17 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+\beta)!}{n^n} = 0$

7.18 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{((\beta+2)\cdot n-1)!} = 0$

7.19 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!}{(\beta n)^n} = 0$

7.20 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)^n}{((\beta+2)n+1)!} = 0$

7.21 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(4n)!}{(\beta+3)^{n^2}} = 0$

7.22 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{[(n+\beta)!]^2} = 0$

7.23 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{(\beta+3)^{n^2}} = 0$

7.24 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(\beta+2)^{n^2}} = 0$

7.25 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+\beta)!}{n^2} = 0$

7.26 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{((\beta+2)\cdot n+3)!} = 0$

7.27 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+3)!!}{((\beta+3)n)^n} = 0$

7.28 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n)^n}{((\beta+5)n+1)!} = 0$

7.29 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n)!}{(\beta+3)^{n^2}} = 0$

7.30 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{[(n+\beta)!]^{\beta+2}} = 0$

7.31 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{((\beta+2)n)!} = 0$

8. В задачах 8.1 – 8.31 знайти область збіжності степеневого ряда.

8.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-2)^3(x+\beta)^{2n}}{2n+3}$

8.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(x-\beta)^n}{(n+1)5^n}$

8.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\beta)^{2n}}{n9^n}$

8.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5(x-\beta+2)^{2n}}$

8.5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-\beta)^{2n}}{2n}$

8.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\beta-1)^{2n+1}}{3n+8}$

8.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}$

8.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x-\beta)^n}$

8.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\beta+2)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$

8.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n}$

8.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\beta)^n}{(3n+1)2^n}$

8.12 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-\beta)^{3n}}{(5n-8)^3}$

8.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+\beta)^n tg\,\frac{1}{3^n}$

8.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-\beta)^n$

8.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n(x-\beta)^{2n}}$

8.16 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n^2}(x-\beta)^{n^2}$

8.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\beta)^{n^2}}{n^n}$

8.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+\beta)^{2n+1}$

8.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-\beta)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$

8.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\beta)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$

8.21 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-\beta)^{2n}}$

8.22 $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2(x+\beta)^n}$

8.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-\beta)^{n^2}}{n^{n+1}}$

8.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(x-\beta)^n}$

8.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+\beta)^n}$

8.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+\beta)^{2n}}{n}$

8.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5(x+\beta)^{2n}}$

8.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+\beta)^n}$

8.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+\beta)^n}{(2n+1)3^n}$

8.30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-\beta)^n}{(n^4+1)^2}$

8.31 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5(x-\beta)^{2n}}{2n+1}$

9. В задачах 9.1 – 9.31 знайти область збіжності функціонального ряда.

9.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n}(x-\beta)^{2n}\sin(x+\pi n)$

9.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n}(x-\beta)^{4n}\sin(2x-\pi n)$

9.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}(x-\beta)^{4n}\cos(x+\pi)$

9.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\frac{1}{\sqrt{n}}(x+\beta)^{2n}\cos(x-\pi n)$

9.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}}(x+\beta)^{4n}\sin(3x+\pi n)$

9.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n}(x-\beta)^{2n}\sin(5x-\pi n)$

9.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\sqrt[4]{3n}}(x-\beta)^{2n}\cos(x+\pi n)$

9.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{2n}(x+\beta)^{2n}\sin(3x-\pi n)$

9.9 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-\beta)^{3n} \sin\frac{x}{n}$

9.10 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} (x+\beta)^n \sin\frac{x}{2n}$

9.11 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{3n} (x-\beta)^n \sin\frac{2x}{n}$

9.12 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x+\beta)^{3n} \sin\frac{3x}{\sqrt{n}}$

9.13 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n (x-\beta)^n tg\frac{3x}{n}$

9.14 $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n (x+\beta)^{3n} tg\frac{x}{4\sqrt{n}}$

9.15 $\sum_{n=1}^{\infty} (x-\beta)^{3n} tg\frac{2x}{3n}$

9.16 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x+\beta)^{3n} \arcsin\frac{x}{3n}$

9.17 $\sum_{n=1}^{\infty} 16^n (x-\beta)^{3n} \arcsin\frac{x}{\sqrt[3]{n}}$

9.18 $\sum_{n=1}^{\infty} 32^n (x+\beta)^{5n} \arcsin\frac{x}{\sqrt{n}}$

9.19 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-\beta)^n arctg\frac{2x}{n+1}$

9.20 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-\beta)^{3n} arctg\frac{x}{2(n+3)}$

9.21 $\sum_{n=1}^{\infty} 27^n (x-\beta)^{3n} arctg\frac{3x}{2n+3}$

9.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n^{2+\beta}} \sin^{3n} x$

9.23 $\sum_{n=1}^{\infty} 8^n n^{2+\beta} \sin^{3n} x$

9.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n}} \sin^{2n}(2x-\beta)$

9.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} tg^{2n}(x-\beta)$

9.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4} \sin^n(3x+\beta)$

9.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n}(x-\beta)$

9.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} tg^n(2x-\beta)$

9.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} tg^n(x+\beta)$

9.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n/2}} tg^n(x-\beta)$

9.31 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} tg^n(2x+\beta)$

10. В задачах 10.1 – 10.31 знайти область збіжності функціонального ряда.

