МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

Вища математика.
Диференціальне числення функції однієї змінної
(Модуль 5)

Завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи
студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей
6.100101 - “Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі”,
6.100102 - "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва"

МИКОЛАЇВ
2015

УДК 517
ББК 22.1
В 55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 30.06.2015 р., протокол № 9.

Укладачі:
В. С. Шебанін - д-р техн. наук., професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
І. П Атаманюк - д-р. техн. наук., професор, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
В. Г. Богза - канд. техн. наук., доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Цепуріт - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Богданов - ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Шептилевський - асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
С. В. Євстрат'єв - асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:
В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор,
ректор Миколаївського національного університету
ім. В. О. Сухомлинського;
І. Д Бурковський – канд. техн. наук, провідний науковий співробітник, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 6.100101 - “Енергетика сільського господарства, 6.100102 - "Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва".

Матеріал даного посібника складається з двох основних розділів: розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв’язання. Студент за своїм варіантом у відповідності зі списком групи обирає завдання з кожної групи задач. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв’язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення похідної, її геометричний та механічний зміст. Диференційованість функцій. Похідні від сталої, суми, добутку, частки двох функцій.

Тема 2. Похідна складеної функції. Логарифмічне диференціювання. Диференціал функції та його застосування для наближених обчислень. Похідні та диференціали вищих порядків.

Тема 4. Неявна функція та її диференціювання. Параметрично задані функції та їх диференціювання.

Тема 5. Розкриття невизначеностей за правилом Лопиталя.

Тема 6. Зростання та спадання функції. Локальний екстремум. Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної.
Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину.

Тема 7. Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функції з побудовою її графіка.

Тема 1. Практичне заняття 1

Означення похідної. Диференціювання функцій

Похідна функція — це границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу довільно прямує до нуля.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо ця границя скінченна, то похідна існує, і функція f (x) називається диференційованою у точці x.

Похідна позначається також $y'(x)$ або $\frac{dy}{dx}$.

Геометричний зміст похідної — похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою *x*.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1) $c'=0$;

2) $x'=1$;

3) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$;

4) $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$;

5) $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$;

6) $(e^x)'=e^x$;

10) $(\sin x)'=\cos x$;

11) $(\cos x)'=-\sin x$;

12) $(\mathrm{tg}\, x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

13) $(\mathrm{ctg}\, x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$;

14) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $(a^x)' = a^x \ln a$;

8) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

9) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

16) $(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

17) $(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

Арифметичні властивості похідних

Нехай C — стала, $u = u(x)$, $v = v(x)$ — функції, що мають похідні, тоді

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = C \cdot u'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Завдання для розв'язання на практичному занятті

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні функцій:

1. $f(x) = 10x^5 + 4x^3 - x + 9$
2. $f(x) = \dfrac{x}{3} + 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{2x} + \sqrt[4]{3}$
3. $f(x) = 0{,}8\sqrt[4]{x} - \dfrac{x^3}{0{,}3} + \dfrac{1}{5x^5}$
4. $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x}$
5. $f(x) = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$.

6. $f(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)$

7. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{5x^5}$

8. $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+tgx}$

9. $f(x)=x\arcsin x+\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$

10. $f(x)=x^2\log_3 x+\dfrac{\ln x}{x^4}$

11. $f(x)=x\times 2^x+\dfrac{x^2+e^x}{e^x}$

12. $f(x)=arctgx\, arc\, ctgx+\dfrac{tgx}{ctgx}$

13. Скласти рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка

кривої $y=2\left(\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}\right)\left(x^3+2\right)$

в точці $x_0=1$.

Приклади розв'язання

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{3}{x^3}$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{x^2}{6}-\frac{3}{x^3}\right)'=\left(\frac{\sqrt{x}}{3}\right)'+\left(\frac{x^2}{6}\right)'-\left(\frac{3}{x^3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}(\sqrt{x})'+\frac{1}{6}(x^2)'-3\left(\frac{1}{x^3}\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{6}\times 2x-3(x^{-3})'=\frac{1}{6\sqrt{x}}+\frac{x}{3}-3(-3x^{-4})=$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{x}}+\frac{x}{3}+9x^{-4}=\frac{1}{6\sqrt{x}}+\frac{x}{3}+\frac{9}{x^4};$$

2. $y=x\sqrt{x}(3\ln x-2)$.

$$y'=\left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x-2)\right)'=x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{x}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x-2)=$$

$$3x^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x-3x^{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

3. $f(x)=\dfrac{10-5^x}{x^2+1}$

$$f'(x)=\left(\frac{10-5^x}{x^2+1}\right)'=\frac{(10-5^x)'\times(x^2+1)-(10-5^x)\times(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{-5^x\ln 5(x^2+1)-(10-5^x)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{5^x\left(2x-\ln 5\left(x^2+1\right)\right)-20x}{(x^2+1)^2};$$

4. $f(x)=\dfrac{5-10x}{\sin x}$

$$f'(x)=\left(\frac{5-10x}{\sin x}\right)'=\frac{(5-10x)'\sin x-(5-10x)\sin' x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-10\sin x-(5-10x)\cos x}{\sin^2 x};$$

5. Складати рівняння дотичної та рівняння нормалі до графіка

кривої $y = 2\left(\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}\right)\left(x^3 + 2\right)$

в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ записується таким чином:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0).$$

Для того, щоб скласти рівняння дотичної, треба обчислити значення функції та похідної в точці

$x_0 = 1$**:**

$y\left(x_0\right) = y(1) = -18$;

$$y' = 2\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\left(x^3 + 2\right) + 6\left(\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}\right)x^2,$$

$y'\left(x_0\right) = y'(1) = -16$.

Отже, отримаємо рівняння дотичної:

$y + 18 = -16\left(x - 1\right)$ або $16x + y + 2 = 0$.

Рівняння нормалі до графіка функції $y=f(x)$ має вид:

$$y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}\left(x - x_0\right),$$

отже в даному випадку воно буде мати вигляд:

$$y+18=\frac{1}{16}(x-1) \qquad \text{або} \quad x - 16y - 289 = 0.$$

Тема 2. Практичне заняття 2
Похідна складеної функції

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну $u'=f'(x)$ в деякій точці x, а функція $y=f(u)$ при відповідному значенні u має похідну $y'=F_u'(x)$, то складена функція $y=F(f(x))$ має похідну по x, яка дорівнює $y'(x)=F'_u(u)u_x'(x)$.

Завдання для розв'язання
на практичному занятті

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні функцій:

1. $y=(1+7x)^4$ **2.** $y=tg\,5x$ 3. $y=cos^2 x$ **4.** $y=sin^3 4x^2$ **5.** $y=e^{arcsin\frac{1}{x^3}}$ **6.** $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(6-x^3\right)^3}}$

7. $y=2^{3x}\,/\,3^{2x}$. *Відповідь.* $y'=\left(\dfrac{8}{9}\right)^x\cdot\ln\dfrac{8}{9}$.

8. $y=x\,arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$. *Відповідь.* $y'=\arccos\dfrac{x}{2}$.

9. $y=ln\sqrt{\dfrac{1+sin\,x}{1-sin\,x}}$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{1}{\cos x}$.

10. $y = ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}\right)$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

11. $y = \dfrac{1}{2} tg^2\left(sin\,x\right) + ln\,cos\left(sin\,x\right)$.

