МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

АКТУАРНА МАТЕМАТИКА

методичні рекомендації до практичних занять
з навчальної дисципліни
для здобувачів освітнього рівня «бакалавр»
денної форми навчання
спеціальності 051 «Економіка»

Миколаїв - 2020

УДК 51-7
А43

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 10 червня 2020 року, протокол № 11.

Укладачі:

О. В. Шебаніна	– д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
В. П. Клочан	– канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
І. В. Клочан	– д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
С. І. Тищенко	– канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
А. М. Могильницька	– канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
В. О. Крайній	– канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;
І. І. Хилько	– старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Стройко Т.В. - д-р. екон. наук, професор, завідувач кафедри економіки та менеджменту, Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Максименко А. Г. - канд. екон. наук, доцент кафедри менеджменту та маркетингу, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП

Вивчення дисципліни «Актуарна математика» є логічним продовженням основних теоретичних положень, ідей і практичних задач, що вивчаються в навчальних дисциплінах: вища математика, теорія ймовірностей і математична статистика, фінансова математика, інформатика.

В свою чергу курс «Актуарна математика» є базою для вивчення наступних дисциплін: страхування, прогнозування соціально-економічних процесів, моделі економічної динаміки, економічна кібернетика тощо.

Актуарні розрахунки є невід'ємною складовою щоденного моніторингу, контролю, оцінки та аналізу ризиків страхової та інвестиційної діяльності страховика. На сьогодні європейське громадянське суспільство відпрацювало ефективну систему методів управління ризиком, серед яких особливу роль відводять саме системі страхування, що базується на використанні об'єктивних актуарних методів оцінки ризику. Бажання України приєднатися до життєвих стандартів країн ЄС, вимагає від нас, перш за все, прийняття ментальності громадянського суспільства, що вибудовує систему соціального захисту кожного суб'єкту громади шляхом передання фінансової відповідальності за наявний в нього ризик на управління спеціалізованій комерційній структурі – страховій компанії на договірних умовах. Сьогодні, невід'ємною складовою розбудови ефективної, конкурентної національної економіки є розвиток страхової справи, поглиблення страхування суб'єктів економіки, поширення страхової освіти громадян.

На рівні страхових компаній недостатній професіоналізм персоналу в галузі актуарних розрахунків призводить до прикрих помилок у виборі стратегії й тактики організації системи ризик-менеджменту; до розробки страхових продуктів, що не відповідають реальним сьогоденним потребам потенційних страхувальників; до розрахунків страхових тарифів, що не покривають реальний ступінь ризику, через недостатню вихідну базу статистичних даних, що обумовлює обрання неоптимальної методології актуарної оцінки досліджуваних ризиків.

Методичні рекомендації до практичних занять із дисципліни «Актуарна математика» розглядають основні математичні методи і моделі, які необхідні для визначення характеристик тривалості життя, разових і періодичних нетто-премій, страхових резервів для різних видів страхування і пенсійних схем.

ПЕРЕЛІК ТА ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

№	Назва теми	Кількість годин
1.	Підготовка презентацій про актуарну математику	2
2.	Побудова функції виживання, кривої смертності та інтенсивності смертності	2
3.	Розрахунок показників тривалості життя	2
4.	Побудова аналітичних моделей тривалості життя	2
5.	Модульна контрольна робота	2
6.	Побудова характеристик залишкового часу життя	2
7.	Розрахунок основних величин, що пов'язані із залишковим часом життя	2
8.	Розрахунок показників залишкового часу життя та часткового залишкового часу життя	2
9.	Побудова розподілу округленого залишкового часу життя та округленого часу життя	4
10.	Розрахунок показників округленого часу життя	4
11.	Побудова сплайнових апроксимацій для дробового віку та застосування таблиць тривалості життя	4
12.	Побудова моделей короткострокового страхування	4
13.	Розрахунок нетто-премії та страхової надбавки	4
14.	Побудова моделей довгострокового страхування	4
15.	Підсумкова контрольна робота. Залік.	2
	Всього	42

Практичне заняття № 1. Підготовка презентацій про актуарну математику

Мета: Мати уявлення про основні поняття, категорії та задачі що поставлені перед актуарною математикою. Знати основні характеристики тривалості життя; основні принципи та інструментарій актуарних обчислень; методологію побудови та використання моделей актуарної математики. Вміти проводити логіко-математичний аналіз та узагальнення наукової інформації; застосовувати математичну теорію та методи для дослідження реальних економічних процесів

Теми презентацій.

1. Страховий тариф як кількісна оцінка ризику в страхуванні.
2. Дискретні моделі індивідуальних позовів.
3. Структуровані моделі індивідуальних позовів
4. Статична модель кількості позовів протягом фіксованого проміжку часу.
5. Динамічна модель кількості позовів протягом фіксованого проміжку часу
6. Статичні моделі банкрутства страхової компанії.
7. Опис моделі індивідуального та колективного ризику.
8. Динамічні моделі банкрутства страхової компанії.
9. Опис динамічної моделі.
10. Нерівність Лундберга щодо ймовірності банкрутства
11. Визначення страхового тарифу в страхуванні життя
12. Модель рівноваги страхового ринку.

Інформаційні ресурси (*рекомендовані сайти*)

1. http://moodle.mnau.edu.ua/;
2. https://moodle.mnau.edu.ua/course/view.php?id=1911
3. www.actuaries.org.
4. http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/Actuar_Bible.pdf
5. www.dwsimpson.com.

Практичне заняття № 2. Побудова функції виживання, кривої смертності та інтенсивності смертності

Мета: Одержати навички та вміння побудови та використання функції виживання, кривої смертності та інтенсивності смертності для розв'язування задач з інтенсивності та тривалості життя.

Завдання 2.1. Використовуючи таблицю смертності, обчислити вірогідність для тридцятирічного чоловіка не дожити до 60 років.

Рішення.

Імовірність для людини віку x років померти протягом найближчих t років дорівнює

$$ {}_t q_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \ . $$

Тоді шукана ймовірність

$$ {}_{30} q_{30} = \frac{l_{30} - l_{60}}{l_{30}} = \frac{91419 - 50246}{91419} \approx 0{,}45038 \ . $$

Завдання 2.2. Розглянемо сімейну пару, в якій дружині 30 років, а чоловіку 37 років. Яка ймовірність того, що вони проживуть ще принаймні 30 років?

Рішення.

