УДК 519.216

И. П. Атаманюк, Ю. П. Кондратенко

Синтез оптимальных линейных стохастических систем управления на базе аппарата канонических разложений случайных последовательностей

Получены алгоритмы определения оптимальных параметров линейных стохастических систем управления на базе аппарате канонических разложений случайных последовательностей.

The algorithms of the definition of optimum parameters of linear stochastic control systems are obtained on the basis of the apparatus of canonical decompositions of random sequences.

Отримано алгоритми визначення оптимальних параметрів лінійних стохастичних систем управління на базі апарата канонічних розкладів випадкових послідовностей.

Введение. Функционирование объектов различной природы в большинстве случаев осуществляется в условиях взаимодействия множества случайных факторов, вследствие чего объект управления контролируется не полностью, это, например, управление производством, лечение заболеваний, управление беспилотными летательными аппаратами и г.д. В большинстве случаев при формировании стохастических систем управления используется либо марковская модель, либо предполагается незначительное последействие случайного процесса изменения параметров исследуемого объекта, что ограничивает точность управления. В этой связи актуальна задача синтеза систем управления с учетом произвольного числа состояний объекта контроля.

Постановка задачи

Пусть свойства стохастической системы полностью заданы дискретизированными функциями:

$$M\left[X(\mu)X(j)\right],\ M\left[U(\mu)U(j)\right],$$
$$M\left[U(\mu)X(j)\right]\mu,\ j=\overline{1,i+1},$$

где $\{X\}=X(\mu),\ \mu=\overline{1,\,i+1}$ - случайнаяпоследовательность значений параметра объекта управления; $\{U\}=U(\mu),\ \mu=\overline{1,\,i+1}$ - случайная последовательность управляющих воздействий; μ и j - некоторые моменты времени; t_μ и t_j**.** Без ограничения общности положим $M\left[X(\mu)\right]=0,\ M\left[U(\mu)\right]=0,\ \ \mu=\overline{1,\,i+1}.$ Необходимо получить оптимальную в среднеквадратическом смысле модель исследуемой системы управления.

Решение

Учитывая, что свойства системы полностью заданы корреляционными функциями, в качестве модели системы управления может быть использовано линейное уравнение [1, 2]

$$X(i+1)=\sum_{\mu=1}^{i}f_\mu^{(i)}(i+1)X(\mu)+\sum_{j=1}^{i}a_\mu^{(i)}(i+1)U(\mu)+\mathrm{W}_{i+1}. \tag{1}$$

Задача, таким образом, сводится к определению оптимальных в среднеквадратическом смысле параметров $f_\mu^{(i)}(i+1)$, $a_\mu^{(i)}(i+1)$.

Процесс функционирования системы может быть представлен случайной последовательностью $\{X\}=\{X(1),U(1),X(2),U(2),...,X(i),U(i),\quad X(i+1)\}$.(по известному значению параметра) исследуемого объекта определяется управляющее воздействие, влияющее на следующее состояние объекта). Для такой случайной последовательности стандартным способом может быть получено каноническое разложение [3,4]:

$$X'(j)=\sum_{\nu=1}^{j-1}V_\nu\varphi(j),\ \ j=\overline{1,2i+1}, \tag{2}$$

с учетом свойства случайной последовательности $\{X'\}$ ($X'(j)=X_\mu$ для $j=2\mu-1$, $\mu=\overline{1,i+1}$ и $X'(j)=U_\mu$ для $j=2\mu$, $\mu=\overline{1,i}$):

$$V_v = X(v)-\sum_{\mu=1}^{v-1}V_\mu\varphi_\mu(v),\ v=2l\text{ - }1,\ l=\overline{1,i+1}; \quad (3)$$

$$V_v = U(v)-\sum_{\mu=1}^{v-1}V_\mu\varphi_\mu(v),\ v=2l,\ l=\overline{1,i+1}; \quad (4)$$

Каноническое разложение (2) точно описывает значения случайной последовательности $\{X'\}$ в каждом сечении и обеспечивает минимум среднего квадрата ошибки приближения в промежутках между ними. Соотношения для определения дисперсий некоррелированных случайных коэффициентов $V_v, v=\overline{1,2i+1}$ имеют вид:

$$D_v = M\left[V_v^2\right] = D_x(v)-\sum_{\mu=1}^{v-1}D_\mu\varphi_\mu^2(v),\ v=2l\text{ - }1,\ l=\overline{1,i+1}; \quad (5)$$

$$D_v = D_U(v)-\sum_{\mu=1}^{v-1}D_\mu\varphi_\mu^2(v),\ v=2l,\ l=\overline{1,i}; \quad (6)$$

