МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

Вища математика.
Диференціальне числення функцій багатьох змінних
(Модуль 7)

Завдання та методичні рекомендації
для самостійної роботи
здобувачів вищої освіти
денної та заочної форм навчання спеціальностей
141 - “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”,
208 - "Агроінженерія"

МИКОЛАЇВ
2019

УДК 517
В 55
Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 08.06.2019 р., протокол № 11.

Укладачі:
В. С. Шебанін – д-р техн. наук., професор, ректор Миколаївського національного аграрного університету;
О. В. Шебаніна – д-р екон. наук., професор, декан факультету менеджменту, Миколаївський національний аграрний університет;
І. П. Атаманюк – д-р. техн. наук, професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Шептилевський – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Цепуріт – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;
О. В. Бойчук – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:
В. Д. Будак – д-р техн. наук, професор,
ректор Миколаївського національного університету
ім. В. О. Сухомлинського;
І. Д. Бурковський – канд. техн. наук, провідний науковий співробітник, Миколаївський національний аграрний університет.

ВСТУП

Вища математика як навчальна дисципліна є фундаментальним нормативним курсом, найвагомішою базовою складовою якісної підготовки висококваліфікованих фахівців у вищих навчальних закладах освіти III-IV рівнів акредитації.

У методичних рекомендаціях запропоновано завдання для самостійної роботи студентів за програмою з вищої математики для студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 141 “Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка”, 208 "Агроінженерія"

Матеріал даного посібника складається з основних теоретичних відомостей, розрахункових завдань та методичних рекомендацій. Розрахункові завдання розподілено на групи за тематикою та методами розв’язання. В методичних рекомендаціях пропонуються приклади розв’язання задач з кожної теми з повним обґрунтуванням. Розглядаються наступні теми:

Тема 1. Поняття функції кількох змінних. Область визначення.
Тема 2. Границя та неперервність функції двох змінних.
Тема 3. Частинні похідні.
Тема 4. Похідна складеної функції
Тема 5. Повний диференціал функції двох змінних.
Тема 6. Диференціювання неявних функцій.
Тема 7. Екстремуми функції двох змінних
Тема 8. Найбільше та найменше значення функції.

Тема 1. Поняття функції кількох змінних. Область визначення

1.1 Основні теоретичні відомості

У математиці та її застосуваннях часто трапляються функції, значеннями яких є кілька дійсних аргументів. Прикладами таких функцій є об’єм кругового циліндра $V(r,h)=\pi r^2 h$, що залежить від радіуса його основи r та висоти h; сила F, з якою притягуються дві матеріальні точки, залежить від їх мас M та m, а також відстані

r між ними: $V(M,m,r)=\gamma\dfrac{M\cdot m}{r^2}$ ($\gamma=const$). Найпростішими з таких функцій є функції двох змінних.

Нехай задано множину D впорядкованих пар дійсних чисел (x,y).

Означення 1. Якщо кожній парі $(x,y)\in D$ ставиться у відповідність за деяким правилом $f(x,y)$ єдине дійсне число z, то на множині D визначена функція двох змінних x та y: $z=f(x,y)$. Множину D називають областю визначення цієї функції.

Оскільки кожній впорядкованій парі чисел (x,y) на декартовій площині відповідає точка з координатами (x,y), і, навпаки, кожній точці декартової площини відповідає впорядкована пара (x,y), то можна стверджувати, що функція двох змінних $z=f(x,y)$ визначається на деякій множині точок декартової площини. Функцію двох змінних $z=f(x,y)$ зображують у тривимірному просторі з заданою декартовою системою координат $Oxyz$ у вигляді поверхні $z=f(x,y)$, проекцією якої на площину Oxy є область D. Наприклад, зображенням функції $z=x^2+y^2$, де $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, є параболоїд $z=x^2+y^2$.

Областю визначення функції двох змінних може бути вся координатна площина або її частина, обмежена деякими лініями. Лінію, що обмежує область, називають її межею. Точки області, що не лежать на її межі, називають внутрішніми точками цієї області. Область, що складається лише з внутрішніх точок, називають відкритою. Область з приєднаною до неї межею називають замкненою. Прикладом замкнутої області є круг $x^2+y^2\le 1$, до якого входить коло $x^2 + y^2 = 1$, що його обмежує. Круг $x^2 + y^2 < 1$ є прикладом відкритої області.

Можна надати інше, більш строге означення поняття області та її межі. Для цього спочатку визначимо поняття околу точки на площині.

Означення 2. Множину $M(x, y)$ всіх точок площини, координати яких задовольняють нерівності $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, називають δ-околом точки $M_0(x_0, y_0)$.

Таким чином, δ-окіл точки M_0 – це відкритий круг з центром у цій точці та радіусом δ.

Означення 3. Множину D точок площини називають зв'язною, якщо будь-які дві її точки можна сполучити неперервною лінією, що цілком належить цій множині.

Наприклад, круг є зв'язною множиною, а множина, що складається з двох кругів, що не мають спільних точок, не є зв'язною.

Означення 4. Точку M називають внутрішньою точкою множини D, якщо існує δ-окіл цієї точки, який цілком міститься у множині D.

Означення 5. Множину D називають відкритою, якщо кожна її точка є внутрішньою.

Означення 6. Областю (відкритою областю) називають зв'язну відкриту множину точок.

Означення 7. Точку M називають межовою точкою множини D, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать D, так і точки, що не належать цій множині.

Означення 8. Множину всіх межових точок області називають її межею.

Означення 9. Область разом з її межею називають замкненою.

Означення 10. Область називають обмеженою, якщо існує круг скінченого радіуса, який цілком містить цю область.

1.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина таких точок (x, y), для яких вираз $\sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$ має зміст, тобто множина точок, для яких $4 - x^2 - 4y^2 \geq 0$. З останньої нерівності випливає, що $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

Рівність $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ визначає на координатній площині еліпс з півосями $a = 2$ та $b = 1$. Цей еліпс ділить площину на дві частини. Для координат точок однієї з них виконується нерівність $\frac{x^2}{4} + y^2 < 1$, для іншої – $\frac{x^2}{4} + y^2 > 1$. Щоб виявити, яка з цих частин є областю визначення D для заданої функції, тобто задовольняє умові $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$, достатньо перевірити цю умову для якої-небудь точки, що не лежить на еліпсі, наприклад, початку координат $(0, 0)$, що знаходиться у області, обмеженій еліпсом. Підставивши координати точки у нерівність, ми бачимо, що вона виконується. Отже, початок координат належить області D, тому внутрішніми точками цієї області є точки, обмежені еліпсом. Сам еліпс також належить області D визначення заданої функції, тому що координати його точок задовольняють умові $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$. Отже, область визначення функції $z=\sqrt{4-x^2-4y^2}$ – це замкнена область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Побудова поверхні, що є геометричним образом функції двох змінних $z=f\left(x,y\right)$, часто пов'язана із значними труднощами, тому для зображення функцій двох змінних використовують метод перерізів. Він полягає у тому, що поверхню $z=f\left(x,y\right)$ перетинають площинами $z=C=const$, паралельними координатній площині Oxy. При цьому отримують криві $f\left(x,y\right)=C$, що називаються лініями рівня функції двох змінних $z=f\left(x,y\right)$. Отже, лінія рівня на площині Oxy – це проекція кривої, що утворюється при перетині поверхні $z=f\left(x,y\right)$ площиною $z=C$. Будуючи лінії рівня для різних значень C, можна дістати певне уявлення про поведінку функції $z=f\left(x,y\right)$.

Приклад 2 Знайти лінії рівня функції $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Розв'язання. Лінії рівня $z=C$ знайдемо з рівняння $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$. Звідси знаходимо: $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{C}$, $C>0$. Отже, рівняння ліній рівня заданої функції має вигляд: $x^2+y^2=\frac{1}{C^2}$. Це рівняння визначає кола з центром у початку координат і радіусом $\frac{1}{C}$.

Для функції трьох змінних $u=f\left(x,y,z\right)$ визначають поняття поверхні рівня. Поверхнею рівня називають множину всіх точок простору з області визначення функції $u = f(x, y, z)$, для яких ця функція набуває одне й те ж саме значення. Рівняння поверхонь рівня має вигляд $f(x, y, z) = c = \text{const}$. Наприклад, поверхні рівня функції $u = \dfrac{z^2}{x^2 + y^2}$ визначаються рівнянням $\dfrac{z^2}{x^2 + y^2} = c$, або $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{c} = 0$. При $c > 0$ це рівняння визначає множину конусів з вершиною у початку координат.

1.3. Індивідуальні завдання

Знайти область визначення функцій

1.1. $z = 3xy : (2x^2 - 5y)$ 1.2. $z = arcsin(x - y)$

1.3. $z = \sqrt{y^2 - x^2}$ 1.4. $z = ln(x^2 + y^2 - 4)$

1.5. $z = 2 : (6 - x^2 - y^2)$ 1.6. $z = \sqrt{2x^2 - 5y^2}$

1.7. $z = arccos(x + y)$ 1.8. $z = 3x + y : (2 - x + y)$

1.9. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ 1.10. $z = ln(3 - x^2 + y^2)$

1.11. $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$ 1.12. $z = 4xy : (x - 3y^2 + 1)$

1.13. $z = \sqrt{xy} : (x^2 + y^2)$ 1.14. $z = arcsin(x : y)$

1.15. $z = ln(y^2 - x^2)$ 1.16. $z = x^3 y : (3 + x^2 - y)$

1.17. $z = arccos(x + 2y)$ 1.18. $z = arcsin(2x - y)$

1.19. $z = ln(8 - x^2 - y^2)$ 1.20. $z = \sqrt{3 - x^2 + 2y^2}$

1.21. $z = 1 : \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ 1.22. $z = 4x + y : (2x - 5y)$

1.23. $z = \sqrt{3x - 2y} : (4 + x)$ 1.24. $z = 7x^3 y : \sqrt{x - 4y}$

1.25. $z = 5 : (3 - x^2 - y^2)$ 1.26. $z = \sqrt[4]{x^2 + 2y^2 - 4}$

1.27. $z = lg(2x - y + 3)$ 1.28. $z = 4xy : (x^2 - y^2)$

1.29. $z = 1 : (2x^2 + 3y^2 - 6)$ 1.30. $z = \sqrt{1 - x^2 + y}$

Тема 2. Границя та неперервність функції двох змінних

2.1. Основні теоретичні відомості

Для функції двох та більшого числа змінних вводяться поняття границі функції та її неперервності аналогічно випадку функції однієї змінної. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, можливо, окрім самої цієї точки.

