

ПОСТРОЕНИЕ И ТЕСТИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПУЗЫРЁК- ЖИДКОСТЬ-СФЕРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА В ТРЁХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Aleksey Shepilevskiy*, Igor Selezov**, Viktor Kosenkov***

*Mykolayiv State Agrarian University, Ukraine

Krylova Street 17, Mykolayiv 54040, Ukraine

**Institute of Hydromechanics of NAS Ukraine

Gelyabova Street 9/4, Kiev, Ukraine

***Institute of Pulse Processes and Technologies of NAS Ukraine

Oktyabrsky av., 43a, 54018, Nikolaev, Ukraine

Аннотация. Выполнено построение математической модели динамической системы, состоящей из сферической оболочки заданной толщины, заполненной сжимаемой жидкостью с газовой полостью в центре, в трёхмерной постановке. Проведено тестирование полученной математической модели.

Ключевые слова: сферическая оболочка, газовая полость, сферическая волна.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая система часто встречается в различных областях науки и техники, в частности при хранении сжиженного газа под давлением и легко воспламеняющихся веществ применяют сферические резервуары. Сферические ёмкости входят в состав оборудования технологических линий в химической промышленности. Так же подобные модели применяются в биомеханике при рассмотрении глазного яблока как сферическую оболочку, заполненную жидкостью.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью данной работы является построение математической модели для исследования процессов, возникающих в динамической системе, состоящей из сферической оболочки, заполненной жидкостью, с пузырьком газа в центре при условии отсутствия центральной и осевой симметрии.

Задачи исследования:

- Составить систему уравнений исследуемой физической системы.
- Разработать алгоритм решения, используя аппарат численных методов решения дифференциальных уравнений.

- Выполнить тестирование математической модели.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

При построении математической модели использовали гипотезы Кирхгофа-Лява. Эти предположения позволили рассматривать перемещения в каждой точке оболочки, а так же определить напряжения (σ_{ij}) через перемещения срединной поверхности. Считали оболочку тонкой, однако, в связи с тем, что она закреплена в полюсах, в модели учитывали моментные составляющие. Материал оболочки абсолютно упругий.

Жидкость предполагается идеальной, сжимаемой. Форма пузырька остаётся сферической в процессе его пульсаций. Учитываются кавитационные явления, возникающие в жидкости.

Для построения математической модели использовали сферическую систему координат с началом в центре сферы. Тогда любая точка системы будет иметь координаты $M(\theta; \varphi; r)$. Так как рассматриваем срединную поверхность оболочки, то для задания точек на ней достаточно знать координатные углы.

Математическая модель состоит из трёх блоков: газовой полости, жидкости, оболочки. Динамика каждого из компонентов системы определяется своей системой уравнений. Связь между блоками осуществляется с помощью условий на контактных границах, а именно выполняется равенство скоростей границ сред и равенство давлений. Плотности и энергии на границах раздела могут претерпевать разрыв.

Движение газовой полости определяется уравнением баланса энергии. Выбор этого уравнения обусловлен тем, что один из способов выведения системы из состояния равновесия состоит в введении энергии в газовую полость:

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt} (P_p \cdot V_p) + P_p \frac{dV_p}{dt} = N(t), \quad (1)$$

где: R_p – радиус пузырька, P_p – давление в пузырьке, γ – показатель адиабаты газа в пузырьке.

Динамика жидкости определяется волновым уравнением в сферической системе координат в трёхмерной постановке:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right], \quad (2)$$

где: f – потенциал скорости жидкости, c – скорость звука в невозмущённой жидкости.

