МІНІСТЕРСТВО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації та контрольні завдання для виконання розрахунково-графічних робіт № 1, 2 (Модулі: 01 “Елементи лінійної алгебри”, 02 “Елементи аналітичної геометрії”, 03 “Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії в просторі”) для студентів денної форми навчання 6.030509 – Облік та аудит, 6.030601 – Менеджмент, 6.030601 – Менеджмент ЗЕД, 6.030508 – Фінанси та кредит, 6.100102 – Процеси, машини та обладнання в агропромисловому виробництві, 6.100101 – “Енергетика та електротехнічні системи в агропромисловому комплексі

МИКОЛАЇВ
2014

УДК 51/517
ББК 22.1
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 25.09.2014р., протокол № 11.

Укладачі:

В. С. Шебанін – д-р техн. наук, професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
В. Г. Богза – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
І. П. Атаманюк – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
Л. П. Шебаніна – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри математики і механіки, Миколаївський національний університет ім. В. О. Сухомлинського,
О. В. Цепуріт – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
І. І. Хилько – ст. викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет,
С. І. Богданов – ст. викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
О. В. Шептилевський – асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
С. В. Євстрат'єв – асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет,
Є. Є. Самойленко – асистент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Будак В. Д. – д-р техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського,
Бурковський І. Д. – канд. техн. наук, провідний науковий співробітник, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах III-IV рівнів акредитації.

Викладання математики передбачає:

- розвиток логічного та алгоритмічного мислення;
- оволодіння основами математичного апарату, необхідного для розв'язання теоретичних і практичних задач економіки та механіки;
- вироблення вміння самостійно вивчати навчальну літературу з математики та прикладних математичних дисциплін;
- набуття навичок математичного обстеження прикладних питань та вміння інтерпретувати економічну задачу на математичну мову.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу „Вища математика" для студентів вищих навчальних аграрних закладів освіти III-IV рівнів акредитації. Дані методичні рекомендації охоплюють розрахунково-графічні роботи №1 „Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Аналітична геометрія на площині" та №2 „Аналітична геометрія в просторі".

Кожна розрахунково-графічна робота вміщує теоретичні контрольні запитання (загальні для всіх) та задачі (для кожного студента кожної групи індивідуальні за рахунок параметра β – номера групи: β=1, 2, 3 і так далі). Теоретичні питання вивчаються на лекціях та детально розглядаються на практичних та лабораторних заняттях. Після цього, в міру того, як продовжується вивчення курсу, студенти самостійно розв'язують задачі розрахунково-графічної роботи, а викладач частинами їх перевіряє. Завершальним етапом є захист РГР, на який студент подає всі перевірені та зараховані задачі, оформлені на аркушах формату А4. Під час захисту студент повинен знати та правильно відповідати на теоретичні питання, вміти розв'язувати задачі аналогічного типу та давати до них необхідні пояснення.

Методичні рекомендації містять розв'язання кожної задачі з повним обґрунтуванням, в кінці подано список рекомендованої літератури.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА № 1

1. Система лінійних алгебраїчних рівнянь

Контрольні запитання

1. Основна та розширена матриці системи.
2. Означення визначника 2, 3 та *n*-го порядку, властивості визначників.
3. Означення мінору, алгебраїчного доповнення елемента матриці, означення невиродженої, союзної та оберненої матриць. Правило знаходження оберненої матриці та її властивості.
4. Ранг матриці. Приклади обчислення рангу матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.
5. Розв'язок системи лінійних рівнянь за формулами Крамера.
6. Розв'язок системи лінійних рівнянь матричним способом.
7. Розв'язок системи лінійних рівнянь методом Гауса.
8. Розв'язок системи лінійних рівнянь методом Жордана-Гауса.

Розрахункові завдання

Задача 1. В задачах **1.1 – 1.31** дослідити системи лінійних рівнянь:

1) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$; 2) $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{D}$; 3) $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}$.

Знайти розв'язки систем 1)-3) (або встановити несумісність системи) чотирма способами:

а) за формулами Крамера (за допомогою визначників);

б) матричним методом (за допомогою оберненої матриці);

в) методом Гауса (методом виключення невідомих елементарними перетвореннями над рядками);

г) методом Жордана-Гауса (методом виключення невідомих за правилом прямокутника).

В наведених завданнях β - номер академічної групи.

Вихідні умови задачі 1

№ варіанта	Системи рівнянь
1.1	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-5-\beta)x_3=1+\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-4-\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=5+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-5-\beta)x_3=1+\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-4-\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-10-2\beta)x_3=2+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-5-\beta)x_3=1+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-10-2\beta)x_3=-4-\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=5+\beta.\end{cases}$
1.2	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=4+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=3+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=8+\beta;\end{cases}$

	3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=8+\beta.\end{cases}$
1.3	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-4-\beta,\\(3+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-4-\beta,\\(3+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-4-\beta,\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=4+2\beta.\end{cases}$
1.4	1) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=8+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta,\\(8+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=8+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta,\\(8+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=-2-2\beta.\end{cases}$
1.5	1) $\begin{cases}(5+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-1-\beta,\\(10+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=6+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta;\end{cases}$

	2) $\begin{cases}(5+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(5+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=6+\beta,\\(10+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=-2-2\beta.\end{cases}$
1.6	1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta,\\(6+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=4+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta,\\(6+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=-2-2\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=3+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=4+\beta.\end{cases}$
1.7	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta,\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=8+\beta,\\(4+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta,\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=8+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=2+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=8+2\beta,\\(4+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta.\end{cases}$

1.8	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta,\\(3+\beta)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-2-\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=5+2\beta,\\(3+\beta)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-2-\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=8+2\beta.\end{cases}$
1.9	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(4+\beta)x_3=1+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(4+\beta)x_3=1+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=6+2\beta.\end{cases}$
1.10	1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta,\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=2+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-5-\beta,\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-4-\beta;\end{cases}$

	3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=5+\beta,\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-4-\beta.\end{cases}$
1.11	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-7-\beta,\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=5+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-7-\beta,\\(2+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=2+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-7-\beta,\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=5+\beta.\end{cases}$
1.12	1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta,\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=-8-2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta,\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=\beta.\end{cases}$
1.13	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=\beta,\\(1+\beta)x_1+(-1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=6+\beta;\end{cases}$

	2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=\beta,\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=4+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=\beta,\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=6+\beta.\end{cases}$
1.14	1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta,\\(5+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=4+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta,\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=-5-\beta,\\(5+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=4+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta,\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=6+2\beta.\end{cases}$
1.15	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=7+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=7+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-4-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=7+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-2-2\beta.\end{cases}$

1.16	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-3-\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=4+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-3-\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=2+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=-3-2\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta.\end{cases}$
1.17	1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta,\\(6+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-4-\beta,\\(2+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta,\\(6+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=6+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta,\\(2+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta.\end{cases}$
1.18	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta,\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=2+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=2\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=7+\beta;\end{cases}$

	3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=7+\beta.\end{cases}$
1.19	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=4+\beta,\\(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=4+\beta,\\(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=4+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=6+2\beta.\end{cases}$
1.20	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=3+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=\beta,\\(2+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=3+\beta.\end{cases}$
1.21	1) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+\beta\cdot x_2+(5+\beta)x_3=8+\beta,\\(8+2\beta)x_1+2\beta\cdot x_2+(10+2\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+\beta\cdot x_3=-1-\beta;\end{cases}$

	2) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+\beta\cdot x_2+(5+\beta)x_3=8+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+\beta\cdot x_3=-1-\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+\beta\cdot x_2+(5+\beta)x_3=8+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta,\\(8+2\beta)x_1+2\beta\cdot x_2+(10+2\beta)x_3=16+2\beta.\end{cases}$
1.22	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+\beta\cdot x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=6+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=3+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+\beta\cdot x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta.\end{cases}$
1.23	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=6+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta,\\(5+3\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(8+3\beta)x_3=5+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=-1-\beta,\\(2+\beta)x_1-2x_2+(3+\beta)x_3=2+\beta.\end{cases}$

1.24	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=1+\beta,\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+\beta\cdot x_3=2+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=2+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=1+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=2+\beta,\\\beta x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=1+\beta,\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(\beta)x_3=2+\beta,\\\beta\cdot x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta.\end{cases}$
1.25	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+\beta\cdot x_3=4+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=6+2\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=3+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+\beta\cdot x_3=4+\beta,\\\beta\cdot x_1+(2+2\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2-\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=3+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=4+\beta,\\\beta\cdot x_1+(2+2\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2-\beta.\end{cases}$
1.26	1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=5+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-6-\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-6-\beta;\end{cases}$

	3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta,\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta,\\(2+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=4+2\beta.\end{cases}$
1.27	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=13+\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2-\beta,\\(4+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=21+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=13+\beta,\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=26+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=13+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=-2-\beta,\\(4+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=21+\beta.\end{cases}$
1.28	1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-12-\beta,\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=1+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta,\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-12-\beta,\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=2+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta,\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=-12-\beta,\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=1+\beta.\end{cases}$
1.29	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta,\\(4+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=8+\beta,\\(3+\beta)x_1+(-5-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta;\end{cases}$

	2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=2+2\beta,\\(3+\beta)x_1+(-5-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta,\\(4+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=8+\beta,\\(8+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=-2-\beta.\end{cases}$
1.30	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-7-\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=6+\beta,\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(4+\beta)x_3=7+\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-7-\beta)x_3=2+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-14-2\beta)x_3=4+2\beta,\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(4+\beta)x_3=7+\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-7-\beta)x_3=2+\beta,\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=6+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-14-2\beta)x_3=7+2\beta.\end{cases}$
1.31	1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=7+\beta,\\(4+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta,\\(8+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=-2-\beta;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=7+\beta,\\(4+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=14+2\beta;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=7+\beta,\\(4+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=1+\beta,\\(8+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=-2-\beta.\end{cases}$

Методичні рекомендації

Розв'язання задачі 1.31. Візьмемо $\beta = 4$, тоді задані системи рівнянь будуть мати наступний вигляд:

$$1)\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -6; \end{cases} \qquad (1)$$

$$2)\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22 . \end{cases} \qquad (2)$$

$$3)\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 5, \\ 12x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -6; \end{cases} \qquad (3)$$

Формули Крамера

1) Запишемо систему (1) в матричному вигляді:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{Vmatrix}, \; B = \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix};$$

При обчисленні визначників квадратних матриць A, C, F та інших будемо використовувати властивості визначників, наприклад, розкладання визначника на суму добутків елементів деякого стовпця (чи рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення. При цьому, якщо за рахунок тотожних перетворень, які не змінюють величину визначника, зробити всі елементи рядка (чи стовпця) рівними нулю (крім, можливо, одного), то обчислення визначника *n*-го порядку можна звести до обчислення визначника *(n-1)*-го порядку.

Отже:

$$|A|=\begin{vmatrix}6&5&5\\8&-5&7\\12&-7&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&5&5\\8&-5&7\\0&-17&0\end{vmatrix}=0\cdot A_{31}+(-17)\cdot A_{32}+0\cdot A_{31}=$$

$$=-17\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}6&5\\8&7\end{vmatrix}=(-17)\cdot(-1)\cdot[6\cdot 7-5\cdot 8]=17\cdot 2=34\neq 0.$$

Тут, не змінюючи значення визначника, до елементів третього рядка додали відповідні елементи першого рядка, домножені на (-2). Отриманий таким чином (з двома нулями в третьому рядку) визначник розклали за елементами цього 3-го рядка.

Таким чином перша система рівнянь:

$$A\cdot X=B\Leftrightarrow\begin{Vmatrix}6&5&5\\8&-5&7\\12&-7&10\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}11\\5\\-6\end{Vmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x_1+5x_2+5x_3=11,\\8x_1-5x_2+7x_3=5,\\12x_1-7x_2+10x_3=-6,\end{cases}$$

яка має визначник $|A|=\Delta=34\neq 0$ сумісна та визначена.

а) Знайдемо її розв'язок за *формулами Крамера*:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}11&5&5\\5&-5&7\\-6&-7&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11&5&5\\16&0&12\\-6&-7&10\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}11&5&5\\4&0&3\\-6&-7&10\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot\{4\cdot A_{21}+0\cdot A_{22}+3\cdot A_{23}\}=$$

$$=4\cdot\left\{4\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&5\\-7&10\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}11&5\\-6&-7\end{vmatrix}\right\}=$$

$$=4\cdot\{4\cdot(-1)\cdot[5\cdot 10-5(-7)]+3\cdot(-1)\cdot[11\cdot(-7)-5(-6)]\}=$$

$$=4\cdot\{4(50+35)-3\cdot(-77+30)\}=4\cdot(-340+141)=-796;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \\ 12 & -6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \\ 0 & -28 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + (-28) \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} =$$

$$= -28 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = (-28) \cdot (-1) \cdot (6 \cdot 7 - 5 \cdot 8) = 28 \cdot 2 = 56;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 14 & 0 & 16 \\ 0 & -17 & -28 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & -17 & -28 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \{6 \cdot A_{11} + 7 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31}\} =$$

$$= 2\left\{6 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -17 & -28 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -17 & -28 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$= 2 \cdot \{6 \cdot [0 \cdot (-28) - 8(-17)] - 7 \cdot [5 \cdot (-28) - 11(-17)]\} =$$

$$= 2 \cdot \{6 \cdot 136 - 7 \cdot (-140 + 187)\} = 2 \cdot (816 - 329) =$$

$$= 2 \cdot 487 = 974.$$

Тут кожний визначник Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ складено з основного визначника Δ шляхом заміни елементів його i-го стовпця $(i = 1, 2, 3)$ на елементи матриці-стовпця $\boldsymbol{B}$ (тобто вільних членів системи).

Таким чином, користуючись формулами Крамера, знайдемо значення невідомих:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-796}{34} = -\frac{398}{17} \approx -23{,}412;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{56}{34} = \frac{28}{17} \approx 1{,}647\,;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{974}{34} = \frac{487}{17} \approx 28{,}647\,.$$

Підставляючи знайдений розв'язок $x_1 = -\frac{398}{17}$; $x_2 = \frac{28}{17}$; $x_3 = \frac{487}{17}$ в систему рівнянь, переконуємось, що його знайдено правильно:

$$6 \cdot \left(-\frac{398}{17}\right) + 5 \cdot \frac{28}{17} + 5 \cdot \frac{487}{17} = 11; \quad \frac{-2388 + 140 + 2435}{17} = 11; \quad \frac{187}{17} = 11;$$

$$8 \cdot \left(-\frac{398}{17}\right) - 5 \cdot \frac{28}{17} + 7 \cdot \frac{487}{17} = 5; \quad \frac{-3184 - 140 + 3409}{17} = 5; \quad \frac{85}{17} = 5;$$

$$12 \cdot \left(-\frac{398}{17}\right) - 7 \cdot \frac{28}{17} + 10 \cdot \frac{487}{17} = -6; \quad \frac{-4776 - 196 + 4870}{17} = -6; \quad -\frac{102}{17} = -6.$$

2) $$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22\,. \end{cases} \qquad (2)$$

Запишемо систему (2) в матричному вигляді:

$$C = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & 10 & 10 \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{Vmatrix};$$

Знайдемо визначники $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & -5 & 7 \\ 22 & 10 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \\ 12 & 22 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 5 \\ 12 & 10 & 22 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Оскільки $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то ранг основної та ранг розширеної матриць не перевищує 2. Знайдемо хоча б один ненульовий мінор $M_{ij} \neq 0$ порядку 2. Маємо:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = -50 - 70 = -120 .$$

За теоремою Кронекера-Капеллі розв’язок існує, бо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює 2. З системи рівнянь (2) вилучаємо перше рівняння (якщо існує $M_{ij} \neq 0$, то вилучаємо i-те рівняння), тоді отримаємо

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22, \end{cases} \qquad (2.1)$$

причому у якості вільного параметра обираємо $x_1 = t,\ t \in R$ (якщо $M_{ij} \neq 0$, то у якості вільного параметра обераємо x_j).

Тоді система (2.1) матиме вигляд:

$$\begin{cases} -5x_2 + 7x_3 = 5 - 8t, \\ 10x_2 + 10x_3 = 22 - 12t. \end{cases} \qquad (2.2)$$

До системи (2.2) знову застосуємо формули Крамера

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = -50 - 70 = -120,$$

$$\tilde{\Delta}_{x_2} = \begin{vmatrix} 5-8t & 7 \\ 22-12t & 10 \end{vmatrix} = -50 - 80t - 154 + 84t = -104 + 4t,$$

$$\tilde{\Delta}_{x_3} = \begin{vmatrix} -5 & 5-8t \\ 10 & 22-12t \end{vmatrix} = -110 + 60t - 50 + 80t = -160 + 140t,$$

Отже, $x_1 = t$, $x_2 = \dfrac{\tilde{\Delta}_{x_2}}{\tilde{\Delta}} = \dfrac{-104+4t}{-120} = \dfrac{26-t}{30}$,

$$x_3 = \frac{\tilde{\Delta}_{x_3}}{\tilde{\Delta}} = \frac{-160+140t}{-120} = \frac{8-7t}{6},\ t \in R.$$

Для перевірки підставимо отримані розв'язки в (2), матимемо:

$$6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-720t - 520 + 20t - 800 + 700t}{-120} = \frac{-1320}{-120} = 11 \text{ – вик.;}$$

$$8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-960t + 520 - 20t - 1120 + 980t}{-120} = \frac{-600}{-120} = 5 \text{ – вик.;}$$

$$12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-1440t - 1040 + 40t - 1600 + 1400t}{-120} = \frac{-2640}{-120} = 22 \text{ – вик.}$$

$$3)\ \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 5, \\ 12x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -6; \end{cases} \qquad (3)$$

Запишемо систему (3) в матричному вигляді:

$$F = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 12 & 10 & 10 \\ 12 & -7 & 10 \end{Vmatrix},\ G = \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix};$$

Знайдемо визначники $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 12 & 10 & 10 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 10 \\ -6 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ -17 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} = 17(50 + 35) = 1445,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 12 & 5 & 10 \\ 12 & -6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 0 & 11 & 0 \\ 12 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 11 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 11 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 12 & 10 & 5 \\ 12 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 2 & 10 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -17 \\ 0 & -17 & -28 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -17 \end{vmatrix} = -1734.$$

Оскільки $\Delta = 0$, то ранг основної матриці не перевищує 2. Оскільки серед $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ існують ненульові визначники, то ранг розширеної матриці дорівнює 3. За теоремою Кронекера-Капеллі система розв'язків не має.