Шукана ймовірність є добуток ймовірностей подій «дружина проживе принаймні 30 років» і «чоловік проживе принаймні 30 років». тоді

$$ {}_{30} p_{30}^{ж} \cdot {}_{30} p_{37}^{м} = \frac{l_{60}^{ж}}{l_{30}^{ж}} \cdot \frac{l_{67}^{м}}{l_{37}^{м}} = \frac{80460}{96253} \cdot \frac{34501}{86197} = 0{,}335 \ . $$

Завдання 2.3. Функція виживання задана формулою $s(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{100}}$, $0 \le x \le 100$. знайти:

a) інтенсивність смертності у віці 30 років;

b) ймовірність того, що людина віку 40 років помре у віці від 60 до 65 років.

Рішення.

a) Інтенсивність смертності дорівнює

$$ \mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} \ . $$

тоді

$$ \mu_x = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x}{100}}} \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{100}}} = \frac{1}{2(100 - x)} \ ; $$

$$ \mu_{30} = \frac{1}{2(100 - 30)} \approx 0{,}00714 \ . $$

b) Імовірність того, що людина віку років проживе ще років, але помре протягом наступних років, дорівнює

$$_{t|u}q_x = \frac{s(x+t) - s(x+t+u)}{s(x)} .$$

Тоді шукана ймовірність дорівнює

$$_{20|5}q_{40} = \frac{s(60) - s(65)}{s(40)} = \frac{\sqrt{1 - 60/100} - \sqrt{1 - 65/100}}{\sqrt{1 - 40/100}} \approx 0{,}053 .$$

Завдання 2.4. Інтенсивність смертності має вигляд $\mu_x = 1 - \cos\frac{\pi}{100}x$. Знайти функцію виживання $s(x)$.

Рішення.

Функція виживання через інтенсивність смертності визначається за формулою

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \mu_u du\right) .$$

тоді

$$s(x) = \exp\left(-\int_0^x \left(1 - \cos\frac{\pi}{100}u\right)du\right) = \exp\left(-u + \frac{100}{\pi}\sin\frac{\pi}{100}u\Big|_0^x\right) =$$

$$= \exp\left(-x + \frac{100}{\pi}\sin\frac{\pi}{100}x\right).$$

Завдання 2.5. Використовуючи таблицю смертності, обчислити вірогідність для сорокарічного чоловіка не дожити до 70 років.

Практичне заняття № 3. Розрахунок показників тривалості життя

Мета: Одержати практичні навички та вміння розрахунків показників тривалості життя, тарифів страхування життя, ставок річних виплат, величину річних внесків, вартості поліса.

Завдання 3.1. Відомо, що $l_{50} = 70354$, $l_{51} = 68353$, $l_{52} = 66246$, ефективна річна процентна ставка. Вік людини на момент укладення договору 50 років. Знайти актуарну сучасну вартість трирічної тимчасової довічної ренти, що виплачується раз на рік на початку року в розмірі 50000 грн.

Рішення.

Актуарна сучасна вартість тимчасової довічної ренти, що виплачується раз на рік на початку року для суми в одну грошову одиницю дорівнює

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x}\left(l_x + vl_{x+1} + v^2 l_{x+2} + \ldots + v^{n-1} l_{x+n-1}\right),$$

де $v = \dfrac{1}{1+i}$ - коефіцієнт дисконтування.

Тоді шукана величина, позначимо її, дорівнює

$$P = 50000 \cdot \ddot{a}_{50:\overline{3}|} .$$

$$\ddot{a}_{50:\overline{3}|} = \frac{1}{l_{50}}\left(l_{50} + vl_{51} + v^2 l_{52}\right) = 2{,}5373194 .$$

$$P = 50000 \cdot 2{,}5373194 = 126866 .$$

Завдання 3.2. Батьки семирічної дівчинки оформляють договір на оплату вищої освіти дитини, до досягнення нею 18 років. Термін навчання 5 років, вартість 90000 грн. на рік. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

Рішення.

Вартість поліса дорівнює

$$P = 90000 \cdot {}_{11|}\ddot{a}_{7:\overline{5}|} ,$$

Де ${}_{11|}\ddot{a}_{7:\overline{5}|}$ - актуарна сучасна вартість відкладеної тимчасової по-життєвої ренти, що виплачується раз на рік на початку року для суми в одну грошову одиницю.

$${}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$ - відкладена на m років тимчасова довічна рента для людини віку x років, виражена через комутаційні числа N_x і D_x (ці числа знаходять по таблиці комутаційних чисел).

Тоді $${}_{11|}\ddot{a}_{7:\overline{5}|} = \frac{N_{18} - N_{23}}{D_7} = \frac{772493{,}4 - 588600{,}4}{69658{,}85} = 2{,}63991.$$

$$P = 90000 \cdot 2{,}63991 = 237592 .$$

Завдання 3.3. Чоловік у віці 45 років купує за 120000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щорічних виплат.

Рішення.

Величина щорічних виплат, позначимо її S, дорівнює

$$S = \frac{120000}{{}_{20|}\ddot{a}_{45}} .$$

$${}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{m+x}}{D_x}$$ - актуарна сучасна вартість відкладеної довічної ренти, виражена через комутаційні числа N_x і D_x (ці числа знаходять по таблиці комутаційних чисел).

$${}_{20|}\ddot{a}_{45} = \frac{N_{65}}{D_{45}} = \frac{13273{,}4}{8612{,}903} = 1{,}541106407 .$$

$$S = \frac{120000}{1{,}541106407} = 77866 .$$

Завдання 3.4. Чоловік у віці 50 років придбав довічний страховий поліс, за яким у разі його смерті спадкоємці повинні отримати 100000 грн. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

Рішення.

Вартість поліса, позначимо її P, дорівнює

$$P = 100000 \cdot \bar{A}_{50} .$$

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\ln(1+i)} A_x = \frac{i}{\ln(1+i)} \cdot \frac{M_x}{D_x}$$ - очікувана поточна вартість страхових виплат, що здійснюються в момент смерті, для довічного страхування.

$$\bar{A}_{50} = \frac{0{,}05}{\ln(1{,}05)} \cdot \frac{M_{50}}{D_{50}} = \frac{0{,}05}{\ln(1{,}05)} \cdot \frac{2888{,}06}{6135{,}131} = 0{,}4824142 .$$

$$\mathrm{P} = 100000 \cdot 0{,}4824142 = 48241 .$$

Завдання 3.5. Чоловік у віці 60 років придбав довічну ренту з виплатою 40000 грн. в кінці кожного року. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти вартість поліса.

Рішення.

