МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ
ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Методичні рекомендації для самостійної

роботи студентів денної форми навчання

6.030509 – Облік та аудит,
6.030601 – Менеджмент,
6.030601 – Менеджмент ЗЕД,
6.030508 – Фінанси та кредит,
6.100102 – Процеси, машини та обладнання в агропромисловому виробництві,
6.100101 – “Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі

МИКОЛАЇВ
2014

УДК 51/517
ББК 22.1
Д70

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 25.09.2014р., протокол № 11.

Укладачі:

В. С. Шебанін – д-р техн. наук, професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
В. Г. Богза – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
І. П. Атаманюк – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
Л. П. Шебаніна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри математики і механіки, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,
О. В. Цепуріт – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
І. І. Хилько – ст. викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет,
С. І. Богданов – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
О. В. Шептилевський – асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
С. В. Євстрат'єв – асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
Є. Є. Самойленко – асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:
Будак В. Д. – д-р техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського,
Бурковський І. Д. – канд. техн. наук, провідний науковий співробітник, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах III-IV рівнів акредитації.

Викладання математики передбачає:

- розвиток логічного та алгоритмічного мислення;
- оволодіння основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач економіки та механіки;
- вироблення вміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики та прикладних математичних дисциплін;
- набуття навичок математичного обстеження прикладних питань та вміння інтерпретувати економічну задачу на математичну мову.

У даних методичних рекомендаціях подано матеріал для чотирьох лабораторних робіт, які є частиною програмного навчального та контролюючого комплексу, охоплюючого всі основні розділи вищої математики.

Теми лабораторних робіт стосуються дослідження функцій за допомогою методів диференціального числення та побудови їх графіків.

ЛР.14. Достатні ознаки зростання та спадання функції на інтервалі. Локальний екстремум

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Функцію $f(x)$ називають зростаючою (спадною) в деякому інтервалі, якщо для будь-яких двох чисел x_1 і x_2 з цього інтервалу з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Теорема 1. Якщо в кожній точці деякого інтервалу перша похідна $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі зростає. Якщо ж в кожній точці деякого інтервалу перша похідна $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ в цьому інтервалі спадає.

Правило. Для знаходження інтервалів зростання та спадання функції треба розв'язати нерівності $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$.

Означення 2. Функція $f(x)$ в точці x_0 досягає максимуму, якщо значення функції $f(x)$ в точці x_0 більше ніж її значення в кожній точці деякого інтервалу, який містить точку x_0. Тобто $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$ для будь-яких Δx достатньо малих за абсолютною величиною.

<u>Означення 3.</u> Функція $f(x)$ в точці x_0 досягає мінімуму, якщо значення функції $f(x)$ в точці x_0 менше ніж її значення в кожній точці деякого інтервалу, який містить точку x_0. Тобто $f(x_0+\Delta x)>f(x_0)$ для будь-яких Δx достатньо малих за абсолютною величиною.

Точки максимуму і мінімуму називають точками екстремуму.

<u>Означення 4.</u> Точку x_0 називають стаціонарною, якщо в цій точці $f'(x_0)=0$. Стаціонарні точки і точки в яких $f'(x)=\infty$ або не існує називають критичними точками першого роду.

Теорема 2. Необхідна умова екстремуму. Якщо функція $f(x)$ має екстремум при $x=x_0$, то її перша похідна в цій точці дорівнює нулю, або ∞, або не існує.

Перше правило дослідження функції на екстремум

1) Знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього розв'язати рівняння $f'(x)=0$. Знайти точки, в яких $f'(x)=\infty$ або не існує.

2) Перевірити зміну знака похідної при переході через критичну точку (зліва направо). Якщо похідна першого порядку змінює знак з + на –, то ця точка є точкою максимуму. Якщо $f'(x)$ змінює знак з – на +, то ця точка є точкою мінімуму. Якщо при переході через критичну точку знак похідної не змінюється, то розглядувана критична точка не є екстремальною.

Теорема 3. Нехай точка x_0 є стаціонарною для функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна другого порядку $f''(x_0)$, яка не дорівнює нулю $f''(x_0) \neq 0$: якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму, якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Друге правило дослідження функції на екстремум

1) Знайти стаціонарні точки заданої функції.

2) Знайти значення похідної другого порядку в кожній стаціонарній точці. Якщо значення другої похідної в стаціонарній точці більше нуля, ця точка є точкою мінімуму, якщо менше нуля, то ця точка є точкою максимуму.

2. Завдання та вправи для допуску до лабораторних робіт

1. Знайти множину чисел x, де функція $y = \alpha^{-2}x^4 - 2x^2 - 5$ зростає. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення x з цієї множини.

2. Знайти множину чисел x, де функція $y = x^2 e^{-\frac{x}{\alpha}}$ спадає. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення x з цієї множини.

3. Знайти інтервал, де функція $y = \sqrt[3]{(2x - 3\alpha)(3\alpha - x)^2}$ спадає. У відповіді вказати значення точки x, що поділяє цей інтервал навпіл.

4. Знайти інтервал, де функція $y = x\sqrt{4\alpha x - x^2}$ зростає. У відповіді вказати найбільше ціле значення x з цього інтервалу.

3. Приклади розв'язування задач та вправ для допуску до виконання лабораторної роботи

1. Знайти множину чисел x, де функція $y = 2x^4 - x^2 + 1$ зростає. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення x з цієї множини.

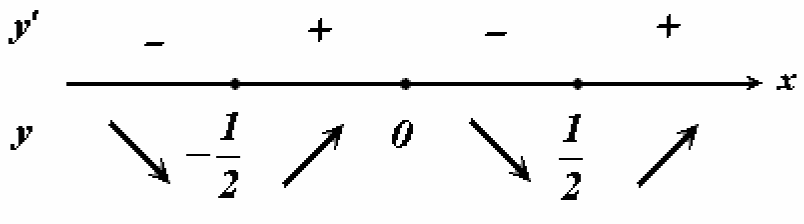
Розв'язання

Для знаходження інтервалів монотонності треба розв'язати нерівності $y' > 0$, $y' < 0$. У точках, де $y' > 0$ функція зростає, а де $y' < 0$ – спадає.