10.1 $\sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \sqrt{x-2} \cdot e^{-n^2/(x-\beta)^3}$

10.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+\beta/n)}{\sqrt{x-e}}$

10.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n \cdot 5^{-n/(x+\beta)^2}$

10.4 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sqrt{x-\beta} \cdot e^{-n/x}$

10.5 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\beta - x\sqrt{n})^2}$

10.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 3^{n/(x-\beta)}$

10.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x-\beta)}$

10.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+\beta)}$

10.9 $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{nx} arctg \frac{x}{7^{nx}(x-\beta)}$

10.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(\beta \cdot x+2)}$

10.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{\beta}{n}\right)^n 3^{-n/x^2}$

10.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(\beta \cdot x+e)}$

10.13 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\beta\sin(x^2+1)/n}$

10.14 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-\beta\cdot n/\cos x}$

10.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(1+\beta/n)+\ln\ln x)^n}{\sqrt{x-e^{\beta/e}}}$

10.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\beta\cdot\ln|x|}}$

10.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+\beta/e)}$

10.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{x\ln n}{\beta\cdot x-n}$

10.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{n\cdot\beta\cdot\sin x}}$

10.20 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 5^{-n^2 arctg(\beta/(n|x|))}$

10.21 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{-n^2\cdot\beta\cdot\ln(1+x/n)}$

10.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n/(x-\beta))}{e^{n\sqrt{x}}}$

10.23 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{x}} \arcsin\frac{\beta\cdot x}{3^{nx}}$

10.24 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta\cdot x} arctg\frac{\sqrt{x}}{2^{nx}}$

10.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(\beta\cdot x-2)}$

10.26 $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(x-\frac{\beta}{2}\right)e^{n/\ln x}$

10.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(\beta\cdot x+3)}$

10.28 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 5^{-n(\ln n/(x-\beta)^2)}$

10.29 $\sum_{n=1}^{\infty} n^x arctg\frac{\sqrt{x}}{(\beta+2)^{nx}}$

10.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(\beta+x^3)}}$

10.31 $\sum_{n=1}^{\infty} (3+\beta/n)^n 4^{-n^2/x}$

11. В задачах 11.1 – 11.31 розкласти функції в ряд Тейлора по степеням x.

11.1 $f(x)=\dfrac{\beta}{20-x-x^2}$

11.2 $f(x)=\dfrac{x^{\beta}}{\sqrt{4-5x}}$

11.3 $f(x)=x^{\beta}\cdot\ln(1-x-6x^2)$

11.4 $f(x)=2x\cos^2(\dfrac{x}{\beta})-x$

11.5 $f(x)=\dfrac{e^{\beta\cdot x}}{x}-\beta$

11.6 $f(x)=\dfrac{\beta}{12+x-x^2}$

11.7 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$

11.8 $f(x)=x^{\beta}\cdot\ln(1+x-6x^2)$

11.9 $f(x)=(x-\beta)\sin\beta x$

11.10 $f(x)=\dfrac{e^{\beta\cdot x}}{x}-\beta$

11.11 $f(x)=\dfrac{\beta}{8+2x-x^2}$

11.12 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-\beta x}}$

11.13 $f(x)=x^{\beta}\ln(1-x-12x^2)$

11.14 $f(x)=(\beta+e^{-x})^2$

11.15 $f(x)=\dfrac{\arcsin\beta x}{x}-\beta$

11.16 $f(x)=\dfrac{\beta}{12-x-x^2}$

11.17 $f(x)=x^{\beta}\cdot\sqrt{4-3x}$

11.18 $f(x)=x^{\beta}\cdot\ln(1+2x-8x^2)$

11.19 $f(x)=(x-\beta)\cdot e^{\beta\cdot x}$

11.20 $f(x)=\dfrac{\beta}{6+x-x^2}$

11.21 $f(x) = x^{\beta} \cdot \sqrt[3]{27-2x}$

11.22 $f(x) = x^{\beta} \cdot \ln(1+x-12x^2)$

11.23 $f(x) = \dfrac{\sin \beta x}{x} - \cos \beta x$

11.24 $f(x) = \dfrac{arctg \beta x}{x}$

11.25 $f(x) = \dfrac{\beta}{6-x-x^2}$

11.26 $f(x) = \sqrt[4]{16-\beta \cdot x}$

11.27 $f(x) = x^{\beta} \cdot \ln(1-x-20x^2)$

11.28 $f(x) = (\beta - e^{x})^2$

11.29 $f(x) = (2x-\beta) \cdot e^{\beta \cdot x}$

11.30 $f(x) = (3+\beta-e^{-x})^2$

11.31 $f(x) = \dfrac{\beta}{2-x-x^2}$

12. В задачах 12.1 – 12.31 знайти визначений інтеграл з точністю 0,001.

12.1 $\int_0^{0,1} e^{-3\beta x^2} dx$

12.2 $\int_0^{0,1} \sin(10\beta x^2) dx$

12.3 $\int_0^{1} \cos x^{\beta} dx$

12.4 $\int_0^{0,5} \dfrac{x^{\beta} dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

12.5 $\int_0^{0,1} \dfrac{1-e^{-\beta \cdot x}}{x} dx$

12.6 $\int_0^{1} \dfrac{\ln(1+x/\beta)}{x} dx$

12.7 $$\int_0^{1,5} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$$

12.8 $$\int_0^{0,2} e^{-\beta x^2}dx$$

12.9 $$\int_0^{0,2} \sin(2\beta x^2)dx$$

12.10 $$\int_0^{0,5} \cos(\beta \cdot x^2)dx$$

12.11 $$\int_0^{1} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$$

12.12 $$\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-\beta \cdot x}}{x}dx$$