Вартість поліса, позначимо її P, дорівнює

$$P = 40000 \cdot a_{60} .$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$ - актуарна сучасна вартість довічної ренти, виражена через комутаційні числа N_x і D_x (ці числа знаходять по таблиці комутаційних чисел).

$$a_{60} = \frac{N_{61}}{D_{60}} = \frac{21749{,}14}{2689{,}946} = 8{,}0853445 .$$

$P = 40000 \cdot 8{,}0853445 = 323414$.

Завдання 3.6. Страхувальник у віці 40 років уклав договір, згідно з яким, починаючи з 65 років, довічно буде виплачуватися пенсія в розмірі 50000 грн. на початку кожного року. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину річних внесків, які будуть сплачуватися страхувальником з 40 до 65 років.

Рішення.

Шукана величина річних внесків, позначимо її P , дорівнює

$$P = 50000 \cdot {}_{25|}P_{40} = 50000 \cdot \frac{{}_{25|}\ddot{a}_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{25}|}} .$$

Де ${}_{m|}P_x = \frac{{}_{m|}\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$ - величина щорічного внеску, розрахована на суму в одну умовну одиницю.

$$P = 50000 \cdot \frac{{}_{25|}\ddot{a}_{40}}{\ddot{a}_{40:\overline{25}|}} = 50000 \cdot \frac{N_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 50000 \cdot \frac{13273{,}74}{158412{,}7 - 13273{,}74} = 4573 .$$

Завдання 3.7. Чоловік у віці 40 років купує за 100000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щорічних виплат.

Рішення.

Шукана величина щорічних виплат дорівнює $\frac{100000}{{}_{25|}\ddot{a}_{40}}$,

де ${}_{m|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$ - актуарна сучасна вартість довічної відкладеної ренти.

$${}_{25|}\ddot{a}_{40} = \frac{N_{65}}{D_{40}} = \frac{13273{,}74}{11838{,}66} = 1{,}1212198 .$$

Тоді величина щорічних виплат дорівнює $\frac{100000}{1{,}1212198} = 89189$.

Завдання 3.8. Чоловік у віці 40 років купує за 100000 грн. довічну ренту (пенсію), виплати якої починаються з віку 65 років. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щорічних виплат.

Практичне заняття № 4. Побудова аналітичних моделей тривалості життя

Мета: Одержати навички та вміння побудови аналітичних моделей тривалості життя та застосовувати їх для розв'язування задач визначення параметрів тривалості життя.

Завдання 4.1. Описати аналітичні закони тривалості життя:

1) Де Муавра

2) Гомпертца

3) Мейкхема

4) сталої сили смертності

5) Вейбулла

Завдання 4.2. Дати відповідь на питання:

1) Навіщо будують таблиці тривалості життя?

2) Чому для різних груп населення будують різні таблиці тривалості життя?

3) Що таке селективна таблиця смертності?

Завдання 4.3. Страхувальник (жінка) у віці 47 років уклав довічний договір страхування з умовою щорічної сплати внесків, поки він живий. Страхова сума становить 150000 грн., ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину річних внесків.

Рішення.

Шукана величина річних внесків дорівнює $150000 \cdot \overline{P}_{47}$,

де $\overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x} = \frac{i}{\ln(1+i)} \cdot \frac{M_x}{N_x}$ - величина річного внеску з одиничною страхової суми.

$$\overline{P}_{47} = \frac{\overline{A}_{47}}{\ddot{a}_{47}} = \frac{0{,}05}{\ln(1{,}05)} \cdot \frac{M_{47}}{N_{47}} = \frac{0{,}05}{\ln(1{,}05)} \cdot \frac{2661{,}98}{137652{,}6} = 0{,}019817921 \ .$$

Величина річних внесків тоді дорівнює $150000 \cdot 0{,}019817921 = 2973$.

Завдання 4.5. Батьки п'ятирічного хлопчика придбали поліс по оплаті отримання дитиною вищої освіти до досягнення нею 18 років. Термін навчання

5 років, вартість 110000 грн. на рік. Ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину щорічних внесків.

Рішення.

Шукана величина щорічних внесків дорівнює $110000 \cdot {}_{13|}P_{5:\overline{5}|}$,

де ${}_{p-x|}P_{x:\overline{n}|} = \frac{{}_{p-x|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{p-x}|}} = \frac{N_p - N_{p+n}}{N_x - N_p}$ - величина щорічного внеску для відкладеної термінової ренти.

$$ {}_{18-5|}P_{5:\overline{5}|} = \frac{{}_{18-5|}\ddot{a}_{5:\overline{5}|}}{\ddot{a}_{5:\overline{18-5}|}} = \frac{N_{18} - N_{23}}{N_5 - N_{18}} = \frac{690374{,}2 - 509368{,}8}{1441033 - 690374{,}2} = 0{,}24112873 \ . $$

Тоді величина щорічних внесків дорівнює $110000 \cdot 0{,}24112873 = 26524$.

Завдання 4.6. Страхувальник (чоловік) у віці 50 років уклав довічний договір страхування з умовою щорічної сплати внесків, поки він живий. Страхова сума становить 180000 грн., ефективна процентна ставка $i = 5\%$. Знайти величину річних внесків.

Практичне заняття № 5. Побудова характеристик залишкового часу життя

Мета: Одержати навички та вміння побудови характеристик залишкового часу життя та застосовувати їх для розв'язування задач визначення характеристик залишкового часу життя.

Завдання 5.1. Дати відповідь на питання:

1. Назвіть основні характеристики залишкового часу життя.
2. Що означає середній залишковий час життя?
3. Що визначає функція виживання?

Завдання 5.2. Крива смертей має вигляд $f(x) = Ae^{-\frac{x}{2}}$. Знайти:

a) функцію виживання $s(x)$;

b) дисперсію часу життя DT.

Рішення.

a) Знайдемо невідомий коефіцієнт з умови

$$\int_0^\infty f(x)dx = 1 \ .$$

$$\int_0^\infty f(x)dx = A\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx = -2Ae^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}.$$

функція виживання

$$s(x) = \int_x^\infty f(u)du = \int_x^\infty \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}du = -e^{-\frac{u}{2}}\Big|_x^\infty = e^{-\frac{x}{2}} \ .$$

b) Дисперсія часу життя обчислюється за формулою

$$DT = ET^2 - (ET)^2 \ .$$

$$ET = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty s(x)dx = \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx = -2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty = 2 \ .$$

$$ET^2 = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = 2\int_0^\infty xs(x)dx = 2\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{2}}dx = [\text{интегрируем по частям}] =$$

$$= -4xe^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty + 4\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}dx = -8e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^\infty = 8.$$

$$DT = ET^2 - (ET)^2 = 8 - 2^2 = 4 \ .$$

Завдання 5.3. Знайти ймовірність того, що 50-річний чоловік проживе ще півроку після свого дня народження при припущенні:

a) рівномірного розподілу смертей;

b) у припущенні Балдуччі.