Знаходимо y':

$$y' = 8x^3 - 2x = 2x\left(4x^2 - 1\right) = 2x\left(2x - 1\right)\left(2x + 1\right).$$

Похідна $y' = 0$ у точках $x = -\frac{1}{2}$; $x = 0$; $x = \frac{1}{2}$. Позначимо ці точки на числовій прямій та визначимо знак похідної на кожному з одержаних інтервалів.



Отже у інтервалах $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$ та $\left(\frac{1}{2};\ \infty\right)$ функція зростає.

Відповідь. Найменше ціле додатне значення з цієї множини $x = 1$.

2. Знайти множину чисел x, де функція $y = \ln\sin x$ спадає. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення x з цієї множини.

Розв'язання

Для визначення інтервалів монотонності знаходимо y':

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx.$$

При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ маємо $ctgx > 0$, при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ маємо $ctgx < 0$. Отже, в інтервалі $\left(0;\ -\frac{\pi}{2}\right)$ функція зростає, а в інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ – спадає. Оскільки задана функція періодична з періодом 2π інтервалами спадання будуть $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;\ \pi + 2\pi n\right)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Відповідь. Найменше ціле додатне значення з цієї множини $x = 2$.

4. Завдання та вправи для самостійної роботи на лабораторному занятті

1. Знайти точку мінімуму функції $y = x^2 (x - \alpha)^2$.

2. Знайти інтервал зростання функції $y = x^{2\alpha} e^{-x}$. У відповіді вказати довжину цього інтервалу.

3. Знайти інтервал, де функція $y = \dfrac{\sqrt{\alpha x}}{x + \alpha}$ спадає. У відповіді вказати найменше ціле значення з цього інтервалу.

4. Знайти інтервал спадання функції $y = \dfrac{x^2}{2\alpha} - 3\alpha \sqrt[3]{x}$. У відповіді вказати значення точки x, що поділяє цей інтервал навпіл.

5. Знайти множину чисел x, де функція $y = (x - \alpha)^2 \cdot \sqrt[3]{(x + \alpha)^2}$ зростає. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення з цієї множини.

5. Приклади розв'язування задач та вправ для самостійної роботи на лабораторному занятті

1. Знайти точку локального максимуму функції

$$y = (x - 1)^2 (x - 2)^2 .$$

Розв'язання

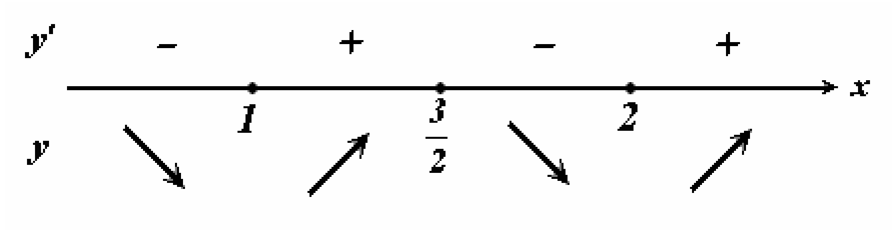
Знаходимо першу похідну заданої функції

$$y' = 2(x - 1)(x - 2)^2 + 2(x - 1)^2 (x - 2) = (x - 1)(x - 2)(2x - 3),$$

а потім – точки, в яких похідна дорівнює нулю.

$$y' = 0 \Rightarrow 2(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{3}{2}.$$

На числовій вісі дістали 4 проміжки монотонності: $(-\infty; 1)$, $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, $(2; +\infty)$. На цих проміжках визначимо знаки похідної і відмітимо їх на числовій прямій.



Похідна змінює знак з + на – в точці $x = \frac{3}{2}$. Тобто ця точка є точкою максимуму. Максимум функції дорівнює $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

Відповідь. $x = \frac{3}{2}$.

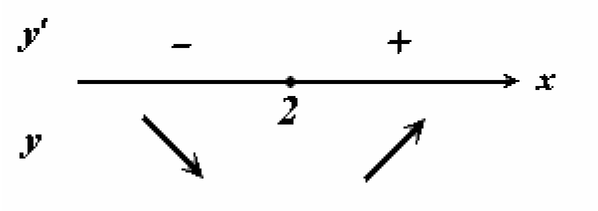
2. Знайти інтервал зростання функції $y = e^{x^2 - 4x}$. У відповіді вказати найменше ціле значення з цього інтервалу.

Розв'язання

Знаходимо першу похідну заданої функції:

$$y' = (2x-4)e^{x^2-4x} = 2(x-1)e^{x^2-4x}.$$

Отримали 2 проміжки монотонності $(-\infty; 2)$ і $(2; +\infty)$, на яких похідна має такі знаки:



Тобто інтервалом зростання функції є інтервал $(2;\ +\infty)$.

Відповідь. Найменше ціле значення з цього інтервалу $x = 3$.

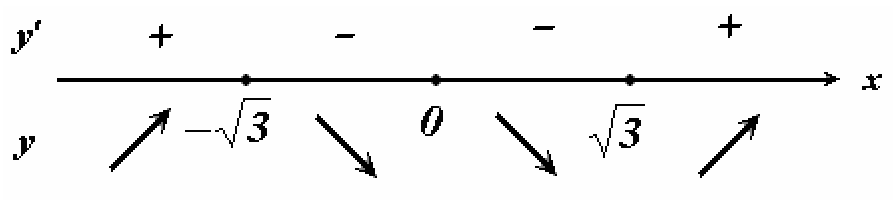
3. Знайти множину значень, де функція $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ спадає. У відповіді вказати найменше ціле від'ємне значення з цієї множини.