Відповідь. $y' = \mathrm{tg}^3(\sin x)\cdot\cos x$.

12. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

.

13. $y = 2x\cdot\mathrm{tg}2x + \ln\cos 2x - 2x^2$. *Відповідь.* $y' = 4x\cdot\mathrm{tg}^2 2x$.

14. $y = arctg\,\dfrac{3x - x^2}{1 - 3x^2}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{3}{1+x^2}$.

15. $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}} - arc\,sin\,e^x$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

16. $y = e^x \times 2^{5x}\ /\ 3^{4x}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}\cdot\ln\dfrac{32e}{81}$.

17. $y = \dfrac{x+1}{x} - e^{-ln\frac{x}{x+1}}$. *Відповідь.* $y' = 0$.

18. $y = \dfrac{x^2 \times e^{x^2}}{x^2+1}$.

Відповідь. $y' = 2e^{x^2}\cdot x\cdot\dfrac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

19. $y = \dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + \dfrac{1}{2a}\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{a}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{x^2}{x^4 - a^4}$.

20. $y = \log_{x^2} 2$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

Приклади розв'язання

1) $y' = \left[(1+7x)^4\right]' = 4(1+7x)^3 \cdot (1+7x)' = 4(1+7x)^3 \cdot 7 = 28(1+7x)^3$

2) $y' = (\mathbf{tg}\,5x)' = \dfrac{1}{\mathbf{cos}^2\,5x} \cdot (5x)' = \dfrac{5}{\mathbf{cos}^2\,5x}$

3) $y' = (\cos^2 x)' = 2\cos x(\cos x)' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$

4) $y' = \left(\sin^3 4x^2\right)' = 3\sin^2 4x^2 \cdot \left(\sin 4x^2\right)' =$

$= 3\sin^2 4x^2 \cdot \cos 4x^2 \cdot \left(4x^2\right)' =$

$= 3\sin^2 4x^2 \cdot \cos 4x^2 \cdot (4 \cdot 2x) = 24x\sin^2 4x^2 \cdot \cos 4x^2 =$

$= 12x\sin 4x^2 \cdot \cos 8x^2$

5) $y' = \left(e^{\arcsin\frac{1}{x^3}}\right)' = e^{\arcsin\frac{1}{x^3}} \cdot \left(\arcsin\dfrac{1}{x^3}\right)' =$

$= e^{\arcsin\frac{1}{x^3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^6}}} \cdot \left(\dfrac{1}{x^3}\right)' =$

$= e^{\arcsin\frac{1}{x^3}} \cdot \dfrac{x^3}{\sqrt{x^6-1}} \cdot \left(-3x^{-4}\right) = \dfrac{-3e^{\arcsin\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{x^6-1}\cdot x}$

6) $y' = \left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(6-x^3\right)^3}}\right)' = \left(\left(6-x^3\right)^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\dfrac{3}{4}\left(6-x^3\right)^{-\frac{7}{4}} \cdot \left(6-x^3\right)' =$

$= -\dfrac{3}{4}\left(6-x^3\right)^{-\frac{7}{4}} \cdot \left(-3x^2\right) = \dfrac{9}{4}x^2\,\dfrac{1}{\sqrt[4]{\left(6-x^3\right)^7}}$

7) $\mathrm{y} = (4\mathrm{x}+1)^2 \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + \ln 4\mathrm{x}$.

$$y' = \left((4x+1)^2 \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + \ln 4x\right)' =$$
$$= \left((4x+1)^2 \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}}\right)' + (\ln 4x)' =$$
$$= \left((4x+1)^2\right)' \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} + (4x+1)^2 \cdot \left(arctg\sqrt{1-e^{2x}}\right)' +$$
$$+ \frac{(4x)'}{4x} = 2(4x+1)(4x+1)' \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} +$$
$$+ (4x+1)^2 \cdot \frac{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{1+1-e^{2x}} + \frac{1}{x} = 8(4x+1) \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} +$$
$$+ (4x+1)^2 \cdot \frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot \frac{1}{2-e^{2x}} + \frac{1}{x} =$$

$$= (32x+8) \cdot arctg\sqrt{1-e^{2x}} - \frac{(4x+1)^2 \cdot e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}} \cdot \left(2-e^{2x}\right)} + \frac{1}{x}.$$

Тема 3. Практичне заняття 3
Логарифмічне диференціювання

Цей метод звичайно використовують для знаходження похідних від функцій виду $y = f(x)^{\varphi(x)}$, які називаються степенево-показниковими**.**

Для знаходження похідної зробимо попереднє логарифмування наданої функції $\ln y = \ln f(x)^{\varphi(x)}$

$$\ln y = \varphi(x) \ln f(x) \quad .$$

Знаходимо похідну від лівої і правої частин рівності.

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$y'=(\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x))\cdot y$$

$$y'=(\varphi'(x)\cdot\ln f(x)+\varphi(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x))\cdot f(x)^{\varphi(x)}$$

Завдання для розв'язання на практичному занятті

1. $\mathrm{y}=(1-\cos\mathrm{x})^{\mathrm{x}}$, 2. $y=\left(x^4 ctg3x\right)^{ctg3x}$,

3. $y=\left(sin\sqrt{2x}\right)^{ln\sqrt{2x}}$,

4. $y=x^{e^x}\times e^x$, 5. $y=\left(x\times sin\,x\right)^{2ln(sinx)}$.

Приклади розв'язання

Знайти похідну функції $\mathrm{y}=(1-\cos\mathrm{x})^{\mathrm{x}}$.

Розв'язання.

Прологарифмуємо функцію y, а потім продиференціюємо з урахуванням того, що y є функцією від x:

$$\ln y=\ln(1-\cos x)^{x}=x\ln(1-\cos x),$$
$$\frac{1}{y}y'=\ln(1-\cos x)+x\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

Таким чином, $y'=(1-\cos x)^{x}\left[\ln(1-\cos x)+\frac{x\sin x}{1-\cos x}\right].$

Диференціал функції

Нехай функція $f(x)$ диференційована на відрізку $[a;b]$, тобто на цьому відрізку вона має похідну $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$. З цього виразу випливає, що:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x),$ де $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція. Помножимо цю рівність на Δx. Дістанемо: $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(x)\Delta x,$ другий доданок в правої частині рівності є нескінченно малою величиною вищого порядку ніж перший доданок.

Означення. Головна частина приросту функції Δy лінійна відносно нескінченно малої величини Δx називається диференціалом функції і позначається $dy=f'(x)\Delta x$.

Знайдемо диференціал функції $y=x$ за означенням диференціала.

$dy=dx=1\cdot\Delta x$; $dx=\Delta x$. Підставляємо в означення диференціала dx замість Δx, дістанемо $dy=f'(x)dx$; $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Застосування диференціала для наближених обчислень

Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то її приріст може бути записаний у вигляді

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x,$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x) \to 0$, коли $\Delta x \to 0$. Отже, для Δx малих

$\Delta y \approx dy$, тобто $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ або

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx df(x_0) \Rightarrow f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0).$$

Завдання для розв’язання на практичному занятті

1. Знайти диференціал функції

1) $y = \dfrac{1}{e^x+1}$. *Відповідь.* $y' = -\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx$.

2) $y = 3x^3 \cdot \ln x - x^3$. *Відповідь.* $y' = 9x^2 \times \ln x dx$

2. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ в точці $x = 1{,}18$.