Рішення.

a) У припущенні рівномірного розподілу смертей шукана ймовірність дорівнює

$$_{1/2}p_{50} = \frac{s(50{,}5)}{s(50)} = \frac{0{,}5s(50) + 0{,}5s(51)}{s(50)} = \frac{l_{50} + l_{51}}{2l_{50}} .$$

Використовуючи дані таблиці смертності, отримаємо

$$_{1/2}p_{50} = \frac{70354 + 68353}{2 \cdot 70354} \approx 0{,}98578 .$$

b) У припущенні Балдуччі шукана ймовірність дорівнює

$$_{1/2}p_{50} = \frac{s(50{,}5)}{s(50)} = \frac{s(51)}{(p_{50} + 0{,}5q_{50}) \cdot s(50)} = \frac{p_{50}}{(p_{50} + 0{,}5q_{50})} = \frac{1 - q_{50}}{1 - 0{,}5q_{50}} .$$

Використовуючи дані таблиці смертності, отримаємо $_{1/2}p_{50} = \frac{1 - 0{,}028442}{1 - 0{,}5 \cdot 0{,}028442} \approx 0{,}98557$.

Завдання 5.4. Знайти ймовірність того, що 40-річний чоловік проживе ще півроку після свого дня народження при припущенні:

a) рівномірного розподілу смертей;

b) у припущенні Балдуччі.

Завдання 5.5. Знайти ймовірність того, що 47-річна жінка проживе ще півроку після свого дня народження при припущенні:

a) рівномірного розподілу смертей;

b) у припущенні Балдуччі.

Практичне заняття № 6. Розрахунок основних величин, що пов’язані із залишковим часом життя

Мета: Одержати навички та вміння розрахунку основних величин, що пов’язані із залишковим часом життя та застосовувати їх у розв’язуванні задач для розрахунку основних величин, що пов’язані із залишковим часом життя.

Завдання 6.1. Дати відповідь на питання:

1. Як визначається ймовірність смерті людини у віці ”x” протягом найближчих ”t” років?
2. Як визначається ймовірність події, яка полягає в тому, що людина у віці ”x” проживе ще ”t” років, але помре протягом наступних ”и” років?
3. Як розраховується середній залишковий час життя та його дисперсія?
4. Що називають частковою тривалістю життя та як обчислюють?

Завдання 6.2. Припустимо, що тривалість життя описується моделлю де Муавра з граничним віком 120 років, а ефективна річна процентна ставка дорівнює 15%. Підрахуйте нетто-премії для людини у віці 40 років, якщо укладається договір 5-річного змішаного страхування життя.

Рішення.

Як ми знаємо, залишкове час життя застрахованого має рівномірний розподіл на проміжку $(0,\omega - x) = (0,80)$, значить, функція щільності має вигляд:

$$f_{40}(t) = \frac{1}{80},\ 0 < t < 80.$$

Інтенсивність відсотків $\delta = \ln(1+i) \approx 13{,}9762\%$, коефіцієнт дисконтування $v = 1/(1+i) \approx 86{,}9565\%$. Після цих попередніх зауважень приступимо до розрахунків:

для змішаного 5-річного страхування

$$\overline{A}_{40:\overline{5}|} = \int_0^5 v^t \frac{1}{80} dt + v^5 \int_5^{80} \frac{1}{80} dt = \frac{1 - v^{80}}{80\delta} = 51{,}107\%.$$

Завдання 6.3. Припустимо, що тривалість життя описується моделлю де Муавра з граничним віком 110 років, а ефективна річна процентна ставка дорівнює 12%. Підрахуйте нетто-премії для людини у віці 50 років, якщо укладається договір 3-річного змішаного страхування життя.

Практичне заняття № 7. Розрахунок показників залишкового часу життя та часткового залишкового часу життя

Мета: Одержати практичні навички та вміння розрахунку показників залишкового часу життя та часткового залишкового часу життя та застосовувати їх у розв'язуванні задач визначення показників залишкового часу життя та часткового залишкового часу життя.

Завдання 7.1. Дати відповідь на питання:

1. Дати означення показника залишкового часу життя.
2. Дати означення показника часткового залишкового часу життя.
3. Як розраховується показник залишкового часу життя ?
4. Як визначається показник часткового залишкового часу життя ?

Завдання 7.2. Знайти середній залишковий час життя, його дисперсію та середньоквадратичне відхилення для моделі де Муавра.

Завдання 7.3. Знайти часткову середню тривалість життя та її дисперсію для моделі де Муавра. Навести розрахунки для $\omega = 90$, $n = 5$.

Завдання 7.4. Знайти середній залишковий час життя, його дисперсію та середньоквадратичне відхилення для моделі Гомпертца.

Практичне заняття № 8. Побудова розподілу округленого залишкового часу життя та округленого часу життя

Мета: Одержати практичні навички та вміння побудови розподілу округленого залишкового часу життя та округленого часу життя та розв'язувати задачі на побудову розподілу округленого залишкового часу життя та округленого часу життя.

Завдання 8.1. Дати відповідь на питання:

1. Дати означення розподілу округленого залишкового часу життя.
2. Дати означення розподілу округленого часу життя.
3. Як визначається розподіл округленого залишкового часу життя ?
4. Як визначається розподіл округленого часу життя ?

Завдання 8.2. Знайти щільність розподілу залишкового часу життя для моделі Гомпертца.

Завдання 8.3. Визначити щільність розподілу округленого залишкового часу життя для моделі де Муавра.

Завдання 8.4. Визначити щільність розподілу округленого часу життя для моделі де Муавра.

Практичне заняття № 9. Розрахунок показників округленого часу життя

Мета: Одержати практичні навички та вміння розрахунку показників округленого часу життя та розв'язувати задачі на визначення показників округленого часу життя.

Завдання 9.1. Дати відповідь на питання:

1. Дати означення округленого часу життя.
2. Що називається середньою округленою залишковою тривалістю життя.
3. Як розраховується показник округленого часу життя ?
4. Як визначається показник середньої округленої залишкової тривалості життя?

Завдання 9.2. Відомо, що за договором страхування на випадок смерті, укладеним особою у віці 37 років терміном на три роки, одноразова нетто-премія становить 27 грн. 30 коп., а сучасна вартість майбутнього платежу – 2 грн. 83 коп. Обчисліть постійну річну нетто-премію.