12.13 $$\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+\frac{x}{\beta})}{x}dx$$

12.14 $$\int_0^{2} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$$

12.15 $$\int_0^{0,3} e^{-\beta \cdot x^2}dx$$

12.16 $$\int_0^{0,4} \sin(\frac{5x}{2})^{\beta+1}dx$$

12.17 $$\int_0^{0,2} \cos(2\beta x^2)dx$$

12.18 $$\int_0^{1,5} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$$

12.19 $$\int_0^{0,4} \frac{1-e^{\frac{-x}{\beta}}}{x}dx$$

12.20 $$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+\beta \cdot x)}{x}dx$$

12.21 $$\int_0^{2,5} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$$

12.22 $$\int_0^{0,4} e^{\frac{-3x^2}{\beta}}dx$$

12.23 $\int_0^{0,5} \sin(\beta x^2)dx$

12.24 $\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{\beta x}{2}\right)^2 dx$

12.25 $\int_0^{2} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$

12.26 $\int_0^{0,5} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

12.27 $\int_0^{2,5} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$

12.28 $\int_0^{1} \frac{x^{\beta}dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

12.29 $\int_0^{0,5} e^{\frac{-\beta\cdot x^2}{25}} dx$

12.30 $\int_0^{1} \sin x^{\beta} dx$

12.31 $\int_0^{0,1} \cos(10\beta x^2)dx$

13. в задачах 13.1 – 13.31 знайти перші три відмінних від нуля члена розкладу в степеневий ряд функції що є розв'язком диференційного рівняння.

13.1

$y' = x^{\beta} + y^2 - e^x, y(0) = 0$

13.2

$y' = 2x^2 + \beta \cdot y\cos x + 2, y(0) = 0$

13.3

$y' = 2x - \beta \ln y + y, y(0) = 1$

13.4

$y' = x^3 + y^{\beta} - e^x, y(0) = 1$

13.5

13.6

$y' = x^2 y + e^y + \beta x, y(0) = 0$

$y' = \sin \beta x + xy, y(0) = 1$

13.7

$y' = e^{-\beta \cdot x} + y^2, y(0) = 0$

13.8

$y' = \cos \beta x + e^y + x, y(0) = 0$

13.9

$y' = xe^x + y^\beta + 1, y(0) = 0$

13.10

$y' = tgx + xy^2 - e^{\beta \cdot x}, y(0) = 1$

13.11

$y' = \beta x^3 - y^2 - 2x, y(0) = 1$

13.12

$y' = \ln(x+1) + \beta \cdot e^y, y(0) = 0$

13.13

$y' = x^\beta + \sin y + 1, y(0) = 0$

13.14

$y' = xe^{-x} + \beta \ln y, y(0) = 1$

13.15

$y' = \sin \beta x + \cos y, y(0) = 0$

13.16

$y' = x^\beta + y \ln y - y, y(0) = 1$

13.17

$y' = e^{-\beta x} + 3y^2, y(0) = 0$

13.18

$y' = \cos \beta x - x - y^2, y(0) = 0$

13.19

$y' = x^\beta - tgy + 1, y(0) = 0$

13.20

$y' = e^{xy} + \beta \cdot y, y(0) = 1$

13.21

$y' = \cos \beta x + y^2, y(0) = 1$

13.22

$y' = e^{\beta \cdot x} + y^2, y(0) = 0$

13.2

$y' = \beta \cdot y + y^\beta, y(0) = 3$

13.24

$y' = \beta \cdot e^y - xy, y(0) = 0$

13.25

$y' = \sin \beta x + y^2, y(0) = 1$

13.26

$y' = e^{\beta x} + y, y(0) = 4$

13.27

$$y' = x^{\beta} + y^2,\ y(0) = 2$$

13.28

$$y' = \sin \beta x + \frac{1}{2} y^2,\ y(0) = 1$$

13.29

$$y' = \beta \cdot e^{y} + xy,\ y(0) = 0$$

13.30

$$y' = x + x^{\beta} + y^2,\ y(0) = 5$$

13.31

$$y' = \arcsin y + \beta \cdot x,\ y(0) = 0{,}5$$

14. В задачах 14.1 – 14.22 треба розкласти дану функцію в ряд Фур'є в заданому інтервалі. В задачах 14.23 – 14.27 розкласти дану функцію в ряд косинусів в заданому інтервалі, а в задачах 14.28 – 14.31 розкласти функцію в ряд синусів.

14.1 $f(x) = x + 1, (-\pi; \pi)$

14.2 $f(x) = x^2 + 1, (-2; 2)$

14.3 $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}, (-\pi; \pi)$

14.4 $f(x) = 1 + |x|, (-1; 1)$

14.5 $f(x) = |1 - x|, (-2; 2)$

14.6 $f(x) = |x|, (-\pi; \pi)$

14.7 $f(x) = x - 1, (-1; 1)$

14.8 $f(x) = x^2, (0; 2\pi)$

14.9

$$f(x) = \begin{cases} 0, при - \pi \le x < 0 \\ x, при 0 \le x < \pi \end{cases}$$

14.10

$$f(x) = \begin{cases} 2, при - \pi \le x < 0 \\ 1, при 0 \le x < \pi \end{cases}$$

14.11

$$f(x)=\begin{cases} x, npu -1 \le x < 0 \\ -1, npu 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

14.12

$$f(x)=\begin{cases} 2x, npu -\pi \le x < 0 \\ 0, npu 0 \le x < \pi \end{cases}$$