Розв'язання

Знаходимо першу похідну заданої функції:

$$y' = \frac{x^2\left(x^2 - 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0.$$

Маємо стаціонарні точки: $x = -\sqrt{3};\ x = 0;\ x = \sqrt{3}$. Помітимо ці точки на числовій вісі.



Тобто інтервалом спадання кривої є $\left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$.

Відповідь. Найменше ціле від'ємне значення з цього інтервалу $x = -1$.

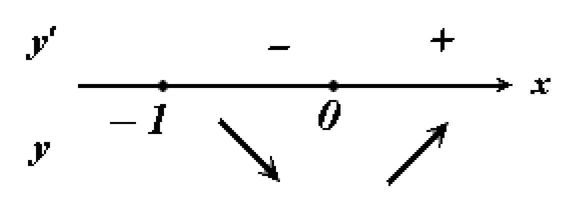
4. Знайти інтервал спадання функції $y = x - ln(1 + x)$. У відповіді вказати значення точки x, що поділяє цей інтервал навпіл.

Розв'язання

Знаходимо першу похідну заданої функції:

$$y' = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

Отримали 2 інтервали, які належать області визначення заданої функції $(-1;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. Знаки похідної на цих інтервалах відмітимо на числовій прямій.



Похідна менше нуля на інтервалі $(-1;\ 0)$, тобто цей інтервал є інтервалом спадання заданої функції.

Відповідь. Точка $x = -\frac{1}{2}$ ділить цей інтервал навпіл.

ЛР.15. Опуклість та угнутість кривої. Точки перегину

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Якщо на інтервалі (a,b) крива лежить над дотичною, проведеною в будь-якій її точці, то криву називають опуклою (або опуклою вниз) на цьому інтервалі (рис. 1).

Означення 2. Якщо на інтервалі (a,b) крива лежить під дотичною, проведеною в будь-якій її точці, то криву називають угнутою (або опуклою вгору) на цьому інтервалі (рис. 2).

<u>Означення 3.</u> Точку, в якій крива змінює опуклість на угнутість, або угнутість на опуклість називають точкою перегину кривої (рис. 3).

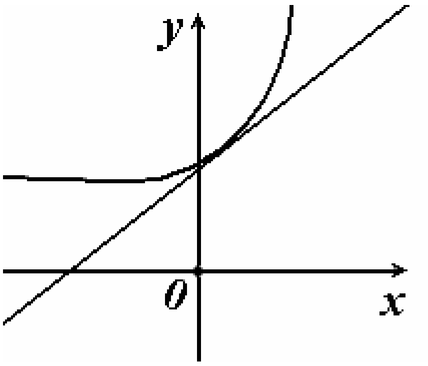


Рис.1

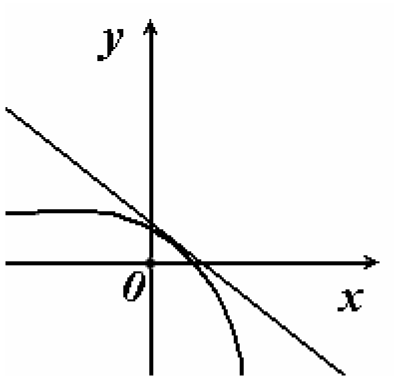


Рис.2

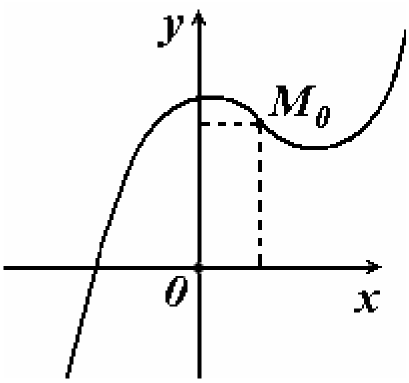


Рис.3

Теорема 1. Дуга кривої $y = f(x)$ угнута (тобто опукла вгору) на інтервалі (a, b), якщо в кожній точці цього інтервалу $f''(x) < 0$. Дуга кривої $y = f(x)$ опукла (тобто опукла вниз) на інтервалі (a, b), якщо в кожній точці цього інтервалу $f''(x) > 0$.

Означення 4. Ті точки кривої, в яких $f''(x)=0$, або $f''(x)=\infty$, або $f''(x)$ не існує називають критичними точками другого роду.

Точки перегину слід шукати серед критичних точок другого роду.

Правило. Для знаходження точок перегину кривої треба:

1) знайти критичні точки другого роду;

2) перевірити зміну знака другої похідної при переході через критичну точку (зліва на право). Якщо похідна другого порядку змінює знак при переході через критичну точку, то ця точка є точкою перегину, якщо знак другої похідної не змінюється, перегину в критичній точці немає.

2. Завдання та вправи для допуску до лабораторних робіт

1. Знайти значення абсциси ($x \geq 0$) точки перегину графіка функції:

$$f(x)=\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}.$$

2. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y=\sqrt[3]{x-2\alpha}$.

3. Знайти множину чисел x, де функція $y = ln\left(\alpha^2 + x^2\right)$ опукла. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення x з цієї множини.

4. Знайти множину чисел x, де функція $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3\alpha^2}$ угнута. У відповіді вказати найбільше ціле додатне значення x з цієї множини.

3. Приклади розв'язування задач та вправ для допуску до виконання лабораторної роботи

1. Знайти значення абсциси ($x \ge 0$) точки перегину графіка функції $y = e^{-x^2}$.