Означення 1. Число A називають границею функції $z = f(x,y)$ при $M(x,y) \to M_0(x_0, y_0)$ (цей запис означає, що $x \to x_0$, $y \to y_0$), якщо $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Для границі використовують позначення: $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$.

З означення границі функції двох змінних випливає, що коли вона існує, то вона не залежить від шляху, по якому точка M наближається до точки M_0. Для функції двох змінних кількість таких шляхів нескінченна, на відміну від функції однієї змінної, де x може наближатися до x_0 двома шляхами: справа та зліва.

Геометричний зміст границі функції двох змінних полягає у наступному. Яким би малим не було вибране число $\varepsilon > 0$, знайдеться такий δ- окіл точки $M_0(x_0, y_0)$, що у всіх його точках $M(x, y)$, відмінних від M_0, аплікати z відповідних точок поверхні $z = f(x,y)$ відрізняються від числа A за абсолютною величиною менше, ніж на ε.

Користуючись означенням границі функції двох змінних, можна перенести основні теореми про границі для функції однієї змінної на випадок функції двох змінних. Зокрема, має місце наступна теорема.

Теорема 1. Нехай функції $f(x,y)$ та $g(x,y)$ визначені у деякому околі точки M_0 та мають у цій точці границі B та C. Тоді функції $f(x,y) \pm g(x,y)$, $f(x,y) \cdot g(x,y)$, $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ (для частки $g(x,y) \neq 0$), мають у точці M_0 границі, які відповідно дорівнюють $B \pm C$, $B \cdot C$, $\dfrac{B}{C}$ (для частки $C \neq 0$).

Аналогічно випадку функції однієї змінної, можна сформулювати означення нескінченно малої функції двох змінних

<u>Означення 2</u>. Функцію $z = f(x,y)$ називають <u>нескінченно малою</u> у точці M_0, якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$.

Якщо функція $z = f(x,y) = f(M)$ має у точці M_0 границю, що дорівнює A, то функція $\alpha(M) = f(M) - A$ є нескінченно малою у точці M_0, тому що $\lim\limits_{M \to M_0} \alpha(M) = \lim\limits_{M \to M_0} \left(f(M) - A \right) = A - A = 0$. Звідси випливає, що функція $f(M)$ у околі точки M_0 відрізняється від границі A у цій точці на нескінченно малу функцію.

Введемо за допомогою поняття границі поняття неперервності функції двох змінних. Нехай функція $z = f(M)$ визначена у області D координатної площини Oxy, точка $M_0 \in D$ і є внутрішньою точкою цієї області.

<u>Означення 3</u>. Функцію $z=f(M)$ називають <u>неперервною у точці</u> M_0, якщо $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

Точки, у яких функція неперервна, називаються точками неперервності, а точки, у яких неперервність порушується – точками розриву цієї функції.

Наприклад, функція $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0;\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$

не є неперервною у початку координат, оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не існує (приклад 5.4), тому початок координат $(0,0)$ є точкою розриву цієї функції.

<u>Означення 4</u>. Функцію $f(x,y)$ називають <u>неперервною у точці</u> $M_0(x_0,y_0)$, якщо її повний приріст у цій точці прямує до нуля, коли до нуля прямують прирости аргументів x та y.

<u>Означення 5</u>. Функцію $f(x,y)$ називають <u>неперервною на множині</u> D, якщо вона є непевною у кожній точці цієї множини.

Сформулюємо основні властивості неперервних функцій двох змінних у замкненій обмеженій області.

1. Якщо функція $z=f(M)$ є неперервною у замкненій обмеженій області, то вона є обмеженою у цій області, тобто $\exists\, c>0: \left|f(M)<c\right|$ для всіх точок цієї області.
2. Якщо функція $z=f(M)$ є неперервною у замкненій обмеженій області, то у цій області існують точки, у яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.
3. Якщо функція $z=f(M)$ є неперервною у замкненій обмеженій області D і $f(M_1)<c<f(M_2)$, де

$M_1 \in D$, $M_2 \in D$, то існує точка $M_0(x_0, y_0) \in D$, така, що $f(M_0) = c$. Зокрема, якщо $f(M_1) < 0$, $f(M_2) > 0$, то у області D існує точка M_0, у якій $f(M_0) = 0$.

2.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$.

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді $\left[(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}$.

Оскільки $t = xy \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 2$, то отримуємо, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim\limits_{t\to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = e$. Оскільки $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{2y}{x + y} = 2$, то шукана границя дорівнює e^2.

Приклад 2. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Розв'язання. Нехай точка $M(x, y)$ прямує до точки $O(0,0)$ по прямій $y = kx$, що проходить через точку O. Тоді отримуємо:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2\left(1 + k^2\right)} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Таким чином, при наближенні до точки $O(0,0)$ по різним прямим, що відповідають різним значенням k, отримуємо різні значення границі. Звідси випливає, що границя заданої функції у точці $O(0,0)$ не існує.

Приклад 3. Обчислити границю $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \dfrac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Тоді вираз під знаком границі набуває вигляду:

$$\frac{x+2y}{x^2-2xy+2y^2}=\frac{\rho(\cos\varphi+2\sin\varphi)}{\rho^2\left(\cos^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi+2\cos^2\varphi\right)}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{f(\varphi)}{g(\varphi)}.$$

При $x\to\infty$, $y\to\infty$ $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$, тому $\dfrac{1}{\rho}\to 0$. Доведемо, що величина $\dfrac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$ є обмеженою.

Для функції у чисельнику $|f(\varphi)|\le|\cos\varphi|+2|\sin\varphi|\le 3$. Знаменник можна записати у вигляді:

$$g(\varphi)=\cos^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi+2\cos^2\varphi=(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi\le 2^2+1^2=5.$$

Оскільки $0<g(\varphi)\le 5$, як це випливає з останнього виразу, то величина $\dfrac{f(\varphi)}{g(\varphi)}$ є обмеженою, тому $\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{f(\varphi)}{g(\varphi)}=0$ як границя добутку нескінченно малої величини на обмежену.

Тема 3. Частинні похідні

3.1. Основні теоретичні відомості

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена у деякому околі точки $M(x,y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи значення

y незмінним, так, щоб точка $M_1\left(x+\Delta x, y\right)$ належала цьому околу.

Величину $\Delta_x z = f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)$ називають частинним приростом функції $f\left(x, y\right)$ по змінній x. Аналогічно вводиться частинний приріст $\Delta_y z$ цієї функції по змінній y: $\Delta_y z = f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)$.

<u>**Означення 1.**</u> Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

то вона називається <u>частинною похідною</u> функції $f\left(x, y\right)$ у точці $M\left(x, y\right)$ по змінній x і позначається одним з наступних символів: z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогічно частинна похідна функції $f\left(x, y\right)$ по змінній y визначається як границя

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y}. \qquad (2)$$

Вона позначається одним з символів: z'_y, f'_y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y сталою, а при знаходженні похідної z'_y сталою вважається змінна x. Тому частинні похідні знаходять за формулами та правилами диференціювання функцій однієї змінної.

Частинна похідна z'_x характеризує швидкість зміни функції у напрямі осі Ox, z'_y – у напрямі осі Oy.

З'ясуємо геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних. Геометричним образом (графіком) функції $z = f(x, y)$ є деяка поверхня. Графіком функції $z = f(x, y_0)$ є лінія перетину цієї поверхні з площиною $y = y_0$. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, отримуємо, що $f'_x(x_0, y_0) = tg\alpha$, де α – кут між віссю Ox і дотичною, проведеною до просторової кривої $z = f(x, y_0)$ у точці $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Аналогічно, $f'_y(x_0, y_0) = tg\beta$, де β – кут між віссю Oy та дотичною, проведеною до просторової кривої $z = f(x_0, y)$ (лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ з площиною $x = x_0$) у точці $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Для функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна знайти n частинних похідних: $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$.

Тут $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$,

$\Delta_{x_i} u = f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n)$.

Щоб знайти частинну похідну $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, треба взяти звичайну похідну функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по змінній x_i, вважаючи решту змінних сталими. Якщо функція $z = f(x, y)$ задана у області D і має частинні похідні z'_x та z'_y у всіх точках $(x, y) \in D$, то ці похідні можна розглядати як нові функції, задані у області D. Тому можна розглядати задачу про знаходження частинних похідних від цих функцій по якій-небудь змінній у точці $(x, y) \in D$.

Якщо існує частинна похідна по x від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$, то її називають частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ по змінній x і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ або f''_{xx}. Отже, за означенням $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial f}{\partial x}$ по змінній y, то цю похідну називають мішаною частинною похідною другого порядку від функції $f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ або f''_{xy}. Отже, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Для функції $f(x, y)$ двох змінних розглядають чотири частинні похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають частинними похідними третього порядку. Таких похідних уже вісім: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} . \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$.

Відповідь на запитання, чи залежить величина мішаної похідної від порядку диференціювання, тобто чи рівні між собою , наприклад, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, дає наступна теорема.

Теорема 2. (Теорема про мішані похідні). Якщо функція $f\left(x,y\right)$ визначена разом із своїми похідними f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} у деякому околі точки $M_0\left(x_0,y_0\right)$, причому похідні f''_{xy} та f''_{yx} неперервні в точці M_0, то у цій точці $f''_{xy}=f''_{yx}$.

Аналогічна теорема справедлива для будь-яких неперервних мішаних похідних, які відрізняються між собою лише порядком диференціювання.