Завдання 9.3. Знайти щільність розподілу залишкового часу життя та основні показники залишкової тривалості життя для моделі де Муавра $\omega = 100$ та моделі з функцією виживання $s(x) = xe^{2x}$.

Практичне заняття № 10. Побудова сплайнових апроксимацій для дробового віку та застосування таблиць тривалості життя

Мета: Одержати практичні навички та вміння побудови сплайнових апроксимацій для дробового віку та застосування таблиць тривалості життя, що дають різноманітні наближення, рівномірного розподілу смертності, постійної інтенсивності смертності та припущень Балдуччі.

Завдання 10.1. Дати відповідь на питання:

1. Що означає сплайнова апроксимація?
2. Як інтерполюється функція виживання у випадку рівномірного розподілу смертності?
3. Як інтерполюється функція виживання у випадку постійної інтенсивності смертності?
4. В чому полягає особливість припущення Балдуччі?

Завдання 10.2. Знайти ймовірність того, що чоловік (80 років) помре у віці 80,5-81,5 роки з урахуванням рівномірного розподілу смертності.

Завдання 10.3. Знайти ймовірність того, що чоловік (75 років) помре у віці 75,5-76,5 роки у припущені Балдуччі.

Завдання 10.4. Знайти ймовірність того, що жінка (77 років) помре у віці 77,5-78,5 роки з урахуванням рівномірного розподілу смертності

Практичне заняття № 11. Побудова моделей короткострокового страхування

Мета: Одержати практичні навички розрахунків параметрів та умов короткострокового страхування.

Завдання 11.1. Припустимо, що в компанії застраховано $N = 3000$ чоловік з імовірністю смерті протягом року $q = 0{,}3\%$. Компанія виплачує суму $b = 250000$ грн. в разі смерті застрахованого протягом року і не платить нічого, якщо ця людина доживе до кінця року. Визначте величину активів, достатню, щоб забезпечити вірогідність розорення близько 5%.

Рішення.

Приймемо розмір страхової суми в якості нової грошової одиниці.

Перш за все, ми повинні підрахувати середнє значення і дисперсію сумарної шкоди S.

$$ES = NE\xi = 3000 \cdot 0.003 = 9,$$

$$DS = ND\xi = 3000 \cdot 0{,}997 \cdot 0.003 \approx 9.$$

Тому

$$P(S \le u) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \le \frac{u - ES}{\sqrt{DS}}\right) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \le \frac{u-9}{3}\right) \approx \Phi\left(\frac{u-9}{3}\right).$$

Якщо ми хочемо, щоб ймовірність розорення була 5%, величина $\frac{u-9}{3}$ повинна бути рівною $x_{0,95} = 1{,}645$, тобто (Від величини страхової допомоги) або в абсолютних цифрах близько 3 483 750 грн.

Завдання 11.2. Припустимо, що страхова компанія уклала $N = 10000$ договорів страхування життя строком на один рік на наступних умовах: в разі смерті застрахованого протягом року від нещасного випадку компанія виплачує спадкоємцям 1000000 крб., А в разі смерті протягом року від природних причин компанія виплачує спадкоємцям 250000 руб. Компанія не платить нічого, якщо застрахований не помре протягом року. Імовірність смерті від нещасного випадку одна і та ж для всіх застрахованих і дорівнює 0.0005. Імовірність смерті від природних причин залежить від віку. У першому наближенні можна розбити N застрахованих на дві вікові групи, що містять $N_1 = 4000$ і $N_2 = 6000$ чоловік з імовірністю смерті протягом року $q_1 = 0.004$ і $q_2 = 0.002$ відповідно.

Підрахуйте величину премії, що гарантує можливість виконання компанією своїх зобов'язань, що дорівнює 95%.

Рішення.

Приймемо суму руб. в якості одиниці вимірювання грошових сум. Тоді для першої групи договорів індивідуальний збиток приймає три значення: 0, 1 і 4 з вірогідністю 0.9955, 0.0040 і 0.0005 відповідно:

0	1	4
0,9955	0,004	0,0005

Середнє значення і дисперсія величини індивідуального збитку для пер-виття групи застрахованих є

$m_1 = 1 \cdot 0{,}004 + 4 \cdot 0{,}0005 = 0{,}006$,

$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0{,}004 + 4^2 \cdot 0{,}0005 - m_1^2 \approx 0{,}012.$

Для другої групи договорів індивідуальний збиток приймає ті ж три значення 0,1 і 4, але з іншими можливостями: 0,9975, 0,002 і 0,0005:

0	1	4
0,9975	0,002	0,0005

У цій групі середнє значення і дисперсія індивідуального збитку є

$m_2 = 1 \cdot 0{,}002 + 4 \cdot 0{,}0005 = 0{,}004$

$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0{,}002 + 4^2 \cdot 0{,}0005 - m_2^2 \approx 0{,}01.$

Середнє значення і дисперсія сумарного збитку рівні:

$ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0{,}006 + 6000 \cdot 0{,}004 = 48,$

$DS = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0{,}012 + 6000 \cdot 0{,}01 = 108.$

Для того, щоб гарантувати 95% ймовірність беззбитковості, резервний фонд компанії повинен бути рівний $ES + l = 48 + l$, де додаткова сума визначається за формулою

$l = x_{0,95} \cdot \sqrt{DS}$

і в нашому випадку буде дорівнює

$l = 1{,}645 \cdot \sqrt{108} \approx$

Розглянемо тепер питання про призначення індивідуальних премій.

I. Якщо додаткова сума ділиться пропорційно нетто-премій, то відповідно до (6.5.3) відносна страхова надбавка θ одна і та ж для всіх договорів і дорівнює

$$\theta = \frac{l}{ES} \approx 35.6\%.$$

Тому для договорів з першої групи премія дорівнює

$$p_1 = m_1 \cdot (1 + \theta) \approx 0.00814 = 2034 \text{ руб.}$$

Для договорів з другої групи премія дорівнює

$$p_2 = m_2 \cdot (1 + \theta) \approx 0{,}00542 = 1356 \text{ руб.}$$

II. Якщо додаткова сума l ділиться пропорційно дисперсія, то коефіцієнт пропорційності k є

$$k = \frac{l}{DS} \approx 15{,}8\%.$$

Тому для договорів з першої групи страхова надбавка дорівнює

$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0{,}001899,$$

так що премія є

$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0{,}007899 = 1975 \text{ руб.}$$

а відносна страхова надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31.7\%.$$

Для договорів з другої групи страхова надбавка дорівнює

$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0{,}001583,$

так що премія є

$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0{,}005583 = 1396$ руб.