Неслучайные координатные функции вычисляются с помощью следующих выражений:

$$\varphi_\mu(v)=\frac{1}{D_\mu}\left\{M\left[X(\mu)X(v)\right]-\sum_{j=1}^{\mu-1}D_j\varphi_j(\mu)\varphi_j(v)\right\},\ \mu=2l-1, \quad (7)$$

$$l=\overline{1,i+1},\ v=2p-1,\ p=\overline{1,i+1},\ \mu\le v;$$

$$\varphi_\mu(v)=\frac{1}{D_\mu}\left\{M\left[U(\mu)X(v)\right]-\sum_{j=1}^{\mu-1}D_j\varphi_j(\mu)\varphi_j(v)\right\},\ \mu=2l, \quad (8)$$

$$l=\overline{1,i},\ v=2p-1,\ p=\overline{1,i+1},\ \mu\le v;$$

$$\varphi_\mu(v)=\frac{1}{D_\mu}\left\{M\left[X(\mu)U(v)\right]-\sum_{j=1}^{\mu-1}D_j\varphi_j(\mu)\varphi_j(v)\right\},\ \mu=2l\text{ - }1, \quad (9)$$

$$l=\overline{1,i},\ v=2p,\ p=\overline{1,i},\ \mu\le v;$$

$$\varphi_\mu(v)=\frac{1}{D_\mu}\left\{M\left[U(\mu)U(v)\right]-\sum_{j=1}^{\mu-1}D_j\varphi_j(\mu)\varphi_j(v)\right\},\ \mu=2l, \quad (10)$$

$$l=\overline{1,i},\ v=2p,\ p=\overline{1,i},\ \mu\le v.$$

Координатные функции обладают свойствами

$$\varphi_\mu(v)=\begin{cases}1,\mu=v;\\0,\mu>v.\end{cases} \quad (11)$$

Предположим, что система находится в первоначальном состоянии $X(1)=x(1)$. Для этого значения справедливо разложение (2) и подстановка $x(1)$ в (2) конкретизирует ($v_1 = x(1)$) значение случайного коэффициента V_1:

$$X'\left(j=2i+1/X(1)=x(1)\right)=X\left(i+1/X(1)=x(1)\right)=x(1)\varphi_1(2i+1)+\sum_{v=2}^{2i+1}V_v\varphi_v(2i+1). \quad (12)$$

Выражение (12) точно описывает условную случайную последовательность $\{X'\}$ при условии, что $X(1)=x(1)$ и представляет собой модель системы в предположении, что известно только первоначальное состояние:

$$f_1^{(1)}(i+1)=\varphi_1(2i+1)=\mathrm{F}_1^{(1)}(2i+1),$$

$$a_1^{(1)}(i+1)=0,\ \ W_{i+1}=\sum_{v=2}^{2i+1}V_v\varphi(2i+1).$$

Оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка параметра объекта управления в момент времени t_{i+1} определяется как

$$\hat{X}\left(i+1/X(1)=x(1)\right)=\hat{X}^{t(1)}(2i+1)=x(1)\varphi_1(2i+1). \tag{13}$$

Значение управляющего воздействия $u(1)$ конкретизирует второй коэффициент $V_2=v_2=u(1)-x(1)\varphi_1(2)$, и разложение (2) принимает вид:

$$\begin{aligned}X'\left(j=2i+1/X(1)=x(1),U(1)=u(1)\right)&=X\left(i+1/X(1)=x(1),U(1)=u(1)\right)=\\&=x(1)\varphi_1(2i+1)+\left[u(1)-x(1)\varphi_1(2)\right]\varphi_2(2i+1)\sum_{v=3}^{2i+1}V_v\varphi_v(2i+1).\end{aligned} \tag{14}$$

или

$$\begin{aligned}X\left(i+1/X(1)=x(1),U(1)=u(1)\right)&=x(1)\left[\varphi_1(2i+1)-\varphi_1(2)\varphi_2(2i+1)\right]+\\&+u(1)\varphi_2(2i+1)+\sum_{v=3}^{2i+1}V_v\varphi_v(2i+1).\end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, при условии, что используется только начальное состояние $x(1)$ объекта и управляющее воздействие $u(1)$, параметры модели (1) определяются выражениями

$$\begin{aligned}&f_1^{(1)}(i+1)=\varphi_1(2i+1)-\varphi_1(2)\varphi_2(2i+1)=F_1^{(2)}(2i+1),\\&a_1^{(1)}(i+1)=\varphi_2(2i+1)=F_2^{(2)}(2i+1),\\&W_{i+1}=\sum_{v=3}^{2i+1}V_v\varphi_v(2i+1).\end{aligned}$$