14.13 $f(x)=4-2x, (-2;2)$

14.14 $f(x)=x^2, (-1;1)$

14.15

$$f(x)=\begin{cases} -x, npu -\pi \le x \le 0 \\ \pi, npu 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

14.16

$$f(x)=\begin{cases} -(x+2), npu -2 \le x \le 0 \\ -(x-2), npu 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

14.17

$$f(x)=\begin{cases} -2x, npu -\pi \le x < 0 \\ 2x, npu 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

14.18

$$f(x)=|x|, [-2;2)$$

14.19

$$f(x)=2-x, [-2;2]$$

14.20

$$f(x)=\begin{cases} -, npu -3 < x \le 0 \\ 5, npu 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

14.21

$$f(x)=\begin{cases} 0, npu -\pi \le x \le 0 \\ \dfrac{\pi}{2} x, npu 0 \le x < \pi \end{cases}$$

14.22

$$f(x)=\begin{cases} x+1, npu -1 \le x \le 0 \\ 0, npu 0 < x \le 1 \end{cases}$$

14.23 $f(x)=2-x, [0;2]$

14.24 $f(x)=x^2, (0;\pi)$

14.25 $f(x)=2x-1, (0;1)$

14.26 $f(x)=\pi x, (0;\pi)$

14.27 $f(x)=x-1, (0;1)$

14.28 $f(x)=\pi - x, (0;\pi)$

14.29 $f(x) = 2 - x, (0;2)$

14.30 $f(x) = x + 1, (0;1)$

14.31 $f(x) = x^2, (0;2)$

Методичні рекомендації.

Задача 1.31.

При $\beta=1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}$.

Розв'язання.

Сума ряду визначається за формулою $S=\lim_{n\to\infty}S_n$, де $S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{14}{49m^2-70m-24}$. Розкладемо раціональний дріб на прості дроби. Знаменник дробу розкладемо на множники, для цього прирівняємо знаменник до нуля і розв'яжемо відповідне квадратне рівняння. Одержимо корені: $x_1=\frac{12}{7}$, $x_2=-\frac{2}{7}$. Отже, знаменник має вид $49m^2-70m-24=49(m-\frac{12}{7})(m+\frac{2}{7})=(7m-12)(7m+2)$. Методом невизначених коефіцієнтів представимо дріб в вигляді суми елементарних дробів першого типу:

$$\frac{14}{49m^2-70m-24}=\frac{14}{(7m-12)(7m+2)}=\frac{A}{7m-12}+\frac{B}{7m+2}=\frac{A(7m+2)+B(7m-12)}{(7m-12)(7m+2)}.$$

14=A(7m+2)+B(7m-12), при $m=\frac{12}{7}$ маємо: 14=14A, отже A=1, а при $m=-\frac{2}{7}$ маємо: 14= - 14B, отже B= - 1.

Таким чином

$$S_n=\sum_{m=1}^{n}(\frac{1}{7m-12}-\frac{1}{7m+2})=(-\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{16})+(\frac{1}{9}-\frac{1}{23})+(\frac{1}{16}-\frac{1}{30})...$$

$$+\left(\frac{1}{7n-26}-\frac{1}{7n-12}\right)+\left(\frac{1}{7n-19}-\frac{1}{7n-5}\right)+\left(\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}\right)=$$

$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}=0{,}3-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}$, і сума ряду буде

дорівнювати $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(0{,}3-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}\right)=0{,}3$.

Задача 2.31.

При $\beta=1$ необхідно дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}n!}$$

Розв'язання : Для дослідження на збіжність ряду з додатними членами скористаємось ознакою Даламбера. В даному ряді

$a_n=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}n!}$, а $a_{n+1}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)}{2^{n+2}(n+1)!}$ та

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot(3n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot n!}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)\cdot 2^{n+2}\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)\cdot 2^{n+1}\cdot n!}{2\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)\cdot n!}=$$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n+1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}>1$. Отже за ознакою

Даламбера даний ряд розбігається.

<u>Задача 3.31.</u>

При β=1 необхідно дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}$$

<u>Розв'язання :</u> Для дослідження даного ряду з додатними членами на збіжність скористаємось радикальною ознакою Коші. Маємо $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^4 arctg^{2n} \frac{\pi}{4n}} = n^{\frac{4}{n}} arctg^2 \frac{\pi}{4n}$. Отже $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n^{\frac{4}{n}} arctg \frac{\pi}{4n})$.

Якщо $n^{\frac{4}{n}}$ представити як $e^{\frac{4}{n}\ln n}$, скориставшись неперервністю експоненти та застосувавши правило Лопіталя , будемо мати

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{4}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{4}{n}\cdot\ln n)} = e^{4\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}} = e^{4\lim\frac{(\ln n)'}{n'}} = e^{4\lim\frac{1}{n}} = e^{4\cdot 0} = 1.$$

Скориставшись неперервністю степеневої та оберненої тригонометричної функцій, легко знаходимо, що $\lim\limits_{n\to\to\infty} arctg^2 \frac{\pi}{4n} = (arctg \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{4n})^2 = (arctg 0)^2 = 0$. Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{4}{n}} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} arctg^2 \frac{\pi}{4n} = 1\cdot 0 = 0 < 1$. Отже, за радикальною ознакою Коші, даний ряд розбігається.