Динамика оболочки описывается системой уравнений движения оболочки в приближении Кирхгофа-Лява. Перемещения и углы поворота выражаются через усилия и моменты:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_{12}}{\partial \varphi} + (T_{11} - T_{22}) \cot \theta + Q_1 + R q_1 = \rho R h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T_{22}}{\partial \varphi} + 2T_{12} \operatorname{ctg} \theta + Q_2 + Rq_2 = \rho R h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Q_2}{\partial \varphi} + Q_1 \operatorname{ctg} \theta - T_{11} - T_{22} + Rq_3 = \rho R h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{12}}{\partial \varphi} + (M_{11} - M_{22}) \operatorname{ctg} \theta = Q_1 R + \frac{\rho h^3 R}{12} \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial M_{22}}{\partial \varphi} + 2M_{12} \operatorname{ctg} \theta = Q_2 R + \frac{\rho h^3 R}{12} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2}, \quad (7)$$

где: R - радиус срединной поверхности оболочки, q_i - составляющие суммарного давления на поверхность оболочки, ρ - плотность оболочки, h - толщина оболочки, u, v, w - компоненты перемещения срединной поверхности, θ^*, φ^* - углы поворота срединной поверхности вдоль соответствующих координатных линий, $T_{11}, T_{22}, T_{12} = T_{21}$ - силы, действующие на единицу длины соответствующей площадки, $M_{11}, M_{22}, M_{12} = M_{21}$ - моменты срединной поверхности, Q_1, Q_2 - перерезывающие силы.

Система дополнена физическими и геометрическими соотношениями, которые определены через перемещения и повороты оболочки.

Для контроля выполнения гипотезы о малых упругих деформациях оболочки использовали условие Губера-Мизеса.

РЕШЕНИЕ

Для описания пульсации пузырька использовали двухслойный по времени метод Эйлера-Коши. Для решения волнового уравнения и системы, описывающей движение оболочки, применяли трёхслойную схему «крест».

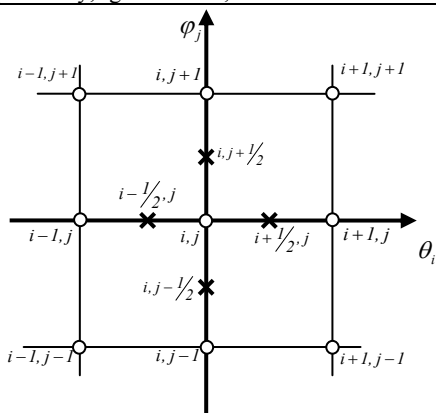


Рис. 1. Дискретизация уравнений оболочки выполнялась по шаблону, где в узловых точках определялись кинематические характеристики (перемещения и углы поворота), а в промежуточных – силовые (мембранные, перерезывающие силы, силы, моменты)

Дискретизация волнового уравнения выполнялась с использованием шаблона:

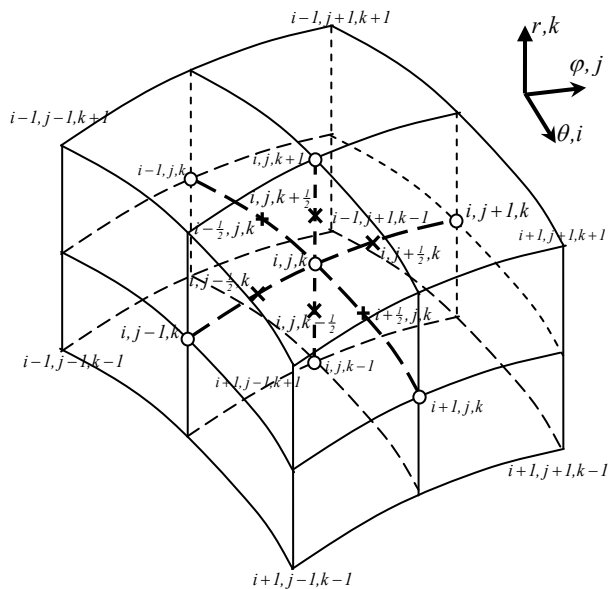


Рис. 2. Тут в узловых точках определяются потенциалы и давления, а в промежуточных – скорости