При этом оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка состояния объекта управления в момент времени t_{i+1} по известным $x(1)$ и $u(1)$ принимает вид

$$\begin{aligned}&\hat{X}\left(i+1/X(1)=x(1),\ U(1)=u(1)\right)=\hat{X}'^{(2)}(2i+1)=\\&=x(1)\left[\varphi_1(2i+1)-\varphi_1(2)\varphi_2(2i+1)\right]+u(1)\varphi_2(2i+1).\end{aligned} \tag{16}$$

Продолжение аналогичных выкладок для последовательно возрастающего числа известных значений $x(\mu),\ u(\mu),\ \mu=\overline{1,i}$ позволяет получить общие выражения для определения оптимальных параметров исследуемой стохастической системы управления:

$$f_\mu^{(i)}(i+1)=F_{2\mu-1}^{(2i)}(2i+1),\ \ \mu=\overline{1,i}; \tag{17}$$

$$a_\mu^{(i)}(i+1)=F_{2\mu}^{(2i)}(2i+1),\ \ \mu=\overline{1,i}; \tag{18}$$

$$W_{i+1}=V_{2i+1}; \tag{19}$$

$$F_v^k(j)=\begin{cases}F_v^{(k-1)}(j)-F_v^{(k-1)}(k)\varphi_k(j), & v\le k-1;\\ \varphi_k(j), & v=k.\end{cases} \tag{20}$$

Оптимальная оценка состояния объекта управления по всей предыстории определяется также рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}&\hat{X}'^{(k)}(j)=\hat{X}'^{(k-1)}(j)+\left[x(k)-X'^{(k-1)}(k)\right]\varphi_k(j),\\&k=2p-1,\quad p=\overline{1,i};\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\hat{X}'^{(k)}(j)=\hat{X}'^{(k-1)}(j)+\left[u(k)-X'^{(k-1)}(k)\right]\varphi_k(j),\\&k=2p,\quad p=\overline{1,i},\end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\hat{X}'^{(k)}(j) = x\big(\mu / x(1),...,x(l);\ u(1),...,u(n)\big),$$
$$j = 2\mu - 1,\ \mu = \overline{1, i+1},\ l = n = k/2,$$

если $\{k/2\} = 0;$

$$\hat{X}'^{(k)}(j) = u\big(\mu / x(1),...,x(l);\ u(1),...,u(n)\big),$$
$$j = 2\mu,\ \mu = \overline{1, i},\ l = [k/2] + 1,\ n = [k/2],$$

если $\{k/2\} \neq 0.$

Погрешность полученной модели системы управления определяется только стохастической природой процесса изменения значений параметра исследуемого объекта и равна дисперсии апостериорной последовательности $\{X'\}$ при условии, что известны значения $x(\mu),\ u(\mu),\ \mu = \overline{1, i},$

$$\varepsilon(i+1) = D_{2i+1} = D_x(2i+1) - \sum_{\mu=1}^{2i} D_\mu \varphi_\mu (2i+1). \tag{23}$$

Предположим, что значения параметра исследуемого объекта измеряются с погрешностью и, значит, имеет место модель стохастической системы управления:

$$X(i+1) = \sum_{\mu=1}^{i} f_\mu^{(i)}(i+1) X(\mu) + \sum_{j=1}^{i} a_\mu^{(i)}(i+1) U(\mu) + W_{i+1}. \tag{24}$$

$$Z(i) = X(i) + Y(i), \tag{25}$$

где $Y(i)$ и $Z(i)$ - погрешность и результат измерения соответственно.

С учетом погрешности измерения уравнение управления объектом запишется как

$$\hat{X}_z^{(i)}(i+1) = \sum_{\mu=1}^{i} f_\mu^{(i)}(i+1) Z(\mu) + \sum_{j=1}^{i} a_\mu^{(i)}(i+1) U(\mu) \tag{26}$$

Неточность определения значений $x(\mu),\ \mu = \overline{1, i}$ естественным образом увеличила стохастическую неопределенность системы (средний квадрат погрешности управления увеличился на величину $\sum_{\mu=1}^{i} \sum_{j=1}^{i} f_\mu^{(i)}(i+1) f_j^{(i)}(i+1) M\big[Y(\mu) Y(j)\big].$

Снижение влияния данного фактора на точность управления возможно за счет применения к результатам измерения операции линейной фильтрации

$$\hat{X}_\varphi\big(\mu / x(1),...,x(l);\ u(1),...,u(n)\big) = \big(1 - B_{2\mu-1}\big) \hat{X}_\varphi'^{2\mu-1}(2\mu - 1) + B_{2\mu-1} z(\mu),\quad \mu = \overline{1, i}, \tag{27}$$