а відносна страхова надбавка

$\theta_2 = \dfrac{l_2}{m_2} \approx 39{,}6\%.$

III. Якщо додаткова сума l ділиться пропорційно середнім квадратичним відхиленням (вони дорівнюють $\sigma_1 \approx 0{,}1095$ для договорів першої групи і $\sigma_2 = 0{,}1$ для договорів другої групи), то коефіцієнт пропорційності k є

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} \approx 0{,}0165.$$

Тому для договорів з першої групи страхова надбавка дорівнює

$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0{,}001804,$

так що премія є

$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0{,}007804 = 1951$ руб.

а відносна страхова надбавка

$\theta_1 = \dfrac{l_1}{m_1} \approx 30\%.$

Для договорів з другої групи страхова надбавка дорівнює

$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0{,}001647,$

так що премія є

$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0{,}005647 = 1412$ руб.

а відносна страхова надбавка

$\theta_2 = \dfrac{l_2}{m_2} \approx 41\%.$

Отже, зміна принципу призначення індивідуальних премій призводить до зменшення відносної страхової надбавки для договорів першої групи: $\theta_1 = 35{,}6\%,\ 31{,}7\%,\ 30\%$.

Відповідно для договорів другої групи відносна захисна надбавка збільшується: $\theta_2 = 35{,}6\%,\ 39{,}6\%,\ 41\%$. Це пов'язано з тим, що коефіцієнт розсіювання сумарного збитку є

$$\frac{DS}{ES} - 1 = 1{,}25,$$

в той час як для договорів першої (другої) групи він дорівнює $\theta_1^2 / m_1 - 1 = 1$ (відповідно $\theta_2^2 / m_2 - 1 = 1.5$). Коефіцієнт варіації величини індивідуального збитку для договорів першої групи є

$c_1 = \sigma_1 / m_1 \approx 18.26,$

а для договорів другої групи він дорівнює

$c_2 = \sigma_2 / m_2 = 25.$

Середній коефіцієнт варіації, усереднений по всьому портфелю з вагами, $E\xi_j / ES$ є

$$c = c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{ES} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{ES}$$

$$= c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21.63.$$

Завдання 11.3. Страхова компанія пропонує договори страхування життя на один рік. Інформація щодо структури покриття наведена в наступній таблиці:

Страховая сума	Причина смерті	Ймовірність
500 000	Звичайна	0,1
1 000 000	Нещасний випадок	0,01

Відносна захисна надбавка дорівнює 20%.

Припустимо, що окремі поліси незалежні і страховик використовує нормальне наближення для розподілу сумарних виплат.

Скільки договорів повинен продати страховик, щоб зібрана премія з імовірністю 95% покривала сумарні виплати?

Рішення.

Нехай N - загальне число проданих договорів. X_k - виплати по k-му договором, $S = X_1 + ... + X_N$ - сумарні виплати по всьому портфелю, θ - відносна захисна надбавка, так що премія за одним договором дорівнює $p = (1+\theta)EX_k$.

За умовою, $P(S < Np) = 0{,}95$. З іншого боку,

$$P(S < Np) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} < \frac{Np - ES}{\sqrt{DS}}\right) \approx \Phi\left(\frac{Np - ES}{\sqrt{DS}}\right) = \Phi\left(\sqrt{N}\frac{\theta \cdot EX_k}{\sqrt{DX_k}}\right).$$

Тому

$$\sqrt{N} \cdot \frac{\theta \cdot EX_k}{\sqrt{VarX_k}} = x_{0,95} \equiv 1{,}645\,,$$

де $x_{0,95}$ - квантиль порядку 0,95 стандартного нормального (гауссовского) розподілу.

Звідси для шуканого числа договорів маємо:

$$N = \frac{x_{0,95}^2 \cdot DX_k}{\theta^2 \cdot (EX_k)^2}.$$

Оскільки для індивідуального договору,

$EX = 500\ 000 \cdot 0{,}10 + 1000000 \cdot 0{,}1 = 60000$,

$EX^2 = 500\,000^2 \cdot 0{,}10 + 1\ 000\ 000^2 \cdot 0{,}01 = 35 \cdot 10^9$,

$DX = 314 \cdot 10^8$, Шукане число договорів одно 590.

Завдання 11.4. Компанія ABC передбачає організувати групове страхування життя для своїх співробітників. Структура персоналу наведена в наступне таблиці:

Професійний клас	Число співробітників	Страхова сума	Ймовірність смерті
1	100	1	0,1
2	100	1	0,2
3	200	2	0,1
4	200	2	0,2

Компанія ABC передбачає внести до страхового фонду суму, що дорівнює очікуваним виплат страхових відшкодувань.

Кожен співробітник, в свою чергу, повинен буде внести суму, рівна певній частці δ від розміру очікуваної виплати. Розмір цієї частки визначається таким чином, щоб з імовірністю 95% коштів страхового фонду вистачило для виплати страхових відшкодувань.

Визначте розмір внеску для працівників четвертого професійного класу.

Рішення.

Нехай q- ймовірність смерті співробітника, - розмір страхової суми. Оскільки індивідуальні втрати за договором приймають тільки два значення: 0 з ймовірністю $1-q$ і SA з ймовірністю q, середнє значення індивідуальних втрат є $EX = q \cdot SA$, а дисперсія - $DX = q(1-q) \cdot SA^2$.

Припускаючи незалежність часів життя співробітників компанії, можна підрахувати середнє і дисперсію сумарних виплат для кожного професійного класу. Для цього потрібно середнє (відповідно дисперсію) індивідуальних втрат помножити на число працівників в класі:

$$ES' = N \cdot EX$$

$$DS' = N \cdot DX .$$

Результати розрахунків помістимо в таблицю:

Клас	Число співробітників	SA	q	EX	DX	ES'	DS'
1	100	1	0,1	0,1	0,09	10	9
2	100	1	0,2	0,2	0,16	20	16
3	200	2	0,1	0,2	0,36	40	72
4	200	2	0,2	0,4	0,64	80	128

Щоб отримати середнє значення (дисперсію) сумарних виплат для всього портфеля, потрібно скласти середні (дисперсії) сумарних втрат для всіх чотирьох професійних класів, так що

$$ES = 150, \qquad DS = 225 .$$

Розмір страхового фонду дорівнює. За умовою, має бути вірно рівність

$$P(S \le u) = 0{,}95 ,$$

або, що те ж саме,

$$P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{DS}} \le \frac{u - ES}{\sqrt{DS}} \right) = 0{,}95 .$$

Застосовуючи гауссівске наближення для центрованої і нормованої величини загальних виплат, ми маємо:

$$\frac{u - ES}{\sqrt{DS}} = x_{0,95} .$$

У ситуації, що розглядається це рівність набуде вигляду:

$$\delta = 0{,}1 x_{0,95} \approx 0{,}1645 .$$

Відповідно захисна надбавка для працівників четвертого професійного класу дорівнює $0{,}1645 \cdot 0{,}4 = 0{,}0658$. Інакше кажучи, $\delta = 6{,}58\%$.