2) $y = \sqrt{1+x+\sin x}$, $x = 0{,}01$

Приклади розв’язання

1. Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції $y = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ в точці *x =1,18.*

Розв’язання.

При застосуванні диференціала для наближених обчислень справедливою є формула $\Delta y \approx dy$, тобто:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x .$$

Покладемо $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,18$.

Тоді $y(1,18) \approx y(1) + y'(1) \cdot 0,18$,

$$y(1) = 1, \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{(2x-1)^3}}, \quad y'(1) = -1 .$$

Отже, $y(1,18) = 1 - 1 \cdot 0,18 \approx 0,72$.

Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція *y=f(x)* диференційована на інтервалі *(a,в)*, похідна *f’(x)* і диференціал *dy=f’(x)dx* цієї функції є функціями від *x*.

Похідну й диференціал функції *y=f(x)* називають також похідною і диференціалом 1-го порядку відповідно.

Похідну в точці *x* від похідної функції *y=f(x)* (якщо вона існує) називають похідною 2-го порядку функції *y=f(x)* в точці *x* і позначають як

$$y''; y''_{x^2}; f''(x); \frac{d^2 y}{dx^2}; \frac{d^2 f(x)}{dx^2}; \frac{d^2 y(x)}{dx^2}.$$

Якщо функція *y=f(x)* має похідну 2-го порядку (її називають двічі диференційовною), то диференціалом 2-го порядку називається диференціал від диференціала 1-го порядку функції *y=f(x)* у точці *x* і позначають диференціал 2-го порядку $d^2 y, d^2 f, d^2 f(x)$.

Для диференціала 2-го порядку має місце формула

$$d^2 y = f''(x)dx^2.$$

Нехай функція *y=f(x)* має похідну $(n-1)$ порядку на інтервалі (*a,b*). Похідною n-го порядку функції *y=f(x)* у точці *x* називають похідну в цій точці від похідної (n-1)-го порядку, якщо вона існує. Похідну n-го порядку функції *y=f(x)* в точці *x* позначають таким чином:

$$f^{(n)}(x); y^{(n)}; \frac{d^n f(x)}{dx^n}; \frac{d^n y}{dx^n}; y^{(n)}(x).$$

Якщо функція *y=f(x)* має похідну n-го порядку в точці *x*, то диференціалом n-го порядку функції *y=f(x)* в точці *x* називають диференціал в точці *x* від диференціала $(n-1)$ -го порядку.

Диференціал n-го порядку позначають $d^n y; d^n f(x); d^n f; d^n y(x)$. Для диференціала n-го порядку має місце формула

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

Завдання для розв'язання на практичному занятті

1. Знайти похідні другого порядку від функцій:

1) $y = -\dfrac{22}{x+5}$. *Відповідь.* $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}$.

2) $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$. *Відповідь.* $y'' = \ln x$.

3) $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$. *Відповідь.* $y'' = x \cdot \sin 3x$.

4) $y = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \sqrt{x^2 + a^2}$. *Відповідь.* $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

5) $y = xe^{x^2}$. *Відповідь.* $2e^{x^2}\left(3x + 2x^3\right)$.

6) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{6x\left(2x^3 - 1\right)}{\left(x^3 + 1\right)^3}$.

2. Знайти диференціали другого порядку від функцій:

1) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{x}{\sqrt{\left(1 + x^2\right)^3}} dx^2$.

2) $y = e^{\sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{4x\sqrt{x}} dx^2$.

Приклади розв'язання

1.Знайти похідну другого порядку y'' функції:

$$y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Розв’язання.

Знаходимо спочатку першу похідну від складеної функції:

$$y' = \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(2x^2+2x\sqrt{x^2+1}+2\right)\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$$

Тоді друга похідна дорівнює:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\ .$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти перші похідні функцій. В завданнях *а*) і *б*) додатково знайти другі похідні.

1. *а*) $y = 3x^5 - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{x}$;

б) $y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;

в) $y = (x+1)^2 \cdot \cos 5x$;

г) $y = \operatorname{arctg}(e^{2x} + 3)$;

д) $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x}}$;

е) $y = \ln \operatorname{tg}(2x+1)$;

ж) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$;

з) $y = 2^{3x} + 7x^7 + e^{-x^2}$;

і) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

к) $y = x^{\arcsin x}$.

2. *а*) $y = 4x^7 + \dfrac{1}{x^2} - \sqrt{2x}$;

б) $y = \dfrac{x + e^{3x+2}}{1+\cos 3x}$;

е) $y = x^2 \cdot \cos 7x$;

ж) $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$;

в) $y = (x+2)\cdot e^{-x^2}$;

г) $y = \sin(3x^7+1) + 8x$;

д) $y = 2^{\operatorname{tg} x} + 3^{\cos 4x}$;

з) $y = \ln^5 \sin x$;

і) $y = \arcsin e^{4x}$;

к) $y = (\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$.

3. а) $y = 7x - \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x^3}$;

б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

в) $y = 3x \cdot \arcsin 2x$;

г) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$;

д) $y = 3^{\operatorname{ctg} x} + 8^{\cos 4x}$;

е) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

ж) $y = \ln \dfrac{x^2}{1-x^2}$;

з) $y = (x^2+2x+2)\cdot e^{-x}$;

і) $y = \sin(x+6) - x\cdot\cos 4x$;

к) $y = (x^2)^{\frac{1}{x}}$.

4. а) $y = 9x^2 + \dfrac{1}{2x^2} - \sqrt[3]{x}$;

б) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$;

в) $y = e^{\sin 5x}\cdot \ln x$;

г) $y = \ln\sin(2x+5)$;

д) $y = 0{,}9^{\cos^2 x}$;

е) $y = x\cdot \operatorname{arctg} 3x$;

ж) $y = \dfrac{9-x^2}{9+x^2}$;

з) $y = 3\sin^2 x\cdot\cos 2x$;

і) $y = e^{-x^2} + x^2 + \dfrac{3}{x}$;

к) $y = x^{\arccos x}$.

5. а) $y = 3x^5 - \dfrac{1}{x^5} - \sqrt[5]{x}$;

б) $y = 2\sqrt{4x+3} - \dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+1}}$;

в) $y = (\ln x+1)^2\cdot\cos 2x$;

г) $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$;

д) $y = 5^{\operatorname{tg} x} + 3^{\sin x}$;

е) $y = x\sqrt{1+x^2}$;

ж) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;

з) $y = \sin^2 2x + \cos x$;

і) $y = \ln\operatorname{tg} 5x$;

к) $y = (x+1)^{2x}$.

6.

а) $y = 2x^7 - \dfrac{1}{7x^7} - \sqrt[7]{2x}$;

б) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

в) $y = (3 - \sin^2 x)^3$;

г) $y = \dfrac{1+\cos 2x}{x^3} + \sin(3x + 9)$

д) $y = e^{\sqrt{2x}} + 3$;

е) $y = \operatorname{arctg} x^2 + 7x^6 + 2$;

ж) $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$;

з) $y = x^2 \cdot \ln(x^2 + 1)$;

і) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 5\sqrt[5]{x^3+1}$;

к) $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

7.