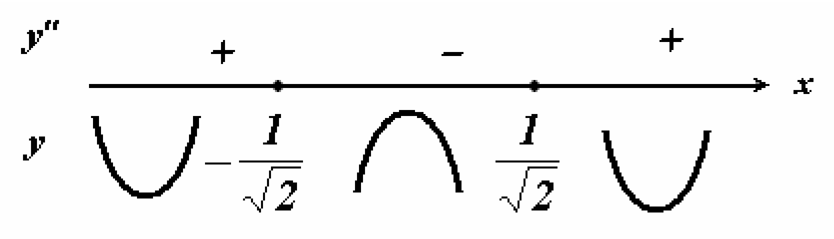
Розв'язання

Для визначення точок перегину графіка функції знаходимо її другу похідну:

$$y' = -2x\,e^{-x^2},$$

$$y'' = 2\left(2x^2 - 1\right)e^{-x^2} = 2\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x + 1\right)e^{-x^2}.$$

При $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ та при $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ друга похідна дорівнює нулю. Позначимо ці точки на числовій прямій та визначимо знак другої похідної на кожному з одержаних проміжків.



Отже, при $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ крива змінює опуклість на угнутість, а при $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ – угнутість на опуклість, тобто ці значення є абсцисами точок перегину графіка функції.

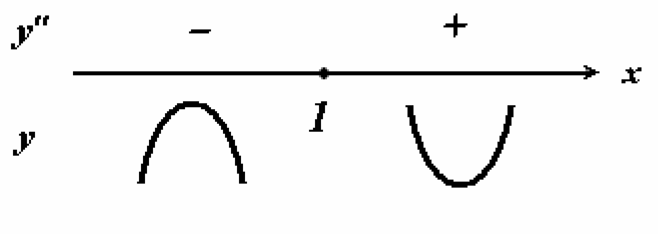
Відповідь. Значення абсциси ($x>0$) точки перегину $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Знайти множину чисел x, де крива графіка функції $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ угнута. У відповіді вказати найбільше ціле від'ємне значення з цієї множини.

Розв'язання

$$y'=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2},\quad y''=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

Друга похідна $y''=\infty$ у точці $x=1$. Позначимо цю точку на числовій прямій та визначимо знак другої похідної на одержаних інтервалах.



Оскільки на інтервалі $(-\infty; 1)$ друга похідна $y'' < 0$, крива на цьому інтервалі угнута.

Відповідь. Найбільше ціле від'ємне значення з цього інтервалу $x = -1$.

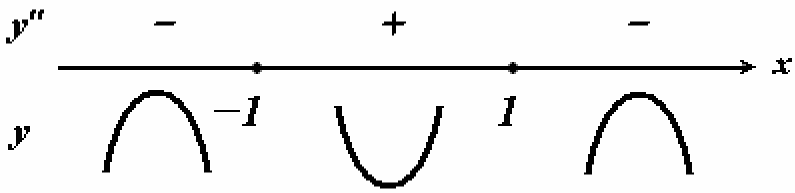
3. Знайти множину чисел x, де функція $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$ опукла. У відповіді вказати точку, яка ділить навпіл інтервал опуклості кривої.

Розв'язання

Знаходимо другу похідну функції:

$$y' = \frac{2x}{\left(1 - x^2\right)^2}, \quad y'' = \frac{2 + 6x^2}{\left(1 - x^2\right)^3}.$$

Друга похідна не дорівнює нулю ні при яких значеннях x. При $x = -1$ та $x = 1$ друга похідна $y'' = \infty$. Позначимо ці точки на числовій прямій та перевіримо знак другої похідної на кожному з одержаних інтервалів.



Оскільки на інтервалі $(-1; 1)$ друга похідна більше нуля, крива опукла на цьому інтервалі.

Відповідь. Точка, яка ділить цей інтервал навпіл $x = 0$.

4. Завдання та вправи для самостійної роботи на лабораторному занятті

1. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y = (x - \alpha)(x - 2\alpha)(x - 3\alpha)$.

2. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y = x^2 + \dfrac{\alpha^3}{x}$.

3. Знайти множину чисел x, де функція $y = \left(\dfrac{x + \alpha}{x - \alpha}\right)^4$ угнута (опукла вгору). У відповіді вказати найбільше ціле значення x з цієї множини.

4. Знайти інтервал угнутості функції $y = \left(\alpha + \dfrac{x^2}{\alpha}\right) \cdot e^{\frac{x}{\alpha}}$. У відповіді вказати значення точки x, яка ділить цей інтервал навпіл.

5. Знайти множину чисел x, де функція $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - \alpha^2}}$ опукла. У відповіді вказати найбільше ціле значення з цієї множини.

5. Приклади розв'язування задач та вправ для самостійної роботи на лабораторному занятті

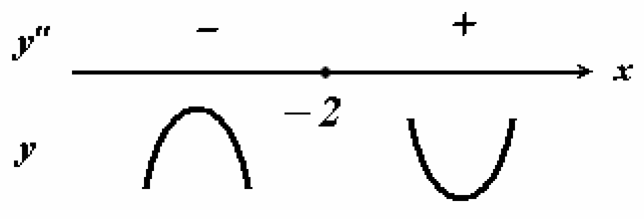
1. Знайти абсцису точки перегину графіка функції $y = \sqrt[3]{x + 2}$.

Розв'язання

Знайдемо другу похідну заданої функції:

$$y' = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}}, \; y'' = -\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}.$$

Точок, в яких друга похідна дорівнює нулю немає. Друга похідна не існує в точці $x=-2$, тобто дістали два проміжки $(-\infty; -2)$ і $(-2; +\infty)$ на яких визначимо знак другої похідної.



Оскільки знак другої похідної змінюється при переході через точку $x=-2$, то ця точка є точкою перегину кривої, де вона змінює угнутість на опуклість.

Відповідь. -2.

2. Знайти інтервал значень x, де функція $y = e^x\left(1+x^2\right)$ угнута (опукла вгору). У відповіді вказати точку, яка ділить цей інтервал навпіл.