Метод оберненої матриці

Знайдемо розв'язок системи рівнянь (1) $AX = B$ матричним способом, тобто скориставшись формулою $X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta}\overline{A}B$.

Так як матриця À неособлива $(|A| = \Delta = 34 \neq 0)$, то обернена матриця A^{-1} існує і дорівнює:

$$A^{-1} = \frac{\overline{A}}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot \overline{A} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left\|A_{ij}\right\|^T \qquad \left(\overline{A} = \left\|A_{ij}\right\|^T\right) \qquad (*)$$

Алгебраїчні доповнення A_{ij} визначаємо через мінори за формулою:

$$A_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 10 - 7 \cdot (-7) = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = -(8 \cdot 10 - 7 \cdot 12) =$$

$$= -(80 - 84) = 4;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-7) - (-5) \cdot 12 =$$

$$= -56 + 60 = 4;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - (-7) \cdot 5 =$$

$$= 50 + 35 = 85;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 6 \cdot 10 - 12 \cdot 5 =$$

$$= 60 - 60 = 0;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = -(6 \cdot (-7) - 12 \cdot 5) =$$

$$= -(-42 - 60) = 102;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 5 \cdot (-5) =$$

$$= 35 + 25 = 60;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -(6 \cdot 7 - 5 \cdot 8) =$$

$$= -(42 - 40) = -2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-5) - 5 \cdot 8 =$$

$$= -30 - 40 = -70.$$

Тому матриця, що складена з алгебраїчних доповнень A_{ij} має такий вигляд:

$$\left\| A_{ij} \right\| = \begin{Vmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -85 & 0 & 102 \\ 60 & -2 & -70 \end{Vmatrix}, \text{ звідки } \overline{A} = \left\| A_{ij} \right\|^T = \begin{Vmatrix} -1 & -85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & -70 \end{Vmatrix}$$

Таким чином, згідно з формулою (*) маємо:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\overline{A}=\frac{1}{34}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & -85 & 60\\ 4 & 0 & -2\\ 4 & 102 & -70\end{Vmatrix}.$$

Оскільки для двох взаємно обернених матриць A та A^{-1} справедливі рівності: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, де E – одинична матриця, то виконаємо перевірку:

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{34}\cdot\begin{Vmatrix}-1 & -85 & 60\\ 4 & 0 & -2\\ 4 & 102 & -70\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}6 & 5 & 5\\ 8 & -5 & 7\\ 12 & -7 & 10\end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{34}\cdot\begin{Vmatrix}(-1)\cdot 6+(-85)\cdot 8+60\cdot 12 & (-1)\cdot 5+(-85)\cdot(-5)+60\cdot(-7) & (-1)\cdot 5+(-85)\cdot 7+60\cdot 10\\ 4\cdot 6+0\cdot 8+(-2)\cdot 12 & 4\cdot 5+0\cdot(-5)+(-2)\cdot(-7) & 4\cdot 5+0\cdot 7+(-2)\cdot 10\\ 4\cdot 6+102\cdot 8+(-70)\cdot 12 & 4\cdot 5+102\cdot(-5)+(-70)\cdot(-7) & 4\cdot 5+102\cdot 7+(-70)\cdot 10\end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{34}\cdot\begin{Vmatrix}-6-680+270 & -5+425-420 & -5-595+600\\ 24+0-24 & 20+0+14 & 20+0-20\\ 24+816-840 & 20-510+490 & 20+714-700\end{Vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{34}\cdot\begin{Vmatrix}34 & 0 & 0\\ 0 & 34 & 0\\ 0 & 0 & 34\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}.$$

Тепер, використовуючи одержану обернену матрицю A^{-1}, знаходимо розв’язок системи рівнянь за допомогою оберненої матриці:

$$X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & 70 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} (-1) \cdot 11 + (-85) \cdot 5 + 60 \cdot (-6) \\ 4 \cdot 11 + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot (-6) \\ 4 \cdot 11 + 102 \cdot 5 + (-70) \cdot (-6) \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -11 - 425 - 360 \\ 44 + 0 + 12 \\ 44 + 510 + 420 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -796 \\ 56 \\ 974 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{398}{17} \\ \frac{28}{17} \\ \frac{487}{17} \end{Vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{398}{17} \\ \frac{28}{17} \\ \frac{487}{17} \end{Vmatrix}.$$

Отже $x_1 = -\frac{398}{17}; \quad x_2 = \frac{28}{17}; \quad x_3 = \frac{487}{17}.$

2) $$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22. \end{cases} \qquad (2)$$

Запишемо систему (2) в матричному вигляді:

$$C = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & 10 & 10 \end{Vmatrix}, \; D = \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\Delta = |C| = 0$, то ранг основної матриці не перевищує 2. Далі, спочатку знаходимо матрицю мінорів, а потім і матрицю алгебраїчних доповнень:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = -120; \; M_{12} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = -4; \; M_{13} = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 140;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = 0; \; M_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 0; \; M_{23} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 60; \; M_{32} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 2; \; M_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = -70 \; \Rightarrow$$

$$M = \begin{Vmatrix} -120 & -4 & 140 \\ 0 & 0 & 0 \\ 60 & 42 & -70 \end{Vmatrix} \Rightarrow M^T = \begin{Vmatrix} -120 & 0 & 60 \\ -4 & 0 & 2 \\ 140 & 0 & -70 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\overline{C} = \begin{Vmatrix} -120 & 0 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 140 & 0 & -70 \end{Vmatrix}.$$

Знайдемо значення усіх мінорів порядку 3 розширеної матриці:

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} = \overline{C}D = \begin{Vmatrix} -120 & 0 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 140 & 0 & -70 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1320+0+1320 \\ 44+0-44 \\ 1540+0-1540 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то ранг основної та ранг розширеної матриць не перевищує 2. Враховуючи, що існує $M_{ij} \neq 0$ (напр. $M_{11} = -120$) робимо висновок, що ранг основної матриці дорівнює рану розширеної і дорівнює 2. За теоремою Кронекера-Капеллі така система лінійних рівнянь є сумісною, тобто має розв’язки (причому таких розв’язків безліч). З системи рівнянь (2) вилучаємо перше рівняння (якщо існує $M_{ij} \neq 0$, то вилучаємо i-те рівняння), тоді отримаємо

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22, \end{cases} \qquad (2.1)$$

причому у якості вільного параметра обираємо $x_1 = t,\ t \in R$ (якщо $M_{ij} \neq 0$, то у якості вільного параметра обераємо x_j).

Тоді система (2.1) матиме вигляд:

$$\begin{cases} -5x_2 + 7x_3 = 5 - 8t, \\ 10x_2 + 10x_3 = 22 - 12t. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Знову застосовуємо метод оберненої матриці

$$\widetilde{C}=\begin{Vmatrix}-5 & 7\\ 10 & 10\end{Vmatrix};\widetilde{D}=\begin{Vmatrix}5-8t\\ 22-12t\end{Vmatrix}.$$

Маємо: $\widetilde{\Delta}=\begin{vmatrix}-5 & 7\\ 10 & 10\end{vmatrix}=-50-70=-120$ – система (2.2) визначена і сумісна. Тому спочатку знаходимо матрицю мінорів, потім і матрицю алгебраїчних доповнень, а потім і розв'язок системи рівнянь (2.2) (а отже і системи (2)):

$$\widetilde{M}_{11}=10;\ \widetilde{M}_{12}=10;\ \widetilde{M}_{21}=7;\ \widetilde{M}_{22}=-5;\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \widetilde{M}=\begin{Vmatrix}10 & 10\\ 7 & -5\end{Vmatrix}\Rightarrow \widetilde{M}^{T}=\begin{Vmatrix}10 & 7\\ 10 & -5\end{Vmatrix}\Rightarrow \overline{\widetilde{A}}=\begin{Vmatrix}10 & -7\\ -10 & -5\end{Vmatrix}\Rightarrow$$

$$\overline{\widetilde{C}}\widetilde{D}=\begin{Vmatrix}10 & -7\\ -10 & -5\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}5-8t\\ 22-12t\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-104+4t\\ -160+140t\end{Vmatrix}.$$

Отже:

$$\widetilde{X}=\begin{Vmatrix}x_2\\ x_3\end{Vmatrix}=\frac{1}{\widetilde{\Delta}}\overline{\widetilde{C}}\widetilde{D}=\begin{Vmatrix}\dfrac{-104+4t}{-120}\\ \dfrac{-160+140t}{-120}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\dfrac{26-t}{30}\\ \dfrac{8-7t}{6}\end{Vmatrix}.$$

Відповідь. $x_1=t,\ x_2=\dfrac{26-t}{30},\ x_3=\dfrac{8-7t}{6},\ t\in R$.

3) $$\begin{cases}6x_1+5x_2+5x_3=11,\\ 12x_1+10x_2+10x_3=5,\\ 12x_1-7x_2+10x_3=-6;\end{cases}\qquad (3)$$

Запишемо систему (3) в матричному вигляді:

$$F=\begin{Vmatrix}6 & 5 & 5\\ 12 & 10 & 10\\ 12 & -7 & 10\end{Vmatrix},\ G=\begin{Vmatrix}11\\ 5\\ -6\end{Vmatrix};$$

Оскільки

$$\Delta=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 12 & 10 & 10\\ 12 & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 12 & -7 & 10\end{vmatrix}=0,$$

то ранг основної матриці не перевищує 2.

Маємо:

$$M_{11}=\begin{vmatrix}10 & 10\\ -7 & 10\end{vmatrix}=170;\ M_{12}=\begin{vmatrix}12 & 10\\ 12 & 10\end{vmatrix}=0;\ M_{13}=\begin{vmatrix}12 & 10\\ 12 & -7\end{vmatrix}=-204;$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix}5 & 5\\ 10 & 10\end{vmatrix}=85;\ M_{22}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 12 & 10\end{vmatrix}=0;\ M_{23}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 12 & -7\end{vmatrix}=-102;$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix}5 & 5\\ 10 & 10\end{vmatrix}=0;\ M_{32}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 12 & 10\end{vmatrix}=0;\ M_{33}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 12 & 10\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ M=\begin{pmatrix}170 & 0 & -204\\ 85 & 0 & -102\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\ M^T=\begin{pmatrix}170 & 85 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -204 & -102 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\overline{C}=\begin{pmatrix}170 & -85 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -204 & 102 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \overline{C}D=\begin{pmatrix}170 & -85 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -204 & 102 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 5\\ -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1445\\ 0\\ -1734\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\end{pmatrix}.$$

Оскільки серед Δ_1, Δ_2, Δ_3 існують ненульові елементи (напр. $\Delta_1=1445\neq 0$), то ранг розширеної матриці дорівнює 3. За теоремою Кронекера-Капеллі система розв'язків не має.

Метод Гауса

Знайдемо розв'язок системи рівнянь (1) методом Гауса. Для цього складемо розширену матрицю системи, яку еквівалентними перетвореннями зведемо до одиничної матриці:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 7 & 5 \\ 12 & -7 & 10 & -6 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 24 & -15 & 21 & 15 \\ 12 & -7 & 10 & -6 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot(-2) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 27 \\ 12 & -7 & 10 & -6 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -27 \\ 0 & -17 & 0 & -28 \end{array}\right\| \begin{array}{l} + \\ \cdot(-5) \\ \cdot\frac{1}{-17} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 10 & 146 \\ 0 & 1 & -1 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{17} \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{17} \\ 0 & 1 & -1 & -27 \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 10 & 146 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{17} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-487}{17} \end{array}\right\| \begin{array}{l} + \\ \\ (10) \end{array} \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 0 & \frac{-2388}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{17} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-487}{17} \end{array}\right\| \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{6} \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-398}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{28}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{487}{17} \end{array}\right\| \Leftrightarrow \begin{cases} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = \frac{-398}{17}, \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = \frac{28}{17}, \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 1\cdot x_3 = \frac{487}{17}. \end{cases}$$

Отже, $x_1 = -\dfrac{398}{17}; \quad x_2 = \dfrac{28}{17}; \quad x_3 = \dfrac{487}{17}.$

У випадку другої та третьої систем рівнянь ($CX = D$ і $FX = G$), коли $|C| = |F| = 0$, треба продовжувати дослідження систем. Це можна зробити, наприклад, якщо обчислити та порівняти ранги основної та розширеної матриць системи рівнянь. Зручно, також, використовувати метод Гауса.

2) $CX = D \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22. \end{cases}$

Звідки:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 7 & 5 \\ 12 & 10 & 10 & 22 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \cdot(-2) \\ \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| \begin{array}{c} \\ + \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 14 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Перейдемо від СЛР (системи лінійних рівнянь) у вигляді розширеної матриці до СЛР у стандартному вигляді:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 14x_1 + 12x_3 = 16. \end{cases}$$

Виберемо $x_1 = t$ вільною змінною, тоді:

$$\begin{cases} 5x_2 + 5x_3 = 11 - 6t, \\ 12x_3 = 16 - 14t. \end{cases}$$

Перейдемо від СЛР у звичайному вигляді до СЛР у вигляді розширеної матриці:

$$\left\|\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 11-6t \\ 0 & 12 & 16-14t \end{array}\right\| \cdot \frac{1}{12} \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 11-6t \\ 0 & 1 & \frac{8-7t}{6} \end{array}\right\| \begin{array}{c} + \\ \cdot(-5) \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & \frac{26-t}{6} \\ 0 & 1 & \frac{8-7t}{6} \end{array}\right\| \cdot \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{26-t}{30} \\ 0 & 1 & \frac{8-7t}{6} \end{array}\right\| \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{26-t}{30}, \\ x_3 = \frac{8-7t}{6}. \end{cases}$$

Отже: $x_1 = t;\ x_2 = \dfrac{26-t}{30};\ x_3 = \dfrac{8-7t}{6},\ t \in R.$

Перевіримо:

$$\begin{cases} 6\cdot t+5\cdot\left(\dfrac{26-t}{30}\right)+5\cdot\left(\dfrac{8-7t}{6}\right)=11, \\ 8\cdot t-5\cdot\left(\dfrac{26-t}{30}\right)+7\cdot\left(\dfrac{8-7t}{6}\right)=5, \\ 12\cdot t+10\cdot\left(\dfrac{26-t}{30}\right)+10\cdot\left(\dfrac{8-7t}{6}\right)=22, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{36t+26-t+40-35t}{6}=11, \\ \dfrac{48t-26+t+56-49t}{6}=5, \\ \dfrac{36t+26-t+40-35t}{3}=22, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{66}{6}=11, \\ \dfrac{30}{6}=5, \\ \dfrac{66}{3}=22. \end{cases}$$

І так буде для кожного окремого конкретного розв’язку системи, наприклад, якщо:

$$t=0: \qquad x_1=0, \qquad x_2=\frac{6}{5}, \qquad x_3=\frac{4}{3};$$

$$t=1: \qquad x_1=1, \qquad x_2=\frac{5}{6}, \qquad x_3=\frac{1}{6};$$

$$t=-1: \qquad x_1=-1, \qquad x_2=\frac{9}{10}, \qquad x_3=\frac{5}{2};$$

і так далі.

3) У випадку третьої системи рівнянь маємо:

$$FX=D \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1+5x_2+5x_3=11, \\ 12x_1+10x_2+10x_3=5, \\ 12x_1-7x_2+10x_3=-6, \end{cases}$$

звідки

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 11 & 11 \\ 12 & 10 & 10 & 5 \\ 12 & -7 & 10 & -6 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \times(-2) \\ + \\ \end{array} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \\ 12 & -7 & 10 & -6 \end{array} \right\|.$$

Очевидно, що рівність $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -17$ (друге рівняння) не може мати місце ні при яких значеннях невідомих $x_1,\ x_2,\ x_3$ звідки і випливає, що третя система рівнянь несумісна, тобто не має розв’язків.

Метод Жордана-Гауса

1) Знайдемо розв’язок системи рівнянь (1) методом Жордана-Гауса. Для цього складемо таблицю та переходитимемо до нових за допомогою розв’язувальних елементів та правила прямокутника:

$\boxed{6}$	5	5	11
8	-5	7	5
12	-7	10	-6

Виберемо у першому рядку та першому стовпчику розв’язувальний елемент 6. Поділимо напрямний рядок на розв’язувальний елемент та заповнимо решту клітинок напрямного стовпчика нулями, а решту клітинок за правилом прямокутника.

$$\frac{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}}{a_{11}} = \frac{6 \cdot (-5) - 5 \cdot 8}{6} = -\frac{35}{3};$$

$$\frac{a_{11}\,a_{23} - a_{13}\,a_{21}}{a_{11}} = \frac{6 \cdot 7 - 5 \cdot 8}{6} = \frac{1}{3};$$

$$\frac{a_{11}\,b_2 - b_1\,a_{21}}{a_{11}} = \frac{6 \cdot 5 - 11 \cdot 8}{6} = -\frac{29}{3};$$

$$\frac{a_{11}\,a_{32}-a_{12}\,a_{31}}{a_{11}}=\frac{6\cdot\left(-7\right)-5\cdot 12}{6}=-17\,;$$

$$\frac{a_{11}\,a_{33}-a_{31}\,a_{31}}{a_{11}}=\frac{6\cdot 10-5\cdot 12}{6}=0\,;$$

$$\frac{a_{11}\,b_{3}-b_{1}\,a_{31}}{a_{11}}=\frac{6\cdot\left(-6\right)-11\cdot 12}{6}=-28\,.$$

1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{6}$
0	$-\frac{35}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{29}{3}$
0	-17	0	-28

Для зручності переставимо місцями другий та третій рядки.