3.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти частинні похідні по змінним x та y наступних функцій: 1) $z=3x^2y-\frac{x}{y^3}+2x-3y+1$; 2) $z=\arcsin\frac{y}{x}$.

Розв'язання. 1) Знайдемо частинну похідну z'_x. Для цього диференціюємо функцію по x, вважаючи y сталою величиною: $z'_x=6xy-\frac{1}{y^3}+2$. Знаходимо z'_y (диференціюємо $f\left(x,y\right)$ по y, сталою вважається змінна x): $z'_y=3x^2+\frac{3x}{y^4}-3$.

$$2)\ z'_x=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{\sqrt{x^4-x^2y^2}};$$

$$z'_y=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Приклад 2. Знайти всі частинні похідні другого порядку від функції $z=x^3-3x^2y^2+2xy^3-3x+2y$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні z'_x та z'_y.

$$z'_x=3x^2-6xy^2+2y^3-3,\ z'_y=-6x^2y+6xy^2+2.$$

Знайдемо z''_{xx}, $z''_{xy}=z''_{yx}$, z''_{yy}:

$$z''_{xx}=\frac{\partial\left(z'_x\right)}{\partial x}=6x-6y^2,\ z''_{xy}=\frac{\partial\left(z'_x\right)}{\partial y}=-12xy+6y^2,$$

$$z''_{yy}=\frac{\partial\left(z'_y\right)}{\partial y}=-6x^2+12xy.$$

Приклад 3. Знайти частинні похідні першого і другого порядків функції

$z=e^{xy}+y\sin x$

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+y\cos x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+\sin x.$$

Потім знайдемо немішані похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^{xy}-y\sin x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2e^{xy}.$$

Для мішаних похідних маємо

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy})+\cos x=e^{xy}+xye^{xy}+\cos x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

, отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}+\cos x$.

Приклад 4. Знайти частинні похідні функції $z = f(x; y)$, яка задовольняє рівняння

$$xz + ytgz = xy + 1 .$$

Розв'язання. Продиференціюємо цю рівність по *x*, вважаючи змінну *z* функцією від *x* і у. В результаті дістанемо рівняння

$$z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial x} = y ,$$

з якого маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(x + \frac{y}{\cos^2 z} \right) = y - z .$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y - z)\cos^2 z}{x\cos^2 z + y} .$$

Аналогічно знаходимо частинну похідну по у:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + tgz + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial y} = x ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cos^2 z - \sin z\cos z}{y + x\cos^2 z} .$$

3.3. Індивідуальні завдання

Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ наступних функцій

3.1. $z = ln(y^2 - e^{-x})$

3.2. $z = arcsin\sqrt{xy}$

3.3. $z = arctg(x^2 + y^3)$

3.4. $z = cos(x^3 - 2xy)$

3.5. $z = sin\sqrt{y : x^3}$

3.6. $z = tg(x^3 + y^2)$

3.7. $z = ctg\sqrt{xy^3}$

3.8. $z = e^{-x^2 + y^2}$

3.9. $z = ln(3x^2 - y^4)$

3.10. $z = arccos(y : x)$

3.11. $z = arcctg(xy^2)$

3.12. $z = cos\sqrt{x^2 + y^2}$

3.13. $z = sin\sqrt{x - y^3}$

3.14. $z = tg(x^3 y^4)$

3.15. $z = ctg(3x - 2y)$

3.16. $z = e^{2x^2 - y^3}$

3.17. $z = ln(\sqrt{xy} - 1)$

3.18. $z = arcsin(2x^3 y)$

3.19. $z = arctg(x^2 : y^3)$

3.20. $z = cos(x - \sqrt{xy^3})$

3.21. $z = sin((x + y) : (x - y))$

3.22. $z = tg((2x - y^2) : x)$

3.23. $z = ctg\sqrt{x : (x - y)}$

3.24. $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^3}}$

3.25. $z = ln(3x^2 - y^2)$

3.26. $z = arccos(x - y^2)$

3.27. $z = arctg(x^3 : y)$

3.28. $z = cos((x - y) : (x^2 + y^2))$

3.29. $z = sin\sqrt{y : (x + y)}$

3.30. $z = e^{-\sqrt{x} + y^3}$

Тема 4. Похідна складеної функції

4.1. Основні теоретичні відомості

Нехай $z = f(x, y)$ є функцією змінних x та y, кожна з яких, у свою чергу, є функцією незалежної змінної t, тобто $x = x(t)$, $y = y(t)$. Функція $f(x(t), y(t))$ є складеною функцією змінної t. Для таких функцій справедлива наступна теорема.

Теорема 1. Якщо функції $x = x(t)$, $y = y(t)$ диференційовані у точці t, а функція $z = f(x, y)$ диференційована у точці $M(x, y)$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ також диференційована у точці t. Похідну цієї функції знаходять за формулою:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Аналогічно знаходять похідну складеної функції, якщо кількість проміжних змінних більша двох. Для функції $z = f\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\right)$ має місце рівність: $\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$.

Зокрема, для функції трьох змінних $u = f\left(x(t), y(t), z(t)\right)$ маємо $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$. Якщо у цьому випадку $y = y(x)$, $z = z(x)$, а x – незалежна змінна, тобто $u = u\left(x, y(x), z(x)\right)$, то виконується рівність

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}. \tag{2}$$

Цю формулу називають формулою для обчислення повної похідної. Нехай $z = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Тоді $z = f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$ є складеною функцією незалежних змінних u і v, змінні x та y є проміжними. Аналогічно попередній теоремі можна довести наступне твердження.

Теорема 2. Якщо функції $x(u, v)$ та $y(u, v)$ диференційовані у точці $M_1(u, v)$, а функція $z = f(x, y)$ диференційована у точці $M_2\left(x(u, v), y(u, v)\right)$, то складена функція $z = f\left(x(u, v), y(u, v)\right)$ диференційована у точці $M_1(u, v)$ і її частинні похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{3}$$

Формули (3) можна узагальнити на випадок більшого числа змінних.

4.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^3 - 2xy$, $x = 5t$, $y = t^3 - 1$.

Розв'язання. Знайдемо похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 2y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x$, $\frac{dx}{dt} = 5$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$. Підставивши ці вирази у формулу (1), отримаємо:

$$\frac{dz}{dt} = \left(3x^2 - 2y\right)\cdot 5 + \left(-2x\right)\cdot 3t^2 = 15\cdot 25t^2 - 10\left(t^3 - 1\right) - 6\cdot 5t\cdot t^2 = -40t^3 + $$
$$+375t^2 + 10.$$

Ми отримаємо такий же результат, якщо у вираз для функції z попередньо підставити замість x та y їх вирази через t, а потім знайти звичайну похідну по t отриманої функції однієї змінної.

Приклад 2. Знайти повну похідну по x функції $u = x^2 - xy + z^2$, де $y = 2x$, $z = x^2$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (2). Знайдемо необхідні для цього похідні. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$, $\frac{dy}{dx} = 2$, $\frac{dz}{dx} = 2x$.

Тоді за формулою (2) маємо:

$$\frac{du}{dx} = 2x - y + \left(-x\right)\cdot 2 + 2z\cdot 2x = 2x - 2x - 2x + 4x^3 = 4x^3 - 2x$$
.

Цей же результат ми отримаємо, підставивши у вираз для u замість y $2x$ і замість z x^2 і про диференціювавши отриманий вираз по x.

Приклад 3. Знайти z'_u та z'_v, якщо $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

Розв'язання. За формулами (3) маємо:

$$z'_u = 2x\ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y} \cdot v = \frac{u}{v^2}\left(1 + 2\ln(uv)\right),$$

$$z'_v = 2x\ln y\left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y}u = \frac{u^2}{v^2}\left(1 - 2\ln(uv)\right).$$

Приклад 4. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$.

Розв'язання. Знайдемо похідні з правих частин формул (3), (4):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2 - y^2 x\right)'_x = 2xy - y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 y - y^2 x\right)'_y = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(u \cdot \cos v\right)'_u = \cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \left(u \cdot \cos v\right)'_v = -u\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(u \cdot \sin v\right)'_u = \sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \left(u \cdot \sin v\right)'_v = u\cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули (3), (4):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \cos v + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \sin v =$$

$$= \left(2u\cos v \cdot u\sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \cos v +$$

$$+ \left(u^2 \cos^2 v - 2u\cos v \cdot u\sin v\right) \cdot \sin v =$$

$$= u^2 \sin v\cos v\left(2\cos v - \sin v\right) + u^2 \sin v\cos v\left(\cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^2 \sin v\cos v\left(2\cos v - \sin v + \cos v - 2\sin v\right) =$$

$$= u^2 \sin v\cos v\left(3\cos v - 3\sin v\right) = 3u^2 \sin v\cos v\left(\cos v - \sin v\right)$$

.

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \left(-u\sin v\right) + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot u\cos v =$$

$$=\left(2u\cos v\cdot u\sin v-u^2\sin^2 v\right)\cdot\left(-u\sin v\right)+\left(u^2\cos^2 v-2u^2\cos v\sin v\right)\times$$

$$\times u\cos v=-u^3\sin^2 v\left(2\cos v-\sin v\right)+u^3\cos^2 v\left(\cos v-2\sin v\right)=$$

$$=u^3\left(\underline{-2\sin^2 v\cos v}+\underline{\underline{\sin^3 v}}+\underline{\underline{\cos^3 v}}-\underline{2\cos^2 v\sin v}\right)=$$

$$=u^3\left[-2\sin v\cos v\left(\sin v+\cos v\right)+\left(\sin v+\cos v\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\sin^2 v-\sin v\cos v+\cos^2 v\right)\right]=u^3\left(\sin v+\cos v\right)\left(1-3\sin v\cos v\right).$$

4.3. Вправи для самостійного розв'язання

1. Показати, що функція $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, де $x=u+v$, $y=u-v$, задовольняє співвідношенню $\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u-v}{v^2+u^2}$.

2. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=x^2\cdot\ln y$, де $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$.

Відповідь:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2\frac{u}{v^2}\ln\left(3u-2v\right)+\frac{3u^2}{v^2\left(3u-2v\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{2u^2}{v^3}\ln\left(3u-2v\right)-\frac{2u^2}{v^2\left(3u-2v\right)}.$$

Тема 5. Повний диференціал функції двох змінних

5.1. Основні теоретичні відомості

Означення 1. Повним диференціалом dz диференційованої у точці $M\left(x,y\right)$ функції $z=f\left(x,y\right)$ називають лінійну відносно Δx та Δy частину повного приросту цієї функції у точці M :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогічна формула має місце і для $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ диференційованої функції трьох змінних $u = f\left(x, y, z\right)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Повний диференціал називають також головною частиною повного приросту диференційованої функції. При цьому виконується наближена рівність $\Delta z \approx dz$. Її можна записати у вигляді:

$$f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right) \approx f\left(x, y\right) + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\Delta y.$$

Рівність широко використовується у наближених обчисленнях, оскільки у багатьох випадках диференціал функції обчислюється простіше, ніж її повний приріст.

Розглянемо, як за допомогою диференціала можна оцінити похибку у обчисленнях. Нехай задана диференційована функція n змінних $u = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, аргументи якої виміряні з точністю Δx_1, Δx_2, …, Δx_n. Потрібно знайти похибку обчислення u.

Природно вважати, що ця похибка дорівнює величині

$$\Delta u = f\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n\right) - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

Для малих значень Δx_i маємо

$$\Delta u \approx du = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Звідси отримуємо:

$$\left|\Delta u\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \cdot \left|\Delta x_1\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \cdot \left|\Delta x_2\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \cdot \left|\Delta x_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \left|\Delta x_i\right|.$$

Якщо через $\left|\Delta^* x_i\right|$ позначити максимальну абсолютну похибку змінної x_i, то вираз для максимальної абсолютної похибки $\left|\Delta^* u\right|$ функції u можна записати у вигляді:

$$\left|\Delta^* u\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \left|\Delta^* x_i\right|.$$

Щоб оцінити максимальну відносну похибку функції u, поділимо обидві частини рівності на величину $|u| = \left|f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right|$:

$$\left|\delta^* u\right| = \left|\frac{\Delta^* u}{u}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{f'_{x_i}}{f}\right| \cdot \left|\Delta^* x_i\right|.$$

Оскільки $\frac{f'_{x_i}}{f} = \frac{\partial\left(\ln|f|\right)}{\partial x_i}$, то рівність можна записати у вигляді:

$$\left|\delta^* u\right| = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial\left(\ln|f|\right)}{\partial x_i}\right| \cdot \left|\Delta^* x_i\right|.$$

Цю рівність можна записати як $\left|\delta^* u\right| = \left|\Delta^* \ln|f|\right|$, тобто максимальна відносна похибка обчислення функції дорівнює максимальній абсолютній похибці обчислення її логарифма.

5.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції $z = x^3 y^2$.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні z'_x та z'_y. Для заданої функції отримуємо $z'_x = 3x^2 y^2$, $z'_y = 2x^3 y$. Тоді повний диференціал dz має вигляд:

$$dz = 3x^2 y^2 dx + 2x^3 y dy.$$

Приклад 2. Обчислити повний диференціал функції $z = \frac{x^2}{y}$ у точці $M\left(1, 2\right)$.

Розв'язання. Частинні похідні заданої функції $z'_x = \frac{2x}{y}$, $z'_y = -\frac{x^2}{y^2}$. У точці M $z'_x(1,2) = \frac{2\cdot 1}{2} = 1$, $z'_y(1,2) = -\frac{1^2}{2^2} = -\frac{1}{4}$.

$dz = z'_x dx + z'_y dy = dx - \frac{dy}{4}$.

Приклад 3. Обчислити наближено за допомогою повного диференціала значення $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ і застосуємо до неї формулу , взявши $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$. Знаходимо частинні похідні:

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+(x-y)^2},$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2+(x-y)^2}.$$

Формула для функції $z = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ набуває вигляду:

$$arctg\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y}-1\right) = arctg\left(\frac{x}{y}-1\right) + \frac{y}{y^2+(x-y)^2}\Delta x - \frac{x}{y^2+(x-y)^2}\Delta y$$

.

Підставляючи сюди $x = 2$, $y = 1$, $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$, маємо:

$$arctg\left(\frac{2-0,03}{1+0,02}-1\right)\approx arctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+\frac{1}{1+\left(2-1\right)^2}\cdot\left(-0,03\right)-\frac{2}{1+\left(2-1\right)^2}\cdot 0,02=$$

$$=\frac{\pi}{4}-0,015-0,020\approx 0,75.$$

Приклад 4. Період коливання маятника дорівнює $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння. Виразивши звідси g, знаходимо: $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Цією формулою користуються для обчислення прискорення вільного падіння у різних точках земної поверхні, для чого вимірюють величини l і T.Нехай у результаті вимірювань отримали значення $l=50\pm0,01$см, $T=1,4196\pm0,0001$с. Потрібно знайти прискорення вільного падіння g та максимальні абсолютну та відносну похибки знайденого значення g, вважаючи $\pi=3,1416\pm0,0001$.

Розв'язання. Логарифмуючи вираз для прискорення вільного падіння g, маємо:

$$\ln g=\ln 4+2\ln\pi+\ln l+2\ln T.$$

Максимальні абсолютні похибки аргументів функції $g\left(T,l,\pi\right)$ відповідно дорівнюють $\Delta^*T=0,0001$, $\Delta^*l=0,01$, $\Delta^*\pi=0,0001$.

Знайдемо наближене значення g:

$$g=\frac{4\cdot\left(3,1416\right)^2\cdot 50}{\left(1,4196\right)^2}=979,5\,(\text{см/с}^2).$$

Знаходимо значення максимальних відносної та абсолютної похибки:

$$\left|\delta^*g\right|=\left|\Delta^*\ln\left|g\right|\right|=\frac{2\left|\Delta^*\pi\right|}{\pi}+\frac{\left|\Delta^*l\right|}{l}+\frac{2\left|\Delta^*T\right|}{T}=\frac{2\cdot 0,0001}{3,1416}+\frac{0,01}{50}+\frac{2\cdot 0,0001}{1,4196}\approx$$

$$\approx 0,0004=0,04\%.$$

$$\left|\Delta^*g\right|=\left|\delta^*g\right|\cdot g=0,0004\cdot 979,5\approx 0,4\ (\text{см/с}).$$

Отже, $g\approx 979,5\pm0,4$ (см/с^2).

5.3. Індивідуальні завдання

Знайти повні диференціал функції

5.1. $z = 2x^3 y - 4xy^5$

5.2. $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$

5.3. $z = arctgx + \sqrt{y}$

5.4. $z = 7x - x^3 y^2 + y^4$

5.5. $z = 5xy^4 + 2x^2 y^7$

5.6. $z = e^{y-x} - ln(xy+2)$

5.7. $z = ln(3x^2 - 2y^2)$

5.8. $z = x^2 y \cdot sin\, x - 3y$

5.9. $z = arcsin(x + y)$

5.10. $z = arcsin(xy) - 3xy$

5.11. $z = 7x^3 y - \sqrt{xy}$

5.12. $z = cos(x^2 - y^2) + x^3$

5.13. $z = e^{x+y-4}$

5.14. $z = 5xy^2 - 3x^3 y^4$

5.15. $z = tg((x + y) : (x - y))$

5.16. $z = arctg(2x - y)$

5.17. $z = ctg(y : x)$

5.18. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$

5.19. $z = xy^4 - 3x^2 y + 1$

5.20. $z = cos(3x + y) - x^2$

5.21. $z = 2x^2 y^2 + x^3 + 1$

5.22. $z = ln(x + xy - y^2)$

5.23. $z = arcsin((x + y) : x)$

5.24. $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$

5.25. $z = arctg(x - y)$

5.26. $z = y^2 - 3xy - x^4$

5.27. $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$

5.28. $z = ln(y^2 - x^2 + 3)$

5.29. $z = arccos(x + y)$

5.30. $z = arctg(2x - y)$

Тема 6. Диференціювання неявних функцій

6.1. Основні теоретичні відомості

Розглянемо цю задачу з використанням поняття частинної похідної.

Нехай задано рівняння $F(x, y) = 0$. Раніше було сформульовано означення неявної функції, згідно з яким це рівняння визначає неявну функцію $y = \varphi(x)$ на множині D, коли кожному значенню x з цієї множини відповідає єдине значення y, що разом з x задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$.

Умови, яким повинна задовольняти функція двох змінних $F(x,y)$, щоб рівняння $F(x,y)=0$ визначало неявному функцію, сформульовані у наступній теоремі існування неявної функції (сформулюємо її без доведення).

Теорема 1. Нехай функція $F(x,y)$ та її частинні похідні F'_x та F'_y визначені та неперервні у деякому околі точки $M(x_0,y_0)$ і $F(x_0,y_0)=0$, причому $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тоді існує окіл точки M, у якому рівняння $F(x,y)=0$ визначає єдину неявну функцію $y=\varphi(x)$, неперервну та диференційовану у околі точки x_0 і таку, що $\varphi(x_0)=y_0$.

Знайдемо похідну неявної функції. Нехай ліва частина рівняння $F(x,y)=0$ задовольняє умови теореми 1. Тоді це рівняння визначає неявну функцію $y=y(x)$, для якої на деякій множині точок x виконується тотожність $F(x,y(x))\equiv 0$. Оскільки похідна функції, тотожно рівної нулю, також тотожно дорівнює нулю, то повна похідна $\dfrac{dF}{dx}\equiv 0$, тобто, за формулою (2), $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}\equiv 0$.

З останньої тотожності отримуємо:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{4}$$

Формула (4) дозволяє знаходити похідну неявної функції однієї змінної.