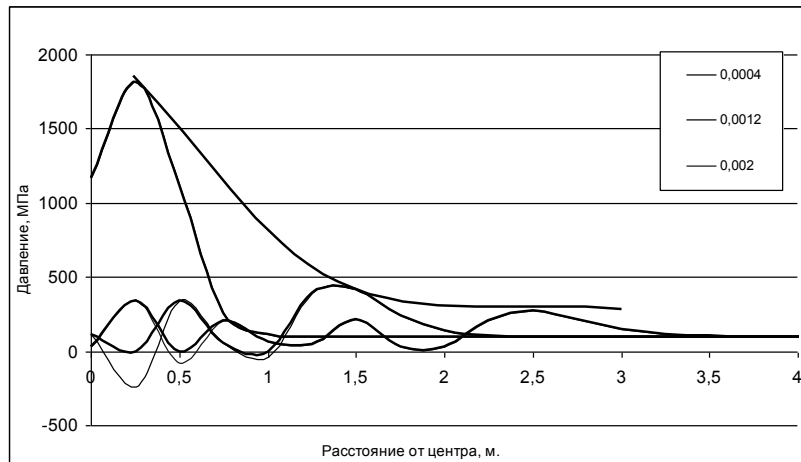
В начальный момент времени система находилась в состоянии статического равновесия. Из состояния равновесия система выводилась путём ввода энергии в

пузырёк, либо путём изменения нагрузки на оболочку в локальной области её поверхности.

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ

Тестирование модели выполняли на основе фундаментальных физических принципов, включающих проверку сохранения равновесия системы в отсутствии возмущений, скорости распространения продольных и поперечных волн в оболочке, волн в жидкости и собственных частот колебаний пузырька и оболочки, совпадающих с известными результатами.

При тестировании уравнений, описывающих поведение жидкости, вводили энергию в пузырьрёк и, с помощью граничных условий, происходила передача возмущения к жидкости и генерация сферической волны, профили которой представлены на слайде для разных моментов времени. Динамика распространения соответствует закону распространения сферической волны (интенсивность обратно пропорциональна расстоянию от источника). Рассмотрены два случая: тонкими линиями изображены профили волны, полученные без учёта кавитации, а жирными – профили с учётом. Видно, что фронт волны в двух случаях не отличается.



Распространение сферической волны давления

Рис. 3. При выведении из состояния равновесия пузырьрёк совершает колебания. Как известно, при меньшей вводимой энергии частота пульсации увеличивается, а амплитуда уменьшается, что мы и наблюдаем в наших расчётах