1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{6}$
0	$\boxed{-17}$	0	-28
0	$-\frac{35}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{29}{3}$

Вибравши у якості розв’язувального елемента -17 перейдемо до наступної таблиці, причому врахуємо, що якщо у напрямному рядку є нуль, то відповідний стовпчик переписуємо без змін:

$$\frac{\frac{(-17)\cdot 11}{6}-\frac{(-28)\cdot 5}{6}}{-17}=\frac{47}{102};\quad \frac{\frac{(-17)\cdot(-29)}{3}-\frac{(-35)\cdot(-28)}{3}}{-17}=\frac{487}{51}.$$

1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{47}{102}$
0	1	0	$\frac{28}{17}$
0	0	$\boxed{\frac{1}{3}}$	$\frac{487}{51}$

Нарешті вибираючи у якості розв'язувального елемента $\frac{1}{3}$ отримуємо останню таблицю: $\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{47}{102}-\frac{487}{51}\cdot\frac{5}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{398}{17}$.

1	0	0	$-\frac{398}{17}$
0	1	0	$\frac{28}{17}$
0	0	1	$\frac{487}{17}$

Отже $x_1=-\frac{398}{17}$; $x_2=\frac{28}{17}$; $x_3=\frac{487}{17}$.

2) Знайдемо розв'язок системи рівнянь (2) методом Жордана-Гауса. Для цього складемо таблицю та переходитимемо до нових за допомогою розв'язувальних елементів та правила прямокутника:

$\boxed{6}$	5	5	11
8	-5	7	5
12	10	10	22

Виберемо у першому рядку та першому стовпчику розв'язувальний елемент ***6***. Поділимо напрямний рядок на розв'язувальний елемент та заповнимо решту клітинок напрямного стовпчика нулями, а інші клітинки за правилом прямокутника:

$$\frac{6\cdot(-5)-5\cdot 8}{6}=-\frac{35}{3};\ \frac{6\cdot 7-5\cdot 8}{6}=\frac{1}{3};\ \frac{6\cdot 5-11\cdot 8}{6}=-\frac{29}{3};$$

$$\frac{6\cdot 10-5\cdot 12}{6}=0;\ \frac{6\cdot 10-5\cdot 12}{6}=0;\ \frac{6\cdot 22-11\cdot 12}{6}=0.$$

1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{6}$
0	$-\frac{35}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{29}{3}$
0	0	0	0

Перейдемо до СЛР у звичайному вигляді:

$$\begin{cases} x_1+\frac{5}{6}x_2+\frac{5}{6}x_3=\frac{11}{6}, \\ 0\cdot x_1-\frac{35}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=-\frac{29}{3}. \end{cases}$$

Вибравши $x_1=t,\ t\in R$ вільним параметром, отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{5}{6}x_2+\frac{5}{6}x_3=\frac{11-6t}{6}, \\ -\frac{35}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=-\frac{29}{3}. \end{cases}$$

Знову перейдемо до СЛР у табличному вигляді.

$\boxed{\frac{5}{6}}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11-6t}{6}$
$-\frac{35}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{29}{3}$

$$\frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}-\frac{5}{6}\cdot\frac{(-35)}{3}}{\frac{5}{6}}=12;\ \frac{\frac{5}{6}\cdot\frac{(-29)}{3}-\frac{(11-6t)}{6}\cdot\frac{(-35)}{3}}{\frac{5}{6}}=16-14t.$$

1	1	$\frac{11-6t}{5}$
0	12	$16-14t$

$$\frac{16-14t}{12}=\frac{8-7t}{6};\ \frac{12\cdot\frac{(11-6t)}{5}-(16-14t)}{12}=\frac{26-t}{30}.$$

1	0	$\frac{26-t}{30}$
0	1	$\frac{8-7t}{6}$

Отже $x_1=t;\ x_2=\frac{26-t}{30};\ x_3=\frac{8-7t}{6},\ t\in R.$

3) У випадку третьої системи рівнянь маємо:

$$FX = D \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 5, \\ 12x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -6. \end{cases}$$

$\boxed{6}$	5	5	11
12	10	10	5
12	-7	10	-6

$$\frac{6 \cdot 10 - 5 \cdot 12}{6} = 0; \quad \frac{6 \cdot 10 - 5 \cdot 12}{6} = 0; \quad \frac{6 \cdot 5 - 11 \cdot 12}{6} = -17;$$

$$\frac{6 \cdot (-7) - 5 \cdot 12}{6} = -17; \quad \frac{6 \cdot 10 - 5 \cdot 12}{6} = 0; \quad \frac{6 \cdot (-6) - 11 \cdot 12}{6} = -28.$$

1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{6}$
0	0	0	-17
0	-17	0	-28

Очевидно, що рівність $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -17$ (друге рівняння) не може мати місце ні при яких значеннях невідомих x_1, x_2, x_3 звідки і випливає, що третя система рівнянь несумісна, тобто не має розв’язків.

Відповіді

1. Перша система рівнянь $AX = B$ має єдиний розв'язок:

$$x_1 = -\frac{398}{17} = -23\frac{7}{17}, \quad x_2 = -\frac{28}{17} = -1\frac{11}{17}, \quad x_3 = \frac{487}{17} = 28\frac{11}{17};$$

або $x_1 \approx -23{,}412, \quad x_2 \approx -1{,}647, \quad x_3 \approx 28{,}647$.

2. Друга система рівнянь $CX = D$ має безліч розв'язків, які визначаються за формулами:

$$x_1 = t; \; x_2 = \frac{26 - t}{30}; \; x_3 = \frac{8 - 7t}{6}, \; t \in R = (-\infty, +\infty).$$

3. Третя система рівнянь $FX = G$ розв'язків не має (несумісна).

2. Аналітична геометрія на площині

Контрольні запитання

1. Прямокутна декартова система координат на площині, відстань між двома точками.
2. Поділ відрізка у заданому відношенні.
3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
4. Рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом. Рівняння пучка прямих.
5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.
6. Рівняння прямої у відрізках на осях.
7. Загальне рівняння прямої та його дослідження.
8. Кут між двома прямими на площині. Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих на площині.
9. Сумісне дослідження рівнянь двох прямих, що задані загальними рівняннями.
10. Нормальне рівняння прямої. Зведення загального рівняння прямої до нормального виду.
11. Поняття кривих другого порядку. Означення кола. Канонічне рівняння кола.
12. Означення еліпса. Канонічне рівняння еліпса.
13. Означення гіперболи. Канонічне рівняння гіперболи.
14. Означення параболи. Канонічне рівняння параболи.

Розрахункові завдання

Задача 2. В задачах **2.1 – 2.31** задані координати вершин трикутника ***ABC*.**

Знайти:

1) довжини сторін ***AB*, *BC*** та ***AC*;**

2) рівняння сторін ***AB*, *AC*, *BC*** та їх кутові коефіцієнти;

3) величину кута ***B*** в радіанах з точністю до двох знаків;

4) довжину бісектриси ***BF*** внутрішнього кута ***B***;

5) рівняння висоти ***CD*** та її довжину;

6) рівняння медіани ***AE*** та координати точки ***P*** перетину цієї медіани з висотою ***CD***;

7) рівняння прямої ***PL***, яка проходить через точку ***P*** паралельно до сторони ***AB***;

8) рівняння та довжину перпендикуляра (висоти) ***BN***, який проведено з вершини ***B*** на медіану ***AE***;

9) координати точки ***M***, розташованої симетрично до точки ***A*** відносно прямої ***CD***;

10) Побудувати на міліметровому папері (формат А4) трикутник ***ABC*** та знайдені його елементи в системі координат ***x0y***, взявши за одиницю масштабу 1 см.

<u>Вихідні умови задачі 2</u>

№ задачі	Координати точок		
2.1	$A(-6;3)$	$B(6+\beta;-6-\beta)$	$C(4;8)$
2.2	$A(-7;-2)$	$B(5+\beta;-11-\beta)$	$C(9;11)$
2.3	$A(-2;1)$	$B(10+\beta;-8-\beta)$	$C(14;14)$
2.4	$A(-6;8)$	$B(6+\beta;-1-\beta)$	$C(10;21)$
2.5	$A(-1;-2)$	$B(11+\beta;-11-\beta)$	$C(15;11)$
2.6	$A(-10;5)$	$B(2+\beta;-4-\beta)$	$C(6;18)$
2.7	$A(-1;1)$	$B(11+\beta;-8-\beta)$	$C(15;14)$
2.8	$A(-10;4)$	$B(2+\beta;-5-\beta)$	$C(6;17)$
2.9	$A(-8;4)$	$B(4+\beta;-5-\beta)$	$C(8;17)$
2.10	$A(-6;1)$	$B(6+\beta;-10-\beta)$	$C(10;12)$
2.11	$A(-7;7)$	$B(5+\beta;-2-\beta)$	$C(3;12)$
2.12	$A(-2;1)$	$B(10+\beta;-8-\beta)$	$C(8;6)$
2.13	$A(-6;5)$	$B(6+\beta;-4-\beta)$	$C(4;10)$
2.14	$A(2;-1)$	$B(14+\beta;-10-\beta)$	$C(12;4)$
2.15	$A(-5;8)$	$B(7+\beta;-1-\beta)$	$C(5;13)$
2.16	$A(-9;7)$	$B(3+\beta;-2-\beta)$	$C(1;12)$
2.17	$A(-9;6)$	$B(3+\beta;-3-\beta)$	$C(1;11)$
2.18	$A(-1;2)$	$B(11+\beta;-7-\beta)$	$C(9;7)$
2.19	$A(-9;5)$	$B(3+\beta;-4-\beta)$	$C(1;10)$
2.20	$A(-5;4)$	$B(7+\beta;-5-\beta)$	$C(5;9)$
2.21	$A(-4;1)$	$B(8+\beta;-8-\beta)$	$C(12;14)$
2.22	$A(-3;0)$	$B(9+\beta;-9-\beta)$	$C(13;13)$
2.23	$A(-4;5)$	$B(8+\beta;-4-\beta)$	$C(12;18)$
2.24	$A(-4;0)$	$B(8+\beta;-9-\beta)$	$C(12;13)$
2.25	$A(-9;3)$	$B(3+\beta;-6-\beta)$	$C(7;16)$
2.26	$A(-3;2)$	$B(9+\beta;-7-\beta)$	$C(13;15)$
2.27	$A(-9;10)$	$B(3+\beta;1+\beta)$	$C(7;23)$
2.28	$A(-11;0)$	$B(1+\beta;-9-\beta)$	$C(5;13)$
2.29	$A(-4;8)$	$B(8+\beta;-1-\beta)$	$C(12;21)$
2.30	$A(-3;10)$	$B(9+\beta;1+\beta)$	$C(7;15)$
2.31	$A(-7;7)$	$B(5+\beta;-4-\beta)$	$C(9;18)$

Методичні рекомендації

Розв'язання задачі 2.31 Нехай $\beta = 3$, тоді координати вершин трикутника ABC будуть такі:

$$A(-7;7), \qquad B(8;-7), \qquad C(9;18).$$

1. Знайти довжини сторін ***AB***, ***BC***, та ***AC.***

Розв'язання

Відстань між точками $A(x_1; y_1)$ та $A(x_2; y_2)$ визначається за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

Використовуючи (1), знаходимо довжину сторони ***AB***:

$$d_{AB} = |AB| = \sqrt{(8-(-7))^2 + ((-7)-7)^2} = \sqrt{15^2 + (-14)^2} =$$
$$= \sqrt{225+196} = \sqrt{421} \approx 20{,}52 \text{ (см).}$$

Таким чином $|AB| \approx 20{,}5\,см$.

Аналогічно знаходимо довжини сторін ***BC*** та ***AC***:

$$d_{BC} = |BC| = \sqrt{(9-8)^2 + (18+7)^2} = \sqrt{1+625} = \sqrt{626} \approx 25{,}02 \text{ (см).}$$

$$d_{AC} = |AC| = \sqrt{(9+7)^2 + (18-7)^2} = \sqrt{256+121} = \sqrt{377} \approx 19{,}46 \text{ (см).}$$

Наближено $|BC| \approx 25{,}0\,см,$ $|AC| \approx 19{,}5\,см.$

Відповідь: довжини сторін трикутника відповідно дорівнюють: $|AB| \approx 20{,}5\,см,$ $|BC| \approx 25{,}0\,см,$ $|AC| \approx 19{,}5\,см.$

2. Записати рівняння сторін ***AB, AC, BC*** та знайти їх кутові коефіцієнти.

<u>Розв’язання</u>

Рівняння прямої (сторони), яка проходить через точки $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2)$$

Підставляючи в (2) координати точок ***A*** та ***B***, одержимо рівняння сторони ***AB***:

$$\frac{x-(-7)}{8-(-7)}=\frac{y-7}{-7-7}; \qquad \frac{x+7}{15}=\frac{y-7}{-14};$$

$$-14(x+7)=15(y-7); \qquad -14x-98=15y-105;$$

$$\underline{14x+15y-7=0} \qquad (AB).$$

Перевірка:

<u>т. *A*:</u> $14\cdot(-7)+15\cdot 7-7=0; \quad -98+105-7=0;$
$-98+98=0; \quad 0=0.$

<u>т. *B*:</u> $14\cdot 8+15\cdot(-7)-7=0; \quad 112-105-7=0;$
$7-7=0; \quad 0=0.$

Підставляючи в (2) координати точок ***A*** та ***C***, дістанемо рівняння сторони ***AC***:

$$\frac{x+7}{9+7}=\frac{y-7}{18-7}; \qquad \frac{x+7}{16}=\frac{y-7}{11};$$

$$11(x+7)=16(y-7); \qquad 11x+77=16y-112;$$

$$\underline{11x-16y+189=0} \qquad (AC).$$

Перевірка:

т. *A*: $11\cdot(-7)-16\cdot 7+189=0$; $-77-112+189=0$;
$-189+189=0$; $0=0$.

т. *C*: $11\cdot 9-16\cdot 18+189=0$; $99-288+189=0$;
$99-99=0$; $0=0$.

Аналогічно знаходимо рівняння сторони ***BC***:

$$\frac{x-8}{9-8}=\frac{y+7}{18+7}; \qquad \frac{x-8}{1}=\frac{y+7}{25};$$

$$25(x-8)=(y+7)\cdot 1; \qquad 25x-200=y+7;$$

$$\underline{25x-y-207=0} \qquad (BC).$$

Перевірка:

т. *B*: $25\cdot 8-(-7)-207=0$; $200+7-207=0$;

$200-200=0$; $0=0$.

т. *C*: $25\cdot 9-18-207=0$; $225-18-207=0$;

$207-207=0$; $0=0$.

Розв'язавши кожне з рівнянь сторін (***AB***) (***AC***) та (***BC***) відносно y, знаходимо їх рівняння у вигляді рівнянь прямих з кутовим коефіцієнтом:

(AB) $15y=-14x+7$; $y=-\frac{14}{15}x+\frac{7}{15}$, звідки $k_{AB}=-\frac{14}{15}$;

(AC) $16y=11x+189$; $y=\frac{11}{16}x+\frac{189}{16}$, звідки $k_{AC}=\frac{11}{16}$;

(BC) $25x-y-207=0$; $y=25x-207$, звідки $k_{BC}=25$.

Відповідь: рівняння сторони ***AB*** має вигляд:

$$14x+15y-7=0;$$

рівняння сторони AC має вигляд:

$$11x - 16y + 189 = 0;$$

рівняння сторони BC має вигляд:

$$25x - y - 207 = 0.$$

Кутові коефіцієнти відповідно дорівнюють:

$$k_{AB} = -\frac{14}{15}; \qquad k_{AC} = \frac{11}{16}; \qquad k_{BC} = 25.$$

3. Знайти величину кута B в радіанах з точністю до двох знаків.

Розв'язання

Відомо, що тангенс кута φ між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють k_1 та k_2, обчислюється за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{3}$$

Шуканий кут B, утворений прямими AB та BC, кутові коефіцієнти які знайдені: $k_1 = k_{BC} = 25$, $k_2 = k_{AB} = -\frac{14}{15}$.

Використовуючи формулу (3) дістанемо:

$$tgB = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AB}} = \frac{-\frac{14}{15} - 25}{1 + 25 \cdot \left(-\frac{14}{15}\right)} = \frac{(-14 - 25 \cdot 15) \cdot 3}{15(3 + 5 \cdot (-14))} =$$

$$= \frac{-14 - 375}{5 \cdot (3 - 70)} = \frac{-389}{-335} \approx 1{,}1612,$$

звідки кут $B \approx 49^o 16'$, або $B \approx 0{,}86$ *(рад.)*

Відповідь: величина кута B становить $0{,}86$ радіана.

4. Знайти довжину бісектриси BF внутрішнього кута B.

Розв'язання

Довжину бісектриси BF знаходимо як відстань між двома точками B та F. Невідомі координати x, y точки F визначимо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1 + \lambda}, \qquad (4)$$

де відношення $\lambda = \dfrac{AF}{FC}$ і координати точок A та C – відомі.

Використовуючи властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника, дістанемо:

$$\lambda = \frac{AF}{FC} = \left|\frac{AB}{BC}\right| = \frac{\sqrt{421}}{\sqrt{626}} \approx \sqrt{0,6725} \approx 0,82\,.$$

Оскільки точка F ділить відрізок AC у відношенні $\lambda = 0,82,$ то згідно з (4) знаходимо:

$$x_F = \frac{-7 + 0,82 \cdot 9}{1 + 0,82} = \frac{-7 + 7,38}{1,82} = \frac{0,38}{1,82} \approx 0,209 \approx 0,21;$$

$$y_F = \frac{7 + 0,82 \cdot 18}{1 + 0,82} = \frac{7 + 14,76}{1,82} = \frac{21,76}{1,82} \approx 11,956 \approx 11,96.$$

Отже, точка F має координати $F(0,21;11,96)$. Для побудови її на площині в системі координат xOy візьмемо $x_F \approx 0,2$, $y_F \approx 11,96$.

Для знаходження довжини бісектриси BF використаємо формулу (1):

$$d_{BF}=|BF|=\sqrt{(0,21-8)^2+(11,96+7)^2}=$$

$$=\sqrt{(-7,79)^2+(18,96)^2}==\sqrt{60,6841+359,4816}=\sqrt{420,1657}\approx$$

$$\approx 20,498\approx 20,5$$ (см).

<u>Відповідь:</u> довжина бісектриси BF внутрішнього кута B наближено дорівнює ***20,5 см***.