Розглянемо задачу диференціювання неявної функції двох змінних. Нехай задано рівняння

$$F(x,y,z)=0. \tag{5}$$

Якщо кожній парі чисел (x,y) з деякої множини відповідає єдине значення z, яке разом з x та y задовольняє рівняння , то це рівняння визначає неявну функцію $z=\varphi(x,y)$.

Справедливою є наступна теорема існування неявної функції двох змінних.

Теорема 2. Нехай функція $F(x,y,z)$ та її похідні $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ і $F'_z(x,y,z)$ визначені і неперервні у деякому околі точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, причому $F(x_0,y_0,z_0)=0$, а $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. Тоді існує окіл точки M, у якому рівняння визначає єдину функцію $z=\varphi(x,y)$, неперервну і диференційовану у околі точки (x_0,y_0), таку, що $\varphi(x_0,y_0)=z_0$.

Знайдемо частинні похідні z'_x та z'_y неявної функції $z(x,y)$, заданої рівнянням (5). Коли визначаємо частинні похідні z'_x та z'_y, то вважаємо сталими відповідно змінні y та x. Тому, використавши формулу (4), отримуємо:

$$z'_x=-\frac{F'_x}{F'_z},\ z'_y=-\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{6}$$

Аналогічно знаходять похідні неявної функції $y=y(x_1,x_2,...,x_n)$, яка задається рівнянням $F(x_1,x_2,...,x_n,y)=0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}}{F'_y}, i=1,2,...,n; F'_y\neq 0.$$

6.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції $z=z(x,y)$, якщо $e^z-x^2y+z+1=0$.

Розв'язання. За формулами (6) знайдемо частинні похідні z'_x та z'_y. Маємо $F'_x=-2xy$, $F'_y=-x^2$, $F'_z=e^z+1$. Тоді $z'_x=\frac{2xy}{e^z+1}$, $z'_y=\frac{x^2}{e^z+1}$. Повний диференціал функції $z=z(x,y)$ має вигляд:

$$dz=\frac{2xydx+x^2dy}{e^z+1}$$

Приклад 2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

Позначимо $F(x,\ y,\ z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - y\,z + y$.

Знайдемо частинні похідні:

$F_x'(x,\ y,\ z) = 2x$, $F_y'(x,\ y,\ z) = -4y - z + 1$,

$F_z'(x,\ y,\ z) = 6z - y$.

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{6z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

Приклад 3. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Позначимо $F(x,\ y,\ z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Знайдемо частинні похідні

$$F_x'(x,\ y,\ z) = \frac{2x}{a^2},\quad F_y'(x,\ y,\ z) = \frac{2y}{b^2},\quad F_z'(x,\ y,\ z) = \frac{2z}{c^2}.$$

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = --\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2z}{c^2}} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}.$$

Приклад 4. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $e^z - xyz = 0$.

Позначимо $F(x,\ y,\ z) = e^z - xyz$. Знайдемо частинні похідні:

$$F_x'(x,\ y,\ z) = -yz,\quad F_y'(x,\ y,\ z) = -xz,\quad F_z'(x,\ y,\ z) = e^z - xy.$$

За формулами (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-yz}{e^z - xy} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{e^z - xy}.$$

Враховуючи задане рівняння $e^z - xyz = 0$, отримаємо $e^z = xyz$. Тоді знайдені вище похідні запишуться так:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{yz}{xy(z-1)} = \frac{z}{x(z-1)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{xyz - xy} = \frac{xz}{xy(z-1)} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

6.3. Вправи для самостійного розв'язання

1. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

2. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3 + 3xyz = a^2$.

3. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$.

Відповіді:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2-x}{z+1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y}{z+1}$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{yz}{xy+z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{xy}{xy+z^2}$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$.

6.4. Індивідуальні завдання

Обчислити з точністю до 0,001 значення частинних похідних від неявно заданої функції в точці $M_o(x_o, y_o, z_o)$

6.1. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4,$ $M_o(2,1,1)$

6.2. $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2,$ $M_o(-1,0,1)$

6.3. $3x + 2y + z = xz + 5,$ $M_o(2,1,-1)$

6.4. $e^z + x + 2y + z = 4,$ $M_o(1,1,0)$

6.5. $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0,$ $M_o(1,1,-1)$

6.6. $z^3 + 3xyz + 3y = 7,$ $M_o(1,1,1)$

6.7. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1{,}5,$ $M_o(\pi/4, 3\pi/4, \pi/4)$

6.8. $e^{z-1} = \cos x \cdot \cos y + 1,$ $M_o(0,\pi/2,1)$

6.9. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0,$ $M_o(1,2,1)$

6.10. $xy = z^2 - 1,$ $M_o(0,1,-1)$

6.11. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 2,$ $M_o(1,1,1)$

6.12. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5,$ $M_o(0,2,1)$

6.13. $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \pi/2,$ $M_o(0,\pi/2,\pi)$

6.14. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4,$ $M_o(2,1,2)$

6.15. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0,$ $M_o(1,1,1)$

6.16. $x + y + z + 2 = xyz,$ $M_o(2,-1,-1)$

6.17. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2 = 0,$ $M_o(0,1,-1)$

6.18. $e^z - xyz - x + 1 = 0,$ $M_o(2,1,0)$

6.19. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0,$ $M_o(1,-1,2)$

6.20. $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0,$ $M_o(0,-2,2)$

6.21. $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3,$ $M_o(1,2,0)$

6.22. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0,$ $M_o(1,-1,1)$

6.23. $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0,$ $M_o(0,1,-1)$

6.24. $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3,$ $M_o(4,3,1)$

6.25. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59,$ $M_o(3,1,4)$

6.26. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17,$ $M_o(-2,-1,2)$

6.27. $x^3 + 3xyz - z^3 = 27,$ $M_o(3,1,3)$

6.28. $\ln z = x + 2y - z + \ln 3,$ $M_o(1,1,3)$

6.29. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0,$ $M_o(2,1,1)$

6.30. $z^2 = xy - z + x^2 - 4,$ $M_o(2,1,1)$

Тема 7. Екстремуми функції двох змінних

7.1. Основні теоретичні відомості

Функція $f(x, y)$ має *локальний максимум* (*мінімум*) $f(a, b)$ у точці $P(a; b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x; y)$ у деякому околі точки P виконується нерівність $f(a, b) > f(x, y)$ (відповідно $f(a, b) < f(x, y)$). Максимум або мінімум функції називається її *екстремумом*. Аналогічно визначається екстремум функції трьох і більшого числа змінних.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційована функція $f(x, y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв’язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x, y) = 0 \\ f_y'(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Розв’язки системи (1) називають *стаціонарними точками*.

У загальному випадку в точці екстремуму $P(a; b)$ функції $f(x, y)$ або виконуються умови (13), або принаймні одна з похідних f_x', f_y' не існує.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a; b)$ знаходимо

$$A = f_x''(a,\,b),\ \ B = f_{xy}''(a,\,b),\ \ C = f_{yy}''(a,\,b),\ \ \Delta = AC - B^2 .$$

Тоді: 1) якщо $\Delta > 0$, то функція має екстремум у точці $P(a;\,b)$, а саме – максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $P(a;\,b)$ немає;

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібні подальші дослідження.

7.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Дослідити на екстремуми функцію

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y .$$

Знайдемо частинні похідні і складемо систему :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12,\ \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{або}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему і знаходимо чотири стаціонарні точки: $P_1(1;\,2)$, $P_2(2;\,1)$, $P_3(-1;\,-2)$, $P_4(-2;\,-1)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$ і обчислимо $\Delta = AC - B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка P_1: $A = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6$, $B = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12$, $C = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6$;

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 = -108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_1 екстремуму немає.

2) Точка P_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$; $\Delta = 144 - 36 = 108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то у точці P_2 функція має мінімум. Цей мінімум дорівнює значенню функції при $x = 2$, $y = 1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3) Точки P_3: $A=-6$, $B=-12$, $C=-6$; $\Delta = 36-144=-108$. Оскільки $\Delta < 0$, то у точці P_3 екстремуму немає.

4) Точка P_4: $A=-12$, $B=-6$, $C=-12$; $\Delta = 144-36=108$. Оскільки $\Delta > 0$ і $A<0$, то у точці P_4 функція має максимум, що дорівнює $z_{\max} = -8-6+30+12=28$.

7.3. Вправи для самостійного розв'язання

1. Дослідити на екстремуми функцію $z = x^2+xy+y^2-2x-y$.

2. Дослідити на екстремуми функцію $z=\left(x-1\right)^2-2y^2$.

Відповіді:

1. $z_{\min} = -1$ при $x=1$, $y=0$.

2. Екстремумів немає.

7.4. Індивідуальні завдання

Дослідити на екстремуми наступні функції

7.1. $z = y\cdot\sqrt{x}-2y^2-x+14y$

7.2. $z=x^3+8y^3-6xy+5$

7.3. $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$

7.4. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$

7.5. $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$

7.6. $z=2x^3+2y^3-6xy+5$

7.7. $z=3x^3+3y^3-9xy+10$

7.8. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$

7.9. $z=4(x-y)-x^2-y^2$

7.10. $z=6(x-y)-3x^2-3y^2$

7.11. $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$

7.12. $z=(x-2)^2+2y^2-10$

7.13. $z=(x-5)^2+y^2+1$

7.14. $z=x^3+y^3-3xy$

7.15. $z=2xy-2x^2-4y^2$

7.16. $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$

7.17. $z=2xy-5x^2-3y^2+2$

7.18. $z=xy(12-x-y)$

7.19. $z=xy-x^2-y^2+9$

7.20. $z=2xy-3x^2-2y^2+10$

7.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$

7.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

7.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

7.24. $z = xy(6 - x - y)$

7.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

7.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$

7.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$

7.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$

7.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2 + 1$

7.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2 - 2$

Тема 8. Найбільше і найменше значення функції

8.1. Основні теоретичні відомості

Відомо, що функція $z = f(x,y)$, що задана та неперервна у замкненій обмеженій області D, досягає в цій області найбільшого та найменшого значень. У внутрішніх точках області диференційована функція може набувати цих значень лише у точках локального екстремуму. Тому треба знайти всі стаціонарні точки функції, які належать області D, розв'язавши систему рівнянь $f'_x(x,y) = 0$, і обчислити значення функції у цих точках. Потім потрібно дослідити функцію на екстремум на межі області D, використовуючи рівняння межі, цю задачу зводять до знаходження абсолютного екстремуму функції однієї змінної. Серед здобутих таким чином значень функції всередині і на межі області вибирають найбільше та найменше значення.