<u>Задача 4.31.</u>

<u>Приклад 1</u>

При β=2 необхідно дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$$

Розв'язання: Очевидно, що для всіх n=2,3, . . . має місце нерівність $\frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)} > \frac{3n}{n^2\ln(2n)} = \frac{3}{n\ln(2n)}$. Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln(2n)}$ (*) і дослідимо його на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{3}{x\ln(2x)}$, яка неперервна, приймає додатні значення і монотонно спадає на проміжку [2; ∞) Обчислимо невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{3dx}{x\ln(2x)} = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{3dx}{x\ln(2x)}\begin{bmatrix} t=\ln(2x), \\ dt=\frac{dx}{x}, \end{bmatrix} = \lim_{b\to\infty}\int_{\ln 4}^{\ln 2b}\frac{3dt}{t} = 3\lim_{b\to\infty}\ln t\Big|_{\ln 4}^{\ln 2b} =$$

$$= 3\lim_{b\to\infty}(\ln\ln(2b)-\ln\ln 4)=\infty$$. Отже даний невласний інтеграл є розбіжним, а з цього випливає, що і ряд (*) також є розбіжним. А звідси випливає що за ознакою порівняння і даний ряд також є розбіжним.

Приклад 2

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Розв'язання:

Оскільки $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} > 0$ розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ (*). Дослідимо ряд (*) на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші. Функція $f(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ неперервна, приймає додатні значення і монотонно спадає на проміжку [1; ∞). Знайдемо невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-3/2}dx=\lim_{b\to\infty}(-\frac{2}{\sqrt{x}})\Big|_1^b==\lim_{b\to\infty}(-\frac{2}{\sqrt{b}}+\frac{2}{1})=2.$$

Невласний інтеграл збігається отже і ряд (*) також збігається, а з цього випливає, що за ознакою порівняння, і даний ряд також буде збігатися.

Задача 5.31.

При β=1 необхідно дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n^3}{(n+1)!}$$

Розв'язання: Для дослідження даного ряду, знаки якого чергуються, на збіжність складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду, і для отриманого ряду з додатними членами застосуємо ознаку Даламбера. Маємо $|a_n|=\frac{n^3}{(n+1)!},|a_{n+1}|=\frac{(n+1)^3}{(n+2)!}$. Отже

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(n+1)!}{(n+2)!n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3(n+1)!}{(n+2)(n+1)!n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4+2n^3}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{1+\frac{2}{n}}=\frac{0\cdot(1+0)}{1+0}=0<1$$

Ряд складений з абсолютних величин членів даного ряду збігається, отже і даний ряд буде збігатися, причому абсолютно.

Задача 6.31.

При β=1 необхідно обчислити суму ряду з точністю α=0,001

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}$$

Розв'язання: Ряд задовольняє умовам ознаки Лейбніца, а тому помилка наближеної рівності $S \approx S_n$ буде за абсолютною величиною меншою першого відкинутого члену ряду.

Для оцінки загального члена ряду скористаємось очевидною нерівністю $\left|a_n\right| = \dfrac{n}{(1+n^3)^2} < \dfrac{n}{n^6} = \dfrac{1}{n^5}$. Розв'яжемо нерівність $\dfrac{1}{n^5} < 0{,}001$, $n^5 > 1000$, $n = \left[\sqrt[5]{1000}\right] + 1$. Отже n=4, при цьому виконується і нерівність $\left|a_n\right| < 0{,}001$. Тоді $S \approx S_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{81} - \dfrac{3}{784} = -0{,}25 + 0{,}025 - 0{,}004 = -0{,}229$.

Задача 7.31.

При β=1 довести правильність рівності $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{(3n)!} = 0$ за допомогою необхідної ознаки збіжності.

Розв'язання: Складемо ряд загальний член якого дорівнює виразу який стоїть під знаком границі $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{(3n)!}$. За допомогою ознаки Даламбера дослідимо цей ряд на збіжність, $a_n = \dfrac{n^2+1}{(3n)!}, a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{(3(n+1))!}$

тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+2)(3n)!}{(3n+3)!(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=1\cdot 0=0.$$

За ознакою Даламбера даний ряд збігається, а отже за необхідною ознакою загальний член ряду повинен прямувати до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_4=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(3n)!}=0$. Що й треба було довести.

<u>Задача 8.31.</u>

При β=1 необхідно знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5(x-1)^{2n}}{2n+1}$

<u>Розв'язання:</u> Оскільки даний ряд є степеневим, то для знаходження області збіжності знайдемо радіус збіжності. Маємо $|a_n|=\frac{(n+1)^5}{2n+1}$, $|a_{n+1}|=\frac{(n+2)^5}{2n+3}$, тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5(2n+3)}{(2n+1)(n+2)^5}=\lim\frac{\frac{(n+1)^5(2n-3)}{n^6}}{\frac{(2n+1)(n+2)^5}{n^6}}=\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^5}=1.$$

Центр інтервалу збіжності x_0=1, отже інтервал збіжності x∨(0;2). Дослідимо ряд на збіжність в граничних точках інтервалу збіжності. При x=±1 степеневий ряд приймає вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}$. Отриманий числовий ряд розбігається, тому що не задовольняє необхідній ознаки збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} = \infty$. Отже, область збіжності ряду: −1<x<1.

Задача 9.31.