Практичне заняття № 12. Розрахунок нетто-премії та страхової надбавки

Мета: Набути розширені теоретичні знання та одержати практичні навички розрахунку нетто-премій та страхових надбавок за договорами страхування життя.

Основні статистичні параметри у страхуванні життя. Нетто-тариф за договором страхування життя для кожного з наведених щойно страхових ризиків (страхових подій) визначають з урахуванням статистичних закономірностей страхових ризиків протягом дії договору страхування та інвестиційного доходу від розміщення страхових резервів.

Основні параметри таблиці дожиття та смертності:

l_x — кількість осіб, що дожили до віку x років (змінна x позначає повну кількість років застрахованої особи на час укладення договору страхування життя);

d_x^0 — кількість осіб у віці x років, які не доживуть до віку $x + 1$ рік, при цьому:

$$d_x^0 = l_x - l_{x+1};$$

q_x^0 — коефіцієнт смертності для особи у віці x років (імовірність смерті протягом року для особи у віці x років), при цьому:

$$q_x^0 = \frac{d_x^0}{l_x};$$

p_x^0 — імовірність дожити до віку $x + 1$ для особи у віці x років;

${}_t q_x^0$ — імовірність смерті протягом t років для особи у віці x років;

${}_t p_x^0$ — імовірність прожити не менш ніж t років для особи у віці x років, при цьому:

$$ {}_t p_x^0 = \frac{l_{x+t}}{l_x}, $$

звідки

$$ {}_0 p_x^0 = 1; \qquad {}_1 p_x^0 = p_x^0; \qquad q_x^0 = 1 - p_x^0; $$

$$ {}_t p_x^0 = p_x^0 p_{x+1}^0 p_{x+2}^0 \dots p_{x+t-1}^0; \qquad {}_t q_x^0 = 1 - {}_t p_x^0. $$

При укладанні договору страхування життя, умови якого передбачають страхові ризики, які щойно визначено, для кожного із цих страхових ризиків розраховують відповідні статистичні таблиці, розрізняючи їх за допомогою індексів (j = 0, 1, 2 ...), при цьому індекс j = 0 використовують для таблиць дожиття та смертності.

Основні параметри статистичних таблиць додаткових ризиків такі:

l_x — кількість осіб, котрі дожили до віку x років (має дорівнювати значенню такого самого параметра в таблиці дожиття та смертності);

d_x^j — кількість осіб у віці x років, для яких j-та страхова подія настане протягом року (до настання віку x + 1 рік);

${}_t d_x^j$ — кількість осіб у віці x років, для яких j-та страхова подія настане протягом t років (на проміжку часу від x до $x + t$ років);

q_x^j — імовірність настання протягом року j-ї страхової події для особи у віці x років;

${}_t q_x^j$ — імовірність настання протягом t років j-ї страхової події для особи у віці x років, при цьому

$${}_t q_x^j = \frac{{}_t d_x^j}{l_x};$$

${}_t p_x^j = 1 - {}_t q_x^j$ — імовірність того, що j-та страхова подія не настане протягом t років для особи у віці x років.

Розрахунки нетто-тарифів за договорами страхування життя виконують на основі статистичних таблиць страхових ризиків. При цьому для кожного страхового ризику розраховують такі комутаційні числа:

$$D_x = l_x \nu^x; \qquad C_x = d_x^j \nu^{x+1};$$

$$N_x = \sum_{t=x}^{\omega} D_t; \qquad M_x = \sum_{t=x}^{\omega} C_t;$$

$$S_x = \sum_{t=x}^{\omega} N_t; \qquad R_x = \sum_{t=x}^{\omega} M_t,$$

де ω — граничний згідно з таблицею смертності вік;

t — змінний індекс, що дорівнює повній кількості років з часу початку дії договору страхування життя;

ν — дисконтувальний множник, який для встановленої річної ставки інвестиційного доходу i визначається співвідношенням:

$$\nu = \frac{1}{1+i}.$$

Таблиця комутаційних чисел складається для всіх значень віку x та ставки i річного інвестиційного доходу, застосовуваних у розрахунках нетто-тарифу.

Страхові ануїтети. ***Страховий ануїтет*** — це послідовність страхових платежів або страхових виплат двох видів:

ануїтет пренумерандо — послідовність страхових платежів або страхових виплат, що здійснюється на початку кожного обумовленого періоду часу;

ануїтет постнумерандо — послідовність страхових платежів або страхових виплат, що здійснюється в кінці кожного обумовленого періоду часу.

Річні ануїтети — це послідовність страхових платежів або страхових виплат, які здійснюються один раз на рік.

Дійсна вартість страхових ануїтетів (сподівана вартість майбутніх страхових платежів або майбутніх страхових виплат на час укладення договору страхування) визначається, як правило, в розрахунку на одну грошову одиницю річних ануїтетів постнумерандо. Інші можливі варіанти платежів — піврічні, щоквартальні та щомісячні страхові ануїтети як постнумерандо, так і пренумерандо визначаються через річні ануїтети постнумерандо.

Дійсна вартість річних страхових ануїтетів постнумерандо на час укладення договору страхування життя для застрахованої особи у віці x років у загальному випадку розраховується аналітично за формулою

$$a(t) = \sum_t b(t) \nu^t P(t),$$

де $P(t)$ — імовірність настання страхової події для застрахованої особи за проміжок часу від t до $t + 1$ року дії договору;

значення цілого індексу t визначає порядок року в межах терміну дії договору страхування;

значення $b(t)$ визначає розмір річного страхового платежу або річної страхової виплати.