5. Записати рівняння висоти CD та знайти її довжину.

<u>Розв'язання</u>

Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ в заданому напрямку k, має вигляд:

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{5}$$

Висота CD перпендикулярна до сторони AB. Для того, щоб знайти кутовий коефіцієнт висоти CD використаємо умову перпендикулярності прямих:

$$k_1\cdot k_2=-1 \qquad \text{або} \qquad k_2=-\frac{1}{k_1} \tag{6}$$

Оскільки $k_{AB}=-\dfrac{14}{15}$, то $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}=\dfrac{15}{14}$. Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати точки C: $x_C=9$ і $y_C=18$ та знайдений кутовий коефіцієнт висоти $k=k_{CD}=\dfrac{15}{14}$, отримаємо:

$$y-18=\frac{15}{14}(x-9);$$

$$14(y-18)=15(x-9); \qquad 14y-252=15x-135;$$

$$15x-14y+117=0 \qquad (CD)$$

Для того, щоб знайти довжину висоти CD, визначимо спочатку координати точки D – точки перетину прямих AB та CD, розв'язавши сумісно систему рівнянь:

$$\begin{matrix}(AB)\\(CD)\end{matrix}\begin{cases}14x+15y-7=0 \\ 15x-14y+117=0\end{cases}\left|\begin{matrix}\times 14\\ \times 15\end{matrix}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}196x+210y-98=0 \\ 225x-210y+1755=0\end{cases} \; + \quad \Rightarrow$$

$$421x+1657=0; \qquad 421x=-1657; \qquad x=\frac{-1657}{421}\approx -3{,}936;$$

$$x_D \approx -3{,}94; \qquad 14\cdot(-3{,}94)+15y-7=0;$$

$$15y=7+55{,}16; \qquad 15y=62{,}16; \qquad y=\frac{62{,}16}{15}4{,}144;$$

$y_D \approx 4{,}14$ (необхідно зробити перевірку правильності знайденого розв'язку $x_D \approx -3{,}94$ та $y_D \approx 4{,}14$, підставляючи його замість x та y в обидва рівняння записаної системи).

Таким чином $D(-3{,}94;4{,}14)$, але для побудови на рисунку візьмемо $x_D \approx -3{,}9$; $y_D \approx 4{,}1$. За формулою (1) знаходимо довжину висоти CD:

$$d_{CD}=|CD|=\sqrt{(-3{,}94-9)^2+(4{,}14-18)^2}=$$

$$=\sqrt{(-12{,}94)^2+(-13{,}86)^2}=\sqrt{167{,}4436+192{,}0996}=$$

$$=\sqrt{359{,}5432}\approx 18{,}96 \text{ (см)}.$$

Відповідь: рівняння висоти CD має вигляд:

$$15x-14y+117=0,$$

довжина висоти CD наближено дорівнює 19 *см*.

6. Записати рівняння медіани ***AE*** та координати точки ***P*** перетину цієї медіани з висотою ***CD***.

Розв'язання

Для того, щоб знайти рівняння медіани ***AE***, визначимо спочатку координати точки ***E***, середини сторони ***BC***. Для цього використаємо формули ділення відрізка на дві рівні частини (дивись (4), де $\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

$$x_E = \frac{8+9}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5; \qquad y_E = \frac{-7+18}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5;$$

$$E(8{,}5; 5{,}5).$$

Підставляючи в (2) координати точок ***A*** та ***E***, знаходимо рівняння медіани:

$$\frac{x+7}{8{,}5+7} = \frac{y-7}{5{,}5-7}; \qquad \frac{x+7}{15{,}5} = \frac{y-7}{-1{,}5};$$

$$-1{,}5 \cdot (x+7) = 15{,}5 \cdot (y-7) \,|\cdot (-2);$$

$$3(x+7) = -31(y-7); \qquad 3x + 21 = -31y + 217;$$

$$3x + 31y - 196 = 0 \qquad (AE)$$

Виконаємо перевірку, підставляючи в рівняння ***AE*** замість ***x*** та ***y*** координати точок ***A*** та ***E.***

Для того, щоб знайти координати точки ***P*** – точки перетину висоти ***CD*** та медіани ***AE***, розв'яжемо сумісно систему рівнянь:

$$\begin{matrix}(AE)\\(CD)\end{matrix}\begin{cases}3x+31y-196=0\\15x-14y+117=0\end{cases}\left|\times(-5)\right.\Rightarrow\begin{cases}-15x-155y+980=0\\15x-14y+117=0\end{cases}+\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -169y+1097=0;\qquad 169y=1097;\qquad y=\frac{1097}{169}\approx 6{,}49;$$

$$3x+31\cdot 6{,}49-196=0;\qquad 3x=196-201{,}19;$$

$$3x=-5{,}19;\qquad x=\frac{-5{,}19}{3}\approx -1{,}73.$$

Відповідь: рівняння медіани AE має вигляд: $3x+31y-196=0$; координати точки перетину цієї медіани з висотою CD: т. $P(-1{,}7;6{,}5)$.

7. Записати рівняння прямої PL, яка проходить через точку P паралельно до сторони AB.

Розв'язання

Оскільки шукана пряма PL паралельна до сторони AB, то її кутовий коефіцієнт k_{PL} буде дорівнювати кутовому коефіцієнту k_{AB} прямої AB. Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати знайденої точки P та кутовий коефіцієнт $k=k_{PL}$ дістанемо:

$$y-6{,}5=-\frac{14}{15}(x+1{,}7)\quad\left|\times 10\right.;$$

$$10y-65=-\frac{14}{15}(10x+17)\quad\left|\times 15\right.;$$

$$15\cdot(10y-65)=-14\cdot(10x+17);$$

$$150y-975=-140x-238;$$

$$140x+150y-637=0\qquad (PL),\qquad \text{де } PL\parallel AB.$$

Перевірка:

$$140\cdot(-1{,}7)+150\cdot 6{,}5-637=0;$$

$$-238+975-637=0; \qquad -238+238=0; \qquad 0=0.$$

<u>Відповідь:</u> рівняння прямої PL, яка проходить через точку P паралельно до сторони AB має вигляд:

$$140x+150y-637=0$$

8. Записати рівняння та знайти довжину перпендикуляра (висоти) BN, який проведено з вершини B на медіану AE.

<u>Розв'язання</u>

Пряма (висота) BN перпендикулярна до медіани (прямої) AE. Враховуючи умову перпендикулярності (6), знаходимо кутовий коефіцієнт BN:

$$(AE) \qquad 3x+31y-196=0; \qquad 31y=-3x+196;$$

$$y=-\frac{3}{31}x+\frac{196}{31}; \qquad k_{AE}=-\frac{3}{31};$$

$$k_{BN}=-\frac{1}{k_{AE}}=-\frac{1}{\left(-\frac{3}{31}\right)}=\frac{31}{3}.$$

Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати $B(8;-7)$ та знайдений кутовий коефіцієнт $k=k_{BN}=\frac{31}{3}$, отримаємо:

$$y+7=\frac{31}{3}(x-8) \quad |\times 3;$$

$$3\cdot(y+7)=31\cdot(x-8);$$

$$3y + 21 = 31x - 248;$$

$$31x - 3y - 269 = 0 \qquad (BN).$$

Довжину перпендикуляра (висоти) можна знаходити як відстань від точки $M^*\left(x^*; y^*\right)$ до прямої $Ax + Bx + C = 0$ за формулою:

$$d_{BN} = |BN| = \frac{\left|Ax^* + By^* + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{8}$$

Отже, необхідно обчислити довжину перпендикуляра ***BN***, який дорівнює відстані від точки ***B*** до прямої ***AE***: $3x + 31y - 196 = 0$, де ***A=3***; ***B=31.***

Підставивши в (8) замість x^* і y^* координати $x_B = 8$, $y_B = -7$ та коефіцієнти ***A=3***; ***B=31***, отримаємо:

$$d_{BN} = |BN| = \frac{|3 \cdot 8 + 31 \cdot (-7) - 196|}{\sqrt{3^2 + 31^2}} = \frac{|24 - 217 - 196|}{\sqrt{9 + 961}} =$$

$$= \frac{|-389|}{\sqrt{970}} = \frac{389}{31{,}145} \approx 12{,}49 \ (см).$$

<u>Відповідь:</u> рівняння перпендикуляра (висоти) ***BN***, який проведено з вершини ***B*** на медіану ***AE*** має вигляд: $31x - 3y - 269 = 0$, довжина ***BN*** наближено становить ***12,5*** см.

9. Знайти координати точки ***M***, розташованої симетрично до точки ***A*** відносно прямої ***CD***.

<u>Розв’язання</u>

Так як пряма ***AB*** перпендикулярна до прямої ***CD***, то шукана ***M*,** яка розташована симетрично до точки ***A*,** відносно прямої ***CD***, знаходиться на прямій ***AB***.

Крім того, точка ***D*** є середина відрізка ***AM***. Застосовуючи формули (7), знаходимо координати шуканої точки ***M***:

$$x_D = \frac{x_A + x_M}{2}; \qquad -3{,}94 = \frac{-7 + x_M}{2};$$

$$x_M = 2 \cdot (-3{,}94) + 7; \qquad x_M = -7{,}88 + 7 = -0{,}88; \quad x_M \approx -0{,}9.$$

$$y_D = \frac{y_A + y_M}{2}; \qquad 4{,}14 = \frac{7 + y_M}{2};$$

$$y_M = 2 \cdot 4{,}14 - 7 = 1{,}28; \qquad y_M \approx 1{,}3.$$

<u>Відповідь:</u> точка ***M*,** яка розташована симетрично до точки ***A*,** відносно прямої ***CD*** має наступні координати: $M(-0{,}9;1{,}3)$.

10. Трикутник ***ABC***, бісектриса ***BF***, медіана ***AE***, пряма ***PL***, перпендикуляр ***BN*** та точка ***M*** побудовані в системі координат ***x0y*** на рис.1.

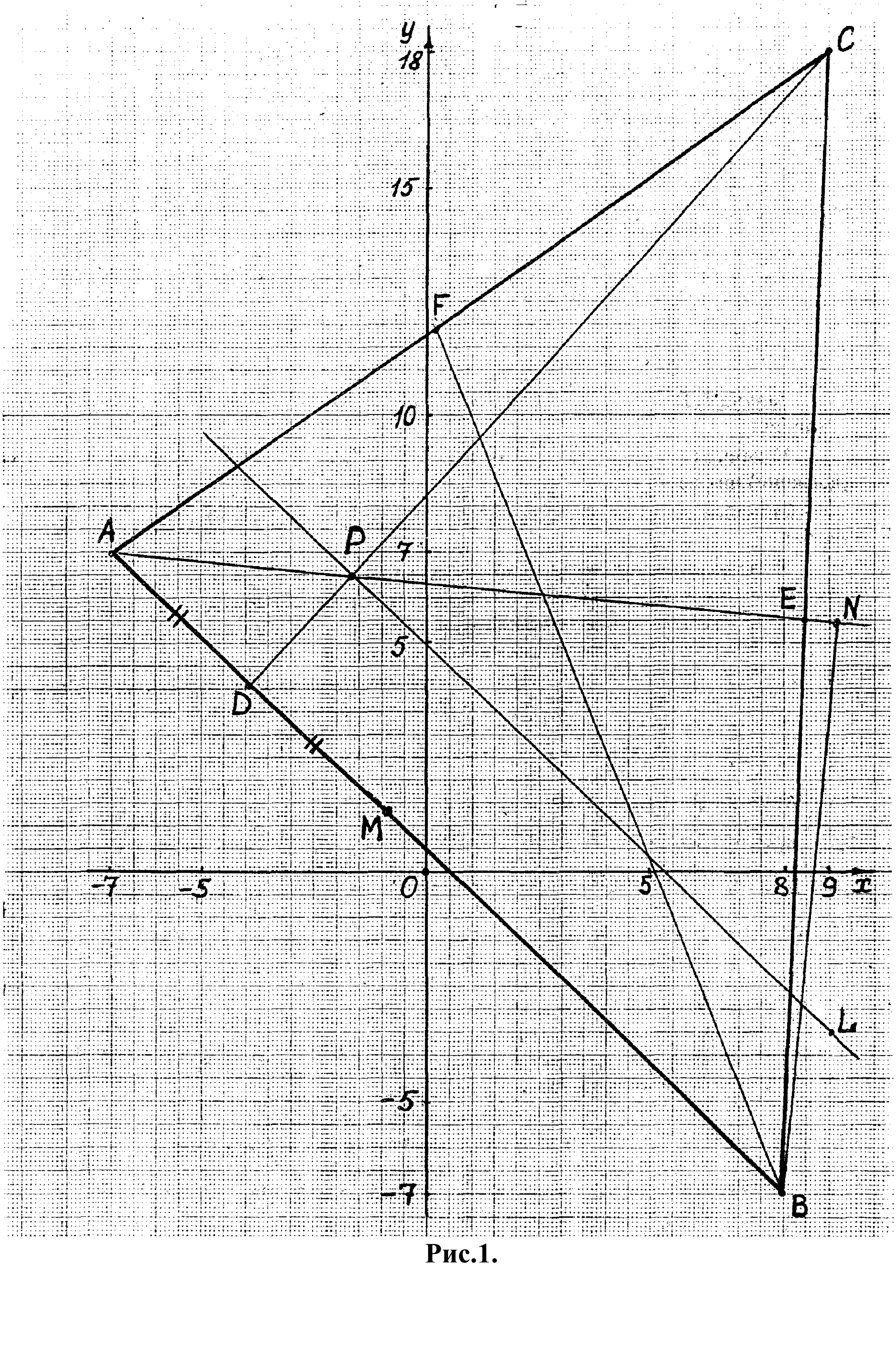


Рис.1.

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА №2

Аналітична геометрія в просторі

Контрольні запитання

1. Означення вектора, модуль вектора. Колінеарність та компланарність векторів. Лінійні дії з векторами.
2. Лінійна залежність між векторами. Базис на площині та у просторі.
3. Розклад вектора в координатному базисі ***i, j, k.*** Лінійні операції над векторами в системі координат.
4. Означення скалярного добутку векторів. Скалярний добуток двох векторів, заданих координатами. Основні властивості скалярного добутку векторів. Кут між двома векторами, координати яких відомі. Умова паралельності та перпендикулярності двох векторів.
5. Векторний добуток векторів. Основні властивості векторного добутку. Площа паралелограма, побудованого на двох векторах.
6. Векторний добуток двох векторів.
7. Мішаний добуток трьох векторів. Властивості мішаного добутку. Об’єм паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах.
8. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.
9. Загальне рівняння площини у просторі та його дослідження.
10. Нормальне рівняння площини.

11. Рівняння площини, що проходить через три задані точки. Рівняння площини у відрізках на осях.

12. Кут між двома площинами. Умова паралельності та перпендикулярності двох площин.

13. Відхилення та відстань точки від площини.

14. Канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.

15. Пряма лінія як перетин двох площин. Перехід до канонічних рівнянь прямої.

16. Кут між двома прямими у просторі. Умова паралельності та перпендикулярності двох прямих у просторі.

17. Кут між прямою та площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої та площини.

18. Умова перетину двох прямих у просторі. Перетин прямої та площини.

Розрахункові завдання

Задача 3. В задачах **3.1 – 3.31** задані координати вершин піраміди $ABCD$.

Необхідно:

1) записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ в системі орт і знайти модулі (довжини) цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків;

3) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;

4) знайти площу грані ABC;

5) знайти об’єм піраміди $ABCD$.