а) $y = 3x^7 - \dfrac{1}{x^7} - \sqrt[7]{3x}$;

б) $y = \sqrt{3-4x+5x^2} + 4x \cdot \ln x$;

в) $y = \arcsin(3x^2 + 2)$;

г) $y = \dfrac{\sin^2 x}{2+\cos^2 x}$;

д) $y = 3^{\sin^2 x}$;

е) $y = \dfrac{5+\sin 5x}{4-\cos 2x}$;

ж) $y = (x^2 + 1) \cdot \operatorname{arctg} 4x$;

з) $y = (2x + 5) \cdot e^{-x^5}$;

і) $y = \ln\sqrt{x+1}$;

к) $y = (\cos x)^{\sqrt{x}}$.

8.

а) $y = 4x^9 - \dfrac{4}{x^9} - \sqrt[9]{4x}$;

б) $y = \sqrt[3]{1+\sqrt{x+3}}$;

в) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$;

г) $y = x \cdot \arccos\sqrt{4-x^2}$;

д) $y = 0{,}2^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

е) $y = e^x \cdot \cos x$;

ж) $y = 3x^2 \cdot \ln x^3$;

з) $y = \dfrac{3+\sin 2x}{9-e^{2x}}$;

і) $y = (2x + 2\cos x) \cdot e^{-x}$

к) $y = (\sin 2x)^{\cos x}$.

9.

а) $y = 15x^3 - \dfrac{15}{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$;

б) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

в) $y = \dfrac{\cos 3x + 4}{\sin 3x - 4}$;

г) $y = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x+5} + 8x + 7$;

д) $y = (x + x^2)^x$;

е) $y = e^{\sin 4x + 8}$;

ж) $y = \dfrac{x}{x-1} - \ln 4x$;

з) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

і) $y = \cos^{100} x + \sin 100x$

к) $y = 3^{\arccos 3x}$.

10.

а) $y = 5x^{10} + \dfrac{5}{x^{10}} + \sqrt[10]{5x}$;

б) $y = \sqrt{1+\cos^2 x^2}$;

в) $y = x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$;

г) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

д) $y = 5^{\sin x^3}$;

е) $y = \sin x \cdot \cos(7x+5)$;

ж) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$;

з) $y = \ln \sin(3x+5)$;

і) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$;

к) $y = (x^3)^{\ln x}$.

11.

а) $y = 3x^{11} + \dfrac{5}{x^{11}} + \sqrt[11]{x^3}$;

б) $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$;

в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{25-x^2}}$;

г) $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\sin x)$;

д) $y = 2 \cdot \cos(4x+x^2)$;

е) $y = (1 - x^2) \cdot \cos 2x$;

ж) $y = \sqrt[3]{x + x\sqrt{x}}$;

з) $y = e^{-x} \cdot \sin 2x$;

і) $y = \ln^5(x^2 - 1)$;

к) $y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.

12.

а) $y = 12x^7 - \dfrac{12}{x^7} + \sqrt[7]{x^2}$;

б) $y = x^2 \cdot \arccos \dfrac{x}{2} - 4x$;

в) $y = \dfrac{x^5}{x^4 + 2}$;

г) $y = \operatorname{arctg}^2 x + 6x^2$;

е) $y = e^{\operatorname{ctg} 3x}$;

ж) $y = \sqrt[4]{1+\cos x^4}$;

з) $y = \dfrac{4 + \cos 3x}{\sin(5x+3)}$;

і) $y = (x^3 + x^2) \cdot e^{-x}$;

к) $y = x^{\arcsin^2 x}$.

д) $y = 5^{\frac{1-x^2}{1+x^2}} + 7^{\cos 4x}$;

13.

а) $y = 6x^7 + \dfrac{7}{x^6} + \sqrt[6]{x^5}$;

б) $y = \sqrt[3]{2 - x^2 \cdot \sqrt{x}}$;

в) $y = \dfrac{x^6}{6x^5 - 1}$;

г) $y = \ln^3 \sin(3x + 3)$;

д) $y = 2^{\operatorname{tg} 3x}$;

е) $y = \ln(x^2 + 5)$;

ж) $y = x^5 \cdot e^{-x}$;

з) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

і) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;

к) $y = (\sqrt{x})^{\sin x}$.

14.

а) $y = 12x^{14} + \dfrac{14}{x^2} - \sqrt[12]{x}$;

б) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x}$;

в) $y = \dfrac{x}{x^2 + 2}$;

г) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$;

д) $y = 5^{\frac{x}{x+1}}$;

е) $y = 8x \cdot e^{-x^2}$;

ж) $y = (3x + 1)^5 \cdot \cos 3x$;

з) $y = \dfrac{\sin x}{3\cos^2 x}$;

і) $y = \operatorname{arctg}^2 e^x$;

к) $y = x^{\ln^2 x}$.

15.

а) $y = x^{15} + \dfrac{15}{x^2} - \sqrt{x}$;

б) $y = (5x + x^3) \cdot \ln x^2$;

в) $y = \dfrac{x \cdot \cos x}{1 - \sin x} + 2\sin 4x + 4$;

г) $y = \arccos \dfrac{1}{2x^2}$;

д) $y = 0{,}7^{\operatorname{arctg} x}$;

е) $y = \cos(10x + x^3)$;

ж) $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$;

з) $y = \dfrac{7 - \cos 3x}{5 + \sin 5x}$;

і) $y = \ln(4 + \sin 4x)$;

к) $y = x^{\sin\sqrt{x}}$.

16.

а) $y = 2x^5 + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x}$;

б) $y = \sqrt[3]{\cos^2 x + x^2}$;

е) $y = (3x + 2) \cdot \sin 3x$;

ж) $y = \ln^2 \operatorname{tg} 2x$;

з) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;

в) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$;

г) $y = x \cdot \arccos x - \sqrt{2-x^3}$;

д) $y = 7^{\ln^2 x}$;

і) $y = \arcsin(e^{7x})$;

к) $y = (\sin 2x)^x$.

17.

а) $y = x^7 + \dfrac{7}{x^3} - \sqrt[3]{7x}$;

б) $y = \dfrac{\sin x}{1+\ln\sin x}$;

в) $y = (5 + x^3)^2 \cdot e^{-x}$;

г) $y = 2\sqrt{4x} - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2+5}}$;

д) $y = 7^{\sqrt{\cos x}}$;

е) $y = e^x \cdot \sin 2x$;

ж) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$;

з) $y = \sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$;

і) $y = \cos(3^x)$;

к) $y = (\arcsin x)^{(x^2+1)}$

18.

а) $y = x^5 + \dfrac{5}{x^3} - \sqrt[3]{5x}$;

б) $y = \dfrac{2\sin 5x}{1-\cos 3x}$;

в) $y = \arcsin(\cos x^2) + x^2$;

г) $y = 2\operatorname{tg}^3(x^3 + 2)$;

д) $y = 2^{\sin 3x}$;

е) $y = (x^2 + 6) \cdot \ln 3x$;

ж) $y = \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{9x+8}{x^3}$;

з) $y = e^{3x} \cdot \cos 3x$;

і) $y = \operatorname{arctg}^2 \dfrac{1}{x}$;

к) $y = (x+1)^{(x^2+1)}$.

19.