Дисперсія таких ануїтетів визначається так:

$$\sigma^2[a(t)] = {}^2a(t) - a(t)^2,$$

де ${}^2a(t)$ — ануїтет виду

$${}^2a(t) = \sum_t b(t)^2 \ \nu^{2t} P(t).$$

Дійсна вартість страхових ануїтетів постнумерандо на час укладення договору страхування життя визначається аналітично або за допомогою комутаційних чисел з урахуванням даних статистичних таблиць для кожного страхового ризику:

- при укладанні договору страхування життя без обмеження строку дії договору (довічне страхування) дійсна вартість страхового ануїтету a_x, який щороку сплачується в розмірі одиниця (випадок $b(t) = 1$), поки застрахована у віці x років особа жива, визначається ймовірністю $P(t) = {}_t p_x^0$ та обчислюється за допомогою співвідношень:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega - x} \nu^t \, {}_t p_x^0 \quad \text{або} \quad a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x};$$

- при укладанні договору страхування життя на строк n років дійсна вартість страхового ануїтету $a_{\overline{x:n|}}$, який протягом n років щороку сплачується в розмірі одиниця, поки застрахована у віці x років особа жива, визначається ймовірністю $P(t) = {}_t p_x^0$ та розраховується за допомогою співвідношень:

$$a_{\overline{x:n|}} = a_x - v^n \, {}_n p_x^0 \, a_{x+n} \quad \text{або} \quad a_{\overline{x:n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x};$$

- при укладанні договору страхування життя без обмеження строку дії договору (довічне страхування) дійсна вартість страхового ануїтету $(Ia)_x$, який сплачується в розмірі одиниця за кожний рік дії договору (випадок $b(t) = t$), поки застрахована у віці x років особа жива, визначається ймовірністю $P(t) = {}_t p_x^0$ та обчислюється за допомогою співвідношень:

$$(Ia)_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} t v^t \, {}_t p_x^0 \quad \text{або} \quad (Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x};$$

- при укладанні договору страхування життя на строк n років дійсна вартість страхового ануїтету $(Ia)_{\overline{x:n|}}$, який протягом n років сплачується в розмірі одиниця за кожен рік дії договору, поки застрахована у віці x років особа жива, визначається ймовірністю $P(t) = {}_t p_x^0$ та обчислюється за допомогою співвідношень:

$$(Ia)_{\overline{x:n|}} = (Ia)_x - v^n \, {}_t p_x^0 \left[(Ia)_{x+n} + n a_{x+n}\right]$$

або

$$(Ia)_{\overline{x:n|}} = \frac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - n N_{x+n+1}}{D_x};$$

- при укладанні договору страхування життя без обмеження строку дії договору (довічне страхування) на випадок настання j-ї страхової події для застрахованої у віці x років особи дійсна вартість одиниці одноразової страхової виплати ${}_j A_x$ визначається ймовірністю $P(t) = {}_t p_x^0 \, q_{x+t}^j$ та розраховується за допомогою співвідношень:

$${}_j A_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^{t+1} \, {}_t p_x^0 \, q_{x+t}^j \quad \text{або} \quad {}_j A_x = \frac{M_x}{D_x};$$

- при укладанні договору страхування життя на строк n років на випадок настання j-ї страхової події для застрахованої у віці x років особи дійсна вартість одиниці одноразової страхової виплати ${}_j A^1_{\overline{x:n|}}$ визначається за допомогою співвідношень:

$${}_j A^1_{\overline{x:n|}} = {}_j A_x - v^n \, {}_n p_x^0 \, {}_j A_{x+n} \quad \text{або} \quad {}_j A^1_{\overline{x:n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

Приклад. При укладанні договору страхування життя на строк n років, умови якого передбачають страхову подію «стійка непрацездатність (інвалідність) застрахованої особи внаслідок нещасного випадку», дійсна вартість одиниці одноразової страхової виплати ${}_{ін} A^1_{\overline{x:n|}}$ визначається ймовірністю $P(t) = {}_t p_x \, q_{x+t}^{ін}$ та обчислюється за формулою

$${}_{\text{ін}} A^1_{\overline{x:n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} \, {}_t p_x^0 \, q_{x+t}^{\text{ін}},$$

де $q_x^{\text{ін}}$ — імовірність настання протягом року інвалідності внаслідок нещасного випадку для застрахованої у віці x років особи; при цьому випадок $n = \infty$ визначає дійсну вартість страхового ануїтету без обмеження терміну дії договору:

$$_{\text{ін}}A^{1}_{\overline{x:\infty|}} = {}_{\text{ін}}A_x;$$

- при укладанні договору страхування життя, умови якого передбачають страхову подію «дожиття застрахованої у віці x років особи до закінчення строку дії договору» (n — кількість років дії договору страхування), дійсна вартість одиниці страхової виплати визначається так:

$${}_nE_x = v^n\, {}_np_x \quad \text{або} \quad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

При укладанні договору страхування життя, умови якого передбачають страхову подію «хвороба застрахованої особи» або страхову подію «тимчасова непрацездатність застрахованої особи внаслідок нещасного випадку», дійсна вартість одиниці страхової виплати $a^{np}_{\overline{x:n|}}$ за кожний день хвороби (непрацездатності) визначається ймовірністю

$$P(t) = {}_np_x\, q^{\text{пр}}_{x+t}$$

і пропорційна до значень середньої за рік кількості $M(L)$ днів хвороби (тимчасової непрацездатності) і середньої за рік кількості $M(N)$ захворювань для застрахованої особи та обчислюється за допомогою співвідношення

$$a^{\text{пр}}_{\overline{x:n|}} = M(L)M(N)\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+0,5}\, {}_tp_x q^{np}_{x+t},$$

де $q_x^{\text{пр}}$ — імовірність настання протягом року хвороби (тимчасової непрацездатності) для застрахованої у віці x років особи. При цьому випадок $n = \infty$ визначає дійсну вартість страхового ануїтету без обмеження терміну дії договору

$$a^{np}_{\overline{x:\infty|}} = a^{np}_x.$$

Дійсна вартість страхових ануїтетів пренумерандо (позначення з двома крапками над виразом) у розрахунку на одну грошову одиницю річних платежів або виплат визначається аналітично або за допомогою комутаційних чисел через дійсну вартість відповідних ануїтетів постнумерандо (позначення без крапок над виразом) таким чином:

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \quad \text{або} \quad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x},$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = \ddot{a}_x - v^n\, {}_np_x\, \ddot{a}_{x+n} \quad \text{або} \quad \ddot{a}_{\overline{x:n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

Дійсна вартість страхових ануїтетів з виплатами m раз на рік (позначення з верхнім індексом (m)) у розрахунку на одну сумарну за рік грошову одиницю страхових платежів або виплат визначається для випадків постнумерандо та пренумерандо через відповідні річні ануїтети такими формулами:

$$a_x^{(m)} = \frac{m-1}{2m}\ddot{a}_x + \frac{m+1}{2m}a_x;$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{m+1}{2m}\ddot{a}_x + \frac{m-1}{2m}a_x;$$

$$a_{\overline{x:n|}}^{(m)} = \frac{m-1}{2m}\ddot{a}_{\overline{x:n|}} + \frac{m+1}{2m}a_{\overline{x:n|}};