Вихідні умови задачі 3

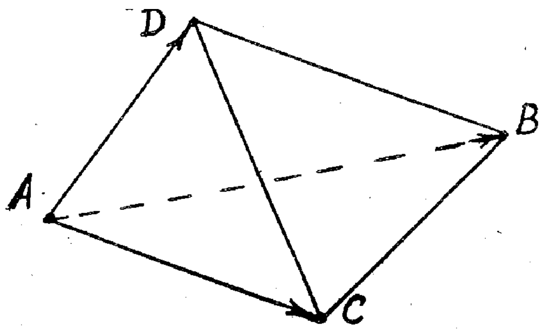
№ задачі	Координати точок			
3.1	$A(-5-\beta;\beta;1+\beta)$	$B(-4;-2;3)$	$C(6;2;11)$	$D(3;4;9)$
3.2	$A(1+\beta;-4-\beta;\beta)$	$B(2;-6;2)$	$C(12;-2;10)$	$D(9;0;8)$
3.3	$A(-1-\beta;-2-\beta;-8-\beta)$	$B(0;-4;-6)$	$C(10;0;2)$	$D(7;2;0)$
3.4	$A(\beta;2+\beta;-10-\beta)$	$B(1;0;-8)$	$C(14;3;8)$	$D(11;5;6)$
3.5	$A(3+\beta;1+\beta;-2-\beta)$	$B(4;-1;0)$	$C(14;3;8)$	$D(11;5;6)$
3.6	$A(-8-\beta;3+\beta;-1-\beta)$	$B(-7;1;1)$	$C(3;5;9)$	$D(0;7;7)$
3.7	$A(2+\beta;-1-\beta;-4-\beta)$	$B(3;-3;-2)$	$C(13;1;6)$	$D(10;3;4)$
3.8	$A(-4-\beta;5+\beta;-5-\beta)$	$B(-3;3;-3)$	$C(7;7;5)$	$D(4;9;3)$
3.9	$A(-2-\beta;-3-\beta;2+\beta)$	$B(-1;-5;4)$	$C(9;-1;12)$	$D(6;1;10)$
3.10	$A(-3-\beta;4+\beta;-3-\beta)$	$B(-2;2;-1)$	$C(8;6;7)$	$D(5;8;5)$
3.11	$A(2+\beta;-3-\beta;1+\beta)$	$B(6;1;-1)$	$C(4;8;-9)$	$D(2;-1;2)$
3.12	$A(5+\beta;-1-\beta;-4-\beta)$	$B(9;3;-6)$	$C(7;10;-14)$	$D(5;1;-3)$
3.13	$A(1+\beta;-4-\beta;\beta)$	$B(5;0;-2)$	$C(3;7;-10)$	$D(1;-2;1)$
3.14	$A(-3-\beta;-6-\beta;2+\beta)$	$B(1;-2;0)$	$C(-1;5;-8)$	$D(-3;-4;3)$
3.15	$A(-1-\beta;1+\beta;-5-\beta)$	$B(3;5;-7)$	$C(1;12;-15)$	$D(-1;3;-4)$
3.16	$A(-4-\beta;2+\beta;-1-\beta)$	$B(0;6;-3)$	$C(-2;13;-11)$	$D(-4;4;0)$
3.17	$A(\beta;4+\beta;3+\beta)$	$B(4;8;1)$	$C(2;15-7)$	$D(0;6;4)$

3.18	$A(-2-\beta;\beta;-2-\beta)$	$B(2;4;-4)$	$C(0;11;-12)$	$D(-2;2;-1)$
3.19	$A(3+\beta;3+\beta;-3-\beta)$	$B(7;7;-5)$	$C(5;14;-13)$	$D(3;5;-2)$
3.20	$A(4+\beta;-2-\beta;5+\beta)$	$B(8;2;3)$	$C(6;9;-5)$	$D(4;0;6)$
3.21	$A(-4-\beta;1+\beta;2+\beta)$	$B(-3;1;4)$	$C(7;3;12)$	$D(4;5;10)$
3.22	$A(2+\beta;-3-\beta;1+\beta)$	$B(3;-5;3)$	$C(13;-1;11)$	$D(10;1;9)$
3.23	$A(\beta;-1-\beta;-7-\beta)$	$B(1;-3;-5)$	$C(11;1;3)$	$D(8;3;1)$
3.24	$A(1+\beta;3+\beta;-9-\beta)$	$B(2;1;-7)$	$C(12;5;-1)$	$D(9;7;-1)$
3.25	$A(4+\beta;2+\beta;-1-\beta)$	$B(5;0;1)$	$C(15;4;9)$	$D(12;6;7)$
3.26	$A(-7-\beta;4+\beta;\beta)$	$B(-6;2;2)$	$C(4;6;10)$	$D(1;8;8)$
3.27	$A(3+\beta;\beta;-3-\beta)$	$B(4;-2;-1)$	$C(14;2;7)$	$D(11;4;5)$
3.28	$A(-3-\beta;6+\beta;-4-\beta)$	$B(-2;4;-2)$	$C(8;8;6)$	$D(5;10;4)$
3.29	$A(-1-\beta;-2-\beta;3+\beta)$	$B(0;-4;5)$	$C(10;0;13)$	$D(7;2;11)$
3.30	$A(-2-\beta;5+\beta;-2-\beta)$	$B(-1;3;0)$	$C(9;7;8)$	$D(6;9;6)$
3.31	$A(2+\beta;2+\beta;1+\beta)$	$B(2;-2;3)$	$C(12;1;9)$	$D(1;2;6)$

Методичні рекомендації

Розв'язання задачі 3.31. Візьмемо $\beta = 4,$ тоді координати вершин піраміди $ABCD$ будуть такі: $A(6;6;5)$,, $B(2;-2;3)$, $C(12;1;9)$, $D(1;2;6)$.

Побудуємо схематичний рисунок піраміди $ABCD$, не прив'язуючи до системи координат $0xyz$.



1. Записати вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ в системі орт і знайти модулі (довжини) цих векторів.

Розв'язання

Довільний вектор $\vec{a}$ можна записати в системі орт $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ за наступною формулою:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}, \qquad (1),$$

де a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі $0x$, $0y$, $0z$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори, які співнапрямлені з осями $0x$, $0y$, $0z$.

Якщо задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ та $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то проекції вектора $\vec{a} = \overline{M_1M_2}$ на координатні осі знаходяться за формулами:

$$a_x = x_2 - x_1; \qquad a_y = y_2 - y_1; \qquad a_z = z_2 - z_1. \qquad (2)$$

Тоді:

$$\overline{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1\right)\cdot \bar{i} + \left(y_2 - y_1\right)\cdot \bar{j} + \left(z_2 - z_1\right)\cdot \bar{k} \qquad (3)$$

Підставляючи в (3) координати точок A та B, одержимо вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \left(2 - 6\right)\cdot \bar{i} + \left(-2 - 6\right)\cdot \bar{j} + \left(3 - 5\right)\cdot \bar{k} = -4\cdot \bar{i} - 8\cdot \bar{j} - 2\cdot \bar{k}\,.$$

Аналогічно, підставляючи в (3) координати точок A та C, знаходимо вектор $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = \left(12 - 6\right)\cdot \bar{i} + \left(1 - 6\right)\cdot \bar{j} + \left(9 - 5\right)\cdot \bar{k} = 6\cdot \bar{i} - 5\cdot \bar{j} + 4\cdot \bar{k}\,.$$

Підставляючи в (3) координати точок A та D, знаходимо вектор $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \left(1 - 6\right)\cdot \bar{i} + \left(2 - 6\right)\cdot \bar{j} + \left(6 - 5\right)\cdot \bar{k} = -5\cdot \bar{i} - 4\cdot \bar{j} + 1\cdot \bar{k}\,.$$

Якщо вектор $\vec{a}$ задано в системі орт (1), то його можна записати в координатній формі наступним чином:

$$\bar{a} = \left\{\ a_x ; a_y ; a_z\ \right\}.$$

Отже, знайдені вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ мають такі координати:

$$\overline{AB} = \left\{-4;-8;-2\right\};\quad \overline{AC} = \left\{6;-5;4\right\};\quad \overline{AD} = \left\{-5;-4;1\right\}.$$

Якщо вектор $\vec{a}$ задано формулою (1), або (4), то його модуль (довжина) обчислюється за формулою:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (5)$$

Застосовуючи формулу (5), обчислюємо модулі знайдених векторів $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 64 + 4} = \sqrt{84} \approx 9{,}17;$$

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 25 + 16} = \sqrt{77} \approx 8{,}77;$$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 14 + 1} = \sqrt{42} \approx 6{,}48.$$

Відповідь: в системі орт вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ будуть записані наступним чином:

$\overline{AB} = -4 \cdot \overline{i} - 8 \cdot \overline{j} - 2 \cdot \overline{k}$;

$\overline{AC} = 6 \cdot \overline{i} - 5 \cdot \overline{j} + 4 \cdot \overline{k}$;

$\overline{AD} = -5 \cdot \overline{i} - 4 \cdot \overline{j} + 1 \cdot \overline{k}$.

Довжини цих векторів наближено дорівнюють:

$\left|\overline{AB}\right| \approx 9{,}2$ лін. од.; $\left|\overline{AC}\right| \approx 8{,}8$ лін. од.; $\left|\overline{AD}\right| \approx 6{,}5$ лін. од.

2. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків.

Розв'язання

Оскільки скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними, тобто:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos\,\beta\,,$$

то косинус кута β між двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів:

$$cos\,\beta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}.$$

Якщо координати векторів-співмножників відомі $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\bar{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то їх скалярний добуток можна знайти за наступною формулою:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \qquad (7)$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ за формулою (7):

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-4) \cdot 6 + (-8) \cdot (-5) + (-2) \cdot 4 = -24 + 40 - 8 = 8\,.$$

Модулі цих векторів уже знайдені:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{84}, \qquad |\overline{AC}| = \sqrt{77}.$$

Отже, за формулою (6) дістанемо:

$$cos\,\beta = cos\,A = \frac{8}{\sqrt{84} \cdot \sqrt{77}} = \frac{8}{\sqrt{6468}} \approx \frac{8}{80{,}42388} \approx 0{,}0995.$$

Оскільки $cos\,A \approx 0{,}0995,$ то $A \approx 84^0 17',$ або $A \approx 1{,}4711$ радіана.

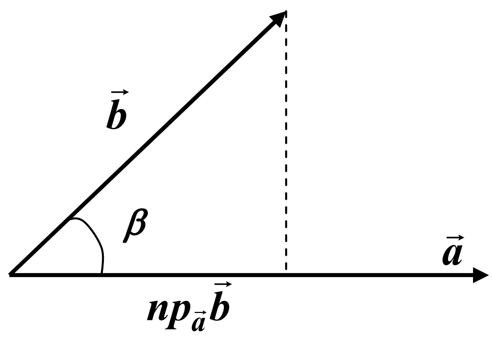
<u>Відповідь:</u> кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків становить ***1,47*** радіана.

3. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.

<u>Розв'язання</u>

Проекція вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{a}$ знаходиться за формулою:

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \cos\beta .$$



Враховуючи формулу (6) для знаходження $\cos\beta$, дістанемо:

$$np_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}, \text{ звідки } \quad np_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} \qquad (8)$$

Отже, проекція вектора $\overline{AD}$ на $\overline{AB}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на модуль вектора $\overline{AB}$:

$$np_{\overline{AB}}\overline{AD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|} = \frac{(-4)\cdot(-5)+(-8)\cdot(-4)+(-2)\cdot 1}{\sqrt{84}} =$$

$$= \frac{20+32-2}{\sqrt{84}} \approx \frac{40}{9{,}165} \approx 4{,}36.$$

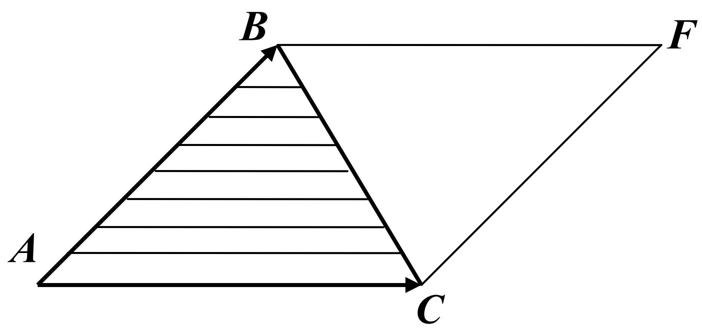
<u>Відповідь:</u> проекція вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ наближено дорівнює ***4,4*** *лінійних одиниць*.

4. Знайти площу грані ABC.

<u>Розв'язання</u>

Площа грані ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$ через вектор $\overline{AM}$:

$$\overline{AM} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$



Тоді, виходячи з геометричного змісту модуля векторного добутку двох векторів, величина модуля вектора $\overline{AM}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, а площа грані ABC буде дорівнювати половині модуля вектора $\overline{AM}$:

$$S_{ABFC} = \left|\overline{AM}\right|, \qquad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AM}\right|.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$:

$$\overline{AM}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & -8 & -2\\ 6 & -5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-8 & -2\\ -5 & 4\end{vmatrix}+\bar{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 6 & 4\end{vmatrix}+$$

$$+\bar{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -8\\ 6 & -5\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot(-32-10)-\bar{j}\cdot(-16+12)+$$

$$+\bar{k}\cdot(20+48)=-42\cdot\bar{i}+4\cdot\bar{j}+68\cdot\bar{k}.$$

Таким чином $\overline{AM}=\{-42;4;68\}$, а його модуль дорівнює:

$$\left|\overline{AM}\right|=\sqrt{(-42)^2+4^2+68^2}=\sqrt{1764+16+4624}=\sqrt{6404}=80{,}02.$$

Отже, $S_{ABFC}\approx 80{,}02$ кв.од., звідки:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{6404}\approx\frac{1}{2}\cdot 80{,}02\approx 40{,}01 \text{ кв.од.}$$

<u>Відповідь:</u> площа грані ***ABC*** наближено дорівнює ***40*** *квадратних одиниць*.

5. Знайти об’єм піраміди ***ABCD***.

<u>Розв’язання</u>

Об’єм паралелепіпеда, побудованого на трьох некомпланарних векторах чисельно дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку:

$$V=\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|,$$

а об’єм піраміди дорівнює шостій частині від об’єму паралелепіпеда:

$$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB} \times \overline{AC}\right) \cdot \overline{AD}\right|.$$

Обчислимо мішаний добуток $(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}$:

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -8 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ \times(-4) \quad \times 2 \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} -14 & -16 & 0 \\ 26 & 11 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = A_{33} =$$

$$= (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = \begin{vmatrix} -14 & -16 & 0 \\ 26 & 11 & 0 \\ -5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -14 & -16 \\ 26 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= (-14) \cdot 11 - (-16) \cdot 26 = -154 + 416 = 262.$$

Отже, об'єм паралелепіпеда дорівнює $V_{пар.} = 262$ *куб.од.*, а об'єм піраміди $ABCD$:

$$V_{пір.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot V_{пар.} = \frac{1}{6} \cdot 262 \approx 43{,}67 \text{ (куб. од.)}$$

<u>**Відповідь:**</u> об'єм піраміди ***ABCD*** наближено дорівнює ***43,7*** *кубічних одиниць.*

Задача 4. В задачах **4.1-4.31** задані координати точок ***A***, ***B*** та ***C***.

Необхідно:

1) записати канонічне рівняння прямої ***AB***;

2) записати рівняння площини ***Q***, яка проходить через точку ***C*** перпендикулярно до прямої ***AB***, та знайти точку ***M*** перетину цієї площини з прямою ***AB***;

3) записати рівняння прямої, яка проходить через точку ***B*** паралельно до площини ***Q***, як лінію перетину двох площин;

4) знайти координати точки ***N***, яка є симетричною для точки ***C*** відносно прямої ***AB***;

5) знайти відстань від точки ***C*** до прямої ***AB***.

Вихідні умови задачі 4

№ задачі	Координати точок		
4.1	$A(5+\beta;1+\beta;7+\beta)$	$B(9;3+\beta;3)$	$C(6+\beta;\beta;3+\beta)$
4.2	$A(1+\beta;4+\beta;5+\beta)$	$B(5;6+\beta;1)$	$C(2+\beta;3+\beta;1+\beta)$
4.3	$A(4+\beta;-1-\beta;9+\beta)$	$B(8;1+\beta;5)$	$C(5+\beta;-2-\beta;5+\beta)$
4.4	$A(2+\beta;\beta;8+\beta)$	$B(6;2+\beta;4)$	$C(3+\beta;-1-\beta;4+\beta)$
4.5	$A(-2-\beta;2+\beta;3+\beta)$	$B(2;4+\beta;-1)$	$C(-1-\beta;1+\beta;-1-\beta)$
4.6	$A(-1-\beta;4+\beta;2+\beta)$	$B(3;6+\beta;-2)$	$C(\beta;3+\beta;-2-\beta)$
4.7	$A(-2-\beta;2+\beta;10+\beta)$	$B(2;4+\beta;6)$	$C(1-1\beta;1+\beta;6+\beta)$
4.8	$A(3+\beta;6+\beta;2+\beta)$	$B(7;8+\beta;-2)$	$C(4+\beta;5+\beta;-2-\beta)$
4.9	$A(6+\beta;-2-\beta;11+\beta)$	$B(10;\beta;7)$	$C(7+\beta;-3-\beta;7+\beta)$
4.10	$A(3+\beta;3+\beta;2+\beta)$	$B(7;5+\beta;-2)$	$C(4+\beta;2+\beta;-2-\beta)$
4.11	$A(3+\beta;-1-\beta;5+\beta)$	$B(7;1+\beta;1)$	$C(4+\beta;-2-\beta;1+\beta)$
4.12	$A(-1-\beta;2+\beta;3+\beta)$	$B(3;4+\beta;-1)$	$C(\beta;1+\beta;-1-\beta)$
4.13	$A(2+\beta;-3-\beta;7+\beta)$	$B(6;-1-\beta;3)$	$C(3+\beta;-4-\beta;3+\beta)$
4.14	$A(\beta;-2-\beta;6+\beta)$	$B(4;\beta;2)$	$C(1+\beta;-3-\beta;2+\beta)$
4.15	$A(-3-\beta;1+\beta;2+\beta)$	$B(1;3+\beta;-2)$	$C(-2-\beta;\beta;-2-\beta)$

4.16	***A(-2-β;3+β;1+β)***	***B(2;5+β;-3)***	***C(-1-β;2+β;-3-β)***
4.17	***A(-4-β;β;8+β)***	***B(0;2+β;4)***	***C(-3-β;-1-β;4+β)***
4.18	***A(1+β;4+β;β)***	***B(5;6+β;-4)***	***C(2+β;3+β;-4-β)***
4.19	***A(4+β;-4-β;9+β)***	***B(8;-2-β;5)***	***C(5+β;-5-β;5+β)***
4.20	***A(5+β;5+β;4+β)***	***B(9;7+β;0)***	***C(6+β;4+β;β)***
4.21	***A(1+β;-1-β;3+β)***	***B(5;-1-β;-1)***	***C(2+β;-4-β;-1-β)***
4.22	***A(-3-β;β;1+β)***	***B(1;2+β;-3)***	***C(-2-β;-1-β;-3-β)***
4.23	***A(1+β;-2-β;6+β)***	***B(5;-2-β;2)***	***C(2+β;-5-β;2+β)***
4.24	***A(1+β;-1-β;7+β)***	***B(5;1+β;3)***	***C(2+β;-2-β;3+β)***
4.25	***A(-5-β;-1-β;β)***	***B(-1;1+β;-4)***	***C(-4-β;-2-β;-4-β)***
4.26	***A(-3-β;2+β;β)***	***B(1;4+β;-4)***	***C(-2-β;1+β;-4-β)***
4.27	***A(-3-β;1+β;9+β)***	***B(1;3+β;5)***	***C(-2-β;β;5+β)***
4.28	***A(-1-β;2+β;-2-β)***	***B(3;4+β;-6)***	***C(β;1+β;-6-β)***
4.29	***A(2+β;-6-β;7+β)***	***B(5;-4-β;3)***	***C(3+β;-7-β;7+β)***
4.30	***A(3+β;3+β;2+β)***	***B(7;5+β;-2)***	***C(4+β;2+β;-2-β)***
4.31	***A(4+β;4+β;3+β)***	***B(10;2+β;0)***	***C(7+β;4+β;2+β)***

Методичні рекомендації

Розв'язання задачі 4.31. Візьмемо $\beta = 5$, тоді координати точок ***A***, ***B*** і ***C*** будуть такі:

$$A(9;9;8), \quad B(10;7;0), \quad C(12;9;7).$$

1. Записати канонічне рівняння прямої ***AB***.