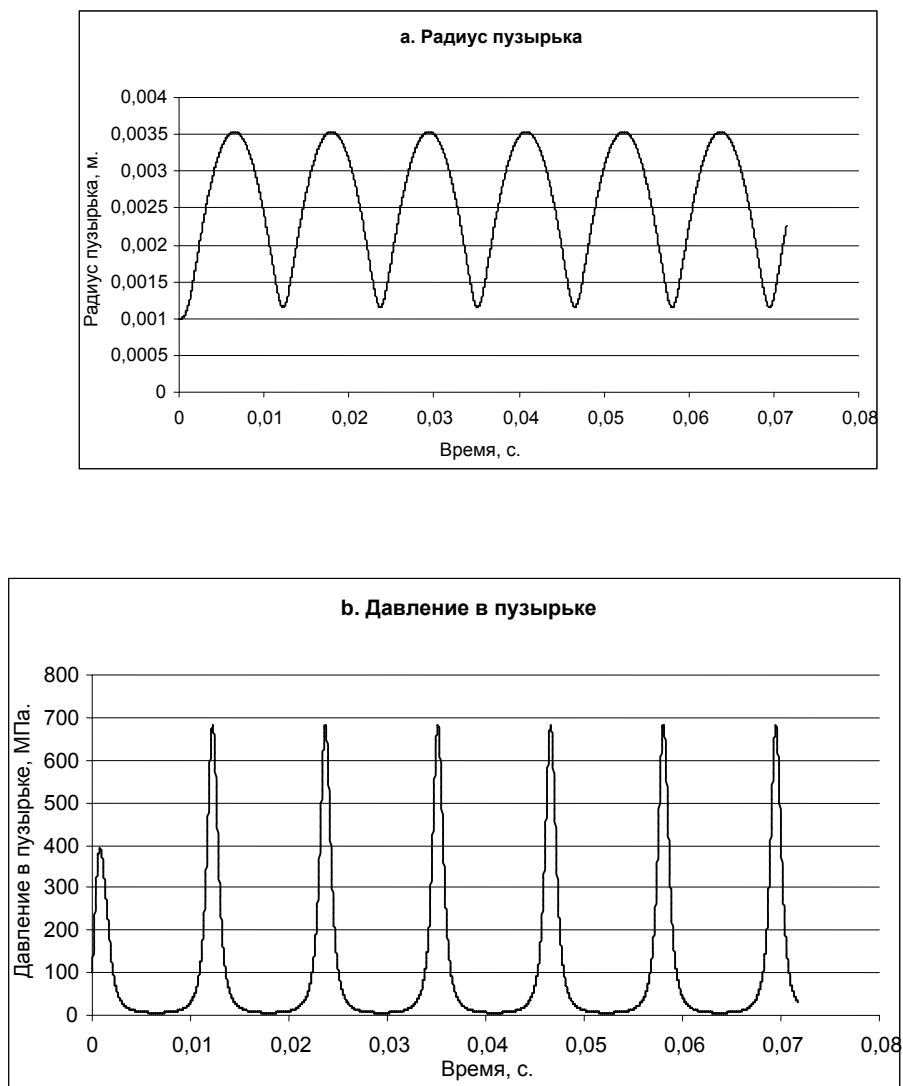


Рис. 3. а і в. Ниже представлены собственные колебания оболочки, получаемые при выведении оболочки из состояния равновесия путём задания перемещения всей поверхности оболочки. Перемещения оболочки колеблются относительно срединной поверхности с частотой собственных колебаний

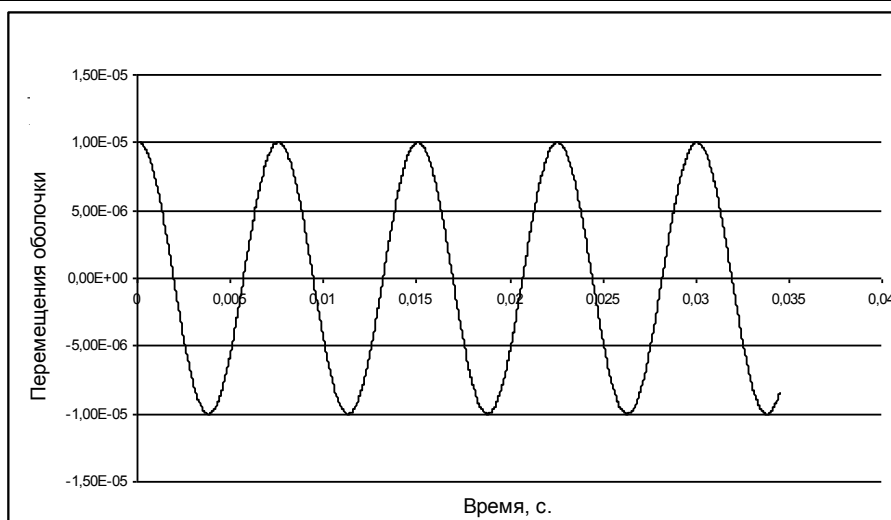


Рис. 5. Собственные колебания оболочки

Ниже представлено распространение возмущения оболочки по меридиану при выведении оболочки из состояния равновесия путём задания перемещения по экватору. В полярных точках сфера жёстко закреплялась. Выполнялся контроль по скорости распространения волны.