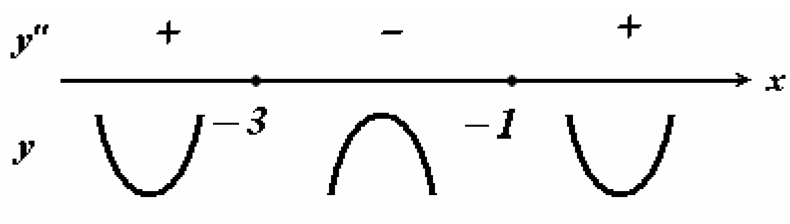
Розв'язання

Знайдемо другу похідну заданої функції:

$$y' = e^x\left(1+x^2\right) + 2xe^x = e^x\left(x^2+2x+1\right) = e^x(x+1)^2,$$

$$y'' = 2e^x(x+1) + e^x(x+1)^2 = e^x(x+1)(x+3).$$

Друга похідна дорівнює нулю в точках $x=-3$ і $x=-1$. Відмітимо ці точки на числовій прямій і розглянемо знак другої похідної на кожному з інтервалів: $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$ і $(-1; +\infty)$.



Друга похідна від’ємна на інтервалі $(-3;\ -1)$. Звідси випливає, що задана функція угнута (тобто опукла вгору) на цьому інтервалі.

Відповідь. Точка $x=-2$ ділить цей інтервал навпіл.

3. Знайти множину значень x, де функція $y=x^2\ln x$ опукла. У відповіді вказати найменше ціле значення з цього інтервалу.

Розв’язання

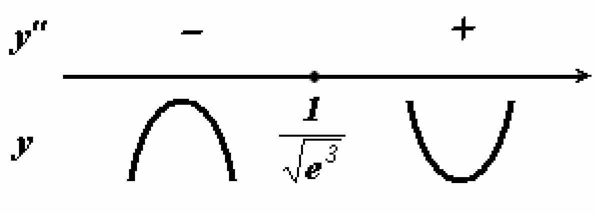
Знайдемо другу похідну заданої функції:

$$y'=2x\ln x+x^2\frac{1}{x}=x(1+2\ln x),\ y''=1+2\ln x+x\cdot\frac{2}{x}=3+2\ln x.$$

Знайдемо точку, в якій друга похідна дорівнює нулю:

$$3+2\ln x=0;\ \ln x=-\frac{3}{2};\ x=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

Відмітимо цю точку на числовій прямій, та визначимо знак похідної на кожному з проміжків: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ +\infty\right)$.



Задана функція опукла при $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ +\infty\right)$.

Відповідь. Найменше ціле значення з цієї множини $x=1$.

ЛР.16. Асимптоти графіка функції

1. Основні поняття та теореми

<u>Означення 1.</u> Пряму ℓ називають асимптотою кривої $y = f(x)$, якщо відстань від точки цієї кривої до прямої ℓ прямує до нуля, коли точка рухається по кривій у нескінченність.

Розрізнятимемо: 1) горизонтальні, 2) вертикальні, 3) похилі асимптоти.

1) Крива $y = f(x)$ має горизонтальну асимптоту $y = b$, якщо існує кінцева границя функції $f(x)$ при $x \to -\infty$, або $x \to +\infty$ і ця границя дорівнює b; тобто $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$, або $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$.

2) Крива $y = f(x)$ має вертикальну асимптоту $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

3) Для знаходження похилої асимптоти $y = kx + b$ кривої $y = f(x)$ треба знайти числа k і b за формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

(Слід розглядати окремі випадки $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$.

2. Завдання та вправи для допуску до лабораторних робіт

1. Знайти значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$ до графіка функції $y = 2\alpha + \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$.

2. Знайти значення параметра b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ до графіка функції $y = 2\alpha + \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта k у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \dfrac{\alpha x^2 + 1}{2x + 3}$.

4. Знайти значення параметра b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \dfrac{\alpha x^2 + 1}{2x + 3}$.

5. Знайти ординату точки відрізку, що відрізає похила асимптота графіка функції на осі OY $y = \dfrac{x^3 - 3\alpha x^2 + 4}{x^2 - 6\alpha x + 1}$.

3. Приклади розв’язування задач та вправ для допуску до виконання лабораторної роботи

1. Знайти значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$ до графіка функції $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

Розв’язання

Шукаємо вертикальні асимптоти:

$$y \to +\infty \text{ при } x \to 0-,$$

$$y \to -\infty \text{ при } x \to 0+.$$

Відповідь. Пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою даної кривої.

2. Знайти значення параметра $\boldsymbol{b}$ у рівнянні горизонтальної асимптоти $\boldsymbol{y=b}$ до графіка функції $\boldsymbol{y=\frac{x}{1+x^2}}$.

Розв'язання

Знайдемо горизонтальні асимптоти графіка функції:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0.$$

Відповідь. Горизонтальною асимптотою є пряма $\boldsymbol{y=0}$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта $\boldsymbol{k}$ у рівнянні похилої асимптоти $\boldsymbol{y=kx+b}$ до графіка функції $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{x^2-x^3}}$.

Розв'язання

Кутовий коефіцієнт $\boldsymbol{k}$ у рівнянні похилої асимптоти визначається за формулою $\boldsymbol{k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}}$, тобто для даної функції:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x}-1}=-1.$$

Відповідь. $\boldsymbol{k=-1}$.

4. Знайти значення параметра $\boldsymbol{b}$ у рівнянні похилої асимптоти $\boldsymbol{y=kx+b}$ до графіка функції $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{x^2-x^3}}$.

Розв'язання

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2-x^3}+x\right)=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{\left(x^2 - x^3\right)^2} - x\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x^2} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. $b = \frac{1}{3}$.

4. Завдання та вправи для самостійної роботи на лабораторному занятті

1. Знайти значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$ до графіка функції $y = \frac{1}{e^{x-2\alpha} - 1}$.

2. Знайти значення параметра b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ до графіка функції $y = \frac{2x^2 + \alpha x + \alpha^2}{\alpha x^3 - x + 1}$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта k у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \frac{\alpha x^3}{2(x+\alpha)}$.

4. Знайти значення параметра b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка функції $y = \frac{\alpha x^3}{2(x+\alpha)}$.

5. Знайти ординату точки відрізку, що відрізає похила асимптота графіка функції на осі OY $y = \frac{x^2 - 2\alpha x + 2}{x - \alpha}$.