Оценка (27) неизвестного значения $x(\mu)$ определена как взвешенное среднее результата прогноза $\hat{X}_\varphi'^{2\mu-1}(\mu)$ и результата измерения $z(\mu)$ [5]. Следует отметить, что управляющие воздействия известны абсолютно точно, поэтому $B_{2\mu} = 1,\ \mu = \overline{1, i}.$ Подстановка оценки (27) в (26) дает уравнение управления с учетом предварительной фильтрации погрешностей измерений

$$\hat{X}_\varphi^{(i)}(i+1) = \sum_{\mu=1}^{i} g_\mu^{(i)}(i+1) Z(\mu) + \sum_{j=1}^{i} c_\mu^{(i)}(i+1) U(\mu), \tag{28}$$

$$g_\mu^{(i)}(i+1) = S_{2\mu-1}^{2i}(2i+1),\quad \mu = \overline{1, i}; \tag{29}$$

$$c_\mu^{(i)}(i+1) = S_{2\mu}^{2i}(2i+1),\quad \mu = \overline{1, i}; \tag{30}$$

$$\mathrm{S}_\nu^{(k)}(j) = \begin{cases} \mathrm{S}_\nu^{(k-1)}(j) - \mathrm{S}_\nu^{(k-1)}(k) B_k \varphi_k(j), & \nu \le k-1; \\ B_k \varphi_k(j), & \nu = k. \end{cases} \tag{31}$$

Значения весовых коэффициентов определится из условия минимума среднего квадрата ошибки фильтрации

$$\varepsilon_{\varphi}(\mu) = M\left[\left|\hat{X}_{\varphi}(\mu) - X_{\varphi}(\mu)\right|^2\right] =$$

$$= M\left[\left|\left(1 - B_{2\mu-1}\right)\left\{\sum_{v=1}^{\mu-1} g_v^{(\mu-1)}(\mu) Z(v) + \sum_{v=1}^{\mu-1} c_v^{(\mu-1)}(\mu) U(v)\right\} + B_{2\mu-1} z(\mu) - X(\mu)\right|^2\right].$$

После дифференцирования этого выражения по $B_{2\mu-1}$ и решения соответствующего уравнения получаем выражение для расчета оптимального значения коэффициента фильтрации $B_{2\mu-1}$

$$B_{2\mu-1} = \frac{H_{2\mu-1} + G_{2\mu-1} - L_{2\mu-1}}{H_{2\mu-1} + G_{2\mu-1} - 2L_{2\mu-1} + D_y(\mu)}, \tag{32}$$

где

$$H_{2\mu-1} = \sum_{v=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{\mu-1} g_v^{(\mu-1)}(\mu) g_j^{(\mu-1)}(\mu) R_x(v,j) + \sum_{v=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{\mu-1} g_v^{(\mu-1)}(\mu) c_j^{(\mu-1)}(\mu) R_{xu}(v,j) +$$

$$+ \sum_{v=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{\mu-1} c_v^{(\mu-1)}(\mu) c_j^{(\mu-1)}(\mu) R_u(v,j) - 2\sum_{v=1}^{\mu-1} g_v^{(\mu-1)}(\mu) R_x(v,\mu) - 2\sum_{v=1}^{\mu-1} c_v^{(\mu-1)}(\mu) R_{xu}(v,\mu) + D_x(\mu),$$

$$G_{2\mu-1} = \sum_{v=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{\mu-1} g_v^{(\mu-1)}(\mu) g_j^{(\mu-1)}(\mu) R_y(v,j)$$

$$L_{2\mu-1} = \sum_{v=1}^{\mu-1} g_v^{(\mu-1)}(\mu) R_y(v,\mu).$$

Каждый элемент формулы (31) имеет очевидный физический смысл: слагаемое $H_{2\mu-1}$ определяет вклад в результирующую погрешность, вносимый стохастической природой системы управления, слагаемые $G_{2\mu-1}$ и $L_{2\mu-1}$ связаны с погрешностями прошлых измерений, а слагаемое $D_y(\mu)$ - дисперсия погрешности последнего измерения.