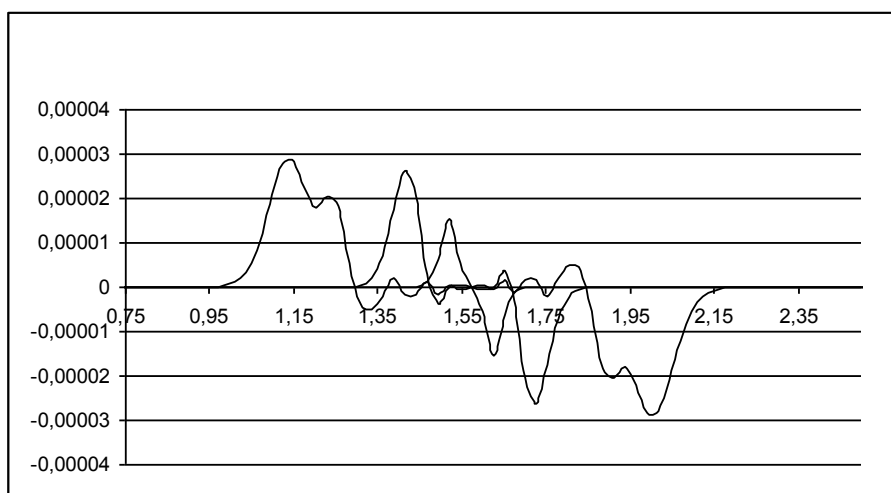


Рис. 6. Распространение возмущения в оболочке

ВЫВОДЫ

Результаты тестирования показывают, что разработанная математическая модель адекватно описывает трёхкомпонентную динамическую систему пузырько-жидкость-оболочка и может быть использована для исследования процессов и явлений в подобных физических системах, которые соответствуют допущениям, сделанным при построении модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eric Johnsen, Tim Colonius Numerical simulations of non-spherical bubble collapse, *J. Fluid Mech* (2009), vol.629, pp. 231 – 262, 2009, Cambridge University Press.
2. Diffey T.A., Johnson J.N. Transient response of a pulsed spherical shell surrounded by a infinite elastic medium. *Int. J. Mech. Sci.*, v. 23, №10, p. 589-593.
3. Акуличев В.А. Кавитация в криогенных и кипящих жидкостях. – М.: Наука, 1978. – 220 с.
4. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Итоги науки и техники: Механика твёрдых деформируемых тел, Т.5, М.: 1973г. – 272с.
5. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение). Ленинград.: Судостроение, 1976г. – 200 с.
6. Губайдуллин А.А., Ивандаев А.И., Нигматулин Р.И. Исследование нестационарных ударных волн в газожидкостных смесях пузырьковой структуры // ПМТФ. 1978. -№ 2. - С. 78-86.
7. Давыдов М.Н., Кедринский В.К. Двухфазные модели формирования кавитирующих отколов в жидкости.//ПМТФ. – 2003.-№5.-С.72-79.
8. Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. -Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. 435 с.
9. Кубенко В.Д. Проникание упругих оболочек в сжимаемую жидкость. Киев: Наук. Думка, 1981, 160с.
10. Кузнецов Н.Г., Орлов Ю.Ф., Черепенников В.Б., Шлаустас Р.Ю. Регулярные асимптотические алгоритмы в механике. Новосибирск: Наука, 1989. 274с.
11. Наугольный К.А., Рой Н.А. Электрические разряды в воде. М.: Наука, 1977. – 151с.
12. В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев, И.Р. Шрейбер. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 248с.
13. Пирсол И. Кавитация. – М.: Мир, 1975. – 95 с.
14. Пирумов У.Г. Численные методы. – М.: Дрофа, 2004. – 224с.
15. Сташкевич А.П. Акустика моря. Ленинград: Судостроение, 1966 – 350с.
16. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635с
17. Федоткин И.М., Немчин А.Ф. Использование кавитации в технологических процессах. – Киев: Вища шк., 1984. – 68 с.
18. Шагапов В.Ш., Абдрашитов Д.В. Структура волн детонации в пузырьковой жидкости. // ФГВ. 1992, № 4. - С. 89-95.
19. А.В.Шептилевский, В.М.Косенков. Динамика газового пузырька в замкнутом сферическом объеме.//VI Международная школа-симинар «Импульсные процессы в механике сплошных сред». Николаев. 2005. с.98-99.

**CONSTRUCTION AND TESTING OF MATHEMATICAL
MODEL OF DYNAMIC SYSTEMS BUBBLE-LIQUID-
SPHERICAL SHELL IN THREE-DIMENSIONAL**

Summary. A model of dynamical system consisting of a spherical shell by a compressible liquid with a gas bubble in the center is developed. The corresponding initial boundary value problem includes the Kirchhof-Love shell equations. The balance equation for a gas state, wave equation for liquid, boundary and initial equations.

Key words: spherical shell, gas bubble.