5. Приклади розв’язування задач та вправ для самостійної роботи на лабораторному занятті

1. Знайти вертикальну асимптоту графіку функції $y = \frac{1}{2^x - 2}$.

У відповіді вказати значення параметра a у рівнянні вертикальної асимптоти $x = a$.

Розв’язання

Знайдемо значення x, при якому знаменник заданого дробу дорівнює нулю.

$$2^x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Відповідь. Вертикальна асимптота визначається рівнянням $x = 1$.

2. Знайти значення параметра b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y = b$ до графіка функції $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{3x^3 - x + 2}$.

Розв’язання

Знайдемо границю заданої функції при $x \to \infty$.

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{3x^3 - x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. Вертикальною асимптотою є пряма $y = \frac{1}{3}$.

3. Знайти значення кутового коефіцієнта $\boldsymbol{k}$ у рівнянні похилої асимптоти $\boldsymbol{y = kx + b}$ до графіка функції $\boldsymbol{y = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x + 6}}$.

Розв'язання

Коефіцієнт $\boldsymbol{k}$ знаходимо за формулою $\boldsymbol{k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}}$, тобто

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x(x+6)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + 6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x}} = 2$$

Відповідь. $\boldsymbol{2}$.

4. Знайти значення параметра $\boldsymbol{b}$ у рівнянні похилої асимптоти $\boldsymbol{y = kx + b}$ до графіка функції $\boldsymbol{y = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x + 6}}$.

Розв'язання

Значення параметра $\boldsymbol{b}$ знайдемо за формулою $\boldsymbol{b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)}$.

Оскільки ми вже визначили значення параметра $\boldsymbol{k}$, підставимо його у формулу:

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 + x + 3}{x + 6} - 2x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-11x+3}{x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{-11+\frac{3}{x}}{1+\frac{6}{x}} = -11.$$

Відповідь. -11.

5. Знайти ординату кінця відрізка, що відрізає похила асимптота графіка функції $y = \frac{x^2+1}{2x+3}$ на осі OY.

Розв'язання

Якщо графік похилої асимптоти визначається рівнянням $y = kx + b$, то вона відтинає на осі OY відрізок, який дорівнює b. Знайдемо параметри k і b рівняння похилої асимптоти графіка заданої функції:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{(2x+3)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3x} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{2x+3} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+2}{4x+6} = -\frac{3}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{3}{4}$.

ЛР.17. Загальна схема дослідження функції

1. Основні поняття та теореми

Означення 1. Якщо функцію $f(x)$ задано аналітично, то областю визначення функції (або областю існування функції) називається сукупність дійсних значень аргументу, для яких аналітичний вираз, який визначає функцію, має числовий сенс і приймає тільки дійсні значення.

Означення 2. Функцію $f(x)$, визначену на множині точок осі OX, розміщених симетрично відносно початку координат, називають парною, якщо $f(-x)=f(x)$ і непарною, якщо $f(-x)=-f(x)$.

Означення 3. Функція $f(x)$ називається періодичною, якщо існує таке число $T\neq 0$, що $f(x+T)=f(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Число T називають періодом функції $f(x)$.

Означення 4. Якщо в точці $x=x_0$ функція $f(x)$ має скінченні границі зліва і справа, і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції в точці $x=x_0$, то точку $x=x_0$ називають точкою усувного розриву функції. Якщо в точці $x=x_0$ функція $f(x)$ має границі зліва і справа, і вони не дорівнюють одна одній, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$, то точку $x=x_0$ називають точкою розриву зі скінченим стрибком. Точки усувного розриву та точки розриву функції зі скінченим стрибком називають точками розриву 1-го роду. Якщо ж у точці $x = x_0$ функція не має хоча б однієї з границь зліва або справа, то ця точка називається точкою розриву 2-го роду.

Загальна схема дослідження функції

1) Знаходження області визначення функції.

2) Знаходження точок розриву функції.

3) Дослідження функції на періодичність, парність і непарність.

4) Знаходження інтервалів монотонності функції.

5) Знаходження екстремальних точок.

6) Знаходження інтервалів угнутості і опуклості досліджуваної кривої.

7) Знаходження точок перегину кривої.

8) Знаходження асимптот графіка функції.

9) Побудова графіка функції.

2. Завдання та вправи для допуску до лабораторних робіт

1. Знайти абсцису точки розриву функції $y = \frac{(x+1)^2}{x-\alpha}$.

2. Знайти локальний мінімум функції $y = \frac{(x+1)^2}{x-\alpha}$. Вкажіть значення y_{min}.

3. Знайти найбільше ціле значення абсциси точки угнутості $y = \frac{(x+1)^2}{x-\alpha}$.

4. Знайти параметр b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка $y = \frac{(x+1)^2}{x-\alpha}$.

5. Знайти найменше значення функції $y = \frac{(x+1)^2}{x-\alpha}$ на відрізку $[-2;\ 0]$.

3. Приклади розв'язування задач та вправ для допуску до виконання лабораторної роботи

1. Знайти абсцису точки розриву функції $y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язання

Функція існує для всіх x крім $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^x}{x} = +\infty, \ \lim_{x \to 0-} \frac{e^x}{x} = -\infty.$$

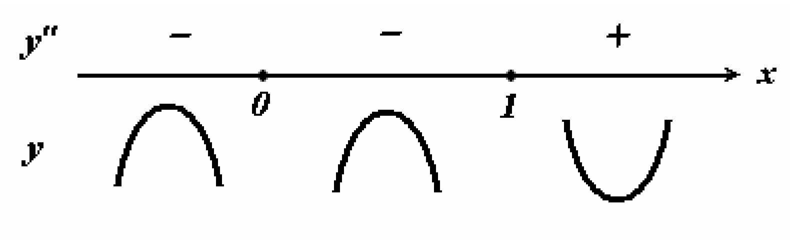
Відповідь. Точка $x = 0$ є точкою розриву другого роду.