а) $y = 7x^2 + \dfrac{x^5}{5} - \sqrt[5]{x}$;

б) $y = \ln \operatorname{ctg}^3 x$;

в) $y = \dfrac{x^7}{x^5-2}$;

г) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + 2)$;

д) $y = \dfrac{x}{2^{1+x}} + 7^{\cos 2x}$;

е) $y = \sin^2 6x + 3x^2$;

ж) $y = \sqrt{3x} \cdot \arcsin x^2$;

з) $y = \dfrac{1+e^{2x}}{1-e^{4x}}$;

і) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+2x+3})$;

к) $y = (\sin\sqrt{x})^x$.

20.

а) $y = x^7 - \frac{x^6}{6} + \sqrt[6]{x}$;

б) $y = \sqrt{x}$ —arctg $\sqrt{x}$;

в) $y = 3x \cdot \sin^3 x - \cos^3 x$;

г) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

д) $y = \ln^2 \sin 3x$;

е) $y = 2\ln \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

ж) $y = \frac{x}{6(x+1)}$;

з) $y = \arcsin (e^{-4x})$;

і) $y = 5^{\frac{1-x}{1+x}} + 3^{\cos 4x}$;

к) $y = (3x)^{e^x}$.

21.

а) $y = x^5 - \frac{1}{x^5} + \sqrt[5]{x}$;

б) $y = \sqrt{x+2\sqrt{x}}$;

в) $y = \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} + 5^{\cos 4x}$;

г) $y = \operatorname{arctg}(7\sin 3x)$;

д) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$;

е) $y = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2+6x}{x^3}$;

ж) $y = \ln^2 \operatorname{arctg} x$;

з) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$;

і) $y = (\sqrt{x})^{\cos x}$;

к) $y = \frac{x^2}{1+x^3}$.

22.

а) $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} - \frac{3}{x^3} + 2$;

б) $y = \operatorname{tg}(x^2+3)$;

в) $y = x^{\cos^2 x}$;

г) $y = \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$;

д) $y = x^2 \cdot \arcsin(9x+2)$;

е) $y = \frac{1+2\cos 3x}{1-\cos 2x}$;

ж) $y = (0{,}9)^{\sqrt{x}}$;

з) $y = \sin^3 \frac{x}{3} + \cos x$;

і) $y = 0{,}7^{(x^5)}$;

к) $y = x\sqrt{x} \cdot (3\ln x - 2)$

23.

а) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} + 3$;

б) $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$;

в) $y = \sin^4 x + x^2 \cdot \cos^2 x$;

г) $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

е) $y = e^{-x^2}$;

ж) $y = 3\operatorname{tg}^6 x + 7$;

з) $y = 4x \cdot \operatorname{arctg}(2x+9)$;

і) $y = \frac{x^2}{(x-3)^2}$;

д) $y = 5^{\cos x^2}$;

к) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\arccos x}$

24.

а) $y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + 1$;

б) $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

в) $y = \sqrt[3]{x}$. arctg x ;

г) $y = (x^2 - x^3)\cdot e^{-x}$;

д) $y = 15^{\ln^2 x}$;

е) $y = \operatorname{tg}(x^2 + \cos x)$;

ж) $y = \sqrt{\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}$;

з) $y = \frac{1}{2}(\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$;

і) $y = 3x^3 + \ln^3 x$;

к) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}$.

25.

а) $y = 3x^5 - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} + 2$;

б) $y = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$;

в) $y = x^3 \cdot (x - 5\cos x)^2$

г) $y = \frac{x+\sqrt{x}}{x-2\sqrt[3]{x}}$;

д) $y = 5^{\sin 3x}$;

е) $y = \sqrt{1+x^2} + 5^{\cos 3x}$;

ж) $y = \ln^2 \sin x$;

з) $y = \arccos\frac{9-x^2}{9+x^2}$;

і) $y = (1 + 9x)\cdot e^{-x^2}$;

к) $y = (1 + x)^{\cos x}$.

26.

а) $y = 4x^2 - \frac{3}{2x^2} + \sqrt[3]{x}$;

б) $y = \frac{2+e^{3x}}{9-e^{-4x}}\cdot x^2$;

в) $y = \operatorname{arctg}(x^2 + e^{3x})$;

г) $y = \ln\operatorname{tg}(5x+1)$;

д) $y = 3^{\ln 3x}$;

е) $y = \ln(2x - 3)$;

ж) $y = \frac{3+\sin 4x}{8-\cos 3x}$;

з) $y = (2x^3 + 5)^4 \cdot x^3$;

і) $y = \sin 5x + \cos 3x^3$;

к) $y = x^{\frac{2}{x}}$.

27.

а) $y = 3x^5 - \frac{5}{x^5} + \sqrt[5]{5x+2}$;

б) $y = \arcsin(3x^3 + 4)$;

е) $y = \frac{5x+\sin 4x}{\cos 2x - 4}$;

ж) $y = \ln\cos(5x^3 + 4)$;

в) $y = (x + 8)\cdot \operatorname{arctg} 4x^3$;

г) $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{3x}$;

д) $y = 4x\cdot(1 - 3\ln x)$;

з) $y = (\operatorname{ctg} 3x + 1)^5$;

і) $y = 5^{\sin 2x}$;

к) $y = (\cos x)^{x}$.

28. *а*) $y = 5x - \dfrac{1}{x^2} - \sqrt[5]{x}$;

б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

в) $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$;

г) $y = x^2\cdot \operatorname{ctg} 2x$;

д) $y = \cos^2 5x + 7x$;

е) $y = \cos^2 x - 2\ln\cos x$;

ж) $y = \dfrac{1}{(1+\sin 4x)^3}$;

з) $y = \arcsin^2\dfrac{1}{x}$;

і) $y = 7^{-x^2}$;

к) $y = (\cos x)^{\sin x}$.

29. *а*) $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3} + \sqrt[3]{x}$;

б) $y = \dfrac{2}{2x^2} + 2$;

в) $y = (x+5)^7\cdot \sin 3x$;

г) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$;

д) $y = 52^{\operatorname{ctg} x}$;

е) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x^2 - 1}$;

ж) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;

з) $y = (x+1)\cdot \arccos(x^2+1)$;

і) $y = \ln\dfrac{x^5}{x^5 - 2}$;

к) $y = (\operatorname{tg} x)^x$.

30. *а*) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + 3$;

б) $y = 3x\cdot \sin 5x + 8$;

в) $y = (3 + \sin x)^2\cdot x$;

г) $y = \dfrac{3x+2}{x^2 - 2x + 5}$;

д) $y = \arcsin\sqrt[3]{x}$;

е) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos 2x}\right)^2$;

ж) $y = x\cdot(\cos\ln x + \sin\ln x)$;

з) $y = 2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{3}}\right)$;

і) $y = 0{,}92^{(x^3)}$;

к) $y = (\sqrt{x})^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Тема 4. Практичне заняття 4
Неявна функція та її диференціювання. Параметрично задані функції та їх диференціювання

Говорять, що рівняння $F(x;\ y)=0$ задає неявно функцію $y=y(x)$ на інтервалі $(a;\ b)$, якщо для усіх $x\in(a;b)$ справджується рівність

$$F\ (\ x;\ y\ (x))=0.$$

Для обчислення похідної функції $y=y(x)$ треба продиференціювати по x тотожність $F(x;\ y)=0$, враховуючи, що y є функцією від *x*, потім одержане рівняння розв'язати відносно $y'(x)$.