Розв'язання

Канонічне рівняння прямої в просторі, яка проходить через точки $A(x_1;y_1;z_1)$ та $B(x_2;y_2;z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (1)$$

Підставляючи в (1) координати точок ***A*** та ***B***, дістанемо:

$$\frac{x-9}{10-9}=\frac{y-9}{7-9}=\frac{z-8}{0-8}; \qquad \frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8} \qquad (AB)$$

Тут $\overline{a_1}=(1;-2;-8)$ – спрямовуючий вектор прямої AB.

Відповідь: канонічне рівняння прямої AB має вигляд:

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8}.$$

2. Записати рівняння площини Q, яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB, та знайти точку M перетину цієї площини з прямою AB.

Розв'язання

Запишемо рівняння площини Q в загальному вигляді:

$$A_x+B_y+C_z+D=0.$$

Якщо площина проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, то її рівняння можна записати наступним чином:

$$A(x-x_0)+D(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (2)$$

де $\overline{n}=(A;B;C)$ – нормальний вектор площини, який перпендикулярний до площини.

Так як відшукувана площина Q перпендикулярна до прямої AB, то нормальний вектор $\overline{n}$ такої площини буде колінеарним спрямовуючому вектору $\overline{a_1}$ прямої AB, а тому можна взяти взагалі $\overline{n}=\overline{a}=(1;-2;-8)$.

Замінимо коефіцієнти A, B, C в рівнянні (2) числами 1, -2 та -8 і підставимо замість $x_0; y_0; z_0$ координати точки $\tilde{N}(12;9;7)$:

$$1\cdot(x-12)+(-2)\cdot(y-9)+(-8)\cdot(z-7)=0$$

$$x-12-2y+18-8z+56=0$$

$$(Q) \qquad x-2y-8z+62=0. \qquad (3)$$

Перевірка:

т. C: $12-2\cdot 9-8\cdot 7+62=0$; $\quad 12-18-56+62=0$;

$12-18+6=0$; $\quad 0=0$.

Отже точка $C\in Q$.

Визначимо координати точки M перетину площини Q з прямою AB. Для цього спочатку запишемо параметричне рівняння прямої AB. Нехай

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8}=t, \quad \text{або} \quad \frac{x-9}{1}=t; \quad \frac{y-9}{-2}=t; \quad \frac{z-8}{-8}=t,$$

де t – деякий параметр, тобто:

$$x=t+9; \qquad y=-2t+9; \qquad z=-8t+8 \qquad (4)$$

Підставляючи (4) в (3) знаходимо значення t, при якому точка прямої AB буде належати і площині Q:

$$t+9+4t-18+64t-64+62=0;$$

$$69t-11=0; 69t=11; t=\frac{11}{69}.$$

Підставляючи в (4) $t=\frac{11}{69}$, знаходимо координати точки M перетину прямої AB з площиною Q:

$$x_M = \frac{11}{69} + 9 = \frac{11 + 621}{69} = \frac{632}{69} = 9{,}16;$$

$$y_M = -\frac{22}{69} + 9 = \frac{-22 + 621}{69} = \frac{599}{69} = 8{,}68;$$

$$z_M = -\frac{88}{69} + 8 = \frac{-88 + 552}{69} = \frac{464}{69} = 6{,}72.$$

Виконаємо перевірку, підставивши значення $\frac{632}{69}$, $\frac{599}{69}$, $\frac{464}{69}$ замість x, y, z в канонічне рівняння прямої AB та в рівняння (3) площини Q і отримаємо відповідні рівності (тотожності).

<u>Відповідь</u>: рівняння площини Q, яка проходить через точку C перпендикулярно до прямої AB: $x - 2y - 8z + 62 = 0$; координати точки M перетину цієї площини з прямою AB: $M\left(\frac{632}{69}; \frac{599}{69}; \frac{464}{69}\right)$, або $M\,(9{,}16; 8{,}68; 6{,}72)$.

3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку B паралельно до площини Q, як лінію перетину двох площин.

<u>Розв'язання</u>

Канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{p}, \tag{5}$$

де $x_0; y_0; z_0$ – координати точки, через яку проходить пряма (5); m, l, p – координати спрямовуючого вектора $\bar{a}$ цієї прямої: $\bar{a} = (m; l; p)$. За умовою пряма проходить через точку $B\,(10;7;0)$

паралельно до площини $\boldsymbol{Q}$ (3) з нормальним вектором $\overline{n} = (1;-2;-8)$.

Оскільки нормальний вектор площини $\overline{n}$ і спрямовуючий вектор $\overline{a_2}$ прямої, паралельної до цієї площини, взаємно перпендикулярні (рис. 2), то їх скалярний добуток дорівнює нулю: $\overline{n} \cdot \overline{a_2} = 0$, де $a_2 = (m_2; l_2; p_2)$, звідки

$$1 \cdot m_2 + (-2) \cdot l_2 + (-8) \cdot p_2 = 0; \qquad m_2 - 2l_2 - 8p_2 = 0,$$
$$m_2 = 2l_2 + 8p_2.$$

Візьмемо наприклад, $l_2 = -2$ та $p_2 = 1$, тоді $m_2 = 2 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 = 4$.

Отже, маємо: $\overline{a_2} = (4;-2;1)$.

Підставляючи в (5) замість $\tilde{o}_0; \acute{o}_0; z_0$ координати точки $\boldsymbol{B}$: $x_B = 10;\ y_B = 7;\ z_B = 0$ та замість $m,\ l,\ p$ числа 4; -2; 1 дістанемо канонічне рівняння шуканої прямої $\boldsymbol{BD}$, паралельної до площини $\boldsymbol{Q}$:

$$\frac{x-10}{4} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-0}{1}; \qquad (BD) \qquad \frac{x-10}{4} = \frac{y-7}{-2} = z. \quad (6)$$

Прирівнюючи попарно вирази в рівняннях (6), запишемо рівняння прямої $\boldsymbol{BD}$ як лінію перетину двох площин π_1 та π_2:

$$\begin{cases} \dfrac{x-10}{4} = \dfrac{z}{1} \\ \dfrac{y-7}{-2} = \dfrac{z}{1} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 \cdot (x-10) = 4z \\ 1 \cdot (y-7) = -2z, \end{cases}$$

$$(BD) \quad \begin{cases} x - 4z - 10 = 0 & (\pi_1) \\ y + 2z - 7 = 0 & (\pi_2). \end{cases}$$

Відповідь: рівняння прямої, яка проходить через точку B паралельно до площини Q, як лінію перетину двох площин, має вигляд: $\begin{cases} x - 4z - 10 = 0 & (\pi_1) \\ y + 2z - 7 = 0 & (\pi_2). \end{cases}$

4. Знайти координати точки N, яка є симетричною для точки C відносно прямої AB.

Розв'язання

Оскільки пряма AB перпендикулярна до площини Q, то будь-яка пряма, яка розташована в цій площині, буде перпендикулярна до прямої AB. Отже пряма CM перпендикулярна до прямої AB (рис.2), а тому шукана точка N, яка розташована симетрично до точки C, відносно прямої AB, находиться на прямій CM. Пряма CM (або CN) розташована в площині Q, крім того, точка M є серединою відрізка CN. Застосовуючи формули для знаходження координат точки, яка ділить відрізок на дві рівні частини (в просторі):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \tag{7}$$

знаходимо координати шуканої точки N:

$$x_M = \frac{x_C + x_N}{2}; \qquad x_N = 2x_M - x_C = 2 \cdot \frac{632}{69} - 12;$$

$$x_N = \frac{1264 - 828}{69}; \qquad x_N = \frac{436}{69} \approx 6{,}32;$$

$$y_M = \frac{y_C + y_N}{2}; \qquad y_N = 2y_M - y_C = 2 \cdot \frac{599}{6} - 9;$$

$$y_N = \frac{1198 - 621}{69}; \qquad y_N = \frac{577}{69} \approx 8{,}26;$$

$$z_M = \frac{z_C + z_N}{2}; \qquad z_N = 2z_M - z_C = 2 \cdot \frac{464}{69} - 7;$$

$$z_N = \frac{928 - 483}{69}; \qquad z_N = \frac{445}{69} \approx 6{,}44.$$

Підставляючи знайдені координати x_N, y_N, z_N замість x, y, z в рівняння площини (3) зробимо перевірку, чи належить точка N площині Q:

$$\frac{436}{69} - 2 \cdot \frac{577}{69} = 8 \cdot \frac{445}{69} + 62 = 0;$$

$$\frac{436 - 1154 - 3560}{69} + 62 = 0; \qquad \frac{-4278}{69} + 62 = 0;$$

$$-62 + 62 = 0; \qquad 0 = 0.$$

<u>Відповідь</u>: точка N, яка є симетричною для точки C відносно прямої AB, має наступні координати:

$N\left(\frac{436}{69}; \frac{576}{69}; \frac{445}{69}\right)$, або $N\ (6{,}32; 8{,}32; 6{,}44)$.

5. Знайти відстань від точки ***C*** до прямої ***AB.***

Розв'язання

Для того, щоб знайти відстань від точки ***C*** до прямої ***AB***, достатньо обчислити відстань від точки ***C(12,9,7)*** до точки перетину $M\left(\frac{632}{69};\frac{599}{69};\frac{464}{69}\right)$. Дійсно, оскільки пряма ***AB*** перпендикулярна до площини ***Q***, то відшукувана відстань дорівнює довжині перпендикуляра ***CM*** $(CM \perp AB)$.

Остаточно отримаємо:

$$|CM| = \sqrt{\left(\frac{632}{69} - 12\right)^2 + \left(\frac{599}{69} - 9\right)^2 + \left(\frac{464}{69} - 7\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(-196)^2}{69^2} + \frac{(-22)^2}{69^2} + \frac{(-19)^2}{69^2}} = \sqrt{\frac{38416 + 484 + 361}{69^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{39261}}{69} \approx \frac{198{,}1439}{69} \approx 2{,}87 .$$

<u>Відповідь</u>: відстань від точки ***C*** до прямої ***AB*** наближено дорівнює ***2,9***.

Пряма ***AB***, площина ***Q***, точки ***M*** та ***N***, пряма ***BD***, площини π_1 та π_2, які її визначають, побудовані на рис.2.

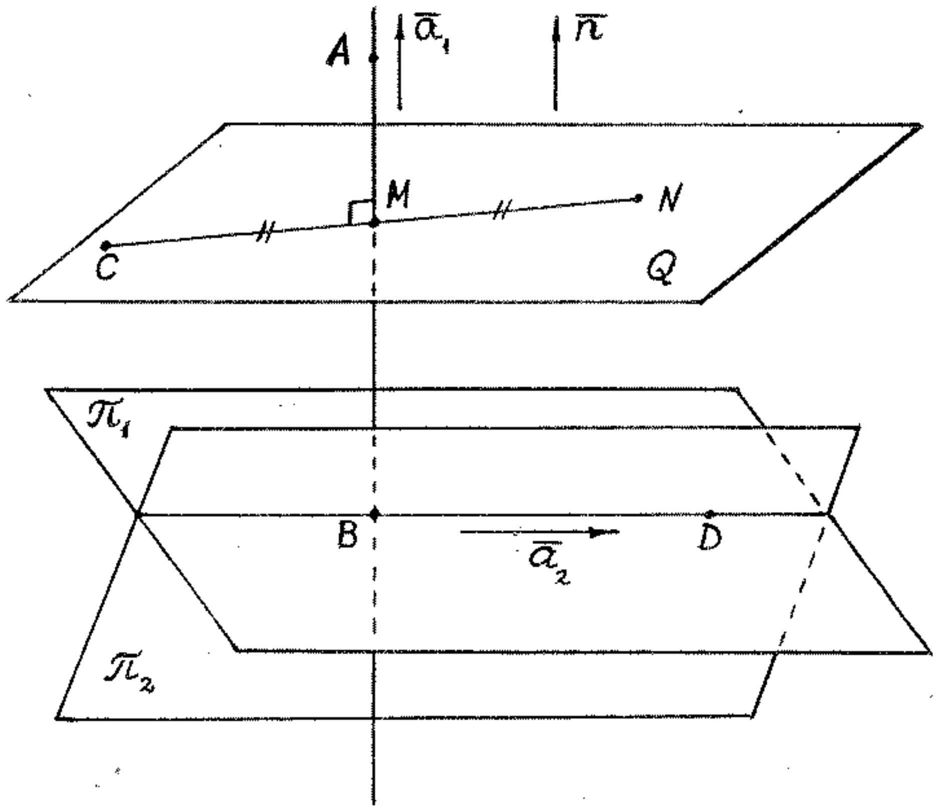


Рис.2

<u>Задача 5.</u> В задачах **5.1-5.31** задані координати точок ***A, B, C, D*** та ***M***.

<u>Знайти:</u>

1) рівняння площини ***Q***, яка проходить через три точки ***A, B*** та ***C;***

2) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку ***M***, перпендикулярно до площини ***Q;***

3) точки ***N***, N_1, N_2, N_3 перетину здобутої прямої з площиною ***Q*** та з координатними площинами ***x0y, x0z, y0z***;

4) відстані від точок ***M*** та ***D*** до площини ***Q***;

5) координати точки ***P***, яка симетрична до точки ***M*** відносно площини ***Q***.

<u>Вихідні умови задачі 5</u>

№	Координати точок		
5.1	$A(\beta;-2+\beta;-1+\beta)$; $D(14+\beta;-10+\beta;-13+\beta)$	$B(2+\beta;4+\beta;-2+\beta)$; $M(-11+\beta;8+\beta;10+\beta)$	$C(3+\beta;2+\beta;\beta)$;
5.2	$A(-1+\beta;\beta;-2+\beta)$; $D(17+\beta;-7+\beta;-10+\beta;)$	$B(-2+\beta;4+\beta;-5+\beta)$; $M(-6+\beta;7+\beta;8+\beta)$;	$C(7+\beta;2+\beta;5+\beta)$;
5.3	$A(4+\beta;\beta;3+\beta)$; $D(15+\beta;-11+\beta;-10+\beta)$	$B(-1+\beta;2+\beta;-3+\beta)$; $M(-12+\beta;1+\beta;2+\beta)$	$C(2+\beta;\beta;1+\beta)$;
5.4	$A(8+\beta;7+\beta;4+\beta)$; $D(16+\beta;-10+\beta;-11+\beta)$	$B(2+\beta;1+\beta;1+\beta;)$ $M(-10+\beta;8+\beta;8+\beta)$;	$C(6+\beta;1+\beta;5+\beta)$;
5.5	$A(5+\beta;8+\beta;\beta)$; $D(12+\beta;-14+\beta;-13+\beta)$	$B(2+\beta;4+\beta;-1+\beta)$; $M(-7+\beta;11+\beta;11+\beta)$	$C(3+\beta;\beta;2+\beta)$;
5.6	$A(3+\beta;-2+\beta;3+\beta)$; $D(9+\beta;-12+\beta;-14+\beta)$;	$B(6+\beta;6+\beta;2+\beta)$; $M(-12+\beta;4+\beta;5+\beta)$;	$C(1+\beta;4+\beta;-2+\beta)$;

5.7	$A(6+\beta;8+\beta;1+\beta)$; $D(13+\beta;-8+\beta;-15+\beta)$;	$B(9+\beta;4+\beta;6+\beta)$; $M(-4+\beta;14+\beta;14+\beta)$	$C(\beta;2+\beta;-2+\beta)$;
5.8	$A(2+\beta;8+\beta;-3+\beta)$; $D(11+\beta;-10+\beta;-16+\beta)$	$B(10+\beta;4+\beta;7+\beta)$; $M(-8+\beta;11+\beta;13+\beta)$	$C(4+\beta;8+\beta;-1+\beta)$;
5.9	$A(\beta;6+\beta;-4+\beta)$; $D(10+\beta;-8+\beta;-18+\beta)$;	$B(2+\beta;-4+\beta;3+\beta)$; $M(-9+\beta;4+\beta;5+\beta)$;	$C(6+\beta;4+\beta;3+\beta)$;
5.10	$A(-2+\beta;\beta;-3+\beta)$ $D(11+\beta;-10+\beta;-19+\beta)$	$B(3+\beta;10+\beta;-3+\beta)$; $M(-5+\beta;14+\beta;16+\beta)$	$C(2+\beta;6+\beta;-2+\beta)$
5.11	$A(5+\beta;6+\beta;1+\beta)$; $D(12+\beta;-16+\beta;-12+\beta)$	$B(4+\beta;-2+\beta;4+\beta)$; $M(-6+\beta;10+\beta;11+\beta)$	$C(7+\beta;8+\beta;2+\beta)$;
5.12	$A(-3+\beta;-2+\beta;4+\beta)$; $D(13+\beta;-10+\beta;-14+\beta)$	$B(-4+\beta;2+\beta;-7+\beta)$; $M(-9+\beta;7+\beta;8+\beta)$;	$C(5+\beta;\beta;3+\beta)$;
5.13	$A(2+\beta;-2+\beta;1+\beta)$; $D(14+\beta;-12+\beta;-12+\beta)$	$B(-3+\beta;\beta;-5+\beta)$; $M(-12+\beta;7+\beta;8+\beta)$	$C(\beta;-2+\beta;-1+\beta)$;
5.14	$A(5+\beta;4+\beta;1+\beta)$; $D(15+\beta;-12+\beta;-11+\beta)$	$B(-1+\beta;-2+\beta;-2+\beta)$; $M(-9+\beta;8+\beta;9+\beta)$;	$C(3+\beta;-2+\beta;2+\beta)$;
5.15	$A(3+\beta;6+\beta;-2+\beta)$; $D(16+\beta;-12+\beta;-10+\beta)$	$B(\beta;2+\beta;-3+\beta)$; $M(-12+\beta;13+\beta;14+\beta)$;	$C(1+\beta;-2+\beta;\beta)$;
5.16	$A(1+\beta;-4+\beta;1+\beta)$; $D(17+\beta;-8+\beta;-11+\beta)$;	$B(4+\beta;4+\beta;\beta)$; $M(-3+\beta;13+\beta;14+\beta)$	$C(-1+\beta;2+\beta;-4+\beta;)$
5.17	$A(4+\beta;6+\beta;-1+\beta)$; $D(10+\beta;-14+\beta;-15+\beta)$	$B(7+\beta;2+\beta;4+\beta)$; $M(-5+\beta;10+\beta;12+\beta)$	$C(-2+\beta;\beta;4+\beta)$;
5.18	$A(\beta;6+\beta;-5+\beta)$; $D(11+\beta;-14+\beta;-14+\beta)$	$B(8+\beta;2+\beta;5+\beta)$; $M(-8+\beta;7+\beta;12+\beta)$	$C(2+\beta;6+\beta;-3+\beta)$;
5.19	$A(-2+\beta;4+\beta;-6+\beta)$; $D(12+\beta;-10+\beta;-15+\beta)$	$B(\beta;-6+\beta;1+\beta)$; $M(-2+\beta;13+\beta;12+\beta)$	$C(4+\beta;2+\beta;1+\beta)$;
5.20	$A(-4+\beta;-2+\beta;-5+\beta)$; $D(9+\beta;-12+\beta;-17+\beta)$	$B(1+\beta;8+\beta;-5+\beta)$; $M(-8+\beta;12+\beta;11+\beta)$	$C(\beta;4+\beta;-4+\beta)$;
5.21	$A(3+\beta;4+\beta;-1+\beta)$; $D(8+\beta;-12+\beta;-18+\beta)$;	$B(2+\beta;-4+\beta;2+\beta)$; $M(-5+\beta;15+\beta;14+\beta)$	$C(5+\beta;6+\beta;\beta)$;
5.22	$A(\beta;1+\beta;-1+\beta)$; $D(13+\beta;-14+\beta;-12+\beta)$	$B(-1+\beta;5+\beta;-4+\beta)$; $M(-2+\beta;13+\beta;18+\beta)$	$C(8+\beta;3+\beta;6+\beta)$;