2. Знайти локальний мінімум функції $y = \frac{e^x}{x}$. Вкажіть значення $y_{\min}$.

Розв'язання

$$y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Знаходимо критичні точки. З рівняння $y' = 0$, тобто $\frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$ випливає, що $x = 1$. При $x = 0$ перша похідна $y' = \infty$, але при $x = 0$ функція не визначена. Точки $x = 0$ і $x = 1$ поділяють область існування функції на інтервали, які відмітимо на числовій прямій.



Перша похідна змінює знак з – на + при переході через точку $x=1$.

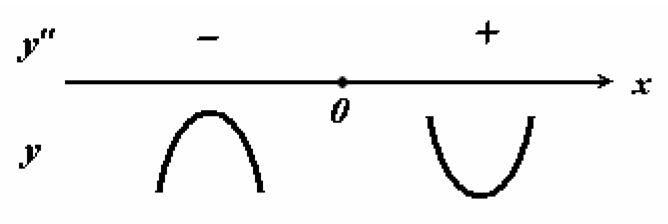
Відповідь. Точка $x = 1$ є точкою локального мінімуму.

3. Знайти найбільше ціле значення абсциси точки угнутості кривої $y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язання

$$y'' = \frac{e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)}{x^3}$$

Чисельник цього дробу не дорівнює нулю ні при яких дійсних значеннях x, оскільки рівняння $x^2 - 2x + 2 = 0$ має тільки комплексні корені. В точці $x = 0$ друга похідна $y'' = \infty$. Таким чином отримали два інтервали $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, на яких визначимо знак другої похідної.



Отже, на інтервалі $(-\infty;\ 0)$ крива угнута (опукла вгору).

Відповідь. Найбільше ціле значення з інтервалу угнутості є $x=-1$.

4. Знайти параметр b у рівнянні горизонтальної асимптоти $y=b$ графіка функції $y=\frac{e^x}{x}$.

Розв'язання

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=0.$$

Отже, горизонтальна асимптота має рівняння $y=0$.

Відповідь. $b=0$.

5. Знайти найбільше значення функції $y=\frac{e^x}{x}$ на відрізку $[-3;\ -1]$.

Розв'язання

Оскільки цей сегмент не містить точок екстремуму, достатньо обчислити значення функції на кінцях цього відрізка:

$$y(-3)=\frac{e^{-3}}{-3}=-\frac{1}{3e^3},\ y(-1)=\frac{e^{-1}}{-1}=-\frac{1}{e}.$$

Відповідь. Найбільше значення набувається у точці $x=-3$ і дорівнює $-\frac{1}{3e^3}$.

4. Завдання та вправи для самостійної роботи на лабораторному занятті

1. Знайти абсциси точок розриву функції $y = \alpha + \dfrac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$.

2. Знайти локальний максимум функції $y = \alpha + \dfrac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$. Вкажіть значення критичної точки x, при якому функція y набуває максимуму.

3. Знайти параметр b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ до графіка $y = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$.

4. Знайти найменше значення функції $y = \alpha + \dfrac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$ на відрізку $[0;\alpha]$.

5. Побудувати графік функції $y = \alpha + \dfrac{x^3}{2(x+\alpha)^3}$.

5. Приклади розв’язування задач та вправ для самостійної роботи на лабораторному занятті

1. Знайти абсциси точок розриву функції $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$.

Розв'язання

Визначимо значення x, при яких знаменник $x^2 + 2x + 3$ дорівнює нулю. Для цього розв'яжемо рівняння $x^2 + 2x + 3 = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів.

Відповідь. Точок розриву немає.

2. Знайти інтервали зростання функції $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$.

Розв'язання

Визначимо критичні точки функції. Розв'яжемо рівняння y', тобто рівняння $\dfrac{x^2\left(x^2 + 4x + 9\right)}{x^2 + 2x + 3} = 0$. Чисельник цього виразу перетворюється на нуль тільки при $x = 0$, оскільки рівняння $x^2 + 4x + 9 = 0$ не має дійсних коренів. Ні при якому дійсному значенні x перша похідна не приймає нескінчено великих значень, оскільки знаменник має тільки комплексні корені. Тобто маємо тільки одну критичну точку $x = 0$, яка поділяє числову вісь на два інтервали $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$. Якщо на кожному з цих інтервалів вибрати довільну точку і підрахувати значення похідної, дістанемо, що похідна більше нуля на кожному з цих інтервалів.

Відповідь. Функція зростає на всій області її існування.

3. Знайти абсциси точок перегину графіка функції

$$y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}.$$

Розв'язання

Знаходимо другу похідну функції

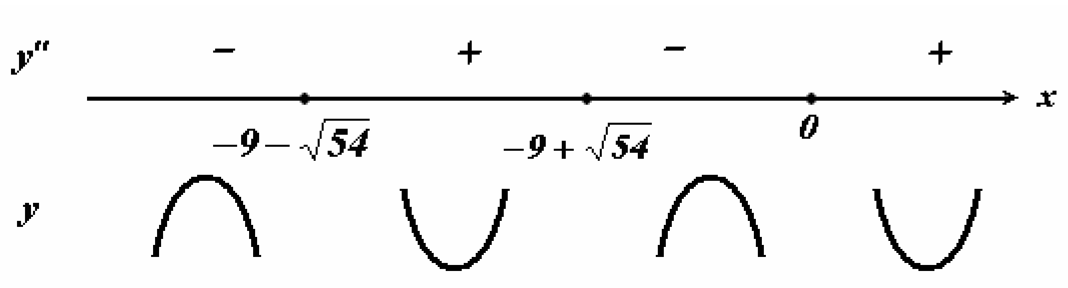
$$y'' = \frac{2x\left(x^2 + 18x + 27\right)}{\left(x^2 + 2x + 3\right)}.$$

Точок, в яких знаменник цього дробу дорівнює нулю, немає, оскільки рівняння $x^2 + 2x + 3 = 0$ не має дійсних коренів. Знайдемо точки, в яких друга похідна дорівнює нулю:

$$2x\left(x^2 + 18x + 27\right) = 0,$$

$$x_1 = -9 - \sqrt{54} \approx -16{,}2;\ x_2 = -9 + \sqrt{54} \approx -1{,}8;\ x_3 = 0.$$

Відмітимо ці точки на числовій прямій та розглянемо знак похідної другого порядку на кожному з проміжків



Оскільки, друга похідна змінює знак в точках x_1, x_2, x_3, то ці точки є точками перегину кривої.