Завдання для розв'язання на практичному занятті

Знайти значення $\frac{dy}{dx}$ у точці $M\ (1;-1)$ для функції, заданої неявно рівнянням

1. $x^3-2x^2y^2+5x+y-3=0.$
2. $2^{x+1}+3^{y-2}=6^{x-y}$.
3. $x\ \ y^2+\sin x^2y\ \ =1$.
4. $xy^3+xe^y=x^3+2$.

Приклад розв'язання

1. Знайти значення $\frac{dy}{dx}$ у точці $M\ (1;-1)$ для функції, заданої неявно рівнянням $x^3-2x^2y^2+5x+y-3=0.$

Розв'язання. Зробимо диференціювання по *x* обох частин даного рівняння, враховуючи, що y є функцією від, дістанемо:

$$3x^2-4xy^2-2x^2 2yy'+5+y'=0,$$

$$y' = \frac{4xy^2 - 3x^2 - 5}{1 - 4x^2 y}.$$

$$y'(M) = y'(1; -1) = \frac{4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot 1^2 - 5}{1 - 4 \cdot 1^2 \cdot (-1)} = -\frac{4}{5}.$$

Параметрично задані функції та їх диференціювання

Якщо функція $y = f(x)$ задана параметрично двома рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (\alpha; \beta)$, то її похідні обчислюються за формулами

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \cdot \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}$$

Знайти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо функція $y = y(x)$ задана параметрично:

1. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^2 + 5t, \end{cases}$ .2. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x = e^t \cos 2t, \\ y = e^t \sin 2t. \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x = t + \ln \cos 2t, \\ y = t - \ln \sin 2t. \end{cases}$

Приклад розв’язання

1 . Знайти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, якщо функція $y = y(x)$ задана

параметрично:

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^2 + 5t, \end{cases}$$

Послідовно знаходимо похідні: $x_t' = 3t^2 + 3$, $y_t' = 6t + 5$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6t+5}{3t^2+3}.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_t' = \frac{6\left(3t^2+3\right) - 6t\left(6t+5\right)}{\left(3t^2+3\right)^2} = \frac{-18t^2 - 30t + 18}{\left(3t^2+3\right)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-18t^2 - 30t + 18}{\left(3t^2+3\right)}.$$

Тема 5. Практичне заняття 5
Розкриття невизначеностей за правилом Лопиталя

<u>*Теорема 1.*</u> Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ на деякому відрізку $[a;b]$ задовольняють умовам теореми Коші і $f(a) = \varphi(a) = 0$, то

якщо існує $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то існує $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому вони рівні, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

<u>*Теорема 2.*</u> Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні та диференційовані при усіх $x \neq a$ у деякому околі точки $x = a$ і похідна $\varphi'(x) \neq 0$. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$ і існує

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, тоді існує границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причому вони рівні, тобто

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Завдання для розв'язання на практичному занятті

1 . Знайти границі, застосовуючи правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Розв'язання

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=\frac{e^0}{\cos 0}=1$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=\frac{-\cos 0}{6}=-\frac{1}{6}$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{1}=0$.

При розкритті невизначеностей виду $[0\cdot\infty],[\infty-\infty]$ для застосування правила Лопиталя даний вираз треба звести до невизначеностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ шляхом алгебраїчних перетворень.

2 . Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання. *а*) Маємо невизначеність $[\infty\cdot 0]$. Зведемо її до невизначеності $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, потім застосуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0.$$

б) Маємо невизначеність $[\infty-\infty]$. Зведемо її до

невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, потім застосуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\mathrm{ctg}\,x-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} = \lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\sin x-x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

При розкритті невизначеностей виду $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$ доцільним є попереднє знаходження границі логарифма заданої функції.

3 . Обчисліти $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

<u>*Розв'язання.*</u> Маємо невизначеність $[\infty^0]$. Введемо позначення

$y=(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$, тоді $\ln y=\frac{1}{x}\ln(x+2^x)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x}$

.

Дістали невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln2}{x+2^x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln^2 2}{1+2^x\ln2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 2}{2^{-x}+\ln2} = \ln2.$$ Оскільки

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\ln2$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}y=2$.

Знайти границі:

4. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$, *б*) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^2 x$.

5. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$, *б*) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

6. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$, *б*) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$.

7. *а*) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$, *б*) $\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$.

8. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{1-4^x}$, *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

9. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$, *б*) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

10. *а*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$, *б*) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$.

Тема 6. Практичне заняття 6
Зростання та спадання функції.
Локальний екстремум. Дослідження функції на екстремум за допомогою другої похідної.
Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Означення . Нехай функція $f(x)$ визначена і диференційована на інтервалі $(a;\, b)$ Точки інтервалу $(a;\, b)$ в яких прохідна $f'(x)=0$ називаються стаціонарними точками першого роду. Стаціонарні точки першого роду, а також точки в яких похідна не існує називаються критичними точками першого роду.

Схема дослідження функції на зростання та спадання

1. Знайти першу похідну функції.
2. Знайти точки в яких похідна не існує або дорівнює нулю та відмітити ці точки на числовій вісі.
3. Визначити знак першої похідної на кожному з одержаних проміжків. Для цього в похідну підставляють будь-яке довільне значення, що належить проміжку. Знак похідної в довільній точці проміжку є однаковим зі знаком похідної на усьому проміжку.
4. Зробити висновки:
   - якщо на деякому проміжку $f'(x) < 0$, то на цьому проміжку функція спадає.
   - якщо $f'(x) > 0$ то функція зростає.

Означення **.** Функція $f(x)$ набуває максимуму (максимального значення) в т. x_o, якщо в деякому околі т. x_o справджується нерівність $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$, де Δx - достатньо мала величина. Функція $f(x)$ набуває мінімуму (мінімального значення) в точці x_o, якщо в деякому околі цієї точки справджується нерівність $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$, де Δx - достатньо мале число.

*Теорема 1***.** (Необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційована функція має екстремум в т. x_o, то її похідна в цій точці дорівнює нулю.

*Теорема 2***.** (Достатня умова існування екстремуму). Якщо при переході через критичну точку зліва направо, перша похідна змінює знак "- " на "+ ", то ця точка є точкою мінімуму. Якщо перша похідна змінює знак з "+ " на "-", то ця точка є точкою у максимуму. Якщо при переході через критичну точку похідна не змінює знак, то ця точка не є точкою екстремуму.

*Теорема 3***.** (Достатня ознака існування екстремуму). Нехай функція $f(x)$ диференційована в околі стаціонарної точки x_o, а в самій стаціонарній точці має похідну другого порядку, то якщо $f''(x_0) > 0$, то т. x_o є точкою мінімуму. Якщо $f''(x_0) < 0$ - точкою максимуму, якщо $f''(x_0) = 0$ - конкретних висновків зробити не можливо.

Завдання для розв’язання на практичному занятті

1 . Знайти екстремуми функції

$$y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}\ .$$

Область визначення функції — $x \in R$;

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}}\ .$$

Похідна не існує при $x = 0$, і

$$y' = \frac{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1\ .$$

Отже, точки, які є підозрілими на екстремум, — це $x = 0$ і $x = -1$, які обидві належать області визначення. Вся область визначення розподілилася на 3 частини: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ і $(0, +\infty)$.

Визначимо знак похідної на кожній частині:

Нехай $x \in (-\infty, -1)$. Візьмемо довільно значення з цієї області і обчислимо там похідну, наприклад, $x = -8$:

$$y'(-8) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{-8}} = 1 > 0.$$

Отже, $f'(x) > 0$, коли $x \in (-\infty, -1)$.