Приклад 1

При β=1 необхідно знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} tg^n(2x+1)$

Розв'язання: Дослідимо даний ряд на абсолютну збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші. Маємо $|a_n| = \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} |tg(2x+1)|^n$, тоді

за радикальною ознакою Коші $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n(x)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{1/n} 3^{1/2}}{n^{1/2n}} |tg(2x+1)| =$

$$\sqrt{3}|tg(2x+1)| \cdot \lim_{n\to\infty} 4^{1/n} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/2n}} = \sqrt{3}|tg(2x+1)| \frac{4^{\lim\limits_{n\to\infty} 1/n}}{e^{2 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} 1/n}} =$$

$$\sqrt{3}|tg(2x+1)| \frac{4^0}{e^0} = \sqrt{3}|tg(2x+1)|.$$

Звідси випливає, що ряд збігається абсолютно, при $\sqrt{3}|tg(2x+1)| < 1$, тобто коли $|tg(2x+1)| < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Розв'язком отриманої нерівності є множина чисел

x, які задовольняють нерівності $x \in (-\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}n), n \in z$.

Якщо $x = -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}$ даний функціональній ряд перетвориться в збіжний числовий ряд Лейбніца

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \cdot tg^n(-2\frac{\pi}{12} - 1 + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} (-\frac{1}{\sqrt{3}})^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{\sqrt{n}} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};$$

а якщо $x = \frac{\pi}{12} - 1$,

отримаємо розбіжний узагальнений гармонічний ряд з показником p=0,5<1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}} \cdot tg^n(\frac{\pi}{6}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Таким чином, область збіжності даного функціонального ряду має вид $x \in \left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right)$.

Приклад 2

Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)} (x-3)^n \sin(2x - \pi n)$

Розв'язання: Складемо ряд з абсолютних величин даного функціонального ряду (*)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)} \cdot |x-3|^n \sin|2x - \pi n|$, порівняємо загальний член ряду (*) з загальним членом ряду (**) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)}\cdot|x-3|^n$,

має місце нерівність $\frac{3^n}{n+2}|x-3|^n\sin|2x-\pi n|\le\frac{3^n}{n+2}|x-3|^n$.

знайдемо область збіжності ряду (**) за ознакою порівняння вона буде співпадати з областю збіжності ряду (*). за ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}|x-3|^{n+1}(n+4)}{(n+3)3^n|x-3|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3|x-3|(n+4)}{(n+3)}=$$

$$=3|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n+3}=3|x-3|\lim\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{3}{n}}=3|x-3|\cdot 1=3|x-3|.$$ Ряд

(**) буде збігатися при виконанні умови $3|x-3|<1$, $|x-3|<\frac{1}{3}$,

$-\frac{1}{3}<x-3<\frac{1}{3}$, $\frac{8}{3}<x<\frac{10}{3}$.

Дослідимо ряд на збіжність на кінцях області збіжності: при $x=\frac{10}{3}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)}\cdot\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$, одержали ряд який розбігається, при $x=\frac{8}{3}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)}\cdot\frac{(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$, одержаний знакозмінний ряд за ознакою Лейбніца збігається, оскільки ряд складений з абсолютних величин даного розбігається, то даний знакозмінний ряд буде збігатися умовно.

Отже областю збіжності даного функціонального ряду буде проміжок $\left[\frac{8}{3};\frac{10}{3}\right)$.

Приклад 3

Знайти область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (x-2)^n arctg\,\frac{x+1}{3(n+5)}$$

Розв’язання: Складемо ряд що складається з абсолютних величин членів даного функціонального (*) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n |x-2|^n arctg\,\frac{|x+1|}{3(n+5)}$, і знайдемо область його збіжності застосувавши ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|x-2|^{n+1} arctg\,\frac{|x+1|}{3(n+6)}}{2^n|x-2|^n arctg\,\frac{|x+1|}{3(n+5)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-2|\frac{|x+1|}{3(n+6)}}{\frac{|x+1|}{3(n+5)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-2|(n+5)}{(n+6)}=2|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n+5}{n+6}=2|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{6}{n}}=2|x-2|.$$

Ряд (*) буде збігатися при умові $2|x-2|<1$. Для знаходження області збіжності розв’яжемо рівняння. $|x-2|<\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$.

Дослідимо ряд на збіжність на кінцях області збіжності: при $x=\frac{5}{2}$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(\frac{1}{2})^n arctg\frac{7}{6(n+5)}=\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{7}{6(n+5)}$, скористаємось граничною ознакою порівняння, розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{6(n+5)}$, який є збіжним узагальненим гармонійним рядом. $\lim_{n\to\infty}\frac{arctg\frac{7}{6(n+5)}}{\frac{7}{6(n+5)}}=1\neq 0$, отже за граничною ознакою порівняння ряди повинні одночасно збігатися або розбігатися, оскільки один з рядів розбігається то і другий ряд також розбіжний; при $x=\frac{3}{2}$ маємо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(-\frac{1}{2})^n arctg\frac{7}{6(n+5)}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n arctg\frac{7}{6(n+5)}$, загальний член якого прямує до нуля, члени ряду утворюють спадну послідовність і ряд складений з модулів елементів даного розбігається то при $x=\frac{3}{2}$ ряд збігається умовно.

Отже областю збіжності даного ряду є проміжок $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Задача 10.31.

При b=1 необхідно знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(3+1/n)^n 4^{-n^2/x}$

Розв'язання: Застосуємо до даного функціонального ряду з додатними членами радикальну ознаку Коші, будемо мати

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}}=\left(3+\frac{1}{n}\right)4^{-\frac{n}{x}}=\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)}{4^{\frac{n}{x}}}$$

Знайдемо границю одержаного виразу $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)}{4^{\frac{n}{x}}}=\left[\frac{3}{\infty}\right]=0<1$

при будь-якому значені x. Отже, область збіжності даного ряду $x\in R$.