В случае когда погрешности некоррелированы, $M\left[Y(v)Y(\mu)\right]$ при $v \neq \mu$ выражение (31) упрощается к виду

$$B_{2\mu-1} = \frac{H_{2\mu-1} + G'_{2\mu-1}}{H_{2\mu-1} + G'_{2\mu-1} + D_y(\mu)}, \tag{33}$$

где

$$G'_{2\mu-1} = \sum_{v=1}^{\mu-1}\left[g_v^{(\mu-1)}(\mu)\right]^2 D_y(v).$$

Ошибка управления с помощью уравнения (28) запишется как

$$\Delta^{(k)}(i+1) = \hat{\mathrm{X}}_{\varphi}^{(i)}(i+1) - \mathrm{X}^{(i)}(i+1). \tag{34}$$

Подстановка в (34) вместо $\hat{\mathrm{X}}_{\varphi}^{(i)}(i+1)$ и $\mathrm{X}^{(i)}(i+1)$ соответственно выражений (28) и (1) дает

$$\begin{aligned}\Delta^{(k)}(i+1) &= \sum_{\mu=1}^{i}\left[g_{\mu}^{(i)}(i+1) - f_{\mu}^{(i)}(i+1)\right] X(\mu) + \sum_{\mu=1}^{i} g_{\mu}^{(i)}(i+1) Y(\mu) - \\ &- \sum_{\mu=1}^{i}\left[c_{\mu}^{(i)}(i+1) - a_{\mu}^{(i)}(i+1)\right] U(\mu) - \sum_{\mu=1}^{i} f_{\mu}^{(i)}(i+1) X(\mu) - W_{(i+1).}\end{aligned} \tag{35}$$

С учетом (35) средний квадрат погрешности стохастической системы управления определяется из выражения

$$\varepsilon_{\varphi}(i+1)=\sum_{\mu=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}\left[g_{\mu}^{(i)}(i+1)-f_{\mu}^{(i)}(i+1)\right]\left[g_{j}^{(i)}(i+1)-f_{j}^{(i)}(i+1)\right]R_{x}(\mu,j)+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}g_{\mu}^{(i)}(i+1)g_{j}^{(i)}(i+1)R_{y}(\mu,j)+\sum_{\mu=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}f_{\mu}^{(i)}(i+1)f_{j}^{(i)}(i+1)R_{x}(\mu,j)+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}\left[c_{\mu}^{(i)}(i+1)-a_{\mu}^{(i)}(i+1)\right]\left[c_{j}^{(i)}(i+1)-a_{j}^{(i)}(i+1)\right]R_{u}(\mu,j)+\sum_{\mu=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}\left[g_{\mu}^{(i)}(i+1)-f_{\mu}^{(i)}(i+1)\right]\times$$

$$\times\left[c_{j}^{(i)}(i+1)-a_{j}^{(i)}(i+1)\right]R_{xu}(\mu,j)+\sum_{\mu=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}\left[g_{\mu}^{(i)}(i+1)-f_{\mu}^{(i)}(i+1)\right]f_{j}^{(i)}(i+1)R_{x}(\mu,j)+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{i}\sum_{j=1}^{i}\left[c_{\mu}^{(i)}(i+1)-a_{\mu}^{(i)}(i+1)\right]f_{j}^{(i)}(i+1)R_{xu}(\mu,j)+D_{2i+1}.$$

Заключение. Таким образом, получены алгоритмы для определения оптимальных параметров стохастических систем управления, как при отсутствии погрешностей измерения, так и при условии, что истинные значения состояния объекта управления неизвестны и измеряются с погрешностями. Для каждого случая представлены выражения для вычисления среднего квадрата погрешности управления. Аппарат канонических разложений, положенный в основу алгоритмов расчета, позволяет учесть всю предысторию функционирования контролируемого объекта. Аналогично могут быть получены нелинейные оптимальные модели стохастических систем при использовании соответствующих канонических разложений [6, 7].

1. *Квакернак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977. - 653 с.
2. *Дорф Р. Бишоп Р.* Современные системы управления. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. н 832 с.
3. *Пугачев В С.* Теория случайных функций и ее применение. - М.: Физматгиз, 1962. - 720 с.
4. *Кудрицкий В.Д.* Прогнозирующий контроль радиоэлектронных устройств. - Киев: Техніка, 1982. -168 с.
5. *Kalman R.E.* A new approach to linear filtering and prediction problems. - Trans. ASME series D, J. Basie Engg. - 1960. - 82. - P. 35-45.
6. *Атаманюк И.П.* Векторное полиноминальное каноническое разложение случайного процесса // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. - 2003. - № 1. - С. 36-40.
7. *Атаманюк И.П.* Алгоритм реализации нелинейной случайной последовательности на базе ее канонического разложения // Электронное моделирование. - 2001. - № 5. - С. 38-46.

Поступила 27.10.2011

Тел. для справок: (098) 797-1234 (Николаев)
E-mail: atamanyuk_igor@mail.ru