Нехай тепер $x \in (-1, 0)$. Перевіримо $x = -\frac{1}{8}$:

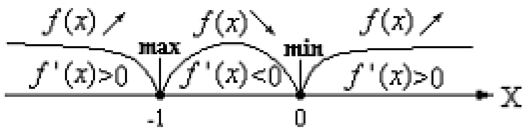
$$y'(-\frac{1}{8}) = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}} = -2 < 0,$$

тому $f'(x) < 0$, коли $x \in (-1, 0)$.

Нехай $x \in (0, +\infty)$. Перевіримо, наприклад, $x = 1$:

$y'(1) = 4 > 0$, тому $f'(x) > 0$, коли $x \in (0, +\infty)$.

1. Аналізуючи знаки похідної до і після точки, підозрілої на екстремум, робимо висновки: $(-1, y(-1)) = (-1, 1)$ — точка локального максимуму, $(0, y(0)) = (0, 0)$ — точка локального мінімуму.



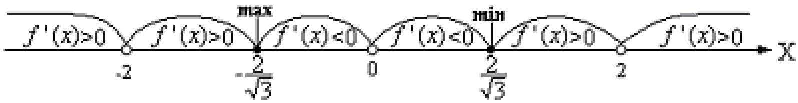
2. Дослідити на екстремум функцію

$$y=\frac{16}{x\left(4-x^2\right)}.$$

Область визначення функції : $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$.

$$y'=\frac{16\left(3x^2-4\right)}{x^2\left(4-x^2\right)^2};$$

Похідна не існує в точках $x=0$, $x=\pm 2$, які не належать області визначення; $y'=0$ в точках $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ з області визначення функції. Дві останні точки є підозрілими на екстремум. Результати проведених досліджень представлені на рис.5.



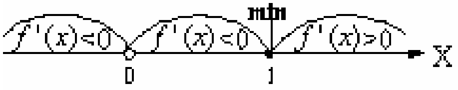
Таким чином, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-3\sqrt{3}\right)$ — точка локального максимуму, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},3\sqrt{3}\right)$ — точка локального мінімуму.

3 . Дослідити на екстремум функцію

$$y=\frac{e^x}{x}.$$

Область визначення функції — $x \neq 0$.

$$y'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$



Похідна не існує в точці $x=0$, яка не належать області визначення; $y'=0$ в точці $x=1$, яка належить області визначення функції і є єдиною підозрілою на екстремум. Результати проведених досліджень представлені на рис.6. Таким чином, $(1, e)$ — точка локального мінімуму.

Опуклість та вгнутість кривої. Точки перегину

Означення Якщо на інтервалі $(a;в)$ всі точки кривої лежать над будь – якою дотичною цієї кривої, то вона називається вгнутою на цьому інтервалі.

Якщо на інтервалі $(a;в)$ всі точки кривої лежать під будь – якою дотичною до цієї кривої, то крива називається опуклою на цьому інтервалі.

Точки у яких крива змінює вгнутість на опуклість або навпаки називається точками перегину кривої.

Теорема. Якщо на інтервалі $(a;в)$ друга похідна функції від’ємна $f''(x)<0$, то на цьому інтервалі крива опукла.

Якщо на інтервалі $(a;в)$друга похідна функції додатна $f''(x)>0$, то на цьому інтервалі крива вгнута.

Завдання для розв’язання на практичному занятті

1 . Визначити інтервали опуклості уверх та униз, та точки перегину кривої Гауса

$$y = e^{-x^2}.$$

Область визначення — $x \in R$;

$$y' = -2xe^{-x^2};\ y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1);$$

Для y'' немає точок, де вона не існує. Знайдемо нулі похідної другого порядку:

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Обидві знайдені точки належать області визначення функції і є підозрілими на перегин. Вони розбивають область визначення на три частки:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right).$$

Визначимо знак y'' на кожній з отриманих на попередньому кроці часток. Нехай $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Візьмемо якесь значення з цієї множини, наприклад -10, і визначимо знак $y''(-10)$. Оскільки $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, а $2e^{-x^2} > 0$ для будь-якого x, то знак y'' можна визначати лише за знаком $(2x^2 - 1)$, тому легко отримати, що $y''(-10) > 0$. Це означає, що $y''(x) > 0$ на $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

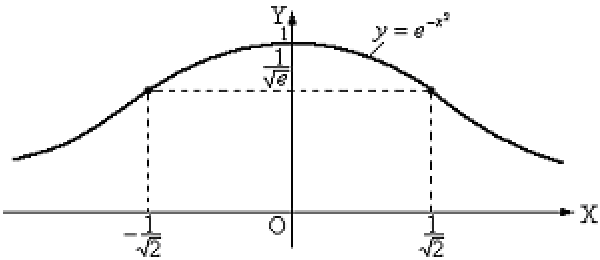
Нехай $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Обчислюючи знак $y''(0) < 0$, робимо висновок, що $y''(x) < 0$ на всьому проміжку $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Аналогічно встановлюється, що $y''(x) > 0$ на $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.

Аналізуючи знак y'', робимо висновок, що обидві точки

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{ і } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

є точками перегину.



Тема 7. Практичне заняття 7

Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функції з побудовою її графіка

*Означення***.** Пряма називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки кривої до цієї прямої прямує до нуля, якщо точка рухається по кривій у нескінченність.

Асимптоти діляться на горизонтальні, вертикальні, похилі.

1) Горизонтальні асимптоти.

Якщо задана функція $y = f(x)$, для якої існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, то пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою.

2) Вертикальні асимптоти.

Якщо $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \infty$, або $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,

то пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою графіка функції.

3) Похилі асимптоти

Нехай надано рівняння кривої $y = f(x)$, треба скласти рівняння асимптоти цієї кривої у виді $y = kx + b$. Щоб скласти рівняння похилої асимптоти, треба спочатку знайти кутовий коефіцієнт k за формулою $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ та підставити в формулу

$$b = \lim_{x \to \infty}\left(f(x) - kx \right)$$

Завдання для розв'язання на практичному занятті

1. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^3 + 9x}{x^2 - 4}$.

Розв'язання.

Область визначення функції *(–∞; –2)* ∪ *(–2; 2)* ∪ *(2; +∞),* тобто $x \neq \pm 2$.

В точках $x = -2$ та $x = 2$ функція не визначена, в цих точках можуть існувати вертикальні асимптоти.

Графік функції має вертикальні асимптоти *x=a*, якщо

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$.Оскільки $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=-\infty$ та $\lim\limits_{x\to +2}\dfrac{x^3+9x}{x^2-4}=+\infty$

,то x = – 2 та x = 2 – вертикальні асимптоти.

Перевіримо наявність похилих асимптот. Рівняння похилої асимптоти записується наступним чином:

$$y = kx + b.$$

Знайдемо k та b.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+9x}{x\left(x^2-4\right)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+9x}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{13x}{x^2-4}=0.$$

Отже, рівняння похилої асимптоти буде мати наступний вигляд:

$$y = x.$$

Оскільки $k \neq 0$, то горизонтальних асимптот графік функції не має.