5.23	$A(5+\beta;1+\beta;4+\beta)$; $D(14+\beta;-10+\beta;-13+\beta)$	$B(\beta;3+\beta;-2+\beta)$; $M(-7+\beta;9+\beta;15+\beta)$	$C(3+\beta;1+\beta;2+\beta)$;
5.24	$A(6+\beta;9+\beta;1+\beta)$; $D(15+\beta;-6+\beta;-14+\beta)$	$B(3+\beta;5+\beta;\beta;)$ $M(-4+\beta;12+\beta;15+\beta)$	$C(4+\beta;1+\beta;3+\beta)$;
5.25	$A(4+\beta;-1+\beta;4+\beta)$; $D(16+\beta;-8+\beta;-12+\beta)$;	$B(7+\beta;7+\beta;3+\beta)$; $M(-9+\beta;16+\beta;14+\beta)$	$C(2+\beta;5+\beta;-1+\beta)$;
5.26	$A(7+\beta;9+\beta;2+\beta)$; $D(17+\beta;-10+\beta;-13+\beta)$	$B(10+\beta;5+\beta;7+\beta)$; $M(-10+\beta;9+\beta;12+\beta)$	$C(1+\beta;3+\beta;-1+\beta)$;
5.27	$A(3+\beta;9+\beta;-2+\beta)$; $D(18+\beta;-6+\beta;-11+\beta)$;	$B(11+\beta;5+\beta;8+\beta)$; $M(-7+\beta;12+\beta;12+\beta)$	$C(5+\beta;9+\beta;\beta)$;
5.28	$A(1+\beta;7+\beta;-3+\beta)$; $D(19+\beta;-6+\beta;-10+\beta)$	$B(3+\beta;-3+\beta;4+\beta)$; $M(-6+\beta;14+\beta;18+\beta)$	$C(7+\beta;5+\beta;4+\beta)$;
5.29	$A(-1+\beta;1+\beta;-2+\beta)$; $D(15+\beta;-16+\beta;-9+\beta)$	$B(4+\beta;11+\beta;-2+\beta)$; $M(-12+\beta;9+\beta;10+\beta)$	$C(3+\beta;7+\beta;-1+\beta)$;
5.30	$A(6+\beta;7+\beta;2+\beta)$; $D(17+\beta;-10+\beta;-10+\beta)$	$B(5+\beta;-1+\beta;5+\beta)$; $M(-11+\beta;11+\beta;19+\beta)$;	$C(8+\beta;9+\beta;3+\beta)$;
5.31	$A(-3+\beta;-6+\beta;-5+\beta)$; $D(6+\beta;-26+\beta;-16+\beta)$;	$B(-1+\beta;\beta;-6+\beta)$; $M(-15+\beta;4+\beta;6+\beta)$;	$C(-1+\beta;-2+\beta;-3+\beta)$

Методичні рекомендації

Розв'язання задачі 5.31. Візьмемо $\beta=4$, тоді координати точок ***A, B, C*** і ***D*** будуть такі:

$$A(1;-2;-1),\ B(3;4;-2),\ C(3;2;1),\ D(10;-22;-12),\ M(-11;8;10).$$

1. Записати рівняння площини ***Q***, яка проходить через три точки ***A, B*** та ***C***.

Розв'язання

Рівняння площини, яка проходить через три точки $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)$ та $C(x_3;y_3;z_3)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Підставивши в (1) координати точок ***A*, *B*** та ***C***, дістанемо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 3-1 & 4+2 & -2+1 \\ 3-1 & 2+2 & 1+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Враховуючи, що всі числа третього рядка кратні числу 2, то його можна винести за знак визначника. Розділивши (скоротивши) ліву та праву частини останнього рівняння на таке кратне число (на 2), отримаємо:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник, який запишемо зліва, по елементам першого рядка:

$$(x-1)\cdot A_{11} + (y+2)\cdot A_{12} + (z+1)\cdot A_{13} = 0;$$

$$(x-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (y+2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(z+1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)\cdot(6+2) - (y+2)\cdot(2+1) + (z+1)\cdot(4-6) = 0;$$

$$8\cdot(x-1) - 3\cdot(y+2) - 2\cdot(z+1) = 0;$$

$$8x - 8 - 3y - 6 - 2z - 2 = 0\,;$$

$$(Q) \quad 8x - 3y - 2z - 16 = 0\,, \qquad (2)$$

де $\overline{n} = \{8;-3;-2\}$ – нормальний вектор площини Q.

Перевірка:

<u>т.А:</u> $8 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) - 16 = 0; \qquad 8 + 6 + 2 - 16 = 0$

$16 - 16 = 0; \qquad 0 = 0;$

точка $A \in Q$;

<u>т.В:</u> $8 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) - 16 = 0; \qquad 24 - 12 + 4 - 16 = 0;$

$12 - 12 = 0; \qquad 0 = 0;$

точка $B \in Q$;

<u>т.С:</u> $8 \cdot 3 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 16 = 0; \qquad 24 - 6 - 2 - 12 = 0;$

$16 - 16 = 0; \qquad 0 = 0;$

точка $C \in Q$.

Отже, загальне рівняння (2) площини Q знайдено вірно.

<u>Відповідь</u>: рівняння площини Q, яка проходить через три точки A, B та C має вигляд:

$$8x - 3y - 2z - 16 = 0\,.$$

2. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку M, перпендикулярно до площини Q.

<u>Розв'язання</u>

Канонічне рівняння прямої в просторі має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (3)$$

де $x_0; y_0; z_0$ – координати точки, через яку проходить пряма (3); m, l, p – координати спрямовуючого вектора $\overline{a}$ цієї прямої: $\overline{a} = m, l, p$. За умовою пряма проходить через точку ***M (-11;8;10)*** та перпендикулярна до площини ***Q*** (рис. 3). Отже, підставляючи в (3) замість $x_0; y_0; z_0$ координати точки ***M*** та, взявши $(\overline{a} \downarrow\uparrow \overline{n})$, тобто замість m, l, p в (3) підставляємо числа ***8; - 3; - 2*** (коефіцієнти загального рівняння (2) площини ***Q***), отримаємо:

$$\frac{x+11}{8}=\frac{y-8}{-3}=\frac{z-10}{-2}. \qquad (4)$$

<u>Відповідь</u>: канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку ***M***, перпендикулярно до площини ***Q*** має вигляд:

$$\frac{x+11}{8}=\frac{y-8}{-3}=\frac{z-10}{-2}.$$

3. Знайти точки N, N_1, N_2, N_3 перетину здобутої прямої з площиною ***Q*** та з координатними площинами ***x0y, x0z, y0z.***

Розв'язання

Для того, щоб знайти точку перетину прямої (4) з площиною (2), запишемо спочатку параметричне рівняння цієї прямої (4). Нехай:

$$\frac{x+11}{8}=\frac{y-8}{-3}=\frac{z-10}{-2}=t,$$ де t – деякий параметр.

Тоді рівняння прямої можна записати наступним чином:

$$\frac{x+11}{8}=t; \qquad \frac{y-8}{-3}=t; \qquad \frac{z-10}{-2}=t,$$

$$x+11=8t; \qquad y-8=-3t; \qquad z-10=-2t,$$

або остаточно:

$$x=8t-11; \qquad y=-3t+8; \qquad z=-2t+10. \tag{5}$$

Підставляючи (5) в (2), знаходимо значення t, при якому точка прямої (5) буде належати і площині Q:

$$8(8t-11)-3(-3t+8)-2(-2t+10)-16=0;$$

$$64t-88+9t-24+4t-20-16=0;$$

$$77t-148=0; \qquad 77t=148; \qquad t=\frac{148}{77}.$$

Підставляючи в (5) значення $t=\frac{148}{77}$, знаходимо координати точки N перетину прямої (4) з площиною Q (2):

$$x_N = 8\cdot\frac{148}{77} - 11 = \frac{1184-847}{77} = \frac{337}{77} \approx 4{,}376;$$

$$y_N = -3\cdot\frac{148}{77} + 8 = \frac{-444+616}{77} = \frac{172}{77} \approx 2{,}234;$$

$$z_N = -2\cdot\frac{148}{77} + 10 = \frac{-296+770}{77} = \frac{474}{77} \approx 6{,}156.$$

Для перевірки необхідно підставити значення x_N, y_N, z_N замість x, y, z в рівняння (2) площини Q, та прямої (4):

Перевірка:

$$8\cdot\frac{337}{77} - 3\cdot\frac{172}{77} - 2\cdot\frac{474}{77} - 16 = 0;$$

$$\frac{2696-516-948}{77} - 16 = 0; \quad \frac{1232}{77} - 16 = 0;$$

$$16 - 16 = 0; \quad 0 = 0.$$

Отже, точка $N \in Q$.

$$\frac{\frac{337}{77}+11}{8} = \frac{\frac{172}{77}-8}{-3} = \frac{\frac{474}{77}-10}{-2};$$

$$\frac{337+884}{8\cdot 77} = \frac{172-616}{(-3)\cdot 77} = \frac{474-770}{(-2)\cdot 77};$$

$$\frac{1184}{8\cdot 77} = \frac{-444}{(-3)\cdot 77} = \frac{-296}{(-2)\cdot 77} = \frac{148}{77} = t;$$

$$\frac{148}{77} = \frac{148}{77} = \frac{148}{77} = t;$$

точка N належить також і прямій (4).

Координати точки $N\left(\frac{377}{77};\frac{172}{77};\frac{474}{77}\right)$, або $N\ (4{,}38;2{,}23;6{,}16)$.

Нехай N_1 – точка перетину прямої (4) з координатною площиною $x0y$; рівняння цієї площини $z=0$.

При $z=0$, враховуючи (5), дістанемо:

$$0=-2t+10;\quad 2t=10;\quad t_1=5;\quad x=8\cdot 5-11;$$

$$x=40-11=29;\quad y=-3\cdot 5+8;\quad y=-15+8=-7;\quad z=0.$$

Отже, $N_1(29;-7;0)$.

Нехай N_2 – точка перетину прямої (4) з координатною площиною $x0z$; рівняння цієї площини $y=0$.

При $y=0$, враховуючи (5), отримаємо:

$$0=-3t+8;\quad 3t=8;\quad t_2=\frac{8}{3};\quad x=8\cdot\frac{8}{3}-11;\quad x=\frac{31}{3}=10\frac{1}{3};$$

$$y=0;$$

$$z=-2\cdot\frac{8}{3}+10;\quad z=-\frac{16}{3}+10=-\frac{16+30}{3}=\frac{14}{3};\quad z=4\frac{2}{3}.$$

Отже, $N_2\left(10\frac{1}{3};0;4\frac{2}{3}\right)$

Нехай N_3 – точка перетину прямої (4) з координатною площиною $y0z$; рівняння цієї площини $x=0$.

При $x=0$, враховуючи (5), дістанемо:

$$0 = 8t - 11; \quad 8t = 11; \quad t_3 = \frac{11}{8}; \quad x = 0;$$

$$y = -3 \cdot \frac{11}{8} + 8; \quad y = -\frac{33}{8} + 8 = \frac{-33 + 64}{8} = \frac{31}{8}; \quad y = 3\frac{7}{8} = 3{,}875;$$

$$z = -2 \cdot \frac{11}{8} + 10; \quad z = -\frac{22}{8} + 10 = \frac{-22 + 80}{8} = \frac{58}{8}; \quad z = 7{,}25.$$

Отже, $N_3(0; 3{,}875; 7{,}25)$.

<u>Відповідь</u>: координати точок перетину здобутої прямої з площиною Q та з координатними площинами $x0y$, $x0z$, $y0z$:

$$N\,(4{,}38;2{,}23;6{,}16); \quad N_1(29;-7;0); \quad N_2\left(10\frac{1}{3};0;4\frac{2}{3}\right);$$

$$N_3(0; 3{,}875; 7{,}25).$$

4. Знайти відстані від точок M та D до площини Q.

<u>Розв’язання</u>

Відстань від точки до площини це є найкоротша відстань, тобто дорівнює довжині перпендикуляра, який проведено з цієї точки до площини.

Оскільки точка M розташована на прямій (4), яка перпендикулярна до площини Q, і перетинається з площиною Q в точці N, то для знаходження відстані від точки M до площини Q достатньо знайти відстань між двома точками M та N:

$$|MN| = \sqrt{\left(\frac{337}{77} + 11\right)^2 + \left(\frac{172}{77} - 8\right)^2 + \left(\frac{474}{77} - 10\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{(337 + 847)^2}{77^2} + \frac{(172 - 616)^2}{77^2} + \frac{(474 - 770)^2}{77^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(1184)^2}{77^2} + \frac{(-444)^2}{77^2} + \frac{(-296)^2}{77^2}} = \frac{\sqrt{1401856 + 197136 + 87616}}{77} =$$

$$= \frac{\sqrt{1686608}}{77} \approx \frac{1298{,}695}{77} \approx 16{,}866$$ (лін.одиниць).

Відстань d від точки $M^*(x^*; y^*; z^*)$ до площини, яка має загальне рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислимо за наступною формулою:

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6)$$

Підставляємо в формулу (6) замість $x^*; y^*; z^*$ – координати точки $D(10;-22;-12)$ та значення $A = 8,\ \ B = -3,\ \ C = -2,\ \ D = -16$.

Із загального рівняння (2) площини Q, знайдемо відшукувану відстань d від точки D до площини Q ($d = |DF|$):

$$d = \frac{|8 \cdot 10 - 3 \cdot (-22) - 2 \cdot (-12) - 16|}{\sqrt{8^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{|80 + 66 + 24 - 16|}{\sqrt{8^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{|80 + 66 + 24 - 16|}{\sqrt{64 + 9 + 4}} = \frac{154}{\sqrt{77}} = \frac{2 \cdot 77}{\sqrt{77}} = 2 \cdot \sqrt{77} \approx 17{,}5499$$ (лін.одиниць)

Відповідь: відстані від точки M до площини Q: $|MN| \approx 16{,}87$ лін. одиниць; відстані від точки D до площини Q: $|DF| \approx 17{,}55$ лін. одиниць.

5. Знайти координати точки ***P***, яка симетрична до точки ***M*** відносно площини ***Q*.**

Розв’язання

Оскільки пряма ***MN*** (4) перпендикулярна до площини ***Q***, то відшукувана точка ***P***, яка розташована симетрично до точки ***M*** відносно площини ***Q***, знаходиться на прямій ***MN*** (рис.3). Крім того, точка ***N*** є серединою відрізка ***MP***. Використовуючи формули для знаходження координат точки, яка ділить відрізок (в просторі) на дві рівні частини, знаходимо координати шуканої точки ***P***:

$$x_N = \frac{x_M + x_P}{2}; \qquad x_P = 2x_N - x_M;$$

$$x_P = 2\cdot\frac{337}{77} + 11 = \frac{674+847}{77} = \frac{1521}{77} \approx 19{,}753;$$

$$y_N = \frac{y_M + y_P}{2}; \qquad y_P = 2y_N - y_M;$$

$$y_P = 2\cdot\frac{172}{77} - 8 = \frac{344-616}{77} = \frac{272}{77} \approx -3{,}532;$$

$$z_N = \frac{z_M + z_P}{2}; \qquad z_P = 2z_N - z_M;$$

$$z_P = 2\cdot\frac{474}{77} - 10 = \frac{948-770}{77} = \frac{178}{77} \approx 2{,}312;$$

Перевірка:

а)

$$\frac{\frac{1521}{77}+11}{8} = \frac{-\frac{272}{77}-8}{-3} = \frac{\frac{178}{77}-10}{-2};$$

$$\frac{1521+847}{8\cdot 77} = \frac{-272-616}{(-3)\cdot 77} = \frac{178-770}{(-2)\cdot 77};$$

$$\frac{2368}{8\cdot 77}=\frac{-888}{(-3)\cdot 77}=\frac{-592}{(-2)\cdot 77}=\frac{296}{77}=t;$$

$$\frac{296}{77}=\frac{296}{77}=\frac{296}{77};$$

Точка $P \in MN$.

б)

$$x_N=\frac{-11+\frac{1521}{77}}{2}=\frac{-847+1521}{2\cdot 77}=\frac{674}{2\cdot 77}=\frac{337}{77};$$

$$y_N=\frac{8-\frac{272}{77}}{2}=\frac{616-272}{2\cdot 77}=\frac{344}{2\cdot 77}=\frac{172}{77};$$

$$z_N=\frac{10+\frac{178}{77}}{2}=\frac{770+178}{2\cdot 77}=\frac{948}{2\cdot 77}=\frac{474}{77}.$$

Відповідь: точка P, яка симетрична до точки M відносно площини Q має наступні координати: $P\left(\frac{1521}{77};\frac{-272}{77};\frac{178}{77}\right)$, або $P(19,75;-3,53;2,31)$.