Відповідь. $-9 - \sqrt{54}$; $-9 + \sqrt{54}$; 0.

4. Знайти параметр b у рівнянні похилої асимптоти $y = kx + b$ графіка функції $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$.

Розв'язання

Знайдемо параметри k та b:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2+2x-3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2+2x-3}=-2.$$

Відповідь. $b=2$.

5. Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.

Розв'язання

Врахуємо результати задач 1–4:

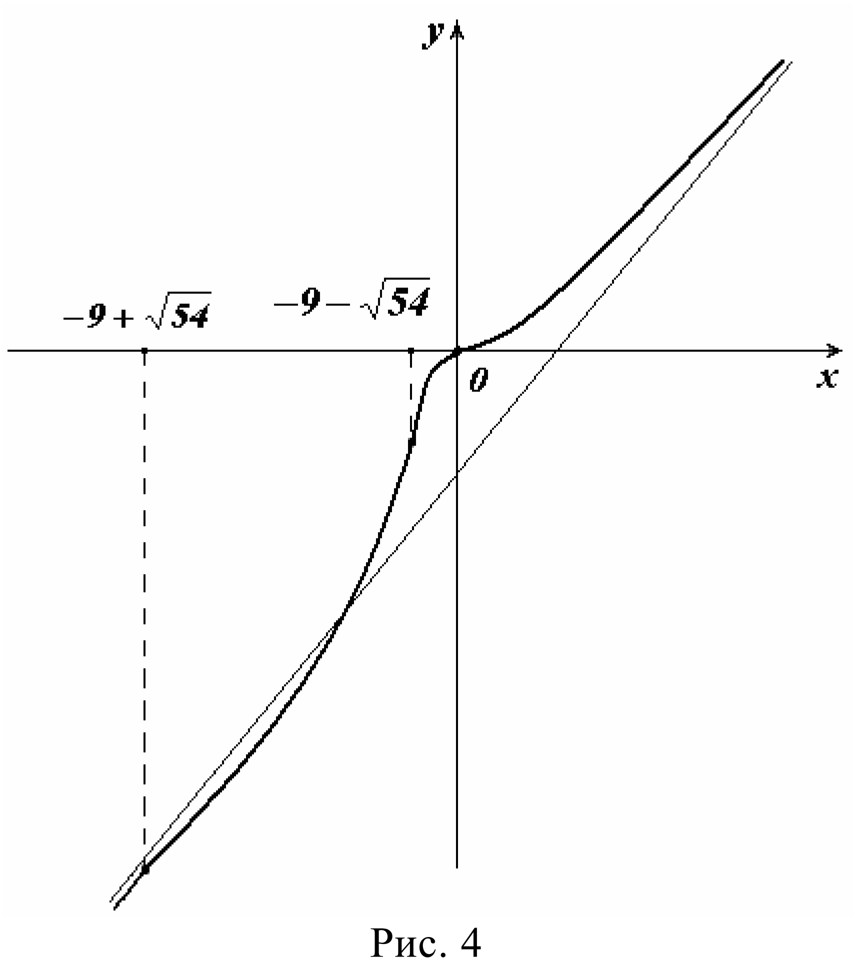


Рис. 4

Відповідь. Графік функції на рис. 4.

Список рекомендованої літератури

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман – М. : Наука, 1985. – 383 с.
2. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища школа, 1993. – 647 с.
3. Шкіль М. І. Вища математика / М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова – К. : Либідь, 1994. – 276 с.
4. Лавренчук В. П. Вища математика. / С. Д. Івасишен, В. С. Дронь, Т. І. Готинчан. – К. : КСУ, 2004. – 200 с.
5. Бугір М. К. Математика для економістів : навч. посіб. / М. К. Бугір – К. : Академія, 2003. – 520 с.
6. Валєєв К. Г. Вища математика : навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 546с.
7. Самойленко Є. Є. Дослідження операцій / Є. Є. Самойленко. – К. : КСУ, 2008. – 76 с.
8. Соколенко О. І. Вища математика : підручник / О. І. Соколенко – К. : Академія, 2002. – 432 с.
9. Вища математика. Ч.2: Контрольні завдання та методичні рекомендації [Текст] : для самост. роботи студ. денної форми навч. напряму підгот. 6.030509-"Облік та аудит", 6.030601-"Менеджмент організацій", 6.030601-"Менеджмент ЗЕД", 6.030508-"Фінанси та кредит" / [уклад. В. С. Шебанін, О. В. Шебаніна, В. Г. Богза, І. П. Атаманюк та ін.]. - Миколаїв : МНАУ, 2013. - 136 с. + Ел. копія. –Режим доступу: //Libserver/docs/eldocs/2013/Shebanin_V.VM_2_2013.pdf. – 20,70 грн.

ЗМІСТ

Вступ. 3

ЛР.14. Достатні ознаки зростання та спадання
функції на інтервалі. Локальний екстремум. 4

ЛР.15. Опуклість та угнутість кривої. Точки перегину................12

ЛР.16. Асимптоти графіка функції. 21

ЛР.17. Загальна схема дослідження функції................................28

Список рекомендованої літератури..37

Зміст..38

Навчальне видання

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ
ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін В'ячеслав Сергійович**
Богза Володимир Григорович
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

Формат 60х84/16/ Ум. друк. арк. 2,5
Тираж 30 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету.
54020, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.