2 . Знайти асимптоти кривої

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Область визначення функції — $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, де підкореневий вираз знаменника додатний. В усіх точках області визначення подана функція є неперервною, бо вона є відношенням двох неперервних функцій, при тому знаменник не дорівнює нулю. З неперервності функції на області визначення витікає, що на множині $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ немає таких значень $x=a$, щоб виконувалась рівність, бо в точках неперервності $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Тому, якщо вертикальні асимптоти є, то вони можуть знаходитися лише на межах області визначення, тобто це можуть бути лише $x=\pm 1$. Перевіримо їх. Нехай спочатку $x=1$:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\infty,$$

тобто $x=1$ дійсно вертикальна асимптота.

Аналогічно:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\infty,$$

що говоре про наявність ще однієї вертикальної асимптоти $x=-1$.

Знайдемо похилі асимптоти:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2 - x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4 - x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2 + x\sqrt{x^2-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)} = 0.$$

Таким чином права похила асимптота існує, це пряма $y = x$.
Аналогічно маємо:

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = -1, \quad b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + x\right) = 0,$$

тому ліва похила асимптота — це пряма $y = -x$.

3 . Знайти асимптоти кривої

$$y = x + \ln x .$$

Область визначення функції — $x \in (0, \infty)$. На області визначення подана функція є неперервною як сума двох неперервних, тому на множині $(0, +\infty)$ немає таких значень $x = a$, щоб виконувалась рівність, бо в точках неперервності $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \neq \infty$. Тому, якщо вертикальні асимптоти є, то вони можуть знаходитися лише на межах області визначення, тобто це може бути тільки $x = 0$. Перевіримо це:

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}(x + \ln x) = -\infty .$$

Таким чином, дійсно, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою поданої функції.

Перевіримо наявність похилої правої асимптоти:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\left(x + \ln x\right) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = \infty.$$

Оскільки друга границя не існує, то похилої правої асимптоти немає.

Подана функція визначена лише в правій координатній півплощині, тому лівої похилої асимптоти вона мати не може.

Отже, для функції $y = x + \ln x$ існує єдина вертикальна асимптота $x = 0$.

Схема дослідження графіка функції

При побудові графіка функції доцільно:

1. Знайти область визначення функції й з'ясувати характер поведінки функції (обчислити границі) на межах області визначення, а також, коли $x \to \pm\infty$, якщо функція там визначена;
2. З'ясувати, чи є функція парної, непарною, загального виду;
3. З'ясувати, чи є функція періодичною;
4. Знайти точки перетинання функції з осями координат;
5. Знайти точки розриву функції й з'ясувати характер розривів;
6. Знайти асимптоти функції;
7. Обчислити $f'(x)$. Використовуючи похідну, визначити проміжки монотонності функції й точки екстремуму;
8. Обчислити $f''(x)$. Використовуючи похідну другого порядку, визначити проміжки опуклості уверх (униз) функції й точки перегину.

Завдання для розв'язання на практичному занятті

1 **.** Побудувати графік функції

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} .$$

1) Знаходимо область визначення функції:

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 1,$$

тобто $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2) Область визначення функції симетрична щодо точки 0, крім того,

$$y(-x)=\frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2-1}}=-y(x),$$

тобто функція є непарною, її графік симетричний відносно початку координат. У силу цього будемо досліджувати функцію тільки в правій координатній півплощині.

3) Функція не є періодичною.

4) Точки перетинання функції з віссю ОХ:

$$y=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0 \quad\Rightarrow\quad x=0;$$

з віссю ОУ:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0.$$

5) Точками розриву функції є $x=\pm 1$. У силу непарності функції визначимо характер розриву тільки для точки $x=1$:

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=+\infty,$$

із чого відразу випливає, що, по-перше, в точці $x=1$ є розрив другого роду, а по-друге, що пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою. Для зручності побудови графіка обчислимо також другу однобічну границю:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=-\infty.$$

6) Залишилося з'ясувати питання з похилими асимптотами. Будемо розглядати тільки праву похилу асимптоту. Для цього обчислимо

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0;$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}-0\cdot x\right)=\infty.$$

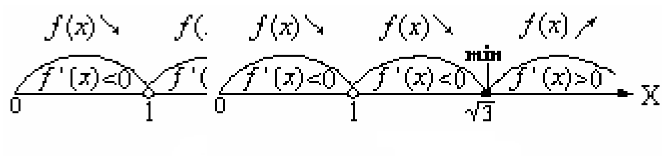
Таким чином, правої похилої асимптоти, а в силу симетричності графіка функції, і лівої, не існує.

7) Обчислимо похідну функції:

$$y'=\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right)'=\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}\,.$$

Знайдемо проміжки монотонності й точки екстремуму функції, для чого визначимо значення аргументу, у яких y' дорівнює нулю або не існує (це точки, підозрілі на екстремум). Розглядаємо функцію тільки в додатній півплощині.

Похідна існує у всіх точках області визначення функції, тому залишилося знайти тільки нулі похідної:



$$y'=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{3}.$$

Результати проведених досліджень представлені на рисунку, звідки випливає, що точка $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$ є точкою локального мінімуму.

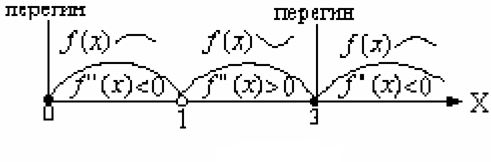
8)

$$y''=\left(\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}\right)'=$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2x\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}-\left(x^2-3\right)\times\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\times 2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^8}}=\frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}$$

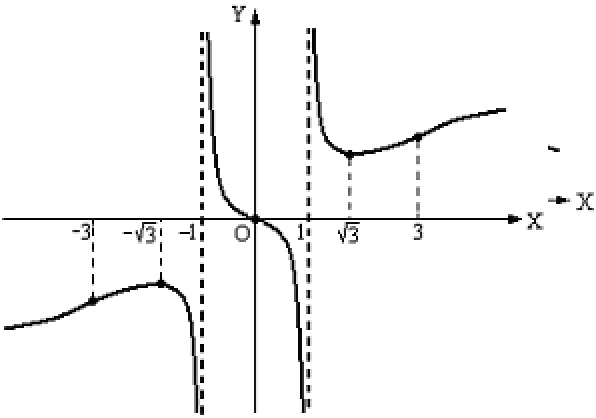
.

Похідна другого порядку існує скрізь на області визначення функції, тому підозрілими на перегин будуть лише точки, в яких $y''=0$:



$$y''=\frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}=0 \quad\Rightarrow\quad x=0,\, x=\pm 3.$$

Для одержання повного графіка функції скористаємося його симетричністю відносно початку координат



Список рекомендованої літератури:

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа./ Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
2. Валєєв К. Г, Вища математика: навч. посіб. : у 2-х ч. – ч. 1 / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
3. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. / И. П. Натансон. – СПб. : Издательство Лань, 1999. – 736 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2-х т. - Т.1. / Н. С. Пискунов – М. : Наука, 1985. – 560 с.
5. Соколенко О. І. Вища математика: підруч./ О. І. Соколенко – К. : Академія, 2002. – 432 с.

Зміст

Навчальне видання

Вища математика.
Диференціальне числення функції однієї змінної
(Модуль 5)

Завдання та методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін** В'ячеслав Сергійович
Богза Володимир Григорович
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 3,25
Тираж 50 прим. Зам. № 1403-1

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Паризької Комуни, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р