Задача 11.31.

Приклад 1

При b=3 розкласти в ряд Тейлора по степеням x функцію

$$f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}$$

Розв'язання: При безпосередньому розкладанні функції $f(x)$ в ряд Тейлора обчислюють похідні всіх порядків функції $f(x)$ в точці $x=0$, з яких формально складають ряд Тейлора.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Позначимо через $u(x) = 2 - x - x^2$, маємо $u(0) = 2;\quad u'(x) = -1 - 2x \quad і \quad u'(0) = -1;\qquad u''(x) = u''(0) = -2$; при $n \geq 3\ \ u^{(n)}(x) = 0.$

Тоді $f(x) = \dfrac{3}{u(x)}$ та $f(0) = \dfrac{3}{2}$; $f'(x) = -3\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ та

$$f'(0) = -3\frac{(-1)}{2^2} = \frac{3}{4};\qquad f''(x) = -3\frac{u''u^2 - u'2uu'}{u^4} = -3\frac{u''u - 2(u')^2}{u^3}$$ та

$$f''(x) = -3\frac{(-2)2 - 2(-1)^2}{2^3} = \frac{9}{4};$$

$$f'''(x) = 3\frac{\left[u'''u^2 + u''u' - 4u'u''\right]u^3 - \left[u''u - 2(u')^2\right]3u^2u'}{u^6} = 18\frac{u''u'u + (u')^3}{u}$$ та

$$f'''(0) = 18\frac{(-2)(-1)2 + (-1)^3}{2} = \frac{45}{8}$$ і так далі.

Отже

$$\frac{3}{2 - x - x^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{45}{3}\frac{x^3}{3!} + \ldots = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \ldots$$

При розкладанні функції в степеневий ряд скористаємось табличним розкладом. Розкладемо загальний член ряду в вигляді суми елементарних дробів $\dfrac{3}{2 - x - x^2} = \dfrac{1}{1 - x} + \dfrac{1}{2 + x}$. Скористаємось табличним розкладом $\dfrac{1}{1 - x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n, (|x| < 1)$ при розкладанні другого дробу будемо мати $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})},(\left|-\frac{x}{2}\right|<1)$. Використовуючи множення ряду на число та додавання рядів, отримаємо

$$\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+1}}x^n=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}x^2+\frac{15}{16}x^3+.....+\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^{n+1}}x^n+...$$

Отриманий розклад справедливий для всіх значень х які належать інтервалу $(-1;1)\bigcap(-2;2)=(-1;1)$.

Приклад 2

Розкласти в ряд функцію $f(x)=x^2\ln(8+2x-x^2)$

Розв'язання: Розкладемо на множники вираз що знаходиться під знаком логарифма $8+2x-x^2=(2+x)(4-x)=8(1+\frac{x}{2})(1-\frac{x}{4})$.

скористаємось розкладом $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...$.

$$f(x)=x^2\ln\left(8(1+\frac{x}{2})(1-\frac{x}{4})\right)=x^2\left(\ln 8+\ln(1+\frac{x}{2})+\ln(1-\frac{x}{4})\right)=$$

$$x^2\left(\ln 8+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{x^3}{3\cdot 2^3}-...+\left(-1\right)^{n-1}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}+...+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{2\cdot 4^2}+\frac{x^3}{3\cdot 4^3}+...+\frac{x^n}{n\cdot 4^n}\right)=$$

$$=x^2\left(\ln 8+\frac{3x}{4}-\frac{3x^2}{32}+\frac{9x^3}{3\cdot 4^3}+...+\frac{\left(-1\right)^{n-1}\cdot 2^n+1}{n\cdot 4^n}x^n+...\right)=$$

$$x^2\ln 8+\frac{3x^3}{4}-\frac{3x^4}{32}+\frac{9x^5}{3\cdot 4^3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n+1}{n\cdot 4^n}x^{n+2}+\ldots\ .$$

Знайдемо інтервал збіжності отриманого ряду. Даний ряд буде збігатися при виконані наступних умов $\begin{cases}\left|\frac{x}{2}\right|<1\\ \left|\frac{x}{4}\right|<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<2\\ |x|<4\end{cases}\Rightarrow |x|<2$, отже областю збіжності ряду є проміжок $(-2;2)$.

<u>Задача 12.31.</u>

При b=10 знайти визначений інтеграл з точністю a=0,001

$$\int_0^{0,1}\cos(100x^2)dx$$

<u>Розв'язання:</u> Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Макларена

$$\cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\ldots\qquad(|t|<\infty).$$

Виконаємо заміну $t=100x^2$

$$\cos(100x^2)=1-\frac{(100x^2)^2}{2!}+\frac{(100x^2)^4}{4!}-\frac{(100x^2)^6}{6!}+\ldots$$

знайдемо інтеграл $\int_0^{0,1}\cos(100x^2)dx=$

$$= \int_0^{0,1}\left(1-\frac{10^4x^4}{2!}+\frac{10^8x^8}{4!}-\frac{10^{12}x^{12}}{6!}+\ldots\right)dx =$$

$$\left.\left(x-\frac{10^4x^5}{5\cdot 2!}+\frac{10^8x^9}{9\cdot 4!}-\frac{10^{12}x^{13}}{13\cdot 6!}+\ldots\right)\right|_0^{0,1} =$$

$= 0,1-\dfrac{1}{5\cdot 10\cdot 2!}+\dfrac{1}{9\cdot 10\cdot 4!}-\dfrac{1}{13\cdot 10\cdot 6!}+\ldots$ оскільки ряд, з знаками що чергуються, знайдемо член ряду, що не перевищує заданої точності. Таким членом є четвертий член ряду $\dfrac{1}{13\cdot 10\cdot 6!} < 0,001$, отже

$$\int_0^{0,1}\cos(100x^2)dx \approx 0,1-\frac{1}{5\cdot 10\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 10\cdot 4!} = 0,1-0,01+0,005 =$$

=0,095.

<u>Задача 13.31.</u>

При b=1 потрібно знайти три перших, відмінних від нуля, члена розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння

$$y' = \arcsin y + x, y(0) = 0,5$$

<u>Розв'язання:</u> Будемо враховувати, що розв'язок рівняння можна представити у вигляді ряду Тейлора по степенях x

$$y = y(0)+y'(0)x+\frac{y''}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots .$$

З початкової умови маємо y(0)=0,5, а з диференціального рівняння знаходимо, що $y'(0) = \arcsin(0{,}5) + 0 = \frac{\pi}{6}$.

Далі, по способу послідовних диференціювань, знаходимо $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} y' + 1$, звідки $y''(0) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2(0)}} y'(0) + 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}\frac{\pi}{6} + 1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 1$.

Тоді $y \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}x + (\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 1)\frac{x^2}{2}$.

Задача 13.31.

Приклад 1

При b=2 розкласти функцію $f(x) = x^2$, в ряд Фур'є по синусам, в проміжку x∨(0;2).

Розв'язання: Оскільки необхідно розкласти функцію в ряд Фур'є по синусам, то вона повинна бути непарною. Отже, потрібно побудувати непарне продовження в інтервалі (- 2;0). Тоді a_n=0, а $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$, і розклад прийме вигляд $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$.

Інтегруючи частинами знайдемо коефіцієнт b_n ряду

$$b_n = \int_0^2 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx \left[\begin{array}{c} u = x^2; du = 2xdx \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx; v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{array}\right] = -\frac{2}{n\pi}x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 +$$

$$+\frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\begin{bmatrix} u=x; du=dx \\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx; v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{bmatrix}=$$

$$-\frac{8}{n\pi}\cos\pi n+0+\frac{4}{\pi n}\left(\frac{2}{\pi n}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=(-1)^{n+1}\frac{8}{\pi n}+$$

$$+\frac{4}{\pi n}\left(\frac{2}{\pi n}2(\sin(\pi n)-\sin 0)+\frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right)=(-1)^{n+1}\frac{8}{\pi n}+$$

$$+\frac{4}{\pi n}\left(\frac{4\cos\pi n}{\pi^2 n^2}\right)=(-1)^{n+1}\frac{8}{\pi n}+\frac{16(-1)^n}{\pi^3 n^3}.$$

По знайденим коефіцієнтам запишемо ряд Фур'є

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{8}{\pi n}+\frac{16(-1)^n}{\pi^3 n^3}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

<u>**Приклад 2**</u>

Розкласти функцію $f(x)=\begin{cases}-x, якщо -\pi\le x\le 0\\ x, якщо 0\le x\le\pi\end{cases}$, в ряд Фур'є.

<u>Розв'язання:</u> Задана функція – парна. Її ряд Фур'є буде утримувати постійну складову та косинуси. Всі коефіцієнти $b_n=0$.Знайдемо коефіцієнти розкладу;

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx\begin{bmatrix} u=x; du=dx \\ dv=\cos nxdx; v=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin \pi n - \frac{0}{n}\sin 0 + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}(\cos \pi n - \cos 0) = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Отже ряд Фур'є має вид :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nx .$$

Список рекомендованої літератури

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчесление / Н. С. Пискунов – М. : Наука, 1985. –560 с.

2. Барковський В. В. Вища математика для економістів / В. В. Барковський, Н. В. Барковська – К. : ЦУЛ, 2002. – 400 с.

3. Овчинніков П. П. Вища математика: підруч. для вузів / П. П. Овчинніков, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко – К. : Техніка, 2000 – 592 с.

4. Соколенко О. І. Вища математика : підруч. / О. І. Соколенко – Академія , 2002. – 432 с.

5. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 1985. – 383 с.

6. Вища математика : зб. задач / за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрина – К., 2001. – 480 с.

7. Демидович Б. П. Дифференциальные уравнения: учеб. пособ. / Б. П. Демидович, В. П. Моденов –3-е изд., – М.:Лань, 2008. – 288 с.

8. Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А. Ф. Филиппов – 2-е изд. – М. : КомКнига, 2007. - 240 с.

Зміст

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Контрольні завдання для самостійної роботи з теми:

Числові та функціональні ряди,

для студентів денної форми навчання напрямів підготовки
6.030509 – Облік та аудит,
6.030601 – Менеджмент,
6.030601 – Менеджмент ЗЕД,
6.030508 – Фінанси та кредит,
6.100102 – Процеси, машини та обладнання в агропромисловому виробництві,
6.100101 – Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі.

Укладачі:
Шебанін В'ячеслав Сергійович,
Шебаніна Олена В'ячеславівна,
Атаманюк Ігор Петрович
та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 3,4.
Тираж 50 прим. Зам. №____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул Паризької Комуни, 9
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р.