8.2. Завдання для виконання на практичному занятті

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 y(2 - x - y)$ в замкненій області D, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Розв'язання. Знайдемо стаціонарні точки функції. Для цього знайдемо її частинні похідні. $z'_x = xy(4 - 3x - 2y)$, $z'_y = x^2(2 - x - 2y)$. Вибираємо стаціонарні точки, що лежать всередині області D. Тут $x \neq 0$, $y \neq 0$, тому

$$\begin{cases} 4-3x-2y=0, \\ 2-x-2y=0. \end{cases}$$

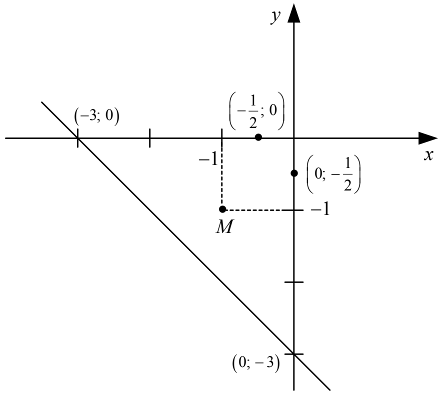
Розв’язуючи цю систему рівнянь, отримуємо $x=1$, $y=\frac{1}{2}$. Точка $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$ лежить всередині області D, тому обчислюємо значення функції у цій точці: $z(M)=z\left(1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Знайдемо найбільше та найменше значення функції на межі області D – трикутника OAB, де $\mathrm{O}(0,0)$ – початок координат, точка A – точка перетину прямої $x+y=6$ з віссю Ox, $A(6,0)$, точка B – точка перетину цієї прямої з віссю Oy, $B(0,6)$. Рівняннями сторін OB та OA трикутника OAB є відповідно $x=0$ та $y=0$, тому значення функції $z=x^2y(2-x-y)$ на цих сторонах дорівнюють нулю, зокрема, $z(O)=z(A)=z(B)=0$.

Знайдемо найбільше та найменше значення функції $z(x,y)$ на стороні AB. Тут $y=6-x$, $z=x^2(6-x)(2-x-6+x)=-4x^2(6-x)$, $0\le x\le 6$. Знаходимо стаціонарні точки отриманої функції однієї змінної: $z'_x=-48x+12x^2=0$. Звідси знаходимо $x_1=0$, $x_2=4$. Оскільки $y=6-x$, то $y_1=6$, $y_2=2$. Отримали точки $B(0,6)$ та $C(4,2)$. Знаходимо $z(C)=z(4,2)=-128$. Порівнюючи значення функції у точках A, B, C, O, M . Знаходимо найбільше значення Z(M)=1/4, найменше значення функції Z(C)=-128.

Приклад 2. Визначити найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в області $x\le 0$, $y\le 0$, $x+y\ge -3$.

Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x=0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції:

$z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$z(0)=0+0=0$.

При $y=0$ маємо $z=x^2+x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3\le x\le 0$.

$z'=\left(x^2+x\right)'=2x+1$.

$z'=0$: $2x+1=0$, $x=-\dfrac{1}{2}\in[-3,\ 0]$.

$z\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$,

$z(-3)=(-3)^2-3=6$,

$z(0)=0+0=0$.

При $x+y=-3$, або $y=-3-x$ маємо функцію

$$z=x^2+(-3-x)^2-x\cdot(-3-x)+x+(-3-x)=3x^2+9x+6$$

на відрізку $-3\le x\le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$z'=\left(3x^2+9x+6\right)'=6x+9$.

$z'=0$: $6x+9=0$, $x=-\dfrac{3}{2}\in[-3,\ 0]$.

$z\left(-\dfrac{3}{2}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2+9\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)+6=-\dfrac{3}{4}$,

$z(-3)=3\cdot(-3)^2+9\cdot(-3)+6=6$,

$z(0)=0+0+6=6$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}}=6$ у точках $(0;\,-3)$ і $(-3;\,0)$; $z_{\text{найм.}}=-1$ у стаціонарній точці $M(-1;\,-1)$.

8.3. Вправи для самостійного розв’язання

1. Знайти найбільше значення функції $z = x + y + 2$ в областях: 1) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$; 2) $x \ge 0$, $y \le 0$, $x - y \le 1$.

Відповідь:

1) $z_{\text{найб.}} = 3$ при $x = 0$, $y = 1$.

2) $z_{\text{найб.}} = 3$ при $x = 1$, $y = 0$.

8.4. Індивідуальні завдання

Знайти найбільше і найменше значення функції $z = z(x, y)$ в області D, обмеженої поданими лініями

8.1. $z = 3x + y - xy$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

8.2. $z = xy - x - 2y$ $\quad D: x = 3, y = x, y = 0$

8.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$

8.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$

8.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\quad D: x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3$

8.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$

8.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 6, y = 0$

8.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ $\quad D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$

8.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0$

8.10. $z = x^2 + 2xy - 10$ $\quad D: y = 0, y = x^2 - 4$

8.11. $z = xy - 2x - y$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

8.12. $z = 0{,}5 \cdot x^2 - xy$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

8.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y = 1$

8.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ $\quad D: y = \sqrt{9 - 2{,}5 \cdot x^2}, y = 0$

8.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ $\quad D: x = -3, x + y + 1 = 0, y = 0$

8.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$ $\quad D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$

8.17. $z = 2x^2 + 2xy - 0{,}5y^2 - 4x$ $\quad D: y = 2x, y = 2, x = 0$

8.18. $z = x^2 - 2xy + 2{,}5y^2 - 2x$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

8.19. $z = xy - 3x - 2y$ $\quad D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$

8.20. $z = x^2 + xy - 2$ $\quad D: y = 4x^2 - 4, y = 0$

8.21. $z = x^2 y \cdot (4 - x - y)$ $\quad D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$

8.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ $\quad D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$

8.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ $\quad D: x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0$

8.24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $\quad D: y = x, y = 4, x = 0$

8.25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$ $\quad D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$

8.26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ $\quad D: y = x + 2, y = 0, x = 2$

8.27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$ $\quad D: y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}$

8.28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ $\quad D: x = -1, x = 1, y = \pm 1$

8.29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$

$D: x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0$

8.30. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2$ $\quad D: x = 0, y = 0, x + y = 6$

Завдання для виконання контрольної роботи

Варіант № 1

1. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \ln(2x + 3y)$.

2. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^{-4} + 3y^{-3} + z^5 - 7xyz - 5yx + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну u'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $u = e^{\frac{z}{x+y}}$, $z = x^2 + y^2$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом: $z=12x^2 + 3xy + y^2$, $M_0(2;1)$, $M_1(1{,}96;0{,}95)$.

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2 - y^2 - 8xy + 2.$$

Варіант № 2

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \sin(3x + 4y)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^{-4} + 3y^3 + z^{-5} - 3xyz - 2yx - 7 = 0.$$

3. Обчислити похідну u'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $u = e^{\frac{z}{x+y}}$, $z = x^2 + y^2$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом: $z=xy + 12y^2 - 12x$, $M_0(2;1)$, $M_1(1{,}95;0{,}95)$.

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2 + y^2 - 12xy + 32.$$

Варіант № 3

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = e^{-5y} \cos(5x)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно .

$$4x^4 + 3y^3 + z^{-5} - 3xyz - 2yx - 6 = 0.$$

3. Обчислити похідну u'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $u = x^2 + y^2 + z^2$, $z = \sqrt{xy}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=2xy + 13y - 15x,\ M_0(3;4),\ M_1(2{,}96;3{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^3 y^2 (6 - x - y).$$

Варіант № 4

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = e^{-5y} \cdot \sin(5x)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно.

$$x^4 + 3y^{-3} + z^5 - 5xyz - 2yx + 7 = 0.$$

3. Обчислити похідну u'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $u = x^2 + y^2 + z^2$, $z = \sqrt{xy}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=3x^2+2y^2-10xy,\ M_0(3;2),\ M_1(2{,}96;1{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^3+y^3-3xy.$$

Варіант № 5

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z=y\cos\left(x^2-y^2\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і функції z заданої неявно.

$$x^{-4}+3y^3+z^5-6xyz-2yx+7=0.$$

3. Обчислити похідну z'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $z=\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right)$, $u=x\sin y$, $v=x\cos y$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=13x^2+2y^2-xy,\ M_0(-1;3),\ M_1(-0{,}96;2{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1.$$

Варіант № 6

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та

повний диференціал другого порядку функції $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно.

$$x^3 + 2y^3 + z^{30} - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \ln(u^2 + v^2)$, $u = x\cos y$, $v = y\sin x$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + 11y^2 + 2x + y - 1, \ M_0(2;4), \ M_1(1{,}96;3{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = -4 + 6x - x^2 - xy - y^2.$$

Варіант № 7

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = xy + x\sin\left(\frac{y}{x}\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^3 + 2y^{29} + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \ln(x^2 + y^2)$, $y = e^{x^2}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=x^2+12xy+3y^2,\ M_0(2;1),\ M_1(1{,}96;0{,}96).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2y(4-x-y).$$

Варіант № 8

1. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z=\dfrac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$.

2. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$2x^{28}+y^3+z^3-3xyz-2y+3=0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$, $y=\cos x$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=x^2+2xy+23y^2,\ M_0(2;1),\ M_1(1{,}95;0{,}96).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2+2xy-4x+8y.$$

Варіант № 9

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = x\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^4 + y^4 + 4z^4 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$, $y = e^{x^2}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + 20xy + 3y^2, \; M_0(2;1), \; M_1(1{,}95;0{,}96).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2.$$

Варіант № 10

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \frac{xy}{x+y}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xyz - 2y + 2 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = e^{\frac{x}{y}}$, $y = \sin^3 x$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 - y^2 + 6x + 23y, \quad M_0(2;3), \quad M_1(1{,}95;2{,}96).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y - 1.$$

Варіант № 11

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \arcsin\left(\frac{x - y}{x + y}\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 9xyz - 2y - 2z + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = x^y$, $y = \ln x$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + 3xy - 26x, \quad M_0(4;1), \quad M_1(3{,}95;0{,}96).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y.$$

Варіант № 12

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = x\cos(x+y) + y\sin(x+y)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 3xyz - 2xy + y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = xy$, $x = \sin t$, $y = \ln t$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = 3x^2 - 20xy + x + y,\ M_0(1;3),\ M_1(1{,}95;2{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2.$$

Варіант № 13

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \cos y + (y - x)\sin y$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^2 + 2y^3 + z^4 - 5xyz - 6y + 7 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = x^y$, $x = \sin t$, $y = \operatorname{tg} t$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = xy + 22y^2 - 22x, \quad M_0(1;2), \quad M_1(1{,}04;1{,}97).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y + 3.$$

Варіант № 14

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \sin(x + 2y)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz + x + y + z + 1 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \sin^2 x$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 - y^2 + 25x + 24y, \quad M_0(3;4), \quad M_1(2{,}96;4{,}05).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 - 2xy + 3.$$

Варіант № 15

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = x^y$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^8 + 2y^7 + z^6 - 3xyz - 2x + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = e^{2x(y-x)}$, $x = 2\sin t$, $y = \cos t$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 - 20y^2 + 25x + 24y, \quad M_0(3;2), \quad M_1(2{,}98;2{,}06).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + xy - 3y^2 - y.$$

Варіант № 16

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \cos^2(x + y)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$50x^5 + 5y^{50} + z^{25} - 5xyz - y + 5 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = x^2 + xy$, $x = \ln t$, $y = e^t$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом: $z = 23x^2 + 22y^2 - 2xy$, $M_0(3;5)$, $M_1(2{,}94;4{,}05)$.

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy.$$

Варіант № 17

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \frac{x}{y}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^{18} + 2y^{19} + z^{20} - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$, $x = e^t$, $y = t^2$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + y^2 + 32x + y - 1,\ M_0(2;4),\ M_1(2{,}04;4{,}05).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5.$$

Варіант № 18

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \ln\left(x + e^{-y}\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^{30} + 2y^{30} + z^{30} - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \mathrm{tg}\left(3t + 2x^2 + y\right)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \sqrt{t}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + 32xy + y^2, \quad M_0(2;1), \quad M_1(2{,}02;0{,}96).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Варіант № 19

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \mathrm{arctg}(x + y)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^{-3} + 2y^{-3} + z^{-3} - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=x^2-y^2+6x+33y,\ M_0(2;3),\ M_1(1{,}96;2{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2+2y^2+4xy+1.$$

Варіант № 20

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = xe^{\frac{x}{y}}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно $9x^3+2y^3+z^3-3xyz-2xy+9=0$.

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z=\operatorname{arctg}(xy)$, $y=e^x$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=30x^2+3xy-6x,\ M_0(4;1),\ M_1(4{,}05;0{,}98).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2+4xy-y^2-6x-2y.$$

Варіант № 21

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно $x^{23} + 12y^{33} + z^{83} - 31xyz - 22y + 33 = 0$.

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$, $y = x^3$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = 33x^2 - xy + x + y,\ M_0(1;3),\ M_1(0{,}96;3{,}02).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + y^2 - 4xy - 4.$$

Варіант № 22

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \frac{x^2 y^2}{(x+y)}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно $x^4 + y^{12} + z^4 - xyz - y + 12 = 0$.

3. Обчислити похідну z'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + xy + 40y^2, \; M_0(1;2), \; M_1(0{,}98;1{,}04).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + 2y^2 - 2x - 3y + 5.$$

Варіант № 23

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = (\sin x) \cdot \frac{(e^y + e^{-y})}{2}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = 40xy + 2y^2 - 2x, \; M_0(1;2), \; M_1(0{,}97;2{,}03).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + xy.$$

Варіант № 24

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \ln(x + y)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно $7x^7 + 7y^7 + 7z^7 + 7xyz + 7z + 1 = 0$.

3. Обчислити похідну z'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $z = u^2 v - uv^2$, $u = x\cos y$, $v = x\sin y$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = 2xy + 3y^2 - 45x,\ M_0(3;4),\ M_1(3{,}04;3{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних $z = x^2 + xy - 2$.

Варіант № 25

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = e^{xy}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^4 + y^{11} + z^9 - xyz - y + 11 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $z = u^2 v - uv^2$, $u = x\cos y$, $v = x\sin y$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у відсотках)

похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:
$z = 40x^2 - y^2 + 5x + 4y$, $M_0(3;2)$, $M_1(3{,}02;1{,}98)$.

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x.$$

Варіант № 26

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2x + 1\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^{10} + y^3 + z^{13} - 3xyz - 20x + 13 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \arcsin(x - y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = 43x^2 + 42y^2 - xy,\ M_0(-1;3),\ M_1(-0{,}98;2{,}97).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = 10 + 2xy - x^2.$$

Варіант № 27

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \frac{y^2}{\sqrt{xy}}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$10x^3 + 20y^3 + z^{18} - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_t, використовуючи формулу похідної складної функції $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + y^2 + 42x + 41, \quad M_0(2;4), \quad M_1(1{,}98;3{,}91).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4.$$

Варіант № 28

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^3 + 2y^3 + z^9 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

3. Обчислити похідну z'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right)$, $u = x + 2\sin y$, $v = x + 2\cos y$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=50x^2+2xy+3y^2,\ M_0(2;1),\ M_1(1{,}96;1{,}04).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2+3y^2+x-y.$$

Варіант № 29

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^9+y^8+z^{30}-30xyz-2xy+30=0.$$

3. Обчислити похідну u'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $u=x^2-2y^2+z^2$, $z=\sqrt{x+y}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=x^2-50y^2+6x+3y,\ M_0(2;3),\ M_1(2{,}02;2{,}97).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2+2xy+2y^2.$$

Варіант № 30

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^8 + 6y^8 + z^8 - 3xyz - 2x + 30 = 0.$$

3. Обчислити похідну u'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $u = x^2 - 2y^2 + z^2$, $z = \sqrt{x + y}$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z = x^2 + 53xy - 6x, \; M_0(4;1), \; M_1(3{,}96;1{,}03).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z = 3 - 2x^2 - xy + y^2.$$

Варіант № 31

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = e^{\frac{x}{y}}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^3 + 4y^2 + z^3 - 2xyz - 3z + 8 = 0.$$

3. Обчислити похідну u'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $u = e^{\frac{z}{x+y}}$, $z = x^2 - 2y^2$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=3x^2 - xy + 50x + y,\ M_0(1;3),\ M_1(1{,}06;2{,}92).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2 + 2y^2 + 1.$$

Варіант № 32

1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції z заданої неявно

$$x^4 + 3y^3 + z^5 - 3xyz - 2yx + 6 = 0.$$

3. Обчислити похідну u'_y, використовуючи формулу похідної складної функції $u = e^{\frac{z}{x+y}}$, $z = x^2 - 2y^2$.

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом:

$$z=50x^2 + xy + 50y^2,\ M_0(1;2),\ M_1(1{,}04;1{,}95).$$

5*. Знайти екстремум функції багатьох змінних

$$z=x^2 + y^2 - 9xy + 27.$$

Приклад виконання контрольної роботи

1. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ та записати повний диференціал першого та повний диференціал другого порядку функції $z = \ln \cos xy$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\ln \cos xy)_x' = \frac{1}{\cos xy} \cdot (\cos xy)_x' = -\frac{1}{\cos xy} \cdot \sin xy \cdot (xy)_x' = -\frac{1}{\cos xy} \cdot \sin xy \cdot y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\ln \cos xy)_y' = \frac{1}{\cos xy} \cdot (\cos xy)_y' = -\frac{1}{\cos xy} \cdot \sin xy \cdot (xy)_y' = -\frac{1}{\cos xy} \cdot \sin xy \cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(-\frac{y \sin xy}{\cos xy}\right)_x' = -\frac{(y \sin xy)_x' \cos xy - y \sin xy (\cos xy)_x'}{\cos^2 xy} =$$

$$= -\frac{y \cos xy (xy)_x' \cos xy - y \sin xy (-\sin xy)(xy)_x'}{\cos^2 xy} =$$

$$= -\frac{y^2 \cos^2 xy - y^2 \sin^2 xy}{\cos^2 xy} = -\frac{y^2}{\cos^2 xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(-\frac{y \sin xy}{\cos xy}\right)_y' = -\frac{(y \sin xy)_y' \cos xy - y \sin xy (\cos xy)_y'}{\cos^2 xy} =$$

$$= -\frac{\sin xy + yx \cos^2 xy + xy \sin^2 xy}{\cos^2 xy} = -\frac{\sin xy + yx}{\cos^2 xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-\frac{x \sin xy}{\cos xy}\right)_x' = -\frac{(x \sin xy)_x' \cos xy - x \sin xy (\cos xy)_x'}{\cos^2 xy} =$$

$$= -\frac{\sin xy + yx \cos^2 xy + xy \sin^2 xy}{\cos^2 xy} = -\frac{\sin xy + yx}{\cos^2 xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(-\frac{x \sin xy}{\cos xy}\right)_y' = -\frac{(x \sin xy)_y' \cos xy - x \sin xy (\cos xy)_y'}{\cos^2 xy} =$$

$$= -\frac{x^2\cos^2 xy + x^2\sin^2 xy}{\cos^2 xy} = -\frac{x^2}{\cos^2 xy}.$$

Запишемо диференціал першого порядку:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -\frac{y\sin\, xy}{\cos\, xy}dx - \frac{x\sin\, xy}{\cos\, xy}dy = -\operatorname{tg}\, xy\cdot\left(ydx + xdx\right)$$

.

Запишемо диференціал другого порядку:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial xy}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial yx}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= -\frac{y^2}{\cos^2 xy}dx^2 - \frac{\sin xy + yx}{\cos^2 xy}dxdy - \frac{\sin xy + yx}{\cos^2 xy}dydx - \frac{x^2}{\cos^2 xy}dy^2 =$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 xy}\left(y^2dx^2 + (\sin xy + yx)(dxdy + dydx) + x^2dy^2\right).$$

2. Знайти $\frac{\partial\, z}{\partial\, x}$ і $\frac{\partial\, z}{\partial\, y}$ функції z, заданої неявно

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Розв’язання

Перший спосіб. Введемо функцію

$$F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3$$

і знайдемо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3yz,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 3xz - 2,\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

Знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3\left(z^2 - xy\right)}.$$

Другий спосіб. Знайдемо повний диференціал заданої функції як функції трьох змінних:

$$dF = 3x^2dx + 6y^2dy + 3z^2dz - 3yzdx - 3xzdy - 3xydz - 2dy = 0$$

.

Групуючи, дістанемо

$$3\left(x^2 - yz\right)dx + \left(6y^2 - 3xz - 2\right)dy + 3\left(z^2 - xy\right)dz = 0.$$

Звідси

$$dz = -\frac{\left(x^2 - yz\right)}{z^2 - xy}dx - \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3\left(z^2 - xy\right)}dy.$$

Крім того,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Порівнюючи останні два співвідношення, отримуємо розв'язок:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3\left(z^2 - xy\right)}.$$

3.1. Обчислити похідну u'_t використовуючи формулу похідної складної функції $u = x\sin\frac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$, $y = \sqrt{1 + t^2}$.

Розв’язання

За формулою $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y} = \sin\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}\cos\frac{x}{y} = -\frac{(1+3t)^2}{1+t^2}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 3\left(\sin\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}}\right) -$$

$$-\frac{(1+3t)^2}{1+t^2}\cos\frac{1+3t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

3.2. Обчислити похідну u'_x, використовуючи формулу похідної складної функції $u = \ln\cos\left(\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)$, $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання.

За формулою $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}$ (тут $x = x(t) = t$, $z = z(t) = z(x)$, а y вважаємо константою, бо y від x, а значить від t, не залежить) знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\ln\cos\left(\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)\right)'_x = \frac{1}{\cos\left(\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)}\cdot\left(-\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{z}} = tg\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\ln\cos\left(\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)\right)'_z = \frac{1}{\cos\left(\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)}\cdot\left(-\sin\left(\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)\right)\cdot\left(-\frac{xy}{\sqrt{z}}\right)\frac{1}{2\sqrt{z}} =$$

$$= tg\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{xy\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}{2},$$

$$\frac{dz}{dx} = \left(x^2 + y^2\right)'_x = 2x,$$

Підставивши знайдені значення у формулу $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}$, отримаємо:

$$\frac{du}{dx} = tg\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + tg\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot xy\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{2x}{2} =$$

$$= tg\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-y + \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) =$$

$$= -y^3 tg\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

4. Обчислити наближене значення z_1 функції у точці M_1 виходячи зі значення z_0 функції в точці M_0, вказати (у вітсотках) похибку, що виникає при заміні приросту функції її диференціалом.

$$z = x^2 + xy + y^2, \; M_0(1;2), \; M_1(1{,}02;1{,}96).$$

Розв'язання

Обчислюємо значення z_0:

$$z_0 = f(1;2) = 1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2 = 7.$$

Для обчислення приблизного значення z_1 за формулою

$$z_1 \approx z_0 + dz_0, \text{ де } dz_0 = f'_x(x_0;y_0)\Delta x + f'_y(x_0;y_0)\Delta y$$

знаходимо частинні похідні функції $x^2 + xy + y^2$ і їх значення в точці M_0:

$$z'_x = \left(x^2 + xy + y^2\right)'_x = 2x + y \Rightarrow f'_x(1;2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4;$$

$$z'_x = \left(x^2 + xy + y^2\right)'_y = x + 2y \Rightarrow f'_y(1;2) = 1 + 2 \cdot 2 = 5.$$

Таким чином:

$$dz_0 = f'_x(1;2) \cdot (1{,}02 - 1{,}0) + f'_y(1;2) \cdot (1{,}96 - 2{,}0) = 4 \cdot 0{,}02 + 5 \cdot (-0{,}04) = -0{,}12$$

та

$$z_1 \approx 7 + (-0{,}12) = 6{,}88.$$

Перевірка: $z_1 = f(1{,}02;1{,}96) = (1{,}02)^2 + 1{,}02 \cdot 1{,}96 + (1{,}96)^2 = 6{,}8812$.

Відносну похибку δ, що виникає при заміні приросту Δz функції її диференціалом dz у відсотках, знайдемо за формулою

$$\delta = \left| \frac{dz - \Delta z}{\Delta z} \right| \cdot 100\%.$$

Приріст Δz функції $x^2 + xy + y^2$ при переході від точки M_0 до точки M_1 дорівнює $\Delta z_0 = z_1 - z_0 = 6{,}8812 - 7 = -0{,}1188$. Отже,

$$\delta = \left| \frac{-0{,}12 - (-0{,}1188)}{-0{,}1188} \right| \cdot 100\% \approx 1\%.$$

5*. Фірма хоче освоїти два ринки, один із них внутрішній, а другий зовнішній. Відомо, що функції попиту дорівнюють відповідно

$p_1 = 500 - x_1$, $p_2 = 500 - 1{,}5x_2$, а сумарні витрати $C = 50000 + 20x_1 + 20x_2$ тис. грн., де x_1 – кількість продукції, що йде на внутрішній ринок, а x_2 – на зовнішній ринок. Яку цінову політику повинна проводити фірма, щоб прибуток був максимальний?

Розв'язання

Сумарний прибуток у випадку першого ринку дорівнює

$$P_1 = x_1 p_1 = x_1(500 - x_1) = 500x_1 - x_1^2,$$

а у випадку другого $P_2 = x_2 p_2 = x_2(360 - 1{,}5x_2) = 360x_1 - 1{,}5x_1^2$.

Тоді прибуток

$$\pi(x_1, x_2) = P_1 + P_2 - C = 500x_1 - x_1^2 + 360x_2 - 1{,}5x_2^2 - 50000 - 20x_1 - 20x_2$$

Отже, на екстремум треба дослідити функцію

$$\pi(x_1, x_2) = 480x_1 - x_1^2 + 340x_2 - 1{,}5x_2^2 - 50000.$$

Якщо функція приймає найбільше (найменше) значення у точці (x, y), то в такій точці частинні похідні

$$z'_x = \left(2x^3 - 6xy + 3y^2\right)'_x = 480 - 2x_1,$$
$$z'_y = \left(2x^3 - 6xy + 3y\right)'_y = 340 - 3x_2,$$

дорівнюють нулю. Розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} 480 - 2x_1 = 0, \\ 340 - 3x_2 = 0, \end{cases}$

знайдемо точку $M\left(240; \dfrac{340}{3}\right)$, в якій обидві частинні похідні дорівнюють нулю.

Обчислюємо:

$$A = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\,2}} = -2,\ B = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,\ C = \frac{\partial^2 z(x_1, x_2)}{\partial x_2^{\,2}} = -3,$$

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 > 0 \text{ – екстремум.}$$

$A = -2 < 0$, отже в т $M\left(240; \dfrac{340}{3}\right)$ функція має максимум, при цьому на внутрішньому ринку треба продати 240 од. продукції за ціною $p_1 = 500 - 240 = 260$ грн., а на зовнішньому – $\dfrac{340}{3}$ од. за ціною $p_2 = 360 - 1{,}5 \cdot \frac{340}{3} = 180$ грн. Прибуток при цьому буде $\pi(M) = 26866{,}67$ тис. грн.

Список рекомендованої літератури

Основна:

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа./ Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 383 с.
2. Валєєв К. Г, Вища математика: навч. посіб. : у 2-х ч. – ч. 1 / К. Г. Валєєв, І. А. Джаладова – К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
3. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. / И. П. Натансон. – СПб. : Издательство Лань, 1999. – 736 с.
4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: в 2-х т. - Т.1. / Н. С. Пискунов – М. : Наука, 1985. – 560 с.
5. Соколенко О. І. Вища математика: підруч./ О. І. Соколенко – К. : Академія, 2002. – 432 с.

Додаткова:

1. Гудименко Ф.С. Диференціальні рівняння. – К.: Вид-во Київ. держ. ун-ту ім.Т.Г.Шевченка, 1958. – 206 с.
2. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие. – М.: «Наука», 1978. – С. 255-278.
3. Лейфура В.М. та ін. Математика для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації. – К.: Техніка, 2003. – С. 513-537.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Высшая школа, 1974. – 768 с.
5. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр „Академія”, 2002. – С. 280-304.

Зміст

ВСТУП 3
Тема 1. Поняття функції кількох змінних. Область визначення 3
Тема 2. Границя та неперервність функції двох змінних 9
Тема 3. Частинні похідні 13
Тема 4. Похідна складеної функції 20
Тема 5. Повний диференціал функції двох змінних 24
Тема 6. Диференціювання неявних функцій 29
Тема 7. Екстремуми функції двох змінних 35
Тема 8. Найбільше і найменше значення функції 38
Завдання для виконання контрольної роботи 43
Список рекомендованої літератури 71

Навчальне видання

Вища математика.
Диференціальне числення функцій багатьох змінних
(Модуль 7)

Завдання та методичні рекомендації

Укладачі: **Шебанін** В'ячеслав Сергійович
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Атаманюк Ігор Петрович та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 4,5
Тираж 40 прим. Зам. № 1403-1

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р