Площина Q, пряма MN, точки N та P показані на схематичному рис. 3.

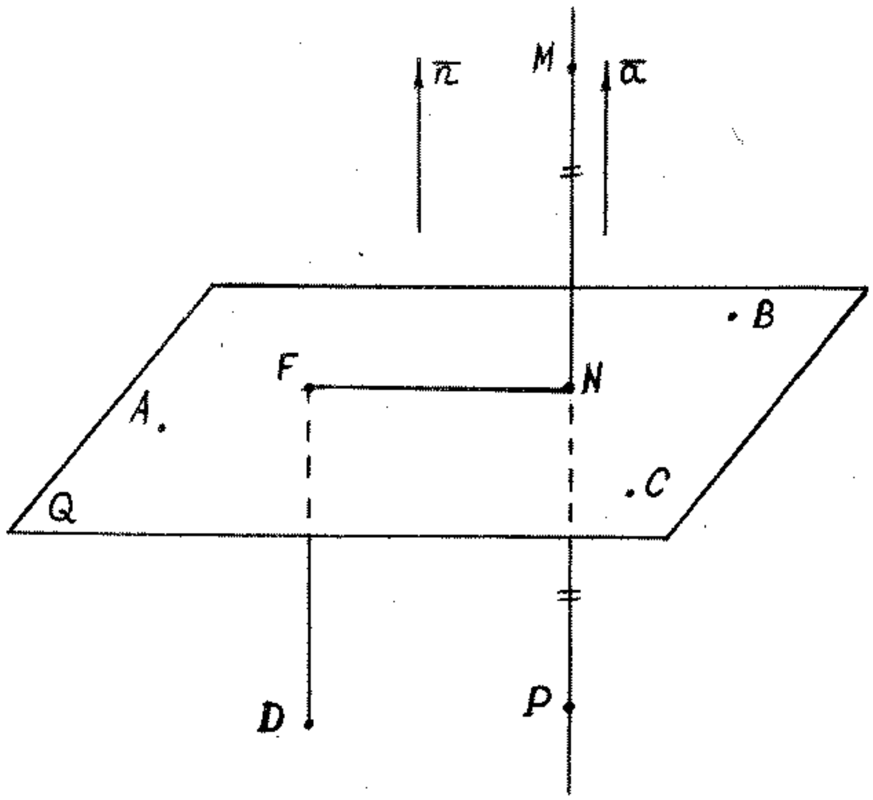


Рис. 3.

Задача 6. В задачах **6.1-6.31** задані рівняння двох площин

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \qquad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$$

та координати двох точок $M_1(A_1;B_1;C_1)$, $M_2(A_2;B_2;C_2)$.

Знайти:

1) канонічне та параметричне рівняння прямої, що задана, як лінія перетину двох площин π_1 та π_2;

2) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2;

3) величину гострого кута θ в радіанах з точністю до двох знаків, де θ – кут, який утворює пряма M_1M_2 з площиною π_1.

Вихідні умови задачі 6

№ задачі	Координати точок							
	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
6.1	$2+\beta$	$1+\beta$	$1+\beta$	$-2-\beta$	7	-1	-3	6
6.2	$3+\beta$	$-5-\beta$	$2+\beta$	$2+\beta$	2	3	1	14
6.3	$4+\beta$	$-2-\beta$	$1+\beta$	$-4-\beta$	2	2	-1	-8
6.4	$3+\beta$	$1+\beta$	$1+\beta$	$-2-\beta$	1	-1	-2	2
6.5	$2+\beta$	$3+\beta$	$1+\beta$	$6+\beta$	1	-3	-2	3
6.6	$3+\beta$	$1+\beta$	$-1-\beta$	$-6-\beta$	2	-1	2	5
6.7	$2+\beta$	$5+\beta$	$2+\beta$	$11+\beta$	1	-1	-2	3
6.8	$3+\beta$	$4+\beta$	$-2-\beta$	$1+\beta$	2	-4	3	4
6.9	$5+\beta$	$1+\beta$	$-3-\beta$	$4+\beta$	1	-1	2	2
6.10	$2+\beta$	$-1-\beta$	$-2-\beta$	$-3-\beta$	1	-2	1	4
6.11	$4+\beta$	$1+\beta$	$-3-\beta$	$2+\beta$	2	-1	1	-8
6.12	$3+\beta$	$3+\beta$	$-2-\beta$	$-1-\beta$	2	-3	1	6
6.13	$6+\beta$	$-7-\beta$	$-4-\beta$	$-2-\beta$	1	7	-2	-5
6.14	$8+\beta$	$-1-\beta$	$-3-\beta$	$-1-\beta$	1	3	-2	10

6.15	*6+β*	*-5-β*	*-4-β*	*8+β*	*4*	*5*	*3*	*4*
6.16	*4+β*	*5+β*	*-1-β*	*-5-β*	*2*	*-5*	*2*	*5*
6.17	*2+β*	*-3-β*	*-2-β*	*6+β*	*8*	*1*	*2*	*4*
6.18	*5+β*	*1+β*	*2+β*	*4+β*	*2*	*-2*	*-3*	*4*
6.19	*4+β*	*3+β*	*1+β*	*2+β*	*2*	*-1*	*-3*	*-8*
6.20	*3+β*	*1+β*	*-3-β*	*-2-β*	*2*	*-1*	*1*	*6*
6.21	*2+β*	*1+β*	*-2-β*	*-3-β*	*1*	*-2*	*3*	*2*
6.22	*2+β*	*5+β*	*-1-β*	*11+β*	*1*	*-2*	*3*	*-1*
6.23	*3+β*	*-1-β*	*2+β*	*-2-β*	*2*	*-2*	*-1*	*4*
6.24	*6+β*	*-7-β*	*-1-β*	*-2-β*	*1*	*7*	*-4*	*-5*
6.25	*4+β*	*5+β*	*2+β*	*-5-β*	*2*	*-5*	*-1*	*5*
6.26	*3+β*	*-3-β*	*-1-β*	*2+β*	*1*	*3*	*2*	*14*
6.27	*2+β*	*3+β*	*-2-β*	*6+β*	*1*	*-3*	*4*	*3*
6.28	*4+β*	*3+β*	*4+β*	*1+β*	*2*	*-4*	*-3*	*5*
6.29	*3+β*	*3+β*	*1+β*	*-1-β*	*2*	*-3*	*-2*	*6*
6.30	*6+β*	*-5-β*	*3+β*	*8+β*	*4*	*5*	*-4*	*4*
6.31	*2+β*	*-3-β*	*-2-β*	*6+β*	*1*	*-2*	*1*	*3*

Методичні рекомендації

Розв'язання задачі 6.31. Візьмемо $\beta = 5$, тоді значення коефіцієнтів будуть такі:

$$A_1 = 7;\; B_1 = -8;\; C_1 = -7;\; D_1 = 11;\; A_2 = 1;\; B_2 = -2;\; C_2 = 1;\; D_2 = 3.$$

Отже рівняння площин π_1 та π_2 мають наступний вигляд:

$$\pi_1 : 7x - 8y - 7z + 11 = 0; \qquad \pi_2 : x - 2y + z + 3 = 0;$$

а їх нормальні вектори $\bar{n}_1 = \{7;-8;-7\}$ та $\bar{n}_2 = \{1;-2;1\}$, $(\bar{n}_1 \perp \pi_1, \bar{n}_2 \perp \pi_2)$.

Коефіцієнти біля невідомих x, y, z в π_1 та π_2 не пропорційні:

$$\frac{7}{1} \neq \frac{-8}{-2} \neq \frac{-7}{1},$$

а тому вказані площини π_1 та π_2 перетинаються по прямій L, про яку говорять, що вона задана загальними рівняннями:

$$\begin{cases} 7x-8y-7z+11=0,(\pi_1) \\ 7x-2y+z+3=0,(\pi_2) \end{cases} \tag{1}$$

1. Знайти канонічне та параметричне рівняння прямої, що задана як лінія перетину двох площин π_1 та π_2.

Розв'язання

Для того, щоб записати канонічне рівняння прямої (1) у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{2}$$

необхідно знайти координати довільної точки $M(x_0;y_0;z_0)$, яка належить цій прямій (1), та координати спрямовуючого вектора $\overline{a} \| L: \overline{a}=\{m;l;p\}$. Якщо точка $M_0 \in L$, то $M_0 \in \pi_1$ і $M_0 \in \pi_2$ та навпаки.

Система рівнянь (1) – це система двох рівнянь з трьома невідомими, яка має безліч розв'язків (тобто пряма має безліч точок). Запишемо (1) у вигляді:

$$\begin{cases} 7x-8y=7z-11 \\ x-2y=-z-3. \end{cases}$$

Візьмемо, наприклад, $z=1$, тоді:

$$\begin{cases} 7x-8y=-4, \\ x-2y=-4 \end{cases} \Rightarrow 6x-6y=0; \quad 6x=6y; \quad x=y;$$

$$x-2\cdot x=-4;-x=-4;x=4;y=4.$$

Отже відшукувана точка $M_0(4;4;1)$.

Перевірка:

π_1: $7\cdot4-8\cdot4-7\cdot1+11=0; 27-32+11=0; 39-39=0; 0=0; M_0\in\pi_1$.

π_2: $4-2\cdot4+1+3=0;\ -4+4=0;\ 0=0; M_0\in\pi_2$.

Оскільки нормальні вектори $\overline{n_1}$ та $\overline{n_2}$ перпендикулярні до прямої L, крім того вектор $\overline{a}\|L$, тому $\overline{n_1}$ та $\overline{n_2}$ перпендикулярні до вектора $\overline{a}$. Отже, за спрямовуючий вектор $\overline{a}$ для прямої L можна взяти вектор, який дорівнює векторному добутку нормальних векторів $\overline{n_1}$ та $\overline{n_2}$, або колінеарний йому:

$$\overline{n_1}\times\overline{n_2}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 7 & -8 & -7\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot A_{11}+\overline{j}\cdot A_{12}+\overline{k}\cdot A_{13}=$$

$$=\overline{i}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-8 & -7\\ -2 & 1\end{vmatrix}+\overline{j}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}7 & -7\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}7 & -8\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\overline{i}(-8-14)-\overline{j}(7+7)+\overline{k}(-14+8)=-22\overline{i}-14\overline{j}-6\overline{k}=$$

$$=-2(11\overline{i}+7\overline{j}+3\overline{k})=-2\overline{a};\qquad -2a=\overline{n_1}\times\overline{n_2};$$

$$\overline{a}=\frac{\overline{n_1}\times\overline{n_2}}{-2}=\frac{-2(11\overline{i}+7\overline{j}+3\overline{k})}{-2}=11\overline{i}+7\overline{j}+3\overline{k}.$$

Остаточно $\overline{a}=\{11;7;3\}$.

Перевірка:

$\overline{a}\cdot\overline{n_1}=1\cdot7+7\cdot(-8)+3\cdot(-7)=77-56-21=77-77=0,\Rightarrow\overline{a}\perp\overline{n_2}$.

Отже, канонічне рівняння прямої L:

$$\frac{x-4}{11}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-1}{3}=t. \qquad (3)$$

Прирівнюючи кожне відношення до t, отримаємо:

$$\frac{x-4}{11}=t, \quad \frac{y-4}{7}=t, \quad \frac{z-1}{3}=t,$$

звідки запишемо параметричні рівняння прямої L:

$$x=11t+4; \quad y=7t+4; \quad z=3t+1. \qquad (4)$$

Відповідь: канонічне рівняння прямої L, що задана як лінія перетину двох площин π_1 та π_2: $\frac{x-4}{11}=\frac{y-4}{7}=\frac{z-1}{3}=t$, параметричні рівняння прямої L: $x=11t+4$; $y=7t+4$; $z=3t+1$.

2. Записати канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2.

Розв'язання

Канонічне рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (5)$$

Підставляючи в (5) координати точок $M_1(7;-8;-7)$, $M_2(1;-2;1)$, дістанемо:

$$\frac{x-7}{1-7}=\frac{y+8}{-2+8}=\frac{z+7}{1+7};\ \frac{x-7}{-6}=\frac{y+8}{6}=\frac{z+7}{8}\Big|_{\times(-2)},$$

звідки остаточно рівняння прямої M_1M_2:

$$\frac{x-7}{3}=\frac{y+8}{-3}=\frac{z+7}{4},$$

спрямовуючий вектор якої $\overline{a_1}=\{3;-3;-4\}$.

<u>Відповідь</u>: канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 та M_2 має вигляд: $\frac{x-7}{3}=\frac{y+8}{-3}=\frac{z+7}{4}$.

3. Знайти величину гострого кута θ в радіанах з точністю до двох знаків, де θ – кут, який утворює пряма M_1M_2 з площиною π_1.

<u>Розв'язання</u>

Величину кута θ, який утворює пряма M_1M_2 з площиною π_1 можна знайти за формулою (рис.4):

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{a_1}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{a_1}\right|};\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta;$$

$$\sin\theta=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{a_1}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{a_1}\right|}=\frac{A_1m_1+B_1n_1+C_1p_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}}. \qquad (7)$$

Підставивши в формулу (7) координати векторів $\overline{n_1}=\{7;-8;-7\}$ та $\overline{a_1}=\{3;-3;-4\}$, дістанемо:

$$\sin\theta=\frac{7\cdot3+(-8)\cdot(-3)+(-7)\cdot(-4)}{\sqrt{7^2+(-8)^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2+(-4)^2}}=$$

$$\frac{21+24+28}{\sqrt{49+64+49}\cdot\sqrt{9+9+16}}=\frac{73}{\sqrt{162}\cdot\sqrt{34}}=\frac{73}{\sqrt{5508}}=\frac{73}{74{,}21590}\approx0{,}9836.$$

Звідки знаходимо: $\theta\approx79^0 36'$, або $1{,}39$ (рад.)

<u>Відповідь</u>: величина гострого кута θ, який утворює пряма M_1M_2 з площиною π_1 становить ***1,39*** радіана.

Прямі L, M_1M_2, площини π_1 та π_2, кути θ, φ побудовані на схематичному рис.4.

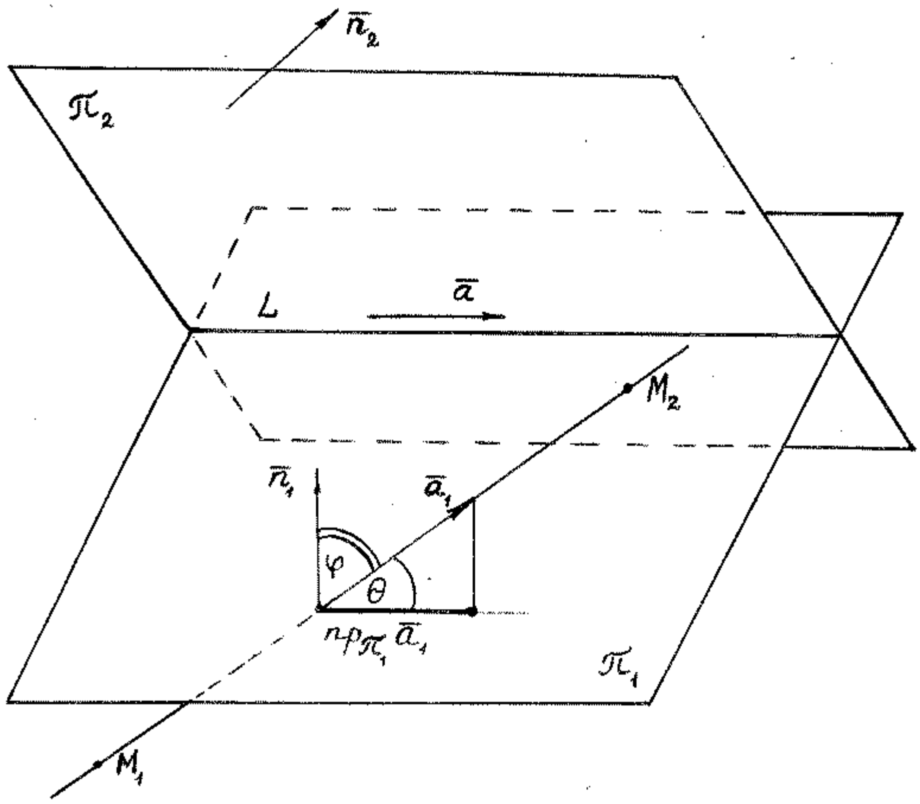

$\bar{n}_2$
π_2
L
$\bar{a}$
M_2
$\bar{n}_1$
$\bar{a}_1$
φ
θ
$пр_{\pi_1} \bar{a}_1$
π_1
M_1

Рис. 4.

Список рекомендованої літератури

1. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. - М. : «Наука». -1977.
2. Привалов И. Н. Аналитическая геометрия. - М.: «Наука». - 1970.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. - М. : «Наука». -1989.
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
5. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии / Н. В. Ефимов. – М. : Наука, 1986. – 272 с.
6. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Вища школа, 1993. – 647 с.
7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – М. : Наука, 1986. – 224 с.
8. Шкіль М. І. Вища математика / М. Л. Шкіль, Т. В. Колесник, В. М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 276 с.
9. Барковський В. В. Основи елементарної математики / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1999. – 236 с.
10. Бугір М. К. Математика для економістів : навч. посіб. / М. К. Бугір. – К. : Академія, 2003. – 520 с.
11. Валєєв К. Г. Вища математика : навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова. – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
12. Лавренчук В. П. Вища математика / С. Д. Івасишен, В. С. Дронь, Т. І. Готинчан. – К. : КСУ, 2004. – 200 с.
13. Самойленко Є. Є. Дослідження операцій / Є. Є. Самойленко. – К. : КСУ, 2008. – 76 с.
14. Соколенко О. І. Вища математика : підруч. / О. І. Соколенко. – К. : Академія, 2002. – 432 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін В’ячеслав Сергійович**
Богза Володимир Григорович
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

Формат 60х84/16/ Ум. друк. арк. 6,3
Тираж 30 прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету.
54020, м. Миколаїв, вул. Паризької комуни, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.