МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНІЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет
Кафедра вищої та прикладної математики

Математична обробка геодезичних вимірів

Завдання та методичні рекомендації для самостійної роботи здобувачів вищої освіти ступеня „бакалавр” спеціальності 193 „Геодезія та землеустрій” денної форми навчання

Миколаїв
2019

УДК 528.85
Г35

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 19.11.2019 , протокол №4

Укладачі:

В.С. Шебанін – д-р. техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, декан факультету менеджменту, Миколаївського національного аграрного університету;
І.П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шептилевський – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Цепуріт – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
С.І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Бойчук – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;

Рецензент:
В.Д.Будак – д-р техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О.Сухомлинського.

Зміст

ВСТУП

Основою вивчення, та описання фізичних процесів, що відбуваються в надрах Землі та дослідження форми її поверхні є виконання вимірювань певних параметрів досліджуваного процесу. Якими б ретельними не були вимірювання, та які б сучасні засоби не мав дослідник в своєму арсеналі, але повторні результати вимірювання однієї величини завжди відрізнятимуться один від одного. Це є наслідком впливу на виміри низьких факторів найрізноманітнішого походження, які викликають появу виподкових похибок, обробка яких дає можливість виконати уточнення найімовірнішого значення досліджуваної величини.

Цілий ряд фізичних величин з багатьох причин не підлягає безпосередньому вимірюванню, а визначається посереднім способом, а саме шляхом обчислень шуканої величини як функції виміряних величин. На точність обчисленої величини мають вплив похибки виміряних величин.

Математична обробка геодезичних вимірів – дисципліна, що вивчає математичні методи обробки, які застосовуються з метою отримання надійних кількісних та якісних характеристик результатів геодезичний вимірів та їх функцій. Дані методичні рекомендації складено у відповідності до програми з цієї дисципліни в межах годин запланованих на вивчення дисципліни в 4-му семестрі. Математична обробка виміряних величин спирається на потужний апарат теорії ймовірностей, математичної статистик, лінійної алгебри, математичного аналізу функції.

Дані методичні рекомендації складаються з трьох модулів «Теорії ймовірностей та математичної статистики», «Теорії похибок», та «Обробки рядів вимірів». Кожний модуль складається з практичних робіт, що поєднують завдання однієї теми. Кожна практична робота розпочинається з коротких теоретичних відомостей які містять основні поняття, теореми, закони та формули на основі яких виконується практична частина роботи. Після чого розміщено блок навчальних завдань для самостійной роботи на практичному занятті, номер варіанту в яких відповідає порядковому номеру студента за списком групи. При наявності в завданні параметра α його слід взяти рівним двом останнім цифрам номеру залікової книжки. Такий підхід дозволяє реалізувати індивідуалізацію навчання при вивчені дисципліни.

За результатами виконаних обчислень студенти оформлюють роботу згідно встановленого зразка, на листах фармату А4, та мають сдати на перевірку у встановлені викладачем терміни. За результатами перевірки робота оцінюється встановленою кількістю балів в рамках кредитно-модульної системи.

Тема№1. Теоріяймовірностейта математична статистика

Практичнезаняття №1
Повторні незалежні випробування

Короткі теоретичні відомості

Серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія **А** має одну і туж саму ймовірність $P(A) = p$,що не залежить від номера випробувань, називається схемою випробувань Бернуллі.

Поставимо таку задачу. В умовах схеми Бернуллі визначити ймовірність $P_{m,n}$, події, яка полягає в тому, що при n повторюваних незалежних випробуваннях подія **А,** яка має одну й ту саму ймовірність появи в кожному випробуванні, відбудиться рівно m разів в будь якої послідовності.

Поставлену задачу розв'язують за допомогою формули Бернуллі :

$$m_{m,n} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \tag{1}$$

або

$$m_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m} \tag{2}$$

Тут n – число повторюваних незалежних випробувань,m – число випробувань, в яких подія **А** відбулась, Р - ймовірність появи події **А** в кожному випробувані, q – ймовірність непояви події **А** в кожному випробувані $(q = 1 - p)$, $P_{m,n}$ – ймовірність складної події, яка полягає в тому що при n випробуваннях подія **А** наступить рівно m разів.

Найймовірнішим числом m_0 появи події **А** в n незалежних випробуваннях називається число m для якогоймовірність $P_{m,n}$ є найбільшою серед можливих, найімовірніше значення є цілим і визначається нерівністю (3)

$$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p \tag{3}$$

числа $n \cdot p - q$ та $n \cdot p + q$ відрізняються на одиницю.

Тому, якщо границі інтервалу дрібні числа, то отримуємо одне значення найймовірнішого числа m_0, якщо границі є цілими числами, отримуємо два значення найймовірнішего числа. До граничних теорем у схемі Бернулі відносяться :локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Крім того розглянемо використання формули Пуассона у схемі випробувань Бернулі та ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірністі в незалежних випробуван-нях .

1. Локальна теорема Муавра-Лапласа.

При великій кількості випробувань n користування форму-лою Бернулі стає незручним та приводить до значних похибок. Більш відповідною для таких випадків є асимптотична формула, яку дає локальна теорема Муавра-Лапласа:

$$P_{m,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (4)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$,

Функція Гауса $\varphi(x)$ є парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, значення функції Гаусса візначається за допомогою спеціальних розрахункових таблиць(див. табл.1 додаток),для значень що перевищують 5, значення функції приймається рівним нулю.

2. Формула Пуассона.

Використання асимптотичної формули (4) для випадку, коли ймовірність P наближена до нуля приводить до знач-них відхилень від точного значення $P_{m,n}$. Тому при малих значеннях *P* використовується асимптотична формула Пуассона.

$$m_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \text{ де } \lambda = np. \qquad (5)$$

Формула (5) використовується в випадках, коли $\lambda = np < 10$.

3. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа .

Якщо ймовірність настання події **A** в кожному з n незалежних випробувань стала і дорівнює p, то справедлива формула :

$$P(m_1 < m < m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (6)$$

$$\text{де } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Лапласа визначаються за допомогою створеніх разрахункових таблиць (див. табл.2 додаток) для додатніх значень x. Для значень x > 5 вважають Ф(x) = 0.

Функція Лапласа є непарною функцією (Ф(-x) = - Ф(x)).

<u>Задача 1.1.</u>

На автоматичному станку виготовляють нівелірні рейки. Ймовірність виготовлення стандартної рейки – *p* , знайти ймовірність того, зо з *n* навмання взятих рейок виявиться:

а) *m* стандартних;

б) більше *m* стандартних;

в) хоча б одна нестандартна;
г) жодної стандартної;
д) знайти найімовірніше число стандартних рейок.

№	n	m	p
1	7	5	0,9
2	8	6	0,85
3	9	7	0,8
4	10	7	0,9
5	7	4	0,8
6	8	5	0,95
7	9	6	0,85
8	10	8	0,9
9	7	5	0,95
10	8	6	0,75
11	9	7	0,8
12	8	4	0,95
13	8	5	0,9
14	7	4	0,85
15	9	3	0,9
16	9	4	0,85
17	8	4	0,8
18	10	3	0,9
19	7	5	0,8
20	8	5	0,95
21	9	6	0,85
22	8	5	0,9
23	8	7	0,95
24	7	6	0,75
25	10	5	0,8
26	9	5	0,95
27	8	4	0,9
28	9	5	0,85
29	10	4	0,95
30	8	4	0,75
31	7	5	0,8

<u>Задача 1.2.</u>

Дано ймовірність p настання події A в кожному з n незалежних випробувань. Знайти ймовірність настання наступних подій:

а) подія A відбудеться рівно k раз;

б) подія A відбудеться не менше як k_1 раз та не більше як k_2;

в) подія A відбудеться не менше k_1 раз;

г) подія A відбудеться не більше k раз;

№	n	p	k	k_1	k_2
1	2400	0,4	923	924	1068
2	900	0,9	800	801	837
3	400	0,8	304	305	356
4	600	0,4	220	221	294
5	300	0,75	208	209	252
6	900	0,8	700	701	758
7	625	0,64	378	379	448
8	1350	0,6	782	783	891
9	1225	0,8	960	961	1036
10	400	0,9	350	351	387
11	600	0,6	341	342	408
12	900	0,5	425	426	504

13	1200	0,75	878	879	951
14	625	0,65	378	379	448
15	1200	0,4	465	466	515
16	1300	0,9	1112	1113	1212
17	800	0,8	615	616	654
18	950	0,4	365	366	415
19	850	0,75	614	615	665
20	900	0,8	705	706	756
21	1450	0,64	889	890	1050
22	870	0,6	505	506	540
23	960	0,8	735	736	785
24	780	0,9	680	681	725
25	890	0,6	505	506	550
26	800	0,5	375	376	421
27	1150	0,75	840	841	896
28	1250	0,65	785	786	820
29	970	0,6	565	566	597
30	850	0,8	656	657	690
31	1000	0,7	682	683	725

<u>Задача 1.3.</u>

Виконується n геодезичних вимірювань, ймовірність помилки при одному вимірюванні – p. Знайти ймовірність того, що помилка буде припущена:

а) при m вимірюваннях;

б) менше чим при m вимірюваннях;

в) хоча б в одному вимірюванні.

№	n	p	m
1	1000	0,004	5
2	2500	0,0012	3
3	2000	0,001	3
4	2500	0,0024	4
5	1500	0,004	5
6	2000	0,0025	4
7	1000	0,008	3
8	1500	0,004	4
9	2500	0,002	5
10	1000	0,006	3
11	2000	0,001	3
12	1500	0,002	4
13	2300	0,0015	5
14	3500	0,0003	4
15	1000	0,001	4
16	2500	0,0024	5
17	2000	0,004	4
18	2500	0,0025	3
19	1500	0,008	4
20	2000	0,004	5
21	1000	0,002	3
22	1500	0,006	3
23	2500	0,001	4
24	1000	0,002	5
25	2000	0,0015	4
26	1500	0,0003	3
27	2300	0,008	4
28	3500	0,004	5
29	1000	0,002	3

30	2000	0,006	3
31	1500	0,001	4

Приклад виконання завдань практичної роботи №1.

1.1. На автоматичному станку виготовляють нівелірні рейки. Ймовірність виготовлення стандартної рейки – *0,8* , знайти ймовірність того, зо з *7* навмання взятих рейок виявиться:

а) *5* стандартних;

б) більше *5* стандартних;

в) хоча б одна нестандартна;

г) жодної стандартної;

д) знайти найімовірніше число стандартних рейок.

Розв'язання

Мають місце повторні незалежні випробування, оскільки кількість випробувань є меншою 10 застосуємо теорему Бернуллі, визначивши попередньо ймовірність протилежної

а) $m = 5$, $n = 7$ тоді, застосувавши формулу Бернуллі, одержимо:

$$P_7(5) = C_7^5 p^5 q^2 = \frac{7!}{5!(7-5)!} 0,8^5 0,2^2 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} 0,32768 \cdot 0,04 \approx 0,275;$$

б) $m > 5$, $n = 7$:

$$P(m > 5) = P(m = 6) + P(m = 7) = C_7^6 p^6 q^1 + C_7^7 p^7 q^0 =$$

$$= \frac{7!}{6!(7-6)!} 0,8^6 0,2^1 + \frac{7!}{7!(7-7)!} 0,8^7 0,2^0 =$$

$$= 7 \cdot 0,262144 \cdot 0,2 + 0,2097152 = 0,5767168;$$

в) подія А – „хоча б одна нестандартна" є протилежною до події „жодна нестандартна" яка рівносильна події „всі стандартні", отже:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P_7(7) = 1 - C_7^7 p^7 q^0 = 1 - 0,2097152;$$

г) $m = 0$, $n = 7$:

$$P_7(0) = C_7^0 p^0 q^7 = \frac{7!}{0!(7-0)!} 0,8^0 0,2^7 = 0,2^7 = 0,0000128;$$

д) найімовірніше число стандартних рейок визначається з нерівності (3):

$$n \cdot p - q < m_0 < n \cdot p - p;$$

$$7 \cdot 0,8 - 0,2 < m_0 < 7 \cdot 0,8 - 0,8;$$

$$5,4 < m_0 < 6,4;$$

$$m_0 = 6.$$

Задача 1.2.Дано ймовірність 0,7 настання події А в кожному з 1000 незалежних випробувань. Знайти ймовірність настання наступних подій:

а) подія А відбудеться рівно *682* раз;

б) подія А відбудеться не менше як 683 раз та не більше як 725раза;

в) подія А відбудеться не менше 683 раз;

г) подія А відбудеться не більше *682* раз

Розв'язання

За умовою задачі $n = 1000$, $p = 0,7$, $k = 682$, $k_1 = 683$, $k_2 = 725$:

а) подія A відбудиться рівно $k = 682$.

Оскільки потрібно визначити конкретну кількість позитивних наслідків, кількість випробувань достатньо велика, застосуємо локальну теорему Лапласа:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{682 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-18}{\sqrt{210}} \approx -1,24 .$$

Знайдемо значення функції Гауса: $\varphi(x) = 0,1849$, отже значення ймовірності буде :

$$P_{1000}(682) \approx \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \cdot 0,1849 ,$$

б) за умовою задачі $683 \le k \le 725$, отже застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласса:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{683 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-17}{\sqrt{210}} \approx -1,17 ,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{725 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{25}{\sqrt{210}} \approx 1,73 .$$

Знайдемо значення функції Лапласа: $\Phi(x_1) = -0,379$, $\Phi(x_2) = 0,4582$ отже значення ймовірності буде :

$$P(683 < k < 725) \approx \Phi(1,73) - \Phi(-1,17) = 0,4582 + 0,379 = 0,8372 ;$$

в) за умовою задачі $683 \le k \le 1000$, отже застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласса:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{683 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-17}{\sqrt{210}} \approx -1,17$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1000 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{300}{\sqrt{210}} \approx 20,7$$

Знайдемо значення функції Лапласа: $\Phi(x_1) = -0,379$, $\Phi(x_2) = 0,5$ отже значення ймовірності буде :

$$P(683 < k < 725) \approx \Phi(20,7) - \Phi(-1,17) = 0,5 + 0,379 = 0,879 ;$$

г) за умовою задачі $0 \le k \le 682$, отже застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласса:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-700}{\sqrt{210}} \approx -48,3$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{682 - 1000 \cdot 0,7}{\sqrt{1000 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{-18}{\sqrt{210}} \approx -1,24$$

Знайдемо значення функції Лапласа: $\Phi(x_1) = -0,5$, $\Phi(x_2) = -0,3925$ отже значення ймовірності буде :

$$P(0 < k < 682) \approx \Phi(-48,3) - \Phi(-1,24) = -0,3925 + 0,5 = 0,1075 .$$

<u>Задача 1.3.</u>

Виконується *1500 геоде*зичних вимірювань, ймовірність помилки при одному вимірюванні – *0,002*. Знайти ймовірність того, що помилка буде припущена:

а) при 4 вимірюваннях;

б) менше чим при 4 вимірюваннях;

в) хоча б в одному вимірюванні.

Розв'язання

Згідно до умови задачі $n = 1500$, $m = 4$, $p = 0,002$, тоді $\lambda = np = 3 < 10$, отже можемо застосувати формулу Пуассона (5).

а) $P_{1500}(4) \approx \frac{3^4}{4!} e^{-3} = \frac{81 \cdot 0,0503}{24} = 0,1692$,

б) $P_{1500}(m < 4) = P(m = 0) + P(m = 1) + P(m = 2) + P(m = 3)$, кожну з ймовірностей правої частини знайдемо за формулою (5).

$$P_{1500}(0) \approx \frac{3^0}{0!} e^{-3} = \frac{1 \cdot 0,0503}{1} = 0,0503,$$

$$P_{1500}(1) \approx \frac{3^1}{1!} e^{-3} = \frac{3 \cdot 0,0503}{1} = 0,1507,$$

$$P_{1500}(2) \approx \frac{3^2}{2!} e^{-3} = \frac{9 \cdot 0,0503}{2} = 0,2261,$$

$$P_{1500}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} = \frac{27 \cdot 0,0503}{6} = 0,2261.$$

Знайдемо суму одержаних значень: $P_{1500}(m < 4) = 0,6531$

Практичнезаняття №2
Дискретні та неперервні випадкові величини

Короткі теоретичні відомості

Дискретною випадковою величиною називається така величина, яка набуває скінченної кількості числових значень з певними ймовірностями.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на їх ймовірності.

$$M(x) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \qquad (1)$$

Властивості математичного сподівання

1) математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C; \qquad (2)$$

2) сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(C \cdot X) = C \cdot M(X); \qquad (3)$$

3) математичне сподівання добутка двох незалежних, випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y); \qquad (4)$$

4) математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \qquad (5)$$

Дисперсією дискретної випадкової величининазивається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i - M(X) \right)^2 \cdot p_i \right). \qquad (6)$$

Властивості дисперсії

1) дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(C) = 0; \qquad (7)$$

2) сталий множник можна виносити за знак дисперсії у квадраті:

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X); \qquad (8)$$

3) дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \qquad (9)$$

Неперервною називають таку випадкову величину, яка може приймати всі значення з деякого скінченного або нескінченного проміжка.Законом розподілу неперервної випадкової величини є інтегральна функція розподілу $F(X)$, або функцією розподілу ймовірностей випадкової величини називається ймовірність того, що випадкова величина X в результаті випробування набуває значення, меншого за значення x, де x – довільне дійсне число:

$$F(X) = P(X < x). \qquad (10)$$

Основні властивості функції розподілу:

1) значення функції розподілу належать проміжку $[0;1]$;

2) $F(X)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) > F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

3) ймовірність попадання випадкової величини в заданий проміжок $(a;b)$ дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі :

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a); \qquad (11)$$

4) $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Крім інтегральної функції розподілу, неперервна випадкова величина може бути задана з допомогою функції, яку називають щільністю розподілу або щільністю ймовірності (або диференціальною функцією).

Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X називають функцію $f(X)$ – першу похідну від функції розподілу $F(X)$

$$f(X) = F'(X). \qquad (12)$$

Основні властивості щільності розподілу:

1)щільність розподілу – невід'ємна функція;

2)невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \qquad (13)$$

якщо всі значення випадкової величини X обмежені проміжком $(a;b)$, то остання рівність може бути записана у вигляді $\int_a^b f(x)dx = 1$;

3)ймовірність попадання випадкової величини **X** взаданий проміжок $(a;b)$ дорівнює:

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (10)$$

Завдання для самостійної роботи

<u>Задача№2.1</u>

Дано закон розподілу дискретної випадкової величини. Знайти числові характеристики, побудувати многокутник розподілу.

1

X	**35**	**39**	**42**	**46**
p	**0,1**	**0,3**	**0,2**	**0,4**

2.

X	**30**	**37**	**42**	**49**
p	**0,2**	**0,3**	**0,1**	**0,4**

3.

X	**17**	**20**	**23**	**27**
p	**0,1**	**0,4**	**0,3**	**0,2**

4.

X	**11**	**25**	**38**	**51**

p	**0,1**	**0,4**	**0,2**	**0,3**

5.

X	**31**	**34**	**37**	**40**
p	**0,3**	**0,5**	**0,1**	**0,1**

6.

X	**15**	**27**	**40**	**52**
p	**0,2**	**0,4**	**0,3**	**0,1**

7.

X	**56**	**58**	**60**	**64**
p	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,1**

8.

X	**16**	**29**	**41**	**55**
p	**0,2**	**0,3**	**0,1**	**0,4**

9.

X	**25**	**28**	**30**	**33**
p	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**

10.

X	**37**	**41**	**43**	**45**
p	**0,2**	**0,1**	**0,5**	**0,2**

11.

X	**21**	**35**	**48**	**51**
p	**0,1**	**0,4**	**0,3**	**0,2**

12.

X	**56**	**58**	**60**	**64**
p	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,1**

13.

X	**16**	**29**	**41**	**55**
p	**0,2**	**0,3**	**0,1**	**0,4**

14.

X	**25**	**28**	**30**	**33**
p	**0,1**	**0,2**	**0,4**	**0,3**

15

X	**12**	**18**	**20**	**24**
p	**0,1**	**0,4**	**0,2**	**0,3**

16.

X	**20**	**27**	**32**	**39**
p	**0,1**	**0,4**	**0,3**	**0,2**

17.

X	**27**	**30**	**33**	**37**
p	**0,1**	**0,4**	**0,3**	**0,2**

18.

X	**21**	**25**	**29**	**33**
p	**0,2**	**0,3**	**0,1**	**0,4**

19.

X	**31**	**34**	**37**	**40**
p	**0,3**	**0,5**	**0,1**	**0,1**

20.

X	**15**	**27**	**40**	**52**
p	**0,2**	**0,4**	**0,3**	**0,1**

21.

X	**56**	**58**	**60**	**64**
p	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,1**

22.

X	**16**	**29**	**41**	**55**
p	**0,2**	**0,3**	**0,1**	**0,4**

23.

X	**25**	**28**	**30**	**33**
p	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**

24.

X	**37**	**41**	**43**	**45**
p	**0,2**	**0,1**	**0,5**	**0,2**

25.

X	**21**	**35**	**48**	**51**
p	**0,1**	**0,4**	**0,3**	**0,2**

26.

X	**56**	**58**	**60**	**64**
p	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,1**

27.

X	**16**	**29**	**41**	**55**
p	**0,2**	**0,3**	**0,1**	**0,4**

28.

X	**25**	**28**	**30**	**33**
p	**0,1**	**0,2**	**0,4**	**0,3**

X	**21**	**35**	**48**	**51**
p	**0,1**	**0,4**	**0,3**	**0,2**

29.

X	56	58	60	64
p	0,2	0,3	0,4	0,1

30.

X	16	29	41	55
p	0,2	0,3	0,1	0,4

31.

X	25	28	30	33
p	0,1	0,2	0,4	0,3

<u>Задача №2.2</u>

Дано функція розподілу неперервної випадкової величини. Знайти:

1. диференціальну функцію розподілу $f(x)$;
2. числові характеристики;
3. Побудувати графік інтегральної та диференціальної функцій розподілу.

1) $F(x)=\begin{cases} 0, \ при \ \ x \le 0, \\ x^3, \ при \ \ 0 \le x \le 1, \\ 1, \ при \ \ x \ge 1. \end{cases}$

2) $F(x)=\begin{cases} 0, & при \ \ x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & при \ \ -\dfrac{\pi}{2} < x \le 0, \\ 1, & при \ \ x > 0. \end{cases}$

3) $F(x)=\begin{cases} 0, & при \ \ x \le 0, \\ 3x^3 + 2x, & при \ \ 0 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1, & при \ \ x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

4) $F(x)=\begin{cases} 0, & при \ \ x \le 0, \\ 2\sin x, & при \ \ 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & при \ \ x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases} 0, & при \ \ x \le 2, \\ \dfrac{1}{2}x - 1, & при \ \ 2 < x \le 4, \\ 1, & при \ \ x > 4. \end{cases}$

6) $F(x)=\begin{cases} 0, & при \ \ x \le \dfrac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, & при \ \ \dfrac{3\pi}{4} < x \le \pi, \\ 1, & при \ \ x > \pi. \end{cases}$

7) $F(x)=\begin{cases} 0, \ при \ \ x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, \ при \ \ 0 < x \le 3, \\ 1, \ при \ \ x > 3. \end{cases}$

8) $F(x)=\begin{cases} 0, & при \ \ x \le 1, \\ \dfrac{1}{2}\left(x^2 - x\right), & при \ \ 1 < x \le 2, \\ 1, & при \ \ x > 2. \end{cases}$

9) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0<x\le 2, \\ 1, \text{ при } x>2. \end{cases}$

10) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ x^2, \text{ при } 0\le x\le 1, \\ 1, \text{ при } x\ge 1. \end{cases}$

11)

$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{1}{15}\left(x^2+2x\right), \text{ при } 0<x\le 3, \\ 1, \text{ при } x>3. \end{cases}$

12) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ -\sin x, \text{ при } \pi<x\le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 1, \text{ при } x>\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

13) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ 3x^3-2x, \text{ при } 0<x\le 1, \\ 1, \text{ при } x>1. \end{cases}$

14) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{1}{8}(x-2)^3, \text{ при } 2<x\le 4, \\ 1, \text{ при } x>4. \end{cases}$

15) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ x^3, \text{ при } 0\le x\le 1, \\ 1, \text{ при } x\ge 1. \end{cases}$

16) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1, \text{ при } x>0. \end{cases}$

17) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ 3x^3+2x, \text{ при } 0<x\le \dfrac{1}{3}, \\ 1, \text{ при } x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

18) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ 2\sin x, \text{ при } 0<x\le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, \text{ при } x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

19) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 2, \\ \dfrac{1}{2}x-1, \text{ при } 2<x\le 4, \\ 1, \text{ при } x>4. \end{cases}$

20) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le \dfrac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, \text{ при } \dfrac{3\pi}{4}<x\le \pi, \\ 1, \text{ при } x>\pi. \end{cases}$

21) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, \text{ при } 0<x\le 3, \\ 1, \text{ при } x>3. \end{cases}$

22) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right), \text{ при } 1<x\le 2, \\ 1, \text{ при } x>2. \end{cases}$

23) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0<x\le 2, \\ 1, \text{ при } x>2. \end{cases}$

24) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ x^2, \text{ при } 0\le x\le 1, \\ 1, \text{ при } x\ge 1. \end{cases}$

25) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{1}{15}\left(x^2+2x\right), \text{ при } 0<x\le 3, \\ 1, \text{ при } x>3. \end{cases}$

26) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ -\sin x, \text{ при } \pi<x\le \dfrac{3\pi}{2}, \\ 1, \text{ при } x>\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$

27) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ 3x^3-2x, \text{ при } 0<x\le 1, \\ 1, \text{ при } x>1. \end{cases}$

28) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{1}{8}(x-2)^3, \text{ при } 2<x\le 4, \\ 1, \text{ при } x>4. \end{cases}$

29) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, \text{ при } 0<x\le 2, \\ 1, \text{ при } x>2. \end{cases}$

30) $F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 1, \\ \dfrac{1}{2}\left(x^2-x\right), \text{ при } 1<x\le 2, \\ 1, \text{ при } x>2. \end{cases}$

Приклад виконання завдань практичної роботи №2

<u>Задача2.1</u>

Задано закон розподілу дискретної випадкової величини ***X***(в першому рядку дано можливі значення ***X***, а в другому вказані ймовірності ***p*** цих можливих значень):

X	21	25	28	31
p	0,1	0,4	0,2	0,3

Знайти числові характеристики:

1) математичне сподівання ***M(X)*****;**

2) дисперсію ***D(X)*** – двома способами;

3) середнє квадратичне відхилення $\delta = \delta(X)$.

Побудувати багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на ньому знайдені значення математичного сподівання ***M(X)***та середнього квадратичного відхилення $\sigma(\mathbf{X})$.

<u>Розв'язання.</u>

1) Математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюється за формулою (6.5) :

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 = 21 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}4 + 28 \cdot 0{,}2 + 31 \cdot 0{,}3 =$$

$$= 2{,}1 + 10{,}0 + 5{,}6 + 9{,}3 = 27{,}0$$

2) Дисперсію дискретної випадкової величини можна обчислювати безпосередньо за визначенням (формула (3.6)). Для цього обчислимо всі можливі значення квадрата відхилення:

$$(x_1 - M(X))^2 = (21 - 27)^2 = (-6)^2 = 36;$$

$$(x_2 - M(X))^2 = (25 - 27) = (-2)^2 = 4;$$

$$(x_3 - M(X))^2 = (28 - 27) = (1)^2 = 1;$$

$$(x_4 - M(X))^2 = (31 - 27) = (4)^2 = 16.$$

Для того, щоб обчислити дисперсію ***D (X)***,запишемо закон розподілу квадрата відхилення, а потім знову використаємо формулу (3.5) :

$(X - M(X))^2$	36	4	1	16
p	0,1	0,4	0,2	0,3

$$D(X) = 36 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}3 = 3{,}6 + 1{,}6 + 0{,}2 + 4{,}8 = 10{,}2.$$

Обчислимо дисперсію дискретної випадкової величини **X** іншим способом, тобто за формулою (6.7). Для цього запишемо закон розподілу величини X^2:

X^2	$(21)^2$	$(25)^2$	$(28)^2$	$(31)^2$
p	0,1	0,4	0,2	0,3

Далі знаходимо математичне сподівання $M(X^2)$:

$$M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + x_4^2 p_4$$

$$= (21)^2 \cdot 0{,}1 + (25)^2 \cdot 0{,}4 + (28)^2 \cdot 0{,}2 + (31) \cdot 0{,}3 =$$

$$= 441 \cdot 0{,}1 + 625 \cdot 0{,}4 + 784 \cdot 0{,}2 + 961 \cdot 0{,}3 =$$

$$= 44{,}1 + 250{,}0 + 156{,}8 + 288{,}3 = 739{,}2.$$

Користуючись формулою (6.7), знаходимо:

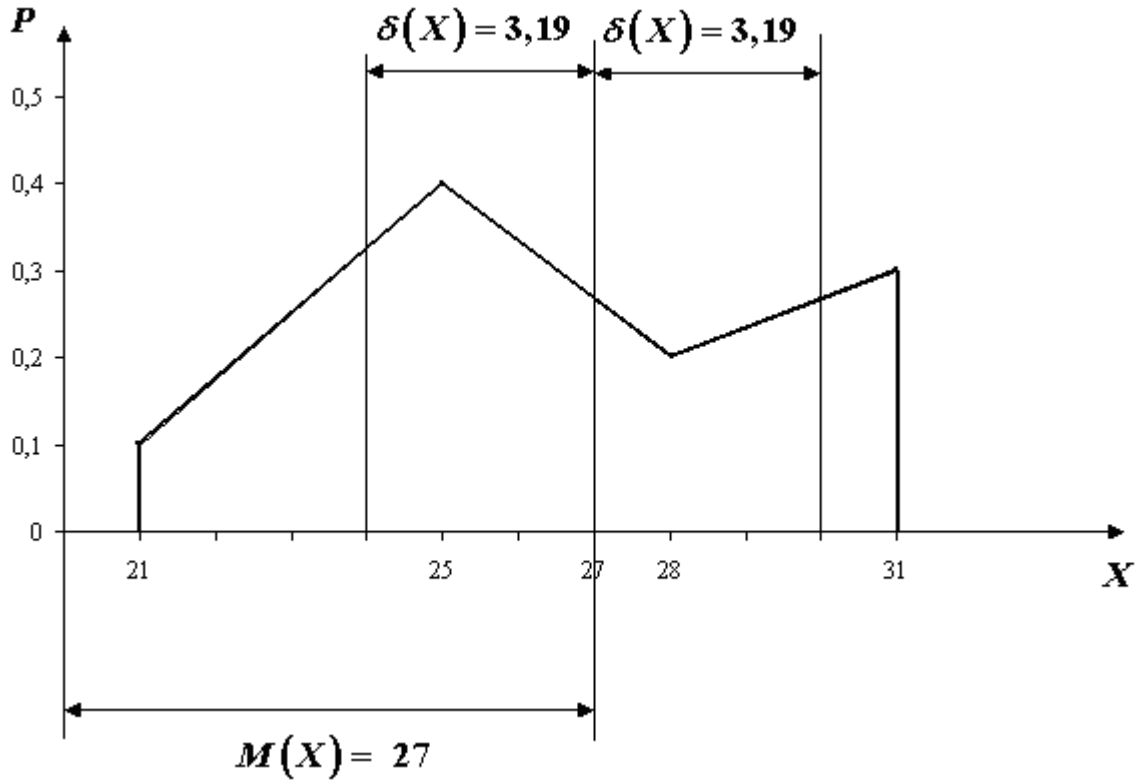
$$D(X) = M(X^2) - (M\ (X))^2 = 739,2\ - (27)^2 = 739,2 - 729 = 10,2.$$

Виконані обчислення показали, що значення дисперсної ***D(X)*** в обох випадках одне й те саме.

3) Середнє квадратичне відхилення σ обчислюємо за (3.8):

$$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{10,2} \approx\ 3,19.$$

Побудуємо багатокутник розподілу. По осі абсцис відкладаємо у вибраному масштабі можливі значення x_i випадкової величини ***X***; по осі ординат – відповідні значення ймовірностей p_i. Побудовані точки $(x_i; p_i)$ з'єднуємо відрізками прямих. Одержали багатокутник розподілу заданої випадкової величини. Знайдене значення математичного сподівання $M(X) =\ 27$ відкладаємо від точки 0 (початок системи координат) по осі абсцис. Від значення математичного сподівання вправо та вліво відкладаємо відрізки довжиною в одне квадратичне відхилення. Виконані вказаним способом побудови подано нижче, на **рис.1.**



<u>Задача 2.2</u>

Неперервна випадкова величина **X** задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1; \\ \frac{1}{7}\left(x^3-1\right), \text{ якщо } 1 < x \le 2; \\ 1, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайти: **1)** щільність розподілу ймовірностей (диференціальну функцію) $f(x)$;

2) математичне сподівання ***M(X)*;**

3) дисперсію ***D(X)***- двома способами;

4) середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sigma(X)$;

5)побудувати графіки інтегральної ***F(x)*** та диференціальної ***f(x)*** функцій.

<u>Розв'язання:</u>

1) Знайдемо щільність розподілу ймовірностей – диференціальну функцію ***f(x)*** випадкової величини ***X***, Для цього обчислимо похідну по x від заданої інтегральної функції ***F(x)***:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} , \text{ якщо } x \le 1; \\ \left(\frac{1}{7}\left(x^3-1\right)\right)', \text{ якщо } 1 < x \le 2; \\ , \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$$

Отже, диференціальна функція ***f(x)*** має такий вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 1; \\ \frac{3}{7}x^2, \text{ якщо } 1 < x \le 2; \\ 0, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$$

2) Знаходимо математичне сподівання ***M(X)*** за формулою (3.15), враховуючи що ***x*** є (1;2):

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_1^2 x\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\int_1^2 x^3dx=\frac{3}{7}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2=\frac{3}{28}x^4\Bigg|_1^2=\frac{3}{28}(16-1)=\frac{45}{28}$$

Отже маємо, що $M(X)=\approx 1,6071.$

3) Знайдемо дисперсію ***D(X)*** двома способами:

а) за формулою (3.18)

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx=\int_1^2\left(x-\frac{45}{28}\right)^2\cdot\frac{3}{7}x^2dx=$$

$$=\frac{3}{7}\int_1^2\left(x^2-\frac{45}{14}x+\frac{2025}{784}\right)x^2dx=\frac{3}{7}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{45}{14}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{2025}{784}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2$$

$$\frac{3}{7}\left(\left(\frac{32}{5}-\frac{90}{7}+\frac{675}{98}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{45}{56}+\frac{675}{784}\right)\right)=\frac{3}{7}\left(\frac{31}{5}-\frac{675}{56}+\frac{4725}{784}\right)=\frac{3}{7}\cdot\frac{679}{3920}$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{24304-47205+23625}{3920}\approx 0{,}074235.$$

б) за формулою (3.19)

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\int_1^2 x^2\frac{3}{7}x^2dx-\left(\frac{45}{28}\right)^2=\frac{3}{7}\int_1^2 x^4dx-\frac{2025}{784}$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_1^2-\frac{2025}{784}=\frac{3}{35}(32-1)-\frac{2025}{784}\frac{93}{35}-\frac{2025}{784}=\frac{291}{3920}\approx 0{,}074235.$$

Виконані обчислення показали, що значення дисперсії ***D(X)*** в обох випадках одне і те ж:

$$D(X)=\frac{291}{3920}\approx 0{,}074235.$$

4) Середнє квадратичне відхилення σ знаходимо за формулою (3.20):

$$\sigma=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}074235}\approx 0{,}272.$$

Графік інтегральної функції ***F(x)*** побудовано на **рис. 1**, а графік диференціальної функції ***f(x)***побудовано на **рис. 2.**

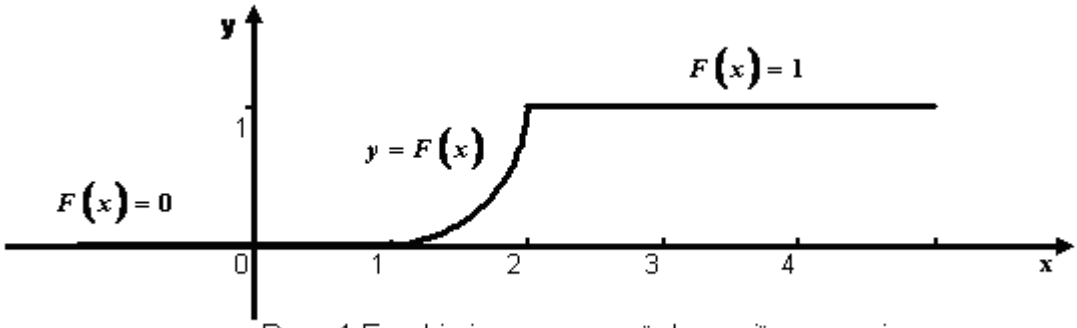


Рис. 1 Графік інтегральної функції розподілу

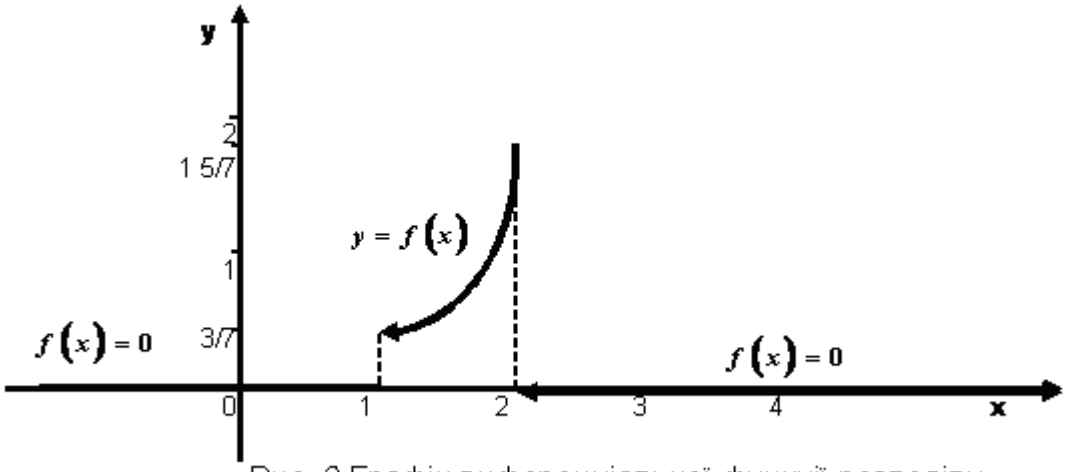


Рис. 2 Графік диференціальної функції розподілу

Практичнезаняття №3
Елементи математичної статистики. Генеральна сукупність та вибірка.

Короткі теоретичні відомості

Означення 1. ***Вибірковоюсукупністю***(вибіркою) називаєтьсясукупністьвипадкововідібранихоб'єктів.

Означення 2. ***Генеральною сукупністю*** називається вихідна сукупність об'єктів, з яких робиться вибірка.

Означення 3. ***Об'ємом*** сукупності (вибіркової або генеральної) називається число об'єктів цієї сукупності.

Означення 4. Нехай з генеральної сукупності значень дискретної випадкової величини X зроблено вибірку, причому значення x_1 спостерігалося n_1 разів, x_2 – n_2 разів, $x_к$ – $n_к$ разів, тоді $\sum n_i = n$ – об'єм вибірки.

Значення x_i, що спостерігалися, називаються ***варіантами***. Послідовність варіант, які записано у зростаючому порядку, – ***варіаційним рядом***. Числа спостережень називаються частотами, а їх відношення до об'єму вибірки $\frac{n_i}{n} = W_i$ – відносними частотами.

Означення 5. ***Статистичним розподілом*** вибірки називається перелік варіант і відповідних до нихчастот або відносних частот.

Означення 6. Позначимо n_x – число спостережень, за яких спостерігалися значення кількісної ознаки X менше x (n– об'єм вибірки), тоді

емпіричною функцією розподілуназивається функція $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$.

Означення 7. Поділимоінтервал, у якому містяться всі значення ознаки X, які спостерігаються, на декілька частинних інтервалів довжиною h і знайдемо для кожного частинного інтервалу значення n_i – суму частот, що містяться у i-му інтервалі.

Гістограмою частотназивають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{n}$, яке називається ***щільністю частоти***.

Означення 8. ***Гістограмою відносних частот***називається ступінчаста фігура, що складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{W_i}{h}$,що називається ***щільністю відносної частоти.***

Означення 1. ***Вибірковою середньою*** $\overline{x_B}$ називається середнє арифметичне значення ознаки вибіркової сукупності.

Якщо всі значення $x_1, x_2, ..., x_k$ ознаки вибірки об'єму n різні, то

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n}.$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, ..., x_k$ мають відповідні частоти $n_1, n_2, \ldots n_k$ причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то це – *зважена середня*:

$$\overline{x_B} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}.$$

Означення 2. ***Вибірковою дисперсією*** D_B називається середнє арифметичне квадратів відхилення спостережуваних значень ознаки від їх середнього значення $\overline{x_B}$. Якщо всі значення $x_1, x_2, ..., x_k$ ознаки вибірки об'єму n різні, то

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n}.$$

Якщо значення ознаки $x_1, x_2, ..., x_k$ мають відповідні частоти $n_1, n_2, \ldots n_k$, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то це – *зважена дисперсія*:

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n}.$$

Означення 3. ***Вибірковим середнім квадратичним відхиленням*** (стандартом) називається квадратний корінь з вибіркової дисперсії:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

Теорема. Дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки мінус квадрат загальної середньої:

$$D = \overline{x^2} - \left[\overline{x}\right]^2.$$

Означення 4. ***Генеральною дисперсією*** називається середнє арифметичне квадратів відхилень значень ознаки генеральної сукупності від їх середнього значення $\overline{x}$.

Примітка. За оцінку генеральної дисперсії беруть виправлену вибіркову дисперсію, що позначається S^2 і знаходиться за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n-1}.$$

Нехай задана за даними вибірки статистична характеристика θ^* є оцінкою невідомого параметра θ. θ^* тим точніше визначає θ, чим менше абсолютна величина різниці $\left|\theta-\theta^*\right|$. Отже, якщо $\delta > 0$ і $\left|\theta-\theta^*\right| < \delta$, то чим менше δ, тим оцінка точніше. Отже, додатне число δ характеризує *точність оцінки*.

Означення 1. ***Надійністю*** (*надійною ймовірністю*) оцінки θ за θ^* називається ймовірністю γ, з якою виконується нерівність $\left|\theta-\theta^*\right| < \delta$, тобто $\gamma = P\left(\left|\theta-\theta^*\right| < \delta\right)$ або $\gamma = P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right)$.

Означення 2. ***Надійним*** називається інтервал $\left(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta\right)$, що покриває невідомий параметр із заданою надійністю γ.

Примітка 1. Якщо кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, причому середнє квадратичне відхилення σ цього розподілу відоме, в цьому разі вибіркова середня $\overline{X}$ також розподілена нормально, причому

$$M\left(\overline{X}\right) = a, \quad \sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тоді, з надійністю γ можна вважати, що надійний інтервал $\left(\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покриває невідомий параметр a, точність оцінки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$,

де t визначається з рівності $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ за таблицею функції Лапласа.

Примітка 2. Якщо кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально, причому середнє квадратичне відхилення σ невідоме, тоді з надійністю γ можна вважати, що надійний інтервал $\left(\overline{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$ покриває невідомий параметр a з надійністю γ.

Значення t_γ можна знайти у спеціальній таблиці значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$,

$\overline{x}$ - вибіркова середня і s - виправлене середнє квадратичне відхилення.

Примітка 3. Надійний інтервал, який покриває середнє квадратичне відхилення δ із заданою надійністю, - це інтервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),$$

де s - виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, знайдене за вибіркою, значення qзнаходиться за таблицею значень

$$q = q(\gamma, n).$$

Завдання для самостійної роботи

<u>Задача 3.1.</u>

1) Записати вибірку ***6 + α, 1 + α, 5 + α, 11 + α, 4 +α, 10 + α,8 + α, 6 + α, 2 + α, 8 + α, 6 + α, 12 + α, 11 +α, 10 +α, 4 +α, 11 + α, 6 + α, 5 +α, 5 + α*** у вигляді варіаційного ряду.

2) Записати вибірку ***6 + α, 1 + α, 5 + α, 11 + α, 4 +α, 10 + α, 8 + α, 6 + α, 2 + α, 8 + α, 6 + α, 12 + α, 11 +α, 10 +α, 4 +α, 11 + α, 6 + α, 5 +α, 5 + α*** у вигляді статистичного ряду. Чому дорівнює найчастіше значення варіанти?

3) Для вибірки, зображеної статистичним рядом, знайти емпіричну функцію розподілу ***F*(x)***. Чому дорівнює ***F*(40)***?

x_i	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**
n_i	α	$\alpha + 10$	$\alpha + 40$	$\alpha + 30$	$\alpha + 20$

4) Побудувати гістограму відносних частот для вибірки, зображеної у вигляді таблиці частот:

Номер інтервалу	Межі інтервалу	Число варіант, що потрапили до інтервалу
1	5 – 10	4 + α
2	10 - 15	6 + α
3	15 – 20	16 + α
4	20 – 25	36 + α
5	25 – 30	24 + α
6	30 – 35	10 + α
7	35 – 40	4 + α

Чому дорівнює щільність розподілу відносних, частот у точці ***x =32***?

<u>Задача 3.2</u>У результаті вимірювання здобуто наступні результати:
0,5α+1; 0,5α+2; α +1; α +3; 1,5 α +1; 1,5 α+2; 2α; 2α +1; 2α+2; 2α+3

Знайти:
1) Вибіркову середню.
2) Вибіркову дисперсію.
3) Вибіркову середню квадратів величини вмісту фосфатів.
4) Виправлену вибіркову дисперсію.

<u>Задача 3.3</u>

1) Випадкова величина ***X*** кількості рослин льону, що уражені фузаріозом, має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8 + 0{,}02\alpha$. Знайти з надійністю ***0,95*** точність ***δ***, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання, якщо об'єм вибірки ***n = 400***.

2) Знайти мінімальний об'єм вибірки, за яким з надійністю ***0,975*** точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності з нормальним розподілом вибірковим середнім дорівнює ***δ=0,2***. Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності відоме і дорівнює $\sigma = 3{,}5 + 0{,}04\alpha$.

3) Кількісна ознака ***X*** генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму ***n=16*** знайдене виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 6 + 0{,}03\alpha$.Знайти з надійністю ***0,999*** точність ***δ***, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання генеральної сукупності.

4) Кількісна ознака ***X*** генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму ***n=16*** знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 20 + 0{,}2\alpha$ та виправлене середнє квадратичне відхилення ***s = 1,2***. Оцінити невідоме математичне сподівання за допомогою надійного інтервалу з точністю ***0,95***.

5) Кількісна ознака ***X*** генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму ***n=40*** знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $s = 1{,}2 + 0{,}02\alpha$. Знайти надійний інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення ***σ*** з надійністю ***0,95***.

Приклади виконаннязавданьпрактичного заняття №3.

Задача 3.1.

1) Записати вибірку ***6, 1, 5, 11, 4, 10, 6, 6, 8, 6, 2, 8, 6, 12, 11, 10, 10, 8, 4, 4, 11, 6, 5, 5, 6*** у вигляді варіаційного ряду.

Розв’язання:

Для запису вибірки у вигляді варіаційного ряду треба розташувати послідовність варіант у зростаючому порядку. Отже, варіаційний ряд має вигляд: ***1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12.***

2)Записати вибірку ***6, 1, 5, 11, 4, 10, 6, 6, 8, 6, 2, 8, 6, 12, 11, 10, 10, 8, 4, 4, 11, 6, 5, 5, 6*** у вигляді статистичного ряду. Чому дорівнює найчастіше значення варіанти?

Розв'язання:

Запишемо послідовність варіант у зростаючому порядку, а також відповідні частоти. Дістанемо статистичний ряд:

x_i	1	2	4	5	6	8	10	11	12
n_i	1	1	3	3	7	3	3	2	2

Найчастіше значення варіанти дорівнює ***6***.

3) Для вибірки, зображеної статистичним рядом знайти емпіричну функцію розподілу ***F*(x)***:

x_i	1	2	3	4	5
n_i	16	32	24	19	9

Чому дорівнює ***F*(4)***?

Розв'язання:

Знайдемо об'єм вибірки: $16 + 32 + 24 + 19 + 8 + 1 = 100$.

Найменша варіанта дорівнює 1, отже $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$.

Значення $X < 2$, а саме $x = 1$ спостерігалося 16 разів, звідси випливає, що

$$F^*(x) = \frac{16}{100} = 0{,}16 \text{ при } 1 < x \le 2.$$

Значення $X < 3$, а саме $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$ спостерігалося $16 + 32 = 48$ разів, отже

$$F^*(x) = \frac{48}{100} = 0{,}48 \text{ при } 2 < x \le 3.$$

Аналогічно, $F^*(x) = \dfrac{16 + 32 + 24}{100} = 0{,}72$ при $3 < x \le 4$.

$$F^*(x) = \frac{16 + 32 + 24 + 9}{100} = 0{,}81 \text{ при } 4 < x \le 5.$$

Оскільки 5 - найбільше значення варіанти, то $F^*(x) = 1$ при $x > 5$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 1 \\ 0{,}16, \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}48, \text{ при } 2 < x \le 3 \\ 0{,}72, \text{ при } 3 < x \le 4 \\ 0{,}81, \text{ при } 4 < x \le 5 \\ 1, \text{ при } x > 5 \end{cases}$$

Графік функції розподілу зображено на рис.3.

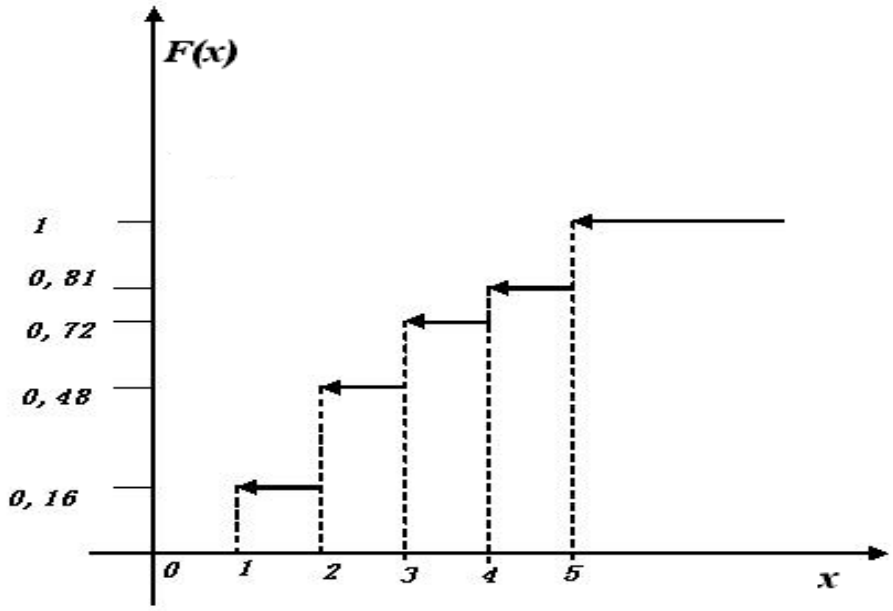


Рис. 1

Значення ***F*(4)*** дорівнює ***0,72***.

4) Побудувати гістограму відносних частот для вибірки зображеної у вигляді таблиці частот:

Номер інтервалу	Межі інтервалу	Число варіант, що потрапили до інтервалу
1	5 – 10	4
2	10 - 15	6
3	15 – 20	16
4	20 – 25	36
5	25 – 30	24
6	30 – 35	10
7	35 – 40	4

Чому дорівнює щільність розподілу відносних частот у точці $x = 32$?

Розв'язання:

Загальна кількість спостережень дорівнює:

$$n = 4 + 6 + 16 + 36 + 24 + 10 + 4 = 100.$$

Довжина інтервалу $h = 5$. Знайдемо щільність відносної частоти на кожному інтервалі.

На першому інтервалі: $\frac{W_1}{h} = \frac{n_1}{n \cdot h} = \frac{4}{100 \cdot 5} = 0{,}008$.

На другому інтервалі: $\frac{W_2}{h} = \frac{n_2}{n \cdot h} = \frac{6}{100 \cdot 5} = 0{,}012$.

На третьому інтервалі: $\frac{W_3}{h} = \frac{n_3}{n \cdot h} = \frac{16}{100 \cdot 5} = 0{,}032$.

На четвертому інтервалі: $\frac{W_4}{h} = \frac{n_4}{n \cdot h} = \frac{36}{100 \cdot 5} = 0{,}072$.

На п’ятому інтервалі: $\frac{W_5}{h} = \frac{n_5}{n \cdot h} = \frac{24}{100 \cdot 5} = 0{,}048$.

На шостому інтервалі: $\frac{W_6}{h} = \frac{n_6}{n \cdot h} = \frac{10}{100 \cdot 5} = 0{,}02$.

На сьомому інтервалі: $\frac{W_7}{h} = \frac{n_7}{n \cdot h} = \frac{4}{100 \cdot 5} = 0{,}008$.

Шукана емпірична функція: $F^*(X) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le 1 \\ 0{,}16, \text{ при } 1 < x \le 2 \\ 0{,}48, \text{ при } 2 < x \le 3 \\ 0{,}72, \text{ при } 3 < x \le 4 \\ 0{,}81, \text{ при } 4 < x \le 5 \\ 1, \text{ при } x > 5 \end{cases}$

Для побудови гістограми на осі ***ox*** відкладемо частинні інтервали, а над ними проведемо відрізки, паралельні осі абсцис на відстані $\frac{W_i}{h}$ від неї (рис.4).

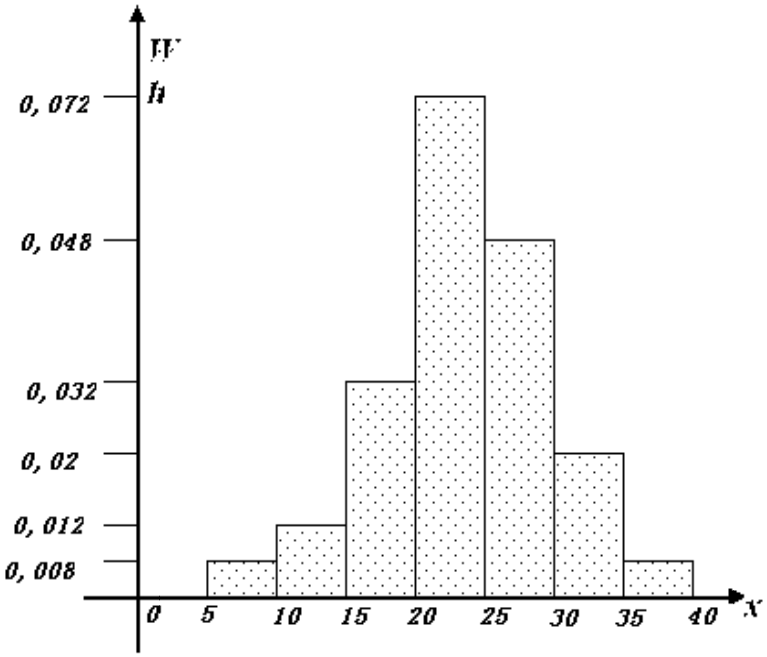


Рис. 2

У точці $x = 32$ щільність розподілу відносної частоти дорівнює $0,02$.

<u>Задача 3.2</u>

У результаті вимірювання здобуто наступні результати: ***6; 7; 11; 13; 16; 17; 20; 21; 22; 23.***

Знайти:

1) Вибіркову середню.

2) Вибіркову дисперсію.

3) Вибіркову середню квадратів величини вмісту фосфатів.

4) Виправлену вибіркову дисперсію.

Розв'язання:

1) Оскільки всі значення ознаки вибірки різні, можна застосувати формулу:

$$\overline{x_B} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n}.$$

Отже, для даних задачі $n = 10$:

$$\overline{x_B} = \frac{6 + 7 + 11 + 13 + 16 + 17 + 20 + 21 + 22 + 23}{10} = 15,6.$$

2)Знайдемо вибіркову дисперсію помилок вимірювання величини вмісту фосфатів за формулою:

$$D_B = \sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n}.$$

Отже,

$$D_B = \frac{(6-15{,}6)^2 + (7-15{,}6)^2 + (11-15{,}6)^2 + (13-15{,}6)^2 + (16-15{,}6)^2}{10} +$$

$$+ \frac{(17-15{,}6)^2 + (20-15{,}6)^2 + (21-15{,}6)^2 + (22-15{,}6)^2 + (23-15{,}6)^2}{10} = 34{,}04$$

3) Вибіркову середню квадратів величини вмісту фосфатів $\overline{x^2}$ знайдемо таким чином:

$$\overline{x^2} = \frac{6^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 16^2 + 17^2 + 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2}{10} \approx 277{,}4$$

4) Виправлену вибіркову дисперсію помилок вимірювання величини вмісту фосфатів знаходимо за формулою:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x_B}\right)^2}{n-1}.$$

Отже,

$$S^2 = \frac{10}{9} \cdot 34{,}04 \approx 39{,}82.$$

<u>Задача 3.3</u>

1) Випадкова величина ***X*** кількості рослин льону, що уражені фузаріозом, має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$. Знайти з надійністю ***0,95*** точність ***δ***, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання, якщо об'єм вибірки ***n=400***.

Розв'язання:

Точність оцінки ***δ*** знаходимо за формулою $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, де ***t*** визначимо з рівності $\hat{O}(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475.$

У таблиці значень функції Лапласа (додаток 2) знаходимо відповідне значення ***0,475***, функція набуває його при значенні аргументу ***t=1,96***. Підставимо вихідні дані у формулу для знаходження точності оцінки:

$$\delta = \frac{1{,}96 \cdot 8}{\sqrt{400}} = \frac{1{,}96 \cdot 8}{20} = 0{,}784.$$

2) Знайти мінімальний об'єм вибірки, за яким з надійністю ***0,975*** точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності з нормальним розподілом дорівнює $\delta = 0,4$.

Середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності відоме і дорівнює $\sigma=4$.

Розв'язання:

З рівності $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ випливає, що для того, щоб забезпечити задану точність оцінки необхідно, щоб число n – об'єм вибірки задовольняло нерівність: $n \geq \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

У таблиці значень функції Лапласа (додаток 2) знаходимо, що $\Phi(2,24) = \frac{0,975}{2} = 0,4975$, отже, параметр $t = 2,24$.

Маємо: $\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2} = \frac{2,24^2 \cdot 4^2}{0,4^2} = 501,76$.

Мінімальний об'єм вибірки $n = 502$.

У відповіді наводимо число ***501,76***.

3) Кількісна ознака X генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму $n=100$ знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $s=6$. Знайти з надійністю ***0,999*** точність δ, з якою вибіркове середнє оцінює невідоме математичне сподівання генеральної сукупності.

Розв'язання:

У таблиці значень $t_\gamma = t(\gamma; n)$ (додаток 3) знайдемо $t_\gamma = t(0,999; 36) = 3,392$.

Підставляючи вихідні дані у формулу $\delta = t_\gamma \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, знаходимо

$$\delta = 3,392 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}} = 2,0352.$$

4) Кількісна ознака X генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму $n=100$ знайдено вибіркове середнє $\overline{x} = 20$ та виправлене середнє квадратичне відхилення $s=2,4$. Знайти надійний інтервал, який покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю ***0,95***.

Розв'язання:

З таблиці значень $t_\gamma = t(0,95;100) = 1,984$ (додаток 3).

Надійний інтервал має вигляд $\left(\bar{\tilde{o}} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right)$.

Підставляючи вихідні дані, матимемо інтервал:

$$\left(20 - 1,984 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{100}};\quad 20 + 1,984 \cdot \frac{2,4}{\sqrt{100}}\right) \text{ або } (19,524;20,476)$$

Значення лівого кінця інтервалу ***19,524***.

5) Кількісна ознака ***X*** генеральної сукупності має нормальний розподіл. За вибіркою об'єму $n = 40$ знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $s=2$. Знайти надійний інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю ***0,95***.

Розв'язання:

Надійний інтервал, що покриває середнє квадратичне відхилення з заданою надійністю, має вигляд:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q).$$

Значення q знаходимо з таблиці значень функції (додаток 4):

$$q = q(\gamma; n) \Rightarrow q(0,95;36) = 0,24.$$

Підставляючи вихідні дані, одержимо:

$$2(1-0,24) < \sigma < 2(1+0,24) \quad \text{або} \quad 1,52 < \sigma < 2,56.$$

Модуль 2. Теорія похибок вимірювання

Практичнезаняття №4
Похибка безпосередньо виміряної величини

Короткі теоретичні відомості.

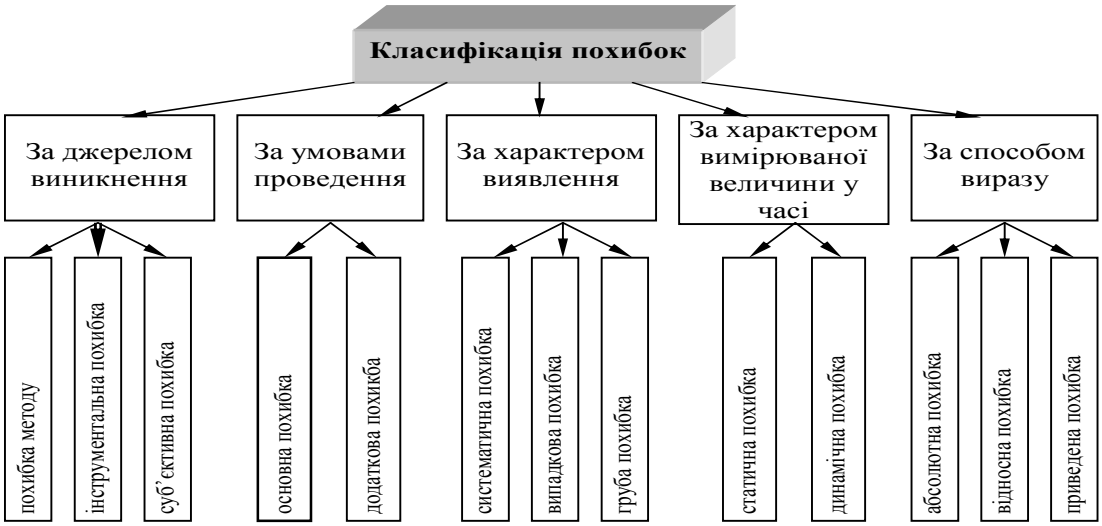


Рис. 4.1. Класифікація похибок

1. За джерелом виникнення

Похибки методу вимірювання – спричинені недосконалістю цього методу, а також недостатністю обґрунтування його теорії, застосуванням наближених формул для спрощення розрахунків тощо.

Іструментальна похибка – складова похибки вимірювання – зумовлена недосконалістю засобів вимірювальної техніки (ЗВТ). Ця похибка також може бути обумовлена конструктивними та технологічними недоліками. Наприклад, через неточність виготовлення та нестабільності елементів ЗВТ, неправильне градуювання шкали приладу тощо.

Суб'єктивні (особисті) похибки – як правило, є наслідком особистих властивостей спостерігача (експериментатора), які зумовлені особливостями його організму (недосконалість зору, втомленість т

2. За умовами проведення вимірювань

Основна похибка – похибка, яка виникає за нормальних умов застосування ЗВТ (20±5°С, 750±30 мм. АТ. ст., 65±15% - вологості). Ця похибка

нормується і вказується у відповідних документах (технічному паспорті, формулярі).

Додаткова похибка – обумовлюється відхиленням однієї чи декількох впливових величин (температури, тиску, вологості тощо) від нормального значення. Значення додаткової похибки, як і основної, нормується і вказується у відповідних технічних документах.

3. За характером виявлення

Систематична похибка – складова похибки, яка залишається сталою або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини. Вона зумовлена впливом на результат вимірювання багатьох факторів, дію яких не усунуто та не прийнято до уваги. Ці фактори можуть бути або постійно діючими, або закономірно змінюватись. В ряді випадків систематичні похибки можуть бути визначені дослідним шляхом. В залежності від причин виникнення систематичні похибки поділяють на інструментальні, суб'єктивні, а також похибки методу та похибки від зовнішніх впливів. На практиці повне усунення систематичних похибок неможливе, отже, результат будь-якого вимірювання містить залишки не виключених систематичних похибок.

Випадкова похибка – це та складова похибки, яка за повторних вимірювань однієї й тієї ж величини, проведених за допомогою одного й того ж приладу, в однакових умовах, з однаковою старанністю, дасть результати спостережень, що мають (хоч незначно) відрізнятись один від одного. Це вказує на те, що при багаторазових вимірюваннях результати спостережень та їх похибки є випадковими величинами.

Поява випадкових похибок зумовлена спільним впливом на засіб та об'єкт вимірювання багатьох випадкових факторів, поміж якими відсутній взаємний зв'язок. Іншими словами, результат будь-якого вимірювання "обтяжений" випадковими похибками.

Груба похибка – це похибка вимірювання, яка істотно перевищує очікувану за даних умов похибку.

4. За характером зміни вимірюваної величини у часі

Статична похибка – похибка при вимірюванні постійної в часівеличини.Наприклад, похибка вимірювання постійного струму тощо.

Динамічна похибка – різниця між похибкою в динамічному режимі (похибка при вимірюванні змінної в часі величини) і статичною похибкою, яка відповідає значенню виміряної величини у відповідний момент часу.

5. За способом виразу

Абсолютна похибка вимірювання — це алгебраїчна різниця між отриманим при вимірюванні значенням та істинним значенням вимірюваної величини:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\text{в}} - \boldsymbol{X} \qquad (1)$$

де: $\boldsymbol{\Delta x}$ – абсолютна похибка вимірювання; $\boldsymbol{x}_{\text{в}}$ – результат вимірювання; $\boldsymbol{X}$ – істинне значення вимірюваної величини.

Оскільки істинне значення вимірюваної величини невідоме, то його замінюють на дійсне (яке має бути наближеним до істинного). Таким чином, $\boldsymbol{\Delta x}$визначається:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\text{в}} - \boldsymbol{X}_{\text{д}} \tag{2}$$

де$\boldsymbol{X}_{\text{д}}$ – дійсне значення вимірюваної величини.

Абсолютна похибка визначається в одиницях величини, яку вимірюють;

Відносна похибка – відношення абсолютної похибки вимірювання до істинного значення вимірюваної величини:

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{X} \cdot 100\% \tag{3}$$

Відносна похибка виражена в безрозмірних одиницях (або у відсотках). На практиці замість істинного значення використовують дійсне значення;

Приведена похибка – відношення абсолютної похибки до нормуючого значення вимірюваної величини:

$$\gamma = \frac{\boldsymbol{\Delta x}}{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{нор}}} \tag{4}$$

де $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{нор}}$ - нормуюче значення.

Нормуюче значення приймають рівним:

- для засобів вимірювань, у яких нульова відмітка знаходиться на краю або за межами шкали, — кінцевому значенню діапазону вимірювань;
- якщо нульова відмітка знаходиться в межах діапазону вимірювань, — сумі кінцевих значень діапазону вимірювань;
- для вимірювальних приладів з суттєвою нерівномірністю шкали нормуюче значення встановлюють рівним в усій довжині шкали або її частині, відповідній до діапазона вимірювань.

Середня похибка(ө). Середнє арифметичне за абсолютними значення випадкових похибок називається середньою похибкою,тобто:

$$\boldsymbol{\Theta} = \frac{[|\boldsymbol{\Delta}|]}{\boldsymbol{n}} \tag{5}$$

де $[|\Delta|]=|\Delta_1|+|\Delta_2|+\ldots|\Delta_n|$

Ймовірна похибка(*r*). Ймовірною похибкою називається таке значення випадкової похибки,більше або менше якого за абсолютною величиною похибки рівноможливі.

Із визначення ймовірної похибки отримуємо спосіб її відшукування. Якщо всі похибки розмістити в ряд за спаданням або зростанням значень абсолютної величини, то ймовірна похибка буде розміщена в середині цього ряду. Звідси вірогідну похибку часто називають середньою.

Середня квадратична похибка(*m*). Середньою квадратичною похибкою називається величина, яка обчислюється за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}; \qquad (6)$$

де $\Delta_i = l_i - X, (i=1,2,3,\ldots n)$,

тут Δ_i-істинні похибки, X- істинне (точне) значення виміряної величини; l_i-результати вимірювань однієї тієї ж величини.

Зазвичай середній квадратичній похибці надається перевага над середньою і вірогідною з наступних причин:

-на величину середньої квадратичної похибки більшим є вплив великих за абсолютним значенням похибок;

-середня квадратична похибка є стійкою, тобто вона достатньо надійно визначається за невиликої кількості n.

Надійність середньої квадратичної похибки характерезується середньою квадратичною похибкою самої середньої квадратичної похибки, отриманої із експеременту, яка обчислюється за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \qquad (7)$$

Виходячи з цього,на практиці, для, достатньонадійного визначення m, прийнято виконувати не менше восьми вимірів$(n \geq 8)$.

Для теоретичних розрахунків слугує формула:

$$\Delta_{гран} \leq 3m. \qquad (8)$$

На практиці, враховуючі обмежену кількість вимірювань, застосовують пом'якшену умову $\Delta_{гран} \leq 2m$.

За нормального розподілу похибок вимірювань існують зв'язки між середньою, ймовірною та середньою квадратичною:

$$\Theta = \frac{4}{5}m, \qquad r = \frac{4}{5}m \qquad (8)$$

Завдання для самостійної роботи

<u>Завдання 4.1</u>

В результаті вимірювань лінійної величини, одержано ряд похибок. Визначити:

1) середню похибку;
2) ймовірну похибку;
3) середньоквадратичну похибку.
4) надійність СКП;
5)оцінити абсолютну граничну похибку.

В1.

0,246; 0,344; 0,18; 0,196; 0,394; 0,46; 0,18; 0,492; 0,18; 0,394; 0,246; 0,32; 0,246; 0,27; 0,27; 0,5; 0,18; 0,32; 0,344; 0,18

В2.

0,466; 0,588; 0,38; 0,33; 0,54; 0,22; 0,294; 0,22; 0,38; 0,294; 0,244; 0,6; 0,22; 0,416; 0,22; 0,416; 0,22; 0,294; 0,33; 0,466

B3.
0,41; 0,58; 0,24; 0,268; 0,318; 0,502; 0,36; 0,318; 0,41; 0,452; 0,452; 0,36; 0,24; 0,24; 0,65; 0,502; 0,24; 0,24; 0,318; 0,636
B4.
0,538; 0,7; 0,44; 0,26; 0,26; 0,39; 0,26; 0,26; 0,684; 0,488; 0,26; 0,342; 0,62; 0,538; 0,488; 0,342; 0,44; 0,39; 0,342; 0,292
B5.
0,47; 0,75; 0,47; 0,366; 0,28; 0,66; 0,366; 0,28; 0,42; 0,732; 0,28; 0,42; 0,524; 0,316; 0,524; 0,28; 0,28; 0,574; 0,366; 0,574
B6.
0,825; 0,578; 0,31; 0,402; 0,804; 0,31; 0,402; 0,31; 0,31; 0,402; 0,628; 0,72; 0,515; 0,352; 0,515; 0,628; 0,465; 0,465; 0,31; 0,578
B7.
0,34; 0,51; 0,682; 0,9; 0,632; 0,876; 0,51; 0,78; 0,34; 0,56; 0,682; 0,34; 0,34; 0,632; 0,438; 0,388; 0,56; 0,438; 0,34; 0,438
B8.
0,54; 0,412; 0,36; 0,36; 0,59; 0,462; 0,924; 0,95; 0,718; 0,668; 0,668; 0,36; 0,36; 0,718; 0,462; 0,59; 0,54; 0,36; 0,82; 0,462
B9.
0,13; 0,186; 0,136; 0,13; 0,245; 0,13; 0,195; 0,304; 0,195; 0,254; 0,245; 0,36; 0,13; 0,186; 0,375; 0,304; 0,13; 0,186; 0,372; 0,254
B10.
0,15; 0,21; 0,275; 0,225; 0,29; 0,275; 0,15; 0,21; 0,34; 0,4; 0,16; 0,15; 0,42; 0,425; 0,34; 0,29; 0,15; 0,225; 0,15; 0,21
B11.
0,448; 0,282; 0,21; 0,575; 0,398; 0,315; 0,232; 0,448; 0,315; 0,21; 0,52; 0,398; 0,365; 0,21; 0,282; 0,365; 0,21; 0,564; 0,282; 0,21
B12.
0,306; 0,23; 0,395; 0,23; 0,23; 0,345; 0,612; 0,345; 0,434; 0,23; 0,484; 0,484; 0,306; 0,395; 0,306; 0,434; 0,625; 0,256; 0,56; 0,23
B13.
0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36
B14.
0,246; 0,344; 0,18; 0,196; 0,394; 0,46; 0,18; 0,492; 0,18; 0,394; 0,246; 0,32; 0,246; 0,27; 0,27; 0,5; 0,18; 0,32; 0,344; 0,18
B15.
0,466; 0,588; 0,38; 0,33; 0,54; 0,22; 0,294; 0,22; 0,38; 0,294; 0,244; 0,6; 0,22; 0,416; 0,22; 0,416; 0,22; 0,294; 0,33; 0,466
B16.
0,41; 0,58; 0,24; 0,268; 0,318; 0,502; 0,36; 0,318; 0,41; 0,452; 0,452; 0,36; 0,24; 0,24; 0,65; 0,502; 0,24; 0,24; 0,318; 0,636
B17.

0,538; 0,7; 0,44; 0,26; 0,26; 0,39; 0,26; 0,26; 0,684; 0,488; 0,26; 0,342; 0,62; 0,538; 0,488; 0,342; 0,44; 0,39; 0,342; 0,292

B18.

0,47; 0,75; 0,47; 0,366; 0,28; 0,66; 0,366; 0,28; 0,42; 0,732; 0,28; 0,42; 0,524; 0,316; 0,524; 0,28; 0,28; 0,574; 0,366; 0,574

B19.

0,825; 0,578; 0,31; 0,402; 0,804; 0,31; 0,402; 0,31; 0,31; 0,402; 0,628; 0,72; 0,515; 0,352; 0,515; 0,628; 0,465; 0,465; 0,31; 0,578

B20.

0,34; 0,51; 0,682; 0,9; 0,632; 0,876; 0,51; 0,78; 0,34; 0,56; 0,682; 0,34; 0,34; 0,632; 0,438; 0,388; 0,56; 0,438; 0,34; 0,438

B21.

0,54; 0,412; 0,36; 0,36; 0,59; 0,462; 0,924; 0,95; 0,718; 0,668; 0,668; 0,36; 0,36; 0,718; 0,462; 0,59; 0,54; 0,36; 0,82; 0,462

B22.

0,13; 0,186; 0,136; 0,13; 0,245; 0,13; 0,195; 0,304; 0,195; 0,254; 0,245; 0,36; 0,13; 0,186; 0,375; 0,304; 0,13; 0,186; 0,372; 0,254

B23.

0,15; 0,21; 0,275; 0,225; 0,29; 0,275; 0,15; 0,21; 0,34; 0,4; 0,16; 0,15; 0,42; 0,425; 0,34; 0,29; 0,15; 0,225; 0,15; 0,21

B24.

0,448; 0,282; 0,21; 0,575; 0,398; 0,315; 0,232; 0,448; 0,315; 0,21; 0,52; 0,398; 0,365; 0,21; 0,282; 0,365; 0,21; 0,564; 0,282; 0,21

B25.

0,306; 0,23; 0,395; 0,23; 0,23; 0,345; 0,612; 0,345; 0,434; 0,23; 0,484; 0,484; 0,306; 0,395; 0,306; 0,434; 0,625; 0,256; 0,56; 0,23

B26.

0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36

B27.

0,13; 0,186; 0,136; 0,13; 0,245; 0,13; 0,195; 0,304; 0,195; 0,254; 0,245; 0,36; 0,13; 0,186; 0,375; 0,304; 0,13; 0,186; 0,372; 0,254

B28.

0,15; 0,21; 0,275; 0,225; 0,29; 0,275; 0,15; 0,21; 0,34; 0,4; 0,16; 0,15; 0,42; 0,425; 0,34; 0,29; 0,15; 0,225; 0,15; 0,21

B29.

0,448; 0,282; 0,21; 0,575; 0,398; 0,315; 0,232; 0,448; 0,315; 0,21; 0,52; 0,398; 0,365; 0,21; 0,282; 0,365; 0,21; 0,564; 0,282; 0,21

B30.

0,306; 0,23; 0,395; 0,23; 0,23; 0,345; 0,612; 0,345; 0,434; 0,23; 0,484; 0,484; 0,306; 0,395; 0,306; 0,434; 0,625; 0,256; 0,56; 0,23

B31.

0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36

<u>Завдання 4.2</u>

Під час використання далекоміру подвійного зображення отримано 36 значень паралактичного кута β_i, точне значення лінійного кута β_0 обчислено на основі лінійних вимірів.

Обчислити:

1) істині похибки Δ_i;
2) середньоквадратичну похибку m, оцінити її надійність;
3) середню та ймовірну похибки;
4) теоретичне k_0 та дійсне g число похибок в інтервалах від -3m до 3m з кроком 0,5m. Обчислити різницю $g - k_0$;
5) коефіцієнти $k_1 = \frac{m}{\theta}$, $k_1 = \frac{m}{r}$ і порівняти їх із теоретичними;
6) обчислити ординати даного розподілу та побудувати гістограму розподілу похибок вимірів.

В1.

β_0=286,62

β_i: 286,8; 286,6; 286,6; 286,4; 286,8; 286,5; 286,4; 286,7; 286,6; 287,2; 286,4; 286,8; 286,3; 286,6; 286,6; 287,1; 286,4; 286,8; 286,9; 286,5; 286,6; 286,5; 286,7; 286,6; 286,5; 286,7; 286,8; 287,0; 286,4; 286,4; 286,7; 287,2; 286,4; 286,4; 286,3; 286,5

В2.

β_0=191,08

β_i: 191,2; 191,1; 191,0; 190,9; 191,2; 191,0; 190,9; 191,1; 191,1; 191,5; 190,9; 191,2; 190,8; 191,1; 191,0; 191,4; 190,9; 191,2; 191,2; 191,0; 191,0; 191,0; 191,1; 191,1; 191,0; 191,1; 191,2; 191,3; 190,9; 190,9; 191,1; 191,5; 190,9; 190,9; 190,9; 191,0

В3.

β_0=260,56

β_i: 260,7; 260,5; 260,5; 260,3; 260,7; 260,5; 260,4; 260,6; 260,5; 261,1; 260,4; 260,7; 260,2; 260,5; 260,5; 261,0; 260,3; 260,7; 260,8; 260,5; 260,5; 260,4; 260,6; 260,5; 260,5; 260,6; 260,7; 260,9; 260,3; 260,4; 260,6; 261,1; 260,4; 260,4; 260,3; 260,5

В4.

β_0=238,85

β_i: 239,0; 238,8; 238,8; 238,6; 239,0; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 239,3; 238,7; 239,0; 238,5; 238,8; 238,8; 239,2; 238,6; 239,0; 239,0; 238,8; 238,8; 238,7;

238,9; 238,8; 238,8; 238,9; 239,0; 239,2; 238,6; 238,7; 238,9; 239,3; 238,7; 238,7; 238,6; 238,8

B5.

β_0=477,69

β_i: 477,9; 477,7; 477,6; 477,3; 478,0; 477,5; 477,3; 477,8; 477,7; 478,7; 477,3; 477,9; 477,1; 477,7; 477,6; 478,4; 477,3; 477,9; 478,1; 477,5; 477,6; 477,4; 477,8; 477,7; 477,5; 477,8; 478,0; 478,3; 477,3; 477,3; 477,8; 478,7; 477,3; 477,3; 477,2; 477,5

B6.

β_0=409,45

β_i: 409,6; 409,4; 409,4; 409,1; 409,7; 409,3; 409,1; 409,6; 409,4; 410,3; 409,1; 409,6; 408,9; 409,4; 409,4; 410,1; 409,1; 409,6; 409,8; 409,3; 409,4; 409,2; 409,5; 409,4; 409,3; 409,5; 409,7; 410,0; 409,1; 409,1; 409,6; 410,3; 409,1; 409,1; 409,0; 409,3

B7.

β_0=358,27

β_i: 358,4; 358,3; 358,2; 357,9; 358,5; 358,1; 358,0; 358,4; 358,3; 359,0; 358,0; 358,4; 357,8; 358,3; 358,2; 358,8; 357,9; 358,4; 358,6; 358,1; 358,2; 358,1; 358,3; 358,3; 358,1; 358,3; 358,5; 358,8; 357,9; 358,0; 358,4; 359,0; 358,0; 358,0; 357,9; 358,1

B8.

β_0=318,46

β_i: 318,6; 318,4; 318,4; 318,2; 318,7; 318,3; 318,2; 318,6; 318,4; 319,1; 318,2; 318,6; 318,1; 318,4; 318,4; 318,9; 318,2; 318,6; 318,7; 318,3; 318,4; 318,3; 318,5; 318,4; 318,3; 318,5; 318,7; 318,9; 318,2; 318,2; 318,6; 319,1; 318,2; 318,2; 318,1; 318,3

B9.

β_0=272,97

β_i: 273,1; 273,0; 272,9; 272,7; 273,1; 272,9; 272,8; 273,0; 273,0; 273,5; 272,8; 273,1; 272,6; 273,0; 272,9; 273,4; 272,7; 273,1; 273,2; 272,9; 272,9; 272,8; 273,0; 273,0; 272,9; 273,0; 273,1; 273,3; 272,7; 272,8; 273,0; 273,5; 272,8; 272,8; 272,7; 272,9

B10.

β_0=249,23

β_i: 249,3; 249,2; 249,2; 249,0; 249,4; 249,1; 249,0; 249,3; 249,2; 249,7; 249,0; 249,3; 248,9; 249,2; 249,2; 249,6; 249,0; 249,3; 249,4; 249,1; 249,2; 249,1;

249,3; 249,2; 249,1; 249,3; 249,4; 249,6; 249,0; 249,0; 249,3; 249,7; 249,0; 249,0; 249,0; 249,1

B11.

β_0=238,85

239,0; 238,8; 238,8; 238,6; 239,0; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 239,3; 238,7; 239,0; 238,5; 238,8; 238,8; 239,2; 238,6; 239,0; 239,0; 238,8; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 238,8; 238,9; 239,0; 239,2; 238,6; 238,7; 238,9; 239,3; 238,7; 238,7; 238,6; 238,8

B12.

β_0=220,47

220,6; 220,5; 220,4; 220,3; 220,6; 220,4; 220,3; 220,5; 220,5; 220,9; 220,3; 220,6; 220,2; 220,5; 220,4; 220,8; 220,3; 220,6; 220,7; 220,4; 220,4; 220,3; 220,5; 220,5; 220,4; 220,5; 220,6; 220,8; 220,3; 220,3; 220,5; 220,9; 220,3; 220,3; 220,2; 220,4

B13.

β_0=204,73

204,8; 204,7; 204,7; 204,5; 204,9; 204,6; 204,6; 204,8; 204,7; 205,1; 204,6; 204,8; 204,5; 204,7; 204,7; 205,0; 204,5; 204,8; 204,9; 204,6; 204,7; 204,6; 204,8; 204,7; 204,6; 204,8; 204,9; 205,0; 204,5; 204,6; 204,8; 205,1; 204,6; 204,6; 204,5; 204,6

B14.

β_0=286,62

β_i: 286,8; 286,6; 286,6; 286,4; 286,8; 286,5; 286,4; 286,7; 286,6; 287,2; 286,4; 286,8; 286,3; 286,6; 286,6; 287,1; 286,4; 286,8; 286,9; 286,5; 286,6; 286,5; 286,7; 286,6; 286,5; 286,7; 286,8; 287,0; 286,4; 286,4; 286,7; 287,2; 286,4; 286,4; 286,3; 286,5

B15.

β_0=191,08

β_i: 191,2; 191,1; 191,0; 190,9; 191,2; 191,0; 190,9; 191,1; 191,1; 191,5; 190,9; 191,2; 190,8; 191,1; 191,0; 191,4; 190,9; 191,2; 191,2; 191,0; 191,0; 191,0; 191,1; 191,1; 191,0; 191,1; 191,2; 191,3; 190,9; 190,9; 191,1; 191,5; 190,9; 190,9; 190,9; 191,0

B16.

β_0=260,56

β_i: 260,7; 260,5; 260,5; 260,3; 260,7; 260,5; 260,4; 260,6; 260,5; 261,1; 260,4; 260,7; 260,2; 260,5; 260,5; 261,0; 260,3; 260,7; 260,8; 260,5; 260,5; 260,4; 260,6; 260,5; 260,5; 260,6; 260,7; 260,9; 260,3; 260,4; 260,6; 261,1; 260,4; 260,4; 260,3; 260,5

B17.

β_0=238,85

β_i: 239,0; 238,8; 238,8; 238,6; 239,0; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 239,3; 238,7; 239,0; 238,5; 238,8; 238,8; 239,2; 238,6; 239,0; 239,0; 238,8; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 238,8; 238,9; 239,0; 239,2; 238,6; 238,7; 238,9; 239,3; 238,7; 238,7; 238,6; 238,8

B18.

β_0=477,69

β_i: 477,9; 477,7; 477,6; 477,3; 478,0; 477,5; 477,3; 477,8; 477,7; 478,7; 477,3; 477,9; 477,1; 477,7; 477,6; 478,4; 477,3; 477,9; 478,1; 477,5; 477,6; 477,4; 477,8; 477,7; 477,5; 477,8; 478,0; 478,3; 477,3; 477,3; 477,8; 478,7; 477,3; 477,3; 477,2; 477,5

B19.

β_0=409,45

β_i: 409,6; 409,4; 409,4; 409,1; 409,7; 409,3; 409,1; 409,6; 409,4; 410,3; 409,1; 409,6; 408,9; 409,4; 409,4; 410,1; 409,1; 409,6; 409,8; 409,3; 409,4; 409,2; 409,5; 409,4; 409,3; 409,5; 409,7; 410,0; 409,1; 409,1; 409,6; 410,3; 409,1; 409,1; 409,0; 409,3

B20.

β_0=358,27

β_i: 358,4; 358,3; 358,2; 357,9; 358,5; 358,1; 358,0; 358,4; 358,3; 359,0; 358,0; 358,4; 357,8; 358,3; 358,2; 358,8; 357,9; 358,4; 358,6; 358,1; 358,2; 358,1; 358,3; 358,3; 358,1; 358,3; 358,5; 358,8; 357,9; 358,0; 358,4; 359,0; 358,0; 358,0; 357,9; 358,1

B21.

β_0=318,46

β_i: 318,6; 318,4; 318,4; 318,2; 318,7; 318,3; 318,2; 318,6; 318,4; 319,1; 318,2; 318,6; 318,1; 318,4; 318,4; 318,9; 318,2; 318,6; 318,7; 318,3; 318,4; 318,3; 318,5; 318,4; 318,3; 318,5; 318,7; 318,9; 318,2; 318,2; 318,6; 319,1; 318,2; 318,2; 318,1; 318,3

B22.

β_0=272,97

β_i: 273,1; 273,0; 272,9; 272,7; 273,1; 272,9; 272,8; 273,0; 273,0; 273,5; 272,8; 273,1; 272,6; 273,0; 272,9; 273,4; 272,7; 273,1; 273,2; 272,9; 272,9; 272,8; 273,0; 273,0; 272,9; 273,0; 273,1; 273,3; 272,7; 272,8; 273,0; 273,5; 272,8; 272,8; 272,7; 272,9

B23.

β_0=249,23

β_i: 249,3; 249,2; 249,2; 249,0; 249,4; 249,1; 249,0; 249,3; 249,2; 249,7; 249,0; 249,3; 248,9; 249,2; 249,2; 249,6; 249,0; 249,3; 249,4; 249,1; 249,2; 249,1; 249,3; 249,2; 249,1; 249,3; 249,4; 249,6; 249,0; 249,0; 249,3; 249,7; 249,0; 249,0; 249,0; 249,1

B24.

β_0=238,85

239,0; 238,8; 238,8; 238,6; 239,0; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 239,3; 238,7; 239,0; 238,5; 238,8; 238,8; 239,2; 238,6; 239,0; 239,0; 238,8; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 238,8; 238,9; 239,0; 239,2; 238,6; 238,7; 238,9; 239,3; 238,7; 238,7; 238,6; 238,8

B25.

β_0=220,47

220,6; 220,5; 220,4; 220,3; 220,6; 220,4; 220,3; 220,5; 220,5; 220,9; 220,3; 220,6; 220,2; 220,5; 220,4; 220,8; 220,3; 220,6; 220,7; 220,4; 220,4; 220,3; 220,5; 220,5; 220,4; 220,5; 220,6; 220,8; 220,3; 220,3; 220,5; 220,9; 220,3; 220,3; 220,2; 220,4

B26.

β_0=204,73

204,8; 204,7; 204,7; 204,5; 204,9; 204,6; 204,6; 204,8; 204,7; 205,1; 204,6; 204,8; 204,5; 204,7; 204,7; 205,0; 204,5; 204,8; 204,9; 204,6; 204,7; 204,6; 204,8; 204,7; 204,6; 204,8; 204,9; 205,0; 204,5; 204,6; 204,8; 205,1; 204,6; 204,6; 204,5; 204,6

B27.

β_0=272,97

β_i: 273,1; 273,0; 272,9; 272,7; 273,1; 272,9; 272,8; 273,0; 273,0; 273,5; 272,8; 273,1; 272,6; 273,0; 272,9; 273,4; 272,7; 273,1; 273,2; 272,9; 272,9; 272,8; 273,0; 273,0; 272,9; 273,0; 273,1; 273,3; 272,7; 272,8; 273,0; 273,5; 272,8; 272,8; 272,7; 272,9

B28.

β_0=249,23

β_i: 249,3; 249,2; 249,2; 249,0; 249,4; 249,1; 249,0; 249,3; 249,2; 249,7; 249,0; 249,3; 248,9; 249,2; 249,2; 249,6; 249,0; 249,3; 249,4; 249,1; 249,2; 249,1; 249,3; 249,2; 249,1; 249,3; 249,4; 249,6; 249,0; 249,0; 249,3; 249,7; 249,0; 249,0; 249,0; 249,1

B29.

β_0=238,85

239,0; 238,8; 238,8; 238,6; 239,0; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 239,3; 238,7; 239,0; 238,5; 238,8; 238,8; 239,2; 238,6; 239,0; 239,0; 238,8; 238,8; 238,7; 238,9; 238,8; 238,8; 238,9; 239,0; 239,2; 238,6; 238,7; 238,9; 239,3; 238,7; 238,7; 238,6; 238,8

В30.

β_0=220,47

220,6; 220,5; 220,4; 220,3; 220,6; 220,4; 220,3; 220,5; 220,5; 220,9; 220,3; 220,6; 220,2; 220,5; 220,4; 220,8; 220,3; 220,6; 220,7; 220,4; 220,4; 220,3; 220,5; 220,5; 220,4; 220,5; 220,6; 220,8; 220,3; 220,3; 220,5; 220,9; 220,3; 220,3; 220,2; 220,4

В31.

β_0=204,73

204,8; 204,7; 204,7; 204,5; 204,9; 204,6; 204,6; 204,8; 204,7; 205,1; 204,6; 204,8; 204,5; 204,7; 204,7; 205,0; 204,5; 204,8; 204,9; 204,6; 204,7; 204,6; 204,8; 204,7; 204,6; 204,8; 204,9; 205,0; 204,5; 204,6; 204,8; 205,1; 204,6; 204,6; 204,5; 204,6

Приклади виконаннязавданьпрактичного заняття №4.

<u>Задача 4.1</u>

В результаті вимірювань лінійної величини, одержано ряд похибок 0,452; 0,502; 0,502; 0,24; 0,452; 0,636; 0,318; 0,268; 0,24; 0,318; 0,24; 0,24; 0,41; 0,41; 0,65; 0,24; 0,36; 0,318; 0,58; 0,36

. Визначити:

1) середню похибку;
2) ймовірну похибку;
3) середньоквадратичну похибку.
4) надійність СКП;
5)граничну похибку.

Розв'язання:

1) Знайдемо середню похибку за формулою (5)

$$\Theta = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{1}{20}(0{,}452 + 0{,}502 + 0{,}502 + 0{,}24 + 0{,}452 + 0{,}636 + 0{,}318 + \\ +0{,}268 + 0{,}24 + 0{,}318 + 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}41 + 0{,}41 + 0{,}65 + 0{,}24 + \\ +0{,}36 + 0{,}318 + 0{,}58 + 0{,}36) = \\ = \frac{7{,}736}{20} = 0{,}3868$$

2) Для знаходження ймовірної похибки розмістимо похибки в порядку зростання, серединою одержаного ряду є число 0,36, отже ймовірно похибка – $r = 0{,}36$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,24	**0,24**	**0,24**	**0,24**	**0,24**	**0,268**	**0,318**	**0,318**	**0,318**	**0,36**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,36	**0,41**	**0,41**	**0,452**	**0,452**	**0,502**	**0,502**	**0,58**	**0,636**	**0,65**

3) Середню квадратичну похибку визначимо за формулою (6)

$$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{3{,}334608}{20}} = 0{,}4083$$

4) Надійність СКП визначається формулою (7)

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \frac{0{,}4083}{20} = 0{,}02$$

5) $\Delta_{\text{гран}} \leq 3m = 2 \cdot 0{,}4083 = 0{,}8166.$

<u>Задача 4.2</u>

Під час використання далекоміра подвійного зображення типу ДНБ отримано36 значень паралетичного кута β_{i}, записаних в табл 4.1. Точне значення лінійного кута β_0обчислено на основі лінійних вимірів.

Таблиця 4.1.

β_0=573,″23

№n/n	Кути β_{i}"	Істинні похибки $\Delta_{\text{i}}" = \beta_{\text{i}} - \beta 0$	Δ_1^2	*№n/n*	Кути β_{i}"	Істинні похибки $\Delta_{\text{i}}" = \beta_{\text{i}} - \beta 0$	Δ_1^2
1	573,5	0,27	0,0729	19	573,7	0,47	0,2209
2	572,2	-0,03	0,0009	20	573	-0,23	0,0529
3	573,1	-0,13	0,0169	21	573,1	-0,13	0,0169
4	572,7	-0,53	0,2809	22	572,9	-0,33	0,1089
5	573,6	0,37	0,1369	23	573,3	0,07	0,0049
6	573	-0,23	0,0529	24	573,2	-0,03	0,0009
7	572,8	-0,43	0,1849	25	573	-0,23	0,0529
8	573,4	0,17	0,0289	26	573,3	0,07	0,0049
9	573,2	-0,03	0,0009	27	573,6	0,37	0,1369
10	574,4	1,17	1,3689	28	574	0,77	0,5929
11	572,8	-0,43	0,1849	29	572,7	-0,53	0,2809
12	573,5	0,27	0,0729	30	572,8	-0,43	0,1849
13	572,5	-0,73	0,5329	31	573,4	0,17	0,0289
14	573,2	-0,03	0,0009	32	574,4	1,17	1,3689
15	573,1	-0,13	0,0169	33	572,8	-0,43	0,1849

16	574,1	0,87	0,7569	34	572,8	-0,43	0,1849
17	572,7	-0,53	0,2809	35	572,6	-0,63	0,3969
18	573,5	0,27	0,0729	36	573	-0,23	0,0529
						6,48	
						-6,86	
					Σ	**13,34**	**7,9404**

За даними табл.1.1 обчислити:

1) істинні похибки $\boldsymbol{\Delta_i}$

2)середню квадратичну похибку $\boldsymbol{m} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{\mathbf{n}}}$

з оцінкою її надійності $\boldsymbol{m_m} = \frac{\boldsymbol{m}}{\sqrt{2n}}$

3)середню і ймовірну похибки $\boldsymbol{\theta}$ і $\boldsymbol{r}$(див табл. 4.1.)

4)теоретичне $\boldsymbol{k_0}$і дійсне $\boldsymbol{g}$число похибок в інтервалах через $\pm\mathbf{0{,}5}\boldsymbol{m}$ від$-\boldsymbol{\Delta} = -\mathbf{3}\boldsymbol{m}$ до $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{3}\boldsymbol{m}$; обчислити різницю $\boldsymbol{g}$- $\boldsymbol{k_0}$;

5)коефіцієнти$\mathbf{k_1} = \frac{\mathbf{m}}{\theta}$,$\boldsymbol{k_2} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{r}}$і порівняти їх із теоретичними (1,25 і 1,48 відповідно);

6)ординати за таблицями додатку для + *Δ* і –Δ через ±0,5m

Розв'язок

1)істинні похибки обчислені в табл. 4.1.(колонки3,7)

2)m=$\sqrt{\frac{7{,}9404}{36}}$=$\pm 0{,}47 m_m$=$\frac{0{,}47}{\sqrt{2\cdot 36}}$=$\pm 0{,}055$;

3)$\Theta = \frac{13{,}34}{36} = \pm 0{,}37$

Для визначення ймовірноїпохибки розміщуємо істинні похибки у ряд за зростанням абсолютної величини. Табл.4.2

№з/н	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	10	11	12
Δі″	*0,03*	*0,03*	*0,03*	*0,03*	*0,07*	*0,07*	*0,13*	*0,13*	*0,13*	*0,17*	*0,*17	0,23
№з/н	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*	24
Δі″	*0,23*	*0,23*	*0,23*	*0,27*	*0,27*	*0,27*	*0,33*	*0,37*	*0,37*	*0,43*	*0,43*	0,43
№з/н	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	*32*	*33*	*34*	*35*	36
Δі″	*0,43*	*0,43*	*0,47*	*0,53*	*0,53*	*0,53*	*0,63*	0,73	*0,77*	*0,87*	*1,17*	1,17

В середині ряду отримуємо: № 18=+0″,27 №19=+0″,33.Звідси маємо r=$\pm 0*$,30.

4)Визначення теоретичного числа похибок k_0
n=36,m=$\pm 0''47$

табл.4.3

№ з/п	Інтервал Δ i		Аргумент $l_i=\frac{\Delta_i}{m}$	$p_i=\Phi(t_i)$	p_i-p_{i-1}	$k_0=n*$ $*(p_i-p_{i-1})$
	Взагальному вигляді	в сек.				
1	0,5m	0,24	0,5	0,383	0,383	14
2	1,0m	0,47	1	0,683	0,3	11
3	1,5m	0,71	1,5	0,866	0,183	7
4	2,0m	0,94	2	0,955	0,089	3
5	2,5m	1,18	2,5	0,988	0,033	1
6	3,0m	1,41	3	0,977	0,009	0
			Контроль	Контроль	0,997	36

$\Phi(l_i)$взято з таблицізначеньінтеграла ймовірність.

Підрахунок дійсного числа похибок gрізницю g- k_0

№з/п	Інтервали через$\pm$ 0,5mвід –Δ=-3,0mдо +Δ=+3,0m	Кількість похибок		
		g	k_0	g-k_0
1	Від 0 до$\pm 0,24$	15	14	1
2	$\pm 0,25$ до $\pm 0,47$	12	11	1
3	$\pm 0,48$до $\pm 0,71$	4	7	-3
4	$\pm 0,72$ до $\pm 0,94$	3	3	0
5	$\pm 0,95$ до $\pm 1,18$	2	1	1
6	$\pm 1,19$до $\pm 1,41$	0	0	0
	Більше$\pm 1,41$	0	0	0
	Контроль	36	36	0

$m \approx 1,25$; m≈1,48r ; $\frac{m}{\theta}\leq 1,29$.

g – визначено безпосереднім підрахунком за данним табл.4.1

5) $=k_1 = \frac{0,"47}{0,"37} = 1,27 k_2 = \frac{0,"47}{0,"30} = 1,56$

6)Обчислення ординат за таблицею дод.

Таблиця 4.5.

№ з/п	$l_i = \frac{\Delta_i}{m}$	$h = \frac{1}{2\sqrt{m}}$	y´	y=y´h
1	0,5	1,50	0,498	0,75
2	1,0		0,342	0,51
3	1,5		0,183	0,27
4	2,0		0,076	0,11

5	2,5		0,025	0,04
6	3,0		0,006	0,01

Висновки.

Досліджуваний ряд похибок можна рахувати задовольняючим нормальний закон розподілу,так як:

1)жодна похибка ряду не перевищує 3,0m;

2)різниця g-k_0 за даної кількості похибок є незначущою;

3)коефіцієнти k_1 і k_2 задовільно збігаються із їх теоретичними значеннями.

Практична заняття №5
Похибка фунції

Короткі теоретичні відомості

Дуже часто виникає необхідність визначення середньої квадратичної похибки величин, не безпосередньо виміряних, а отриманих шляхом обчислень із інших виміряних величин. Тобто шукана величина визначається шляхом обчислень функції виміряних величин. Похибка функції залежить від похибокаргументів, що входять до неї. Припустимо що у функції загального виду:

$$F = f(x, y, z, \dots, u) \qquad (1)$$

аргументи $x, y, z, \dots, u$незалежно виміряні із середньою квадратичною похибкою $m_x; m_y; m_z; \dots; m_u$ Якщо $X_1, Y, \dots, U-$ істинні значення (точні) аргументів, то їхні істинні похибки дорівнюють :

$$\Delta x = x - X$$

$$\Delta y = y - Y$$

……..

$$\Delta u = u - U,$$

а істинна похибка функції: $\Delta F = f\left(x, y, \dots u\right) - f\left(x - \Delta x, y - \Delta y, \dots, u - \Delta u\right)$. Причьому стандарти вимыряних величин характеризуються середными квадратичними похибками $\sigma_x; \sigma_y; \dots; \sigma_u$. Тоді середня квадратична похибка функції буде дорівнювати:

$$m_F = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) m_u^2} \qquad (2)$$

Розрахунки, для знаходження СКП функції вимівяних величин виконуються в наступній послідовності:

1. функцію записують у явному вигляді;
2. знайти частинні похідні функції за всіма частинними похідними;
3. знайти значення частинних похідних;
4. знайдені значення похідних та СКП підставляємо в формулу (2) та виконавши обчислення одержамо СКП функції.

Окремі випадки:

1. Лінійна функція $y = \pm k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \ldots \pm k_n x_n$, а СКП незалежних змінних відповідно дорівнюють $m_{x1}; m_{x2}; \ldots; m_{xn}$ тоді СКП лінійної функції матиме вид:

$$m_y = \sqrt{k_1^2 \cdot m_{x1}^2 + k_1^2 \cdot m_{x1}^2 + .. + k_n^2 \cdot m_{xn}^2} \ . \qquad (3)$$

2. Для функції $y = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$ СКП матимеме вид:

$$m_y = \sqrt{m_{x1}^2 + m_{x1}^2 + .. + m_{xn}^2}. \qquad (4)$$

3. Якщо всі аргументи виміряні з однаковою точністю, тобто СКП незалежних змінних рівні$m_{x1} = m_{x2} = \cdots = m_{xn} = m$ тобто:

$$m_y = m\sqrt{n} \ . \qquad (5)$$

4. Якщо функція має вид $y = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_p}{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n}$ то,враховуючи правило зноходження похідної неявно заданої функції, СКП матимеме вид:

$$\frac{m_u}{u} = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{m_{xi}}{x_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m_{yi}}{y_i}\right)^2}$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 5.1.

Визначити середньоквадратичну похибку обчислення довжини кола та площу круга, радіусом R з СКП m_s

В№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
R**, мм**	51,6	51,1	50,5	49,8	49,3
m_s**, мм**	0,54	0,53	0,51	0,49	0,48
В№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

R, **мм**	48,5	47,6	46,4	43,4	45,3
m_s, **мм**	0,46	0,43	0,41	0,35	0,4
В№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
R, **мм**	44,7	44,1	43,7	42,4	41,3
m_s, **мм**	0,39	0,38	0,35	0,34	0,31
В№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
R, **мм**	51,6	51,1	50,5	49,8	49,3
m_s, **мм**	0,54	0,53	0,51	0,49	0,48
В№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
R, **мм**	48,5	47,6	46,4	43,4	45,3
m_s, **мм**	0,46	0,43	0,41	0,35	0,4
В№	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
R, **мм**	44,7	44,1	43,7	42,4	41,3
m_s, **мм**	0,39	0,38	0,35	0,34	0,31

Завдання5.2

Лінія АВ виміряна по частина, результати наведено в таблиці. Знайти абсолютну та відносну похибки обчислення довжини ламаної.

№ Варіанта	1	2	3	4
1	150,13м±3,1см	148,14м±5,2см	145,96м±4,1см	14,01м±3,9см
2	140,17м±2,8см	138,14м±4,2см	135,96м±3,5см	13,21м±2,4см
3	155,53м±2,6см	151,54м±5,7см	149,56м±4,5см	15,51м±3,5см
4	153,37м±3,8см	155,14м±3,5см	150,46м±3,8см	14,23м±2,6см
5	147,43м±2,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
6	142,56м±2,9см	136,43м±3,2см	134,56м±3,2см	13,56м±2,8см
7	154,56м±3,3см	153,84м±3,7см	139,78м±3,6см	15,82м±2,8см
8	151,57м±3,5см	150,24м±3,6см	146,48м±3,9см	14,63м±2,9см
9	143,45м±3,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
10	148,36м±2,7см	141,55м±3,4см	135,66м±3,2см	13,76м±2,7см
11	152,35м±2,5см	148,23м±3,1см	124,38м±3,2см	14,83м±2,6см
12	122,35м±3,6см	132,23м±2,3см	135,53м±3,2см	14,23м±2,7см
13	134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см
14	150,13м±3,1см	148,14м±5,2см	145,96м±4,1см	14,01м±3,9см
15	140,17м±2,8см	138,14м±4,2см	135,96м±3,5см	13,21м±2,4см
16	155,53м±2,6см	151,54м±5,7см	149,56м±4,5см	15,51м±3,5см
17	153,37м±3,8см	155,14м±3,5см	150,46м±3,8см	14,23м±2,6см
18	147,43м±2,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
19	142,56м±2,9см	136,43м±3,2см	134,56м±3,2см	13,56м±2,8см
20	154,56м±3,3см	153,84м±3,7см	139,78м±3,6см	15,82м±2,8см
21	151,57м±3,5см	150,24м±3,6см	146,48м±3,9см	14,63м±2,9см

22	143,45м±3,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
23	148,36м±2,7см	141,55м±3,4см	135,66м±3,2см	13,76м±2,7см
24	152,35м±2,5см	148,23м±3,1см	124,38м±3,2см	14,83м±2,6см
25	122,35м±3,6см	132,23м±2,3см	135,53м±3,2см	14,23м±2,7см
26	134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см
27	143,45м±3,3см	138,23м±3,3см	147,43м±3,6см	14,53м±2,5см
28	148,36м±2,7см	141,55м±3,4см	135,66м±3,2см	13,76м±2,7см
29	152,35м±2,5см	148,23м±3,1см	124,38м±3,2см	14,83м±2,6см
30	122,35м±3,6см	132,23м±2,3см	135,53м±3,2см	14,23м±2,7см
31	134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см

Завдання5.3

Визначити перевищення та СКП перевищення, якщо відома горизонтальна проекція та кут нахилу.

В№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
l**, м**	150,13м±3,1м	521,2м±4м	34,5м±0,5м	49м±1м	120,4м±2,2м
α	$2^\circ 40' \pm 1'$	$5^\circ 30' \pm 3'$	$1^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 2'$	$3^\circ 50' \pm 40''$
В№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
l**, м**	250,13м±3,8м	535,2м±4м	65,5м±0,4м	149м±1,6	130,7м±1,2м
α	$4^\circ 30' \pm 40''$	$2^\circ 30' \pm 2'$	$1^\circ 20' \pm 4'$	$3^\circ 30' \pm 3'$	$4^\circ 30' \pm 3'$
В№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
l**, м**	210,45м±1,8м	325,2м±3м	165,5м±0,9м	249м±1,5м	150,5м±1,5м
α	$3^\circ 30' \pm 30''$	$3^\circ 20' \pm 3'$	$2^\circ 20' \pm 4'$	$4^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 3'$
В№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
l**, м**	150,13м±3,1м	521,2м±4м	34,5м±0,5м	49м±1м	120,4м±2,2м
α	$2^\circ 40' \pm 1'$	$5^\circ 30' \pm 3'$	$1^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 2'$	$3^\circ 50' \pm 40''$
В№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
l**, м**	250,13м±3,8м	535,2м±4м	65,5м±0,4м	149м±1,6	130,7м±1,2м
α	$4^\circ 30' \pm 40''$	$2^\circ 30' \pm 2'$	$1^\circ 20' \pm 4'$	$3^\circ 30' \pm 3'$	$4^\circ 30' \pm 3'$
В№	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
l**, м**	210,45м±1,8м	325,2м±3м	165,5м±0,9м	249м±1,5м	150,5м±1,5м
α	$3^\circ 30' \pm 30''$	$3^\circ 20' \pm 3'$	$2^\circ 20' \pm 4'$	$4^\circ 30' \pm 3'$	$3^\circ 30' \pm 3'$

Завдання5.4

Відомі дві сторони трикутника (м) та кут між ними (^{0}), знайти:

1) СКП (абсолютну, відносну) обчислення для третьої сторони;
2) СКП (абсолютну, відносну) обчислення площі трикутника;
3) СКП (абсолютну, відносну) обчислення периметра трикутника.
4) З якою СКП необхідно виміряти сторони та кут, щоб СКП обчисленої сторони дорівнював 0,5м.

В№	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

a, м	132±2	124±1,3	126±1,1	132±1,4	145±1,1
b, м	115±1,5	137±2	154±2,1	110±1,3	112±1
α	20±10’	25±15’	30±20’	32±20’	35±25’
В№	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a, м	149±1,3	152±1,5	157±1,6	161±1,8	170±2
b, м	124±1,2	132±1,3	121±1,5	98±0,5	190±2
α	54±40’	61±45’	65±50’	72±55’	60 ± 1^0
В№	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
a, м	139±1,2	142±1,4	147±1,5	151±1,7	150±1,8
b, м	114±1,1	122±1,5	101±1,3	111±0,6	180±2
α	42±30’	60±45’	61±40’	64±50’	60 ± 1^0
В№	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a, м	132±2	124±1,3	126±1,1	132±1,4	145±1,1
b, м	115±1,5	137±2	154±2,1	110±1,3	112±1
α	20±10’	25±15’	30±20’	32±20’	35±25’
В№	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
a, м	149±1,3	152±1,5	157±1,6	161±1,8	170±2
b, м	124±1,2	132±1,3	121±1,5	98±0,5	190±2
α	54±40’	61±45’	65±50’	72±55’	60 ± 1^0
В№	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a, м	139±1,2	142±1,4	147±1,5	151±1,7	150±1,8
b, м	114±1,1	122±1,5	101±1,3	111±0,6	180±2
α	42±30’	60±45’	61±40’	64±50’	60 ± 1^0

Завдання5.5

В результатівиконаннятрьохсерійвимірювань довжини лінії одержали середні значення довжини для кожної серії. Визначити загальне середнє.

В№	I серія (м)	II серія (м)	III серія (м)
1	1457,3±0,5	1456,6±1,5	1458,1±2,2
2	245,5±0,5	245±0,8	243,7±2
3	389,4±0,5	390,2±0,4	398,6±0,8
4	1256,4±1,2	1254,6±2,8	1255,8±1,6
5	2335±3,2	2333±2,8	2337±4
6	1876,4±0,8	1877,9±1,5	1879±2,4
7	1370,1±0,8	1374±1,4	1372,6±1,8
8	213,5±0,4	214,2±0,5	215±0,8
9	986,4±1	987,3±1,8	988,9±2
10	324±0,8	324,8±0,6	323±1,6
11	1328,3±0,5	1326,6±1,5	1327,1±2,2
12	546,5±0,5	546±0,8	544,7±2
13	418,4±0,5	416,2±0,4	419,6±0,8
14	1132,4±1,2	1134,6±2,8	1137,8±1,6

15	2125±3,2	2122±2,8	2120±4
16	1457,3±0,5	1456,6±1,5	1458,1±2,2
17	245,5±0,5	245±0,8	243,7±2
18	389,4±0,5	390,2±0,4	398,6±0,8
19	1256,4±1,2	1254,6±2,8	1255,8±1,6
20	2335±3,2	2333±2,8	2337±4
21	1876,4±0,8	1877,9±1,5	1879±2,4
22	1370,1±0,8	1374±1,4	1372,6±1,8
23	213,5±0,4	214,2±0,5	215±0,8
24	986,4±1	987,3±1,8	988,9±2
25	324±0,8	324,8±0,6	323±1,6
26	1328,3±0,5	1326,6±1,5	1327,1±2,2
27	546,5±0,5	546±0,8	544,7±2
28	418,4±0,5	416,2±0,4	419,6±0,8
29	1132,4±1,2	1134,6±2,8	1137,8±1,6
30	2125±3,2	2122±2,8	2120±4

Приклади виконаннязавданьпрактичного заняття №5.

Завдання 5.1.

Визначити середньоквадратичну похибку обчислення довжини кола та площу круга, радіусом R=4,5мз СКП m_s =0,3мм.

Розв'язання

Довжина кола визначається за формулою $l = 2\pi R$, функція лінійна отже за формулою (3) $m_l = km = 2\pi \cdot 0{,}3 = 1{,}89$мм.

Площа круга: $S(R) = \pi R^2$, $S'(R) = 2\pi R S'(R_0) = 2\pi 4{,}5 = 9\pi$, тоді за формулою (2) $m_s = \frac{\partial S}{\partial R} m = 9\pi \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} \approx 8{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Завдання5.2

Лінія АВ виміряна по частина, результати наведено в таблиці. Знайти абсолютну та відносну похибки обчислення довжини ламаної

134,16м±2,9см	121,24м±3,5см	138,17м±3,6см	13,26м±2,8см

Розв'язання

Довжина ламаної $l = 134{,}16 + 121{,}24 + 138{,}17 + 13{,}26 = 406{,}83$*м*.

Середню квадратичну похибку ламаної знайдемо за формулою (4): $m_l = \sqrt{2{,}9^2 + 3{,}5^2 + 3{,}6^2 + 2{,}8^2} = \sqrt{41{,}46} \approx 6{,}44$см.

Завдання5.3

Визначити перевищення та СКП перевищення, якщо відома горизонтальна проекція 150,5м±1,5м та кут нахилу $3^\circ 30' \pm 3'$.

Розв'язання

Знайдемо перевищення за формулою $h = l \cdot tg\alpha$, дна залежність є функцією двох змінних, значення перевищення буде дорівнювати

$$h_0 = 150{,}5 \cdot tg3{,}5^0 = 150{,}5 \cdot 0{,}055 = 8{,}29\text{м}$$

Для знаходження середньої квадратичної похибки необхідно визначити значення частинних похідних

$$\frac{\partial h}{\partial l} = tg\alpha; \qquad \frac{\partial h}{\partial l} = tg3,5^0 = 0{,}055$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \frac{l}{cos^2\alpha}; \qquad \frac{\partial h}{\partial l} = \frac{150{,}5}{cos^2 3,5^0} = \frac{150{,}5}{0{,}997} = 150{,}96$$

За формулою (2):

$$m_h = \sqrt{0{,}055^2 1{,}5^2 + 150{,}96^2 \left(3\frac{\pi}{10800}\right)^2} = \sqrt{0{,}0068 + 0{,}0174} = 0{,}156.$$

Знайдене перевищення: $\mathbf{8,29}$м $\pm\ \mathbf{0,156}$м

<u>Завдання5.4</u>

Відомі дві сторони трикутника (м) та кут між ними (^{0}), знайти:

1) СКП (абсолютну, відносну) обчислення для третьої сторони;
2) СКП (абсолютну, відносну) обчислення площі трикутника;
3) СКП (абсолютну, відносну) обчислення периметра трикутника.

a=150м±1,8м; b=180м±2м; γ=$60^0 \pm 1^0$

<u>Розв'язання</u>

1) Третю сторону трикутника можна визначити за теоремою косинусів $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\gamma}$, значення третьої сторони буде: $c = \sqrt{150^2 + 180^2 - 2 \cdot 150 \cdot 180 \cdot cos60°} = \sqrt{27900} \approx 167$м.

Для визначення СКП необхідно знайти чстинні похідні функції, та їх значення при заданніх параметрах:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2-2abcos\gamma}} \cdot (2a - 2bcos\gamma) = \frac{a-bcos\gamma}{c};$$

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{b-acos\gamma}{c};$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{absin\gamma}{c}.$$

Знайдемо значення частинних похідних:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{150-180cos60°}{167} = \frac{150-90}{167} = 0{,}36;$$

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{180-150cos60°}{167} = \frac{180-75}{167} = 0{,}63;$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{180 \cdot 150 \cdot sin60°}{167} = 140.$$

Визначимо абсолютну СКП за формулою (2):

$m_c = \sqrt{(0{,}36 \cdot 1{,}8)^2 + (0{,}63 \cdot 2)^2 + \left(140 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2} = \sqrt{0{,}42 + 1{,}59 + 5{,}97} =$ 2,83м.

Отже довжина третьої сторони: 167м $\pm$ 2,83м.

Відносна похибка буде становити: $\delta = \frac{m_c}{c} 100\% = \frac{2{,}83}{167} 100\% = 1{,}69\%$.

2) Площу трикутника можна визначити за формулою$S = \frac{1}{2} ab sin\gamma$, значення площі буде: $S = \frac{1}{2} 150 \cdot 180 \cdot sin60° = 150 \cdot 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 11691$м^2.

Для визначення СКП необхідно знайти чстинні похідні функції, та їх значення при заданніх параметрах:

$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2} \cdot b sin\gamma$;

$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{2} \cdot a sin\gamma$;

$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} ab cos\gamma$.

Знайдемо значення частинних похідних:

$\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2} 180 sin60° = 90 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 78$;

$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{2} 150 sin60° = 75 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 65$;

$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{180 \cdot 150 \cdot sin60°}{2} = 10921{,}7$.

Визначимо абсолютну СКП за формулою (2):

$$m_S = \sqrt{(78 \cdot 1{,}8)^2 + (65 \cdot 2)^2 + \left(10921{,}7 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{19712{,}16 + 16900 + 36335{,}84} = 270\text{м}^2.$$

Отже площа трикутника: 11691м^2 $\pm$ 270м^2.

Відносна похибка буде становити: $\delta = \frac{m_S}{S} 100\% = \frac{270}{11691} 100\% = 2{,}3\%$.

3) Периметр трикутника визначатиметься за формулою$P = a + b + c$, значення периметра буде: $P = 150 + 180 + 167 = 497$м .

СКП периметра визначається за формулою (4):

$m_P = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 2^2 + 2{,}83^2}$ =3,9м

Отже периметр трикутника:497м $\pm$ 3,9м.

Відносна похибка буде становити: $\delta = \frac{m_P}{P} 100\% = \frac{3{,}9}{497} 100\% = 0{,}78\%$.

<u>Завдання5.5</u>

В результатівиконаннятрьохсерійвимірювань довжини лінії одержали середні значення довжини для кожної серії. Визначити загальне середнє.

I серія (м)	II серія (м)	III серія (м)
2125±3,2	2002±2,8	2120±4

<u>Розв'язання</u>

Загальне середнє знаходиться як середня зважена величина, для цього необхідно визначити вагу кожної серії вимірів за формулою$p = \frac{k}{m^2}$.Чисельник може бути бідь яким числом, візьмемо к=10 тоді ваги серій вимірів будуть дорівнювати $p_1 = \frac{10}{3{,}2^2} = 0{,}98$; $p_2 = \frac{10}{2{,}8^2} = 1{,}28$; $p_1 = \frac{10}{4^2} = 0{,}625$.

Тоді середнє зважене: $x_0 = \frac{x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3}{p_1+p_2+p_3} = \frac{2125\cdot 0{,}98+2002\cdot 1{,}28+2120\cdot 0{,}625}{0{,}98+1{,}28+0{,}625} = \frac{2082{,}5+2562{,}6+1325}{2{,}91} = 2051{,}58$.

Модуль 3. Обробка рядів вимірів.

Практичне заняття №6
Обробка ряду рівноточних вимірювань однієї величини

Короткі теоретичні відомості

Припустимо, що деяка величина, істинне значення якої дорівнює (X), виміряна (n) разів; у результаті вимірювань отримано значення x1, x2, … , xn, вільні від систематичних похибок. Випадкові похибки результатів вимірювань дорівнюють:

$$\Delta_1 = \chi_1 - \mathrm{X}$$
$$\Delta_1 = \chi_2 - \mathrm{X}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta_n = \chi_n - \mathrm{X}$$

Підсумовуючи ліві та праві частини цих виразів, знаходимо $[\Delta] = [\mathrm{X}] - n\mathrm{X}$, звідки $\mathrm{X} = \frac{[x]}{n} - \frac{[\Delta]}{n}$,

Останнійдоданок при великій кількості (n), на підставі 4- ї властивості, прямує до 0, тому:

$$\mathrm{X} \approx \bar{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{x`+\varepsilon_1+x`+\varepsilon_2+\cdots+x`+\varepsilon_2}{n} = x` + \frac{[\varepsilon]}{n}, \qquad (1)$$

де, $\bar{\chi}$- значення арифметичної середини ;

$\chi`$- приблизне значення виміряної величини (зазвичай саме min);

ε_{i} – відхилення χ_{i} від χ', тобто $\varepsilon_i = \chi_i - \chi'$ $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots n$;

n – кількість вимірювань.

Формула (1) показує, що ймовірнішим є середнє арифметичне з результатів рівноточних вимірювань. Для визначення середньої квадратичної похибки арифметичної середини використовуємо основну теорему теорії похибок :

$$m_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 m_{x_i}^2}\ .$$

Для більшої наочності перепишемо формулу (1) у вигляді виразу

$\bar{x} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{\mathrm{n}} + \cdots + \frac{x_n}{n}$.

Очевидно,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} = \frac{1}{n}$$

$$M = \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(m_{x_1}^2 + m_{x_2}^2 + \cdots m_{x_n}^2\right)}.$$

Для рівноточних вимірювань $m_{x_1} = m_{x_2} = \cdots = m_{x_i}$, тому середня квадратична похибка арифметичної середини:

$$M = \sqrt{\frac{nm_x^2}{n^2}} = \frac{m_x}{\sqrt{n}}. (2)$$

Висновок: точність середнього арифметичного зростає зі збільшенням кількості вимірювань (n). Для визначення за формулою 1.3.2 середньої квадратичної похибки (mx) одного вимірювання за формулою Гаусса

$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$ виразимо $[\Delta^2]$ через $[v^2]$, де $v_i = x_i - x$ – відхилення виміряної величини від арифметичної середини $\bar{x}$. Підставимо в $\Delta_i = x_i - X$ замість x_i його значення $x_i = \bar{x} + v_1$, знаходимо $\Delta_i = \bar{x} - X - v_i$.

Підносимо до квадрата ліву та праву частини, після підсумування отримаємо:

$$[\Delta^2] = n(\bar{x} - X) + [v^2] - 2(\bar{x} - X)[v] \quad (3)$$

Підсумовуючи ліву і праву частини виразів

$$v_1 = x_2 - \bar{x}$$
$$v_2 = x_2 - \bar{x}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n = x_n - \bar{x},$$

отримуємо $[v] = [x] - n\bar{X}$.

Підставляємо замість $\bar{x}$ його значення із (1), маємо:

$$[\boldsymbol{v}] = [\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{n}\frac{[\boldsymbol{x}]}{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}$$

тобто сума відхилень (v) дорівнює нулю при будь-якій кількості вимірювань (перша властивість похибок). Якщо при визначенні середнього арифметичного (x) має місце похибка заокруглення

$$\boldsymbol{\beta} = \bar{\boldsymbol{x}}_{\text{заокруг}} - \boldsymbol{x}_{\text{точн}} \text{ то } [\boldsymbol{v}] = -\boldsymbol{n\beta}. \quad (4)$$

Після ділення лівої та правої частини рівняння 1.3.3 на (n) отримуємо:

$$\frac{[\boldsymbol{\Delta^2}]}{\boldsymbol{n}} = (\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{X}) + \frac{[\boldsymbol{v^2}]}{\boldsymbol{n}}$$

При великій кількості (n) значення істинної похибки арифметичної середини можна вважати рівним значенню M (2). Враховуючи формулу Гаусса $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, отримаємо:

$$\boldsymbol{m^2} = \left(\frac{\boldsymbol{m^2}}{\boldsymbol{n}}\right) + \left(\frac{[\boldsymbol{\Delta^2}]}{\boldsymbol{n}}\right),$$

Звідки знаходимо формулу Бесселя

$$\boldsymbol{m} = \sqrt{\frac{[\boldsymbol{v^2}]}{\boldsymbol{n-1}}} (5)$$

Для контролю обчислень $[v^2]$використовують формулу$[\boldsymbol{v^2}] = [\boldsymbol{\Sigma^2}] - \frac{[\boldsymbol{\Sigma}]^2}{\boldsymbol{n}}$, де

$$\Sigma_i = x_i - x'$$

x'- приблизне значення вимірюваної величини (x).

Середні квадратичні похибки величини (m) і (M) визначають за формулами

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} \qquad (6)$$

Завдання для самостійної роботи

В результаті вимірювання лінійної величини одержано ряд рівноточних вимірів. Знайти:

1) середнє заокруглене значення довжини лінії;
2) середньоквадратичну похибку одного виміру;
3) СКП середнього значення;
4) оцінити СКП виміру та СКП середнього значення.

В1.
110,347; 110,342; 110,357; 110,352; 110,345; 110,361; 110,367; 110,353; 110,373; 110,368

В2.
110,751; 110,832; 110,623; 110,352; 110,345; 110,221; 110,245; 110,358; 110,578; 110,234

В3.
220,732; 218,956; 219,342; 218,224; 221,325; 220,015; 219,961; 217,987; 219,548; 219,436

В4.
154,453; 155,768; 156,321; 154,978; 155,974; 154,346; 155,214; 154,986; 156,437; 157,456

В5.
176,567; 174,465; 175,987; 176,231; 174,982; 175,013; 176,325; 174,023; 177,237; 176,984

В6.
256,176; 253,872; 254,327; 254,794; 255,348; 256,673; 254,983; 255,781; 253,624; 257,028

В7.
378,217; 375,234; 376,562; 379,671; 375,312; 377,575; 374,276; 378,256; 379,213; 375,016

В8.
53,785; 54,458; 54,341; 53,368; 55,211; 54,763; 54,321; 55,374; 55,486; 53,897

В9.
76,876; 74,249; 75,348; 75,785; 76,325; 76,245; 76,581; 74,985; 74,652; 75,328

В10.
246,745; 245,786; 246,325; 245,284; 247,327; 246,521; 244,236; 244,753; 245,324; 246,763

В11.

110,347; 110,342; 110,357; 110,352; 110,345; 110,361; 110,367; 110,353; 110,373; 110,368

B12.
110,751; 110,832; 110,623; 110,352; 110,345; 110,221; 110,245; 110,358; 110,578; 110,234
B13.
220,732; 218,956; 219,342; 218,224; 221,325; 220,015; 219,961; 217,987; 219,548; 219,436
B14.
154,453; 155,768; 156,321; 154,978; 155,974; 154,346; 155,214; 154,986; 156,437; 157,456
B15.
176,567; 174,465; 175,987; 176,231; 174,982; 175,013; 176,325; 174,023; 177,237; 176,984
B16.
256,176; 253,872; 254,327; 254,794; 255,348; 256,673; 254,983; 255,781; 253,624; 257,028

B17.
378,217; 375,234; 376,562; 379,671; 375,312; 377,575; 374,276; 378,256; 379,213; 375,016

B18.
53,785; 54,458; 54,341; 53,368; 55,211; 54,763; 54,321; 55,374; 55,486; 53,897

B19.
76,876; 74,249; 75,348; 75,785; 76,325; 76,245; 76,581; 74,985; 74,652; 75,328

B20.
246,745; 245,786; 246,325; 245,284; 247,327; 246,521; 244,236; 244,753; 245,324; 246,763
B21.
110,347; 110,342; 110,357; 110,352; 110,345; 110,361; 110,367; 110,353; 110,373; 110,368

B22.
110,751; 110,832; 110,623; 110,352; 110,345; 110,221; 110,245; 110,358; 110,578; 110,234
B23.
220,732; 218,956; 219,342; 218,224; 221,325; 220,015; 219,961; 217,987; 219,548; 219,436
B24.

154,453; 155,768; 156,321; 154,978; 155,974; 154,346; 155,214; 154,986; 156,437; 157,456

В25.

176,567; 174,465; 175,987; 176,231; 174,982; 175,013; 176,325; 174,023; 177,237; 176,984

В26.

256,176; 253,872; 254,327; 254,794; 255,348; 256,673; 254,983; 255,781; 253,624; 257,028

В27.

378,217; 375,234; 376,562; 379,671; 375,312; 377,575; 374,276; 378,256; 379,213; 375,016

В28.

53,785; 54,458; 54,341; 53,368; 55,211; 54,763; 54,321; 55,374; 55,486; 53,897

В29.

76,876; 74,249; 75,348; 75,785; 76,325; 76,245; 76,581; 74,985; 74,652; 75,328

В30.

246,745; 245,786; 246,325; 245,284; 247,327; 246,521; 244,236; 244,753; 245,324; 246,763

Приклади виконаннязавданьпрактичного заняття №6.

Дано: результати десяти рівноточних вимрювань ліній.Виконати обробку ряду вимірів.

i	l,м.	ε_iмм	ν'_iмм	ε_i^2	ν'^2_i
1	110,388	+3	+2	9	4
2	110,381	-4	-5	16	25
3	110,394	+9	+8	81	64
4	110,387	+2	+1	4	1
5	110,385	0	-1	0	1
6	110,379	-6	-7	36	79
7	110,393	+8	+7	64	49
8	110,386	+1	0	1	0
9	110,382	-3	-4	9	16
10	110,389	+4	+3	16	9
$\sum$		14	+4	236	218

1. Знайдемо середнє значення методом відліку від умовного початку, в якості якого оберемо $l' = 110{,}385$. Знайдемо відхилення вимірів від умовного

почтку $\varepsilon_i = l_i - l'$ i $= 1, 2, \dots 10$, та результати внесемо в таблицю. Середнє значення вимірів буде визначатися за формулою (1)

$$L = l' + \frac{[\varepsilon]}{n} = 110{,}385\text{м} + \frac{0{,}014}{10}\text{м} = 110{,}385\text{м} + 0{,}0014 = 110{,}3864\text{м}$$

2. Отримаємо заокруглене значення шуканої величини $L_{\text{заокр}} = 110{,}386$, визначимо вличину зсуву $\beta = L_{\text{заокр}} - L = -0{,}0004$.

3. Визначимо заокруглені найімовірніші поправки $v' = l - L_{\text{заокр}}$використовуючи заокруглене значення, та внесемо в таблицю.

4. Виконаємо перевірку правильності обчислень $[v'] = -n\beta$,4мм $= -10(-0{,}0004\text{м})$, отже перевірка виконується.

5. Для знаходження СКП знайдемо $[v^2]$ двома способами:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 236 - \frac{14^2}{10} = 216{,}4$$
$$[v^2] = [v'^2] - \frac{[v']^2}{n} = 218 - \frac{4^2}{10} = 216{,}4$$

6. За формулою (5) визначемо СКП:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{216{,}4}{9}} = 4{,}9\text{мм}$$

7. Виконаємо оцінку надійності знайденого значення емперичної СКП за формулою (6):

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{4{,}9}{\sqrt{2(10-1)}} = \frac{4{,}9}{\sqrt{18}} = 1{,}16\text{мм}$$

8. Знайдемо СКП та його оцінку для середнього значення:

$$\text{M} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}9}{\sqrt{10}} = 1{,}55\text{мм}$$
$$m_M = \frac{M}{\sqrt{2n}} = \frac{1{,}55}{\sqrt{20}} = 0{,}35\text{мм}$$

Практичне заняття №7
Обробка ряду нерівноточних вимірювань однієї величини

Короткі теоретичні відомості

Припустимо, що при вимірюванні величини (x) отримані рівно точні значення $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_q;\ c_1, c_2, \dots, c_n$.Ймовірнішим, тобто найбільш надійним, значенням X є середня арифметична величина

$$X = \frac{a_1+a_2+\dots+a_k+b_1+b_2+\dots+b_q+c_1+c_2+\dots+c_n}{k+q+c}. \quad (1)$$

Вирахувавши середнє арифметичне із кожної групи вимірювань, знаходимо:

$$x_1 = \frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k};\ x_2 = \frac{b_1+b_2+\dots+b_q}{q};\ x = \frac{c_1+c_2+\dots+c_n}{n} \quad (2)$$

Використовуючи формулу для визначення оберненої ваги функції, для першої функції отримаємо:

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{K^2}\left(\frac{1}{P_{a1}} + \frac{1}{P_{a2}} + \dots + \frac{1}{P_{ak}}\right).$$

При$P_{a1} = P_{a2} = \dots = P_{ak} = 1$, маємо$\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{P_1}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^2}}\right)\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}}$, звідки P1=k. Аналогічно P2=q, …, Pn=n.

<u>Порядок обчислень при обробці ряду нерівноточних вимірювань</u>

З урахуванням цих значень і формул (1) замість (2) знаходимо формулу загальної арифметичної середини:

$$\bar{x} = \frac{x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n}{p_1+p_2+\dots+p_n} = \frac{[xp]}{[p]} = x' + \frac{[\varepsilon\rho]}{[\rho]}, \quad (3)$$

Де $\varepsilon_i = x_i - x'$.

Запишемо:$\boldsymbol{v_1 = x_2 - \bar{x}}$

$$\boldsymbol{v_2 = x_2 - \bar{x}}$$

…….

$$\boldsymbol{v_n = x_n - \bar{x}}$$

Помножимо ліву та праву частини цих виразів на ваги, $p_1, p_2, \dots, p_n$, вимірювань $x_1, x_2, \dots, x_n$,після підсумування отримаємо $[pv] = [px] - \bar{x}[p]$.

Підставимо в це рівняння замість $\bar{x}$ його значення із виразу (3) та отримаємо

$$[pv] = 0. \quad (4)$$

Якщо відхилення (v) обчислені з використанням заокругленого значення $X_{заокруг}$, то

$$[pv] = -\left(\overline{x_{заокруг}} - \bar{x}\right)[p] = -\beta[p]. \quad (5)$$

Формулу (5) використовують для контролю правильності обчислень. Помноживши величини (x_i) на корінь квадратний із ваги цих величин, знайдемо $x'_i = x_i\sqrt{p_i}$ і з вагою, що дорівнює одиниці (приклад 2.30). Цей приклад показує, що якщо результат вимірювань помножити на корінь квадратний із його ваги, то вага добутку $x\sqrt{px}$ буде дорівнювати одиниці. Цей висновок використовують для переходу від нерівно точних вимірювань до рівно точних. Тобто нерівно точні вимірювання x_i зведені до рівно точних x'_i. У

цьому випадку середня квадратична похибка одиниці ваги може бути визначена за формулою Гаусса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[[\Delta'^2]]}{n}} = \sqrt{\frac{\left(\Delta_1\sqrt{P_1}\right)^2+\left(\Delta 2\sqrt{P2}\right)^2+\cdots+(\Delta n\,\sqrt{Pn})^2}{n}} = \sqrt{\frac{[P\Delta^2]}{n}}\,, \qquad (6)$$

де Δ_i – істинна помилка.

Якщо відому ймовірніші помилки (v_i), то використовують формулу Бесселя: $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$, тоді маємо

$$\mu = \sqrt{\frac{[v'^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}} \qquad (7)$$

Для обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини скористаємося формулою (1), в яку входять рівноточні виміряні величини. В цьому випадку отримаємо: $M = \frac{m}{\sqrt{k+q+\cdots+n}}$

Враховуючи, що ваги безпосередньо виміряних величин у формулі (1) однакові, приймемо p=1, тоді середня квадратична похибка одиниці ваги m=μ, k+q+…+n=$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = [p]$.

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad (8)$$

Значення $[pv^2]$, що входить у формулу (7) обчислюють з контролем

$$[pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[P\varepsilon^2]}{[p]}. \qquad (9)$$

Середня квадратична похибка значень μ та М визначаються за формулами:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}; m_M = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} \qquad (10)$$

При великій кількості (n) значення (μ) обчислене за формулою (7) і прийняте при обчисленні ваг $\mu^2 = c$, тобто $\mu = \sqrt{c}$, повинні збігатися в межах похибки m_μ. Їхнє розходження на величину, більше ніж m_μ, вказує на наявність систематичних похибок. Кінцевий результат записують у вигляді $\bar{x} \pm M$.

Завдання для самостійної роботи

Відмітка точки отримана з семи нівелірних ходів. Обчислити ймовірніше значення відмітки та провести оцінку точності.

В.1

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	121,732	121,734	121,745	121,778	121,827	121,849	121,851
m, мм	6,1	4,3	5,7	7,5	5,3	3,8	4,8

В.2

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	234,435	235,789	235,942	236,126	236,568	237,235	237,783
m, мм	6,7	7,8	9,5	6,3	5,7	4,8	7,7

В.3

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	98,234	98,268	98,372	98,532	98,785	98,895	99,112
m, мм	2,6	3,7	4,3	3,2	4,1	2,5	3,1

В.4

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	134,453	134,654	134,869	135,237	135,458	135,769	135,918
m, мм	2,4	2,7	2,1	3,8	3,5	2,5	3,8

В.5

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	128,568	128,731	128,954	129,124	129,321	129,548	129,763
m, мм	3,2	4,3	5,1	3,8	4,1	3,7	3,8

В.6

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	45,017	45,351	45,768	46,123	46,326	46,741	46,825
m, мм	3,2	2,3	4,2	3,8	3,2	1,5	2,4

В.7

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	117,784	117,939	118,234	118,511	118,768	118,922	119,321
m, мм	8,2	4,3	5,7	6,4	7,3	3,7	5,5

В,8

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	174,445	174,732	174,833	175,121	175,323	175,673	175,893
m, мм	2,4	3,2	2,6	2,5	3,1	3,7	3,5

В.9

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	144,345	144,532	144,633	145,121	145,423	145,673	145,793
m, мм	5,6	5,7	4,8	4,7	6,2	6,4	5,9

В.10

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	212,235	212,345	212,471	212,795	212,908	213,136	213,512
m, мм	9,4	10,5	12,4	8,5	12,7	12,1	11,7

В.11

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	121,732	121,734	121,745	121,778	121,827	121,849	121,851
m, мм	6,1	4,3	5,7	7,5	5,3	3,8	4,8

В.12

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	234,435	235,789	235,942	236,126	236,568	237,235	237,783
m, мм	6,7	7,8	9,5	6,3	5,7	4,8	7,7

В.13

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	98,234	98,268	98,372	98,532	98,785	98,895	99,112
m, мм	2,6	3,7	4,3	3,2	4,1	2,5	3,1

В.14

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	134,453	134,654	134,869	135,237	135,458	135,769	135,918
m, мм	2,4	2,7	2,1	3,8	3,5	2,5	3,8

В.15

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	128,568	128,731	128,954	129,124	129,321	129,548	129,763
m, мм	3,2	4,3	5,1	3,8	4,1	3,7	3,8

В.16

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	45,017	45,351	45,768	46,123	46,326	46,741	46,825
m, мм	3,2	2,3	4,2	3,8	3,2	1,5	2,4

В.17

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	117,784	117,939	118,234	118,511	118,768	118,922	119,321
m, мм	8,2	4,3	5,7	6,4	7,3	3,7	5,5

В.18

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	174,445	174,732	174,833	175,121	175,323	175,673	175,893
m, мм	2,4	3,2	2,6	2,5	3,1	3,7	3,5

В.19

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	144,345	144,532	144,633	145,121	145,423	145,673	145,793
m, мм	5,6	5,7	4,8	4,7	6,2	6,4	5,9

В.20

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	212,235	212,345	212,471	212,795	212,908	213,136	213,512
m, мм	9,4	10,5	12,4	8,5	12,7	12,1	11,7

В.21

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	121,732	121,734	121,745	121,778	121,827	121,849	121,851
m, мм	6,1	4,3	5,7	7,5	5,3	3,8	4,8

В.22

№	1	2	3	4	5	6	7
H, м	234,435	235,789	235,942	236,126	236,568	237,235	237,783
m, мм	6,7	7,8	9,5	6,3	5,7	4,8	7,7

В.23

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	98,234	98,268	98,372	98,532	98,785	98,895	99,112
m, мм	2,6	3,7	4,3	3,2	4,1	2,5	3,1

В.24

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	134,453	134,654	134,869	135,237	135,458	135,769	135,918
m, мм	2,4	2,7	2,1	3,8	3,5	2,5	3,8

В.25

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	128,568	128,731	128,954	129,124	129,321	129,548	129,763
m, мм	3,2	4,3	5,1	3,8	4,1	3,7	3,8

В.26

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	45,017	45,351	45,768	46,123	46,326	46,741	46,825
m, мм	3,2	2,3	4,2	3,8	3,2	1,5	2,4

В.27

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	117,784	117,939	118,234	118,511	118,768	118,922	119,321
m, мм	8,2	4,3	5,7	6,4	7,3	3,7	5,5

В.28

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	174,445	174,732	174,833	175,121	175,323	175,673	175,893
m, мм	2,4	3,2	2,6	2,5	3,1	3,7	3,5

В.29

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	144,345	144,532	144,633	145,121	145,423	145,673	145,793
m, мм	5,6	5,7	4,8	4,7	6,2	6,4	5,9

В.30

№	1	2	3	4	5	6	7
Н, м	212,235	212,345	212,471	212,795	212,908	213,136	213,512
m, мм	9,4	10,5	12,4	8,5	12,7	12,1	11,7

Приклади виконаннязавданьпрактичного заняття №7.

Відмітка (Н) точки отримана із семи нівелірних ходів. Дані наведені в таблиці,обчислити ймовірне значення відмітки та провести оцінку точності.

№ ходу	Н,м	mH ,мм	$p = \frac{10}{m^2H}$	ε, мм	Pε	Pε^2	v	pv	pv^2
1	103,751	5,8	0,30	+1	0,30	0,30	-0,9	-0,27	0,2
2	760	6,4	0,24	+10	2,40	24,00	+8,1	+1,94	15,7
3	748	5,0	0,40	-2	-0,80	1,60	-3,9	-1,56	6,1
4	755	9,1	0,12	+5	+0,60	3,00	3,1	+0,37	1,1
5	749	4,2	0,57	-1	-0,57	0,57	-2,9	-1,65	4,8
6	747	7,5	0,18	-3	-0,54	1,62	-4,9	-0,88	4,3
7	765	8,1	0,16	+15	2,40	36,00	-13,1	+2,10	27,5
	103,750	-	1,97	-	+3,79	67,09	-	+0,05	59,7

1. Вибираємо приблизне значення вимірюваної величини x (загалом беруть найменше значення).
2. Обчислюємо середню квадратичну похибку ходу $p = \frac{10}{m^2h}$.
3. Ухилення $\sum = x_i - \bar{x}$.
4. $\bar{x} = x' + \frac{[P\sum\ ]}{[P]} = 103{,}750\text{м} + \frac{3{,}79}{1{,}97}\text{мм} = 103{,}7519.$
5. V=$x_i - \bar{x}$.
6. $\beta = \overline{x_{\text{заокруг}}} - \bar{x}\bar{x} = 103{,}7519.$

$$\beta = -0{,}024; \qquad [pv] = -\beta[p] = +0{,}024 \times 1{,}97 = +0{,}05\text{мм}$$

$$[pv^2] = \left[p\sum\ ^2\right] - \frac{\left[p\sum^2\ \right]}{[p]} = 67{,}09 - \frac{3{,}97^2}{1{,}79} = 59{,}8;$$

$$\mu = \sqrt{\frac{59{,}7}{(7-1)}} = 3{,}2\text{мм}; \qquad m_\mu = \frac{3{,}2}{\sqrt{2(7-1)}} = 0{,}92\text{мм};$$

$$\sqrt{c} = 3{,}1$$

$$\left|\mu - \sqrt{\ \ }c\right| = 0{,}1 < m_\mu; \qquad M = \frac{3{,}2}{\sqrt{1{,}97}} = 2{,}3\text{мм};$$

$$m_\mu = \frac{0{,}92}{\sqrt{1{,}97}} = 0{,}66\text{мм}.$$

Відповідь: x = 103,7591 $\pm$ 2,3 мм.

Практичне заняття №8
Обробка ряду подвійних рівноточних вимірювань

Короткі теоретичні відомості

Для контролю та підвищення точності кожну величину вимірюють декілька - разів; часто обмежуються двома незалежними вимірами. В цьому випадку, обчисливши різниці по кожній парі вимірювань, знаходять:

$$\boldsymbol{d_1 = x_1 - x_1'}$$
$$\boldsymbol{d_2 = x_2 - x_2'}$$

……..

$$\boldsymbol{d_n = x_n - x_n'}$$

Значення (d_i) є істинними похибками різниць подвійних вимірювань, тому, використовуючи формулу Гаусса $\boldsymbol{m} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, отримаємо:

$$\boldsymbol{m} = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \qquad (1)$$

де n - кількість усіх різниць.

Середня квадратична похибка одного вимірювання:

$$\boldsymbol{m_{x_i}} = \frac{\boldsymbol{m_d}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}} \qquad (2)$$

Кінцем, більш надійним, вважають значення

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x_i}} = \frac{(\boldsymbol{x_i} + \boldsymbol{x_i'})}{\boldsymbol{2}}$$

При $\boldsymbol{m_{x_i}} = \boldsymbol{e'_{x_i}}$маємо

$$\boldsymbol{m_{x_i}} = \frac{\boldsymbol{m_{x_i}}}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{0,5}\sqrt{\frac{[d^2]}{n}} \qquad (3)$$

Формули (1)–(3) застосовують, коли ряд подвійних вимірювань не має систематичних похибок. Якщо в результаті вимірювань є систематичні похибки, то в значеннях різниці d_i вони значно послаблюються, і в d_i увійдуть залишкові систематичні похибки. Враховуючи 4-ту властивість, величину залишкової систематичної похибки визначають як середнє арифметичне за формулою:

$$\theta = \frac{[d]}{n} \qquad (4)$$

Критерієм допустимості θ є нерівність: $|[d]| \leq 0{,}25[|d|]$.

Розглянувши різницю $d_i' = d_i - \theta$як відхилення від арифметичного середини, за формулою Бесселя 1.3.4 знаходимо

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \qquad (5)$$

Контролем обчислень служить формула $[d'] = -n\beta$, де $\beta = \theta_{\text{окр}} - \theta$

Середні квадратні похибки m_{x_i}(одного вимірювання) і $m_{\vec{x}_i}$(арифметичної середини) визначається за формулами:

$$m_{x_i} = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}; \qquad m_{\vec{x}_i} = \frac{m_{x_i}}{\sqrt{2}} = 0{,}5\sqrt{\frac{[d^2]}{n-1}} \qquad \textbf{(6)}$$

Завдання для самостійної роботи

У результатівимірюванняперевищень при двох горизонтах приладу на суміжнихстанціях за однаковихвідстанейвідінструменту до рейокотриманорезультативимірів. Необхідно визначити точність вимірів та їх надійність.

В1.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,279	-0,092	-0,007	0,025	0,098	0,266	0,324	0,39	0,468	0,503
h2, м	-0,28	-0,089	-0,009	0,028	0,098	0,265	0,32	0,388	0,471	0,505

В2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,079	0,108	0,193	0,225	0,298	0,466	0,524	0,59	0,668	0,703
h2, м	-0,08	0,111	0,191	0,228	0,298	0,465	0,52	0,588	0,671	0,705

В3.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,121	0,308	0,393	0,425	0,498	0,666	0,724	0,79	0,868	0,903
h2, м	0,12	0,311	0,391	0,428	0,498	0,665	0,72	0,788	0,871	0,905

В4.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,321	0,508	0,593	0,625	0,698	0,866	0,924	0,99	1,068	1,103
h2, м	0,32	0,511	0,591	0,628	0,698	0,865	0,92	0,988	1,071	1,105

В5.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,521	0,708	0,793	0,825	0,898	1,066	1,124	1,19	1,268	1,303
h2, м	0,52	0,711	0,791	0,828	0,898	1,065	1,12	1,188	1,271	1,305

В6.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,721	0,908	0,993	1,025	1,098	1,266	1,324	1,39	1,468	1,503
h2, м	0,72	0,911	0,991	1,028	1,098	1,265	1,32	1,388	1,471	1,505

В7.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,59	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

В8.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

В9.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

В10.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,521	1,708	1,793	1,825	1,898	2,066	2,124	2,19	2,268	2,303

h2, м	1,52	1,711	1,791	1,828	1,898	2,065	2,12	2,188	2,271	2,305

В11.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,279	-0,092	-0,007	0,025	0,098	0,266	0,324	0,39	0,468	0,503
h2, м	-0,28	-0,089	-0,009	0,028	0,098	0,265	0,32	0,388	0,471	0,505

В12.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,079	0,108	0,193	0,225	0,298	0,466	0,524	0,59	0,668	0,703
h2, м	-0,08	0,111	0,191	0,228	0,298	0,465	0,52	0,588	0,671	0,705

В13.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,121	0,308	0,393	0,425	0,498	0,666	0,724	0,79	0,868	0,903
h2, м	0,12	0,311	0,391	0,428	0,498	0,665	0,72	0,788	0,871	0,905

В14.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,321	0,508	0,593	0,625	0,698	0,866	0,924	0,99	1,068	1,103
h2, м	0,32	0,511	0,591	0,628	0,698	0,865	0,92	0,988	1,071	1,105

В15.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,521	0,708	0,793	0,825	0,898	1,066	1,124	1,19	1,268	1,303
h2, м	0,52	0,711	0,791	0,828	0,898	1,065	1,12	1,188	1,271	1,305

В16.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,721	0,908	0,993	1,025	1,098	1,266	1,324	1,39	1,468	1,503
h2, м	0,72	0,911	0,991	1,028	1,098	1,265	1,32	1,388	1,471	1,505

В17.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,59	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

В18.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

В19.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

В20.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,521	1,708	1,793	1,825	1,898	2,066	2,124	2,19	2,268	2,303
h2, м	1,52	1,711	1,791	1,828	1,898	2,065	2,12	2,188	2,271	2,305

В21.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

h1, м	-0,279	-0,092	-0,007	0,025	0,098	0,266	0,324	0,39	0,468	0,503
h2, м	-0,28	-0,089	-0,009	0,028	0,098	0,265	0,32	0,388	0,471	0,505

В22.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	-0,079	0,108	0,193	0,225	0,298	0,466	0,524	0,59	0,668	0,703
h2, м	-0,08	0,111	0,191	0,228	0,298	0,465	0,52	0,588	0,671	0,705

В23.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,121	0,308	0,393	0,425	0,498	0,666	0,724	0,79	0,868	0,903
h2, м	0,12	0,311	0,391	0,428	0,498	0,665	0,72	0,788	0,871	0,905

В24.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,321	0,508	0,593	0,625	0,698	0,866	0,924	0,99	1,068	1,103
h2, м	0,32	0,511	0,591	0,628	0,698	0,865	0,92	0,988	1,071	1,105

В25.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,521	0,708	0,793	0,825	0,898	1,066	1,124	1,19	1,268	1,303
h2, м	0,52	0,711	0,791	0,828	0,898	1,065	1,12	1,188	1,271	1,305

В26.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,721	0,908	0,993	1,025	1,098	1,266	1,324	1,39	1,468	1,503
h2, м	0,72	0,911	0,991	1,028	1,098	1,265	1,32	1,388	1,471	1,505

В27.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	0,921	1,108	1,193	1,225	1,298	1,466	1,524	1,59	1,668	1,703
h2, м	0,92	1,111	1,191	1,228	1,298	1,465	1,52	1,588	1,671	1,705

В28.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,121	1,308	1,393	1,425	1,498	1,666	1,724	1,79	1,868	1,903
h2, м	1,12	1,311	1,391	1,428	1,498	1,665	1,72	1,788	1,871	1,905

В29.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,321	1,508	1,593	1,625	1,698	1,866	1,924	1,99	2,068	2,103
h2, м	1,32	1,511	1,591	1,628	1,698	1,865	1,92	1,988	2,071	2,105

В30.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h1, м	1,521	1,708	1,793	1,825	1,898	2,066	2,124	2,19	2,268	2,303
h2, м	1,52	1,711	1,791	1,828	1,898	2,065	2,12	2,188	2,271	2,305

Приклади виконаннязавданьпрактичного заняття №8

У таблиці наведені перевищення між точками, визначені по чорній та червоній сторонах рейок. Обчислити Середню квадратичну похибку m_{xi}одного перевищення та $m_{\bar{x}i}$середнього перевищення по чорній і червоній сторонах рейок.

№ перевищення	перевищення		d , мм	d `= d-0, мм	d `²
	Чорна сторона	Червона сторона			
1	+1,384	+1,382	+2	+3	9
2	-0,817	-0,813	-4	-3	9
3	+0,373	+0,370	+3	+4	14
4	+0,448	+0,451	-3	-2	4
5	+1,755	+1,758	-3	-2	4
6	+0,211	+0,215	-4	-3	9
7	+0,314	+0,317	-3	-2	4
8	-0,227	-0,229	+2	+3	9
9	+0,972	+0,975	-3	-2	4
		$\sum$	-13	-4	68

Обчислення: $Q = \frac{\lfloor d \rfloor}{n} = -\frac{13}{9} = -1{,}44$ мм

Контроль: |d `|=-nβ=-9(-1+1,44)=-4 мм;

Практичне заняття №9
Обробка ряду подвійних нерівноточних вимірювань

Короткі теоретичні відомості

Припустимо, що відомі різниці вимірювань, рівноточні в кожній парі, але пари між собою нерівноточні.

Для різниці $d_{\mathrm{i}} = \mathrm{X_i} - \acute{\mathrm{X}}_{\mathrm{i}}$ за формулою отримуємо $\frac{1}{Pd_{\mathrm{i}}} = \left(\frac{1}{\mathrm{Px_i}}\right) + \left(\frac{1}{\acute{\mathrm{P}}_{\mathrm{x}}}\right)$

Позаяк $\mathrm{P_{Xi}} = \acute{\mathrm{P}}_{\mathrm{Xi}}$, то $P_d = \frac{\mathrm{P_{Xi}}}{2} + \frac{\acute{\mathrm{P}}_{\mathrm{Xi}}}{2}$

Оскільки d_i являються істинними помилками, то, згідно із формулою, при відсутності систематичних похибок отримаємо похибку одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[\frac{P}{2}d^2\right]}{n}} = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}.$$

Середні квадратичні похибки середніх значень $X_{icep} = \frac{(X_i + \acute{X}_i)}{2}$ визначається за формулою:

$$m_{Xiск} = \frac{\mu}{\sqrt{P\overline{X}_i}} = \frac{\mu}{\sqrt{2P_i}}$$

$$m_{X1} = \mu\sqrt{p\overline{x}_i} = \mu\sqrt{2p_i}$$

Оскільки $\frac{1}{P_{\overline{X}i}} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{P_{\overline{X}i}} + \frac{1}{P_{\overline{X}i}}\right) = \frac{1}{2P_i}; P_{\overline{X}i} = 2p_i$

Якщо різниці d_i мають систематичні похибки, то величини

$$\theta = \frac{[Pd]}{[p]}$$

буде відрізнятися від нуля.

В цьому випадку

$$\mu = \sqrt{\frac{\left[P\acute{d}^2\right]}{2(n-1)}}$$

Де $\acute{d}_i = d_i - \theta$

Завдання для самостійної роботи

Оцінити точність результатів подвійного нівелювання 10 ходів.

В1.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	35,5	53,3	37,4	-23,7	-9,5	58,3	41,6	-3,6	-45,6	23,7
L, км	3,6	7,6	4,9	9,7	3,7	4,8	3,4	2,4	3,5	7,1

В2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	21,5	23,6	-5,7	-45,3	23,8	34,7	32,6	-23,7	65,7	23,8
L, км	2,1	3,5	3,2	4,7	1,5	7,5	4,7	3,8	2,5	7,4

В3

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	42,7	21,9	34,9	-12,9	23,8	32,9	-5,9	32,7	57	23,9
L, км	7,4	6,4	3,8	3,9	4,7	2,1	4,6	3,8	2,7	6,5

В4

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	22,5	43,2	23,8	45,8	43,7	34,8	21,4	12,6	14,5
L, км	2,3	4,3	1,6	2,7	4,5	3,8	5,3	4,9	35	1,7

В5

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	17,8	23,6	-21,9	34,8	56,8	-23,7	21,7	-13,7	32,7	34,7

L, км	3,3	3,5	2,4	2,7	4,3	5,2	5,5	4,6	3,7	2,1

В6

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	23,3	21,3	-32,5	29,6	43,7	32,7	21,8	-32,6	23,5	32,1
L, км	2,1	3,6	4,6	3,2	3,4	2,7	3,4	2,8	3,7	4,9

В7

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,4	-23,7	78,4	32,6	46,3	37,8	-74,5	54,6	-55,4	34
L, км	4,6	3,4	2,3	4,2	1,8	6,7	8,3	5,5	3,7	4,8

В8

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	-45,8	-23,7	42,9	34,7	45,4	23,8	47,7	-65,8	87,6	34,8
L, км	2,3	2,5	6,3	4,4	4,7	3,2	3,9	1,7	4,2	3,6

В9

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,8	24,7	21,8	-41,9	45,4	27,2	-17,9	-21,3	54,9	32,8
L, км	1,7	3,7	4,4	2,4	3,6	2,7	5,1	2,4	3	2,2

В10

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	23,5	44,1	22,7	14,6	47,9	12,6	13,4	17,8	43,2
L, км	2,1	2,8	3,3	2,5	1,7	3,7	2,8	3,1	3,3	2,5

В11.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	35,5	53,3	37,4	-23,7	-9,5	58,3	41,6	-3,6	-45,6	23,7
L, км	3,6	7,6	4,9	9,7	3,7	4,8	3,4	2,4	3,5	7,1

В12

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	21,5	23,6	-5,7	-45,3	23,8	34,7	32,6	-23,7	65,7	23,8
L, км	2,1	3,5	3,2	4,7	1,5	7,5	4,7	3,8	2,5	7,4

В13

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	42,7	21,9	34,9	-12,9	23,8	32,9	-5,9	32,7	57	23,9
L, км	7,4	6,4	3,8	3,9	4,7	2,1	4,6	3,8	2,7	6,5

В14

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	22,5	43,2	23,8	45,8	43,7	34,8	21,4	12,6	14,5
L, км	2,3	4,3	1,6	2,7	4,5	3,8	5,3	4,9	35	1,7

В15

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	17,8	23,6	-21,9	34,8	56,8	-23,7	21,7	-13,7	32,7	34,7
L, км	3,3	3,5	2,4	2,7	4,3	5,2	5,5	4,6	3,7	2,1

В16

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	23,3	21,3	-32,5	29,6	43,7	32,7	21,8	-32,6	23,5	32,1
L, км	2,1	3,6	4,6	3,2	3,4	2,7	3,4	2,8	3,7	4,9

В17

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,4	-23,7	78,4	32,6	46,3	37,8	-74,5	54,6	-55,4	34
L, км	4,6	3,4	2,3	4,2	1,8	6,7	8,3	5,5	3,7	4,8

В18

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	-45,8	-23,7	42,9	34,7	45,4	23,8	47,7	-65,8	87,6	34,8
L, км	2,3	2,5	6,3	4,4	4,7	3,2	3,9	1,7	4,2	3,6

В19

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,8	24,7	21,8	-41,9	45,4	27,2	-17,9	-21,3	54,9	32,8
L, км	1,7	3,7	4,4	2,4	3,6	2,7	5,1	2,4	3	2,2

В20

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	23,5	44,1	22,7	14,6	47,9	12,6	13,4	17,8	43,2
L, км	2,1	2,8	3,3	2,5	1,7	3,7	2,8	3,1	3,3	2,5

В21.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	35,5	53,3	37,4	-23,7	-9,5	58,3	41,6	-3,6	-45,6	23,7
L, км	3,6	7,6	4,9	9,7	3,7	4,8	3,4	2,4	3,5	7,1

В22

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	21,5	23,6	-5,7	-45,3	23,8	34,7	32,6	-23,7	65,7	23,8
L, км	2,1	3,5	3,2	4,7	1,5	7,5	4,7	3,8	2,5	7,4

В23

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	42,7	21,9	34,9	-12,9	23,8	32,9	-5,9	32,7	57	23,9
L, км	7,4	6,4	3,8	3,9	4,7	2,1	4,6	3,8	2,7	6,5

В24

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	22,5	43,2	23,8	45,8	43,7	34,8	21,4	12,6	14,5
L, км	2,3	4,3	1,6	2,7	4,5	3,8	5,3	4,9	35	1,7

В25

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	17,8	23,6	-21,9	34,8	56,8	-23,7	21,7	-13,7	32,7	34,7
L, км	3,3	3,5	2,4	2,7	4,3	5,2	5,5	4,6	3,7	2,1

В26

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	23,3	21,3	-32,5	29,6	43,7	32,7	21,8	-32,6	23,5	32,1

L, км	2,1	3,6	4,6	3,2	3,4	2,7	3,4	2,8	3,7	4,9

В27

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,4	-23,7	78,4	32,6	46,3	37,8	-74,5	54,6	-55,4	34
L, км	4,6	3,4	2,3	4,2	1,8	6,7	8,3	5,5	3,7	4,8

В28

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	-45,8	-23,7	42,9	34,7	45,4	23,8	47,7	-65,8	87,6	34,8
L, км	2,3	2,5	6,3	4,4	4,7	3,2	3,9	1,7	4,2	3,6

В29

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	33,8	24,7	21,8	-41,9	45,4	27,2	-17,9	-21,3	54,9	32,8
L, км	1,7	3,7	4,4	2,4	3,6	2,7	5,1	2,4	3	2,2

В30

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d, мм	32,2	23,5	44,1	22,7	14,6	47,9	12,6	13,4	17,8	43,2
L, км	2,1	2,8	3,3	2,5	1,7	3,7	2,8	3,1	3,3	2,5

Прикладивиконаннязавданьпрактичного заняття №9

Оцінити точність результатів подвійного нівелювання 10 ходів. Дані для розрахунків наведено в таблиці.

Знайдемо суми другого та третього стовпців таблиці, та визначимо коефіцієнт систематичного впливу:

$$\lambda = \frac{[d]}{[L]} = \frac{163}{55} = 2{,}96\,\frac{\text{мм}}{\text{км}}$$

Обчислемо виправлені різниці з урахуванням систематичного вливу, для цього визначимо добутки довжин ходів на коефіцієнт систематичного впливу, результати внесемо в четвертий стовпчик тблиці.

№ ходів	Різниця d,мм	Довжина ходу L, км.	$-\lambda L$, мм.	∂, мм.	∂^2	$p\partial^2$	m_i, мм.	M_i, мм.
1	54,2	2,6	-7,7	*46,5*	2162,2	831,6	20,5	14,5
2	54,3	8,2	-24,3	*30*	900	109,8	36,4	25,7
3	44	7,7	-22,8	*21,2*	449,4	58,4	35,2	24,9
4	-13,4	8,7	-25,8	*-39,2*	1536,6	176,6	37,5	26,5
5	-2,9	6,2	-18,4	*-21,3*	453,7	73,2	31,6	22,3
6	54,3	3,5	-10,4	*43,9*	1927,2	550,6	23,8	16,8
7	32,3	2,3	-6,8	*25,5*	650,2	282,7	19,3	13,6
8	-5,5	6,7	-19,9	*-25,4*	645,2	96,3	32,9	23,3
9	-24,8	3,1	-9,2	*-34*	1156	372,9	22,4	15,8
10	-29,5	6,0	-17,8	*47,3*	2237,3	372,8	31,1	22

$\sum$	163	55				2924,9		

Виправлені різниці визначимо за формулою: $\partial_i = d_i - \lambda L$.

Для обчислення ваги перевищення нівелірного ходу використовуємо формулу $p_i = \frac{1}{L_i}$одержані ваги помножимо на квадрти виправлених різниць, результати внесемо до 7 стовпця тблиці.

Обчислемо середню квадратичну похибку одиниці ваги виміру, яка є показником оцінки точності результатів вимірів:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\partial^2]}{2(n-1)}} = \sqrt{\frac{2924{,}9}{18}} = 12{,}7\,\frac{\text{мм}}{\text{км}}$$

Обчислемо СКП виміряних довжин ліній бо нівелірного ходу для кожного з ходів за формулою $m_i = \mu\sqrt{L_i}$, а результати занесемо до 8-го стовпця.

Обчислемо СКП середнього значення перевищення за формулою $M_i = \frac{m_i}{\sqrt{2}}$, а результати внесмо в останній стовпчик таблиці.

Надійність СКП одиниці ваги виміру визначаємо за формулою $m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2n}} = 2{,}8$мм

Аналагічно обчислюються надійність СКП середніх значень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бурмистров Г.А. Основы способа наименьших квадратов. М.: Госгеолтехиздат, 1963. – 392 с.
2. Гайдаев П.А., Большаков В.Д. Теория математической обработки геодезических измерений. М.: Недра, 1969. – 400 с.
3. Гайдаев П.А. Способ наименьших квадратов. М.: Геодезиздат, 1959. – 269 с.
4. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962. – 349 с.
5. Маркузе Ю.И. Алгоритм уравнивания комбинированых геодезических сетей. М.: Недра, 1972. – 152 с.
6. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.
7. Кемниц Ю.В. Теорія ошибок измерений. М.: Геодезиздат, 1961. – 112 с.
8. Большаков В.Д. Теорія ошибок наблюдений с основами теории вероятностей. М.: Недра, 1965. – 183 с.
9. Справочник геодезиста в двух книгах. М., 1975. – 1032 с.
10. Куштин Н.Ф. Геодезическая обработка результатов измерений. М.: Март, 2006. – 208 с.
11. Гайдаев П.А. Вычесления геодезических сетей 3 и 4 класов. М.: Недра, 1972. – 183 с.
12. Гольшин В.Н., Лебедев С.М., Хренов Л.С. Практикум по геодезии. М.: недра, 1964. – 410 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3667
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3521	3503	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3392	3271	3251	3230	3209	3287	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2832	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2689	2565	2541	2516	2592	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1682	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	100969	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

x	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0476	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0191	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0090	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Значення функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*
0,00	0,0000	**0,34**	0,1331	**0,68**	0,2517	**1,02**	0,3461
0,01	0,0040	**0,35**	0,1368	**0,69**	0,2549	**1,03**	0,3485
0,02	0,0080	**0,36**	0,1406	**0,70**	0,2580	**1,04**	0,3508
0,03	0,0120	**0,37**	0,1443	**0,71**	0,2611	**1,05**	0,3551
0,04	0,0160	**0,38**	0,1480	**0,72**	0,2642	**1,06**	0,3554
0,05	0,0199	**0,39**	0,1517	**0,73**	0,2673	**1,07**	0,3577
0,06	0,0239	**0,40**	0,1554	**0,74**	0,2703	**1,08**	0,3599
0,07	0,0279	**0,41**	0,1591	**0,75**	0,2734	**1,09**	0,3621
0,08	0,0319	**0,42**	0,1628	**0,76**	0,2764	**1,10**	0,3643
0,09	0,0359	**0,43**	0,1664	**0,77**	0,2794	**1,11**	0,3665
0,10	0,0398	**0,44**	0,1700	**0,78**	0,2823	**1,12**	0,3686
0,11	0,0438	**0,45**	0,1736	**0,79**	0,2852	**1,13**	0,3708
0,12	0,0478	**0,46**	0,1772	**0,80**	0,2881	**1,14**	0,3729
0,13	0,0517	**0,47**	0,1808	**0,81**	0,2910	**1,15**	0,3749
0,14	0,0557	**0,48**	0,1844	**0,82**	0,2939	**1,16**	0,3770
0,15	0,0596	**0,49**	0,1879	**0,83**	0,2967	**1,17**	0,3790
0,16	0,0636	**0,50**	0,1915	**0,84**	0,2995	**1,18**	0,3810
0,17	0,0675	**0,51**	0,1950	**0,85**	0,3023	**1,19**	0,3830
0,18	0,0714	**0,52**	0,1985	**0,86**	0,3051	**1,20**	0,3849
0,19	0,0753	**0,53**	0,2019	**0,87**	0,3078	**1,21**	0,3869
0,20	0,0793	**0,54**	0,2054	**0,88**	0,3106	**1,22**	0,3883
0,21	0,0832	**0,55**	0,2088	**0,89**	0,3133	**1,23**	0,3907
0,22	0,0871	**0,56**	0,2123	**0,90**	0,3159	**1,24**	0,3925
0,23	0,0910	**0,57**	0,2157	**0,91**	0,3186	**1,25**	0,3944
0,24	0,0948	**0,58**	0,2190	**0,92**	0,3212	**1,26**	0,3962
0,25	0,0987	**0,59**	0,2224	**0,93**	0,3238	**1,27**	0,3980
0,26	0,1026	**0,60**	0,2257	**0,94**	0,3264	**1,28**	0,3997
0,27	0,1064	**0,61**	0,2291	**0,95**	0,3289	**1,29**	0,4015
0,28	0,1103	**0,62**	0,2324	**0,96**	0,3315	**1,30**	0,4032
0,29	0,1141	**0,63**	0,2357	**0,97**	0,3340	**1,31**	0,4049
0,30	0,1179	**0,64**	0,2389	**0,98**	0,3365	**1,32**	0,4066
0,31	0,1217	**0,65**	0,2422	**0,99**	0,3389	**1,33**	0,4082
0,32	0,1255	**0,66**	0,2454	**1,00**	0,3413	**1,34**	0,4099
0,33	0,1293	**0,67**	0,2486	**1,01**	0,3438	**1,35**	0,4115

x	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*	*x*	*Ф (x)*
1,36	0,4131	**1,67**	0,4525	**1,98**	0,4761	**2,58**	0,4951
1,37	0,4147	**1,68**	0,4535	**1,99**	0,4767	**2,60**	0,4953
1,38	0,4162	**1,69**	0,4545	**2,00**	0,4772	**2,62**	0,4956
1,39	0,4177	**1,70**	0,4554	**2,02**	0,4783	**2,64**	0,4959
1,40	0,4192	**1,71**	0,4564	**2,04**	0,4793	**2,66**	0,4961
1,41	0,4207	**1,72**	0,4573	**2,06**	0,4803	**2,68**	0,4963
1,42	0,4222	**1,73**	0,4582	**2,08**	0,4812	**2,70**	0,4965
1,43	0,4236	**1,74**	0,4591	**2,10**	0,4821	**2,72**	0,4967
1,44	0,4251	**1,75**	0,4599	**2,12**	0,4830	**2,74**	0,4969
1,45	0,4265	**1,76**	0,4608	**2,14**	0,4838	**2,76**	0,4971
1,46	0,4219	**1,77**	0,4616	**2,16**	0,4846	**0,78**	0,4973
1,47	0,4292	**1,78**	0,4625	**2,18**	0,4854	**2,80**	0,4974
1,48	0,4306	**1,79**	0,4633	**2,20**	0,4861	**2,82**	0,4976
1,49	0,4319	**1,80**	0,4641	**2,22**	0,4868	**2,84**	0,4977
1,50	0,4332	**1,81**	0,4649	**2,24**	0,4875	**2,86**	0,4979
1,51	0,4345	**1,82**	0,4656	**2,26**	0,4881	**2,88**	0,4980
1,52	0,4357	**1,83**	0,4664	**2,28**	0,4887	**2,90**	0,4981
1,53	0,4370	**1,84**	0,4671,	**2,30**	0,4893	**2,92**	0,4982
1,54	04382	**1,85**	0,4678	**2,32**	0,4898	**2,94**	0,4984
1,55	0,4394	**1,86**	0,4686	**2,34**	0,4904	**2,96**	0,4985
1,56	0,4406	**1,87**	0,4693	**2,36**	0,4909	**2,98**	0,4986
1,57	0,4418	**1,88**	0,4699	**2,38**	0,4913	**3,00**	0,49865
1,58	0,4429	**1,89**	0,4706	**2,40**	0,4918	**3,20**	0,49931
1,59	0,4441	**1,90**	0,4713	**2,42**	0,4922	**3,40**	0,49966
1,60	0,4452	**1,91**	0,4719	**2,44**	0,4927	**3,60**	0,499841
1,61	0,4463	**1,92**	0,4726	**2,46**	0,4931	**3,80**	0,499928
1,62	0,4474	**1,93**	0,4732	**2,48**	0,4934	**4,00**	0,499968
1,63	0,4484	**1,94**	0,4738	**2,50**	0,4938	**4,50**	0,499997
1,64	0,4495	**1,95**	0,4744	**2,52**	0,4991	**5,00**	0,499997
1,65	0,4505	**1,96**	0,4750	**2,54**	0,4945		
1,66	0,4515	**1,97**	0,4756	**2,56**	0,4948		

Додаток 3

Значенння $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	***γ***			***n***	***γ***		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,656
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97		1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 4

Значення $q = q(\gamma, n)$

n	***γ***			***n***	***γ***		
	0,95	**0,99**	**0,999**		**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,50	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ

Завдання та методичні рекомендації

Укладачі

Шебанін В. С.
Шебаніна О. В.
Атаманюк І. П. та ін.

Формат 60х84/16 Ум. друк.арк.. 13,75
Наклад20 прим. Зам. № ___

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул Георгія Гонгадзе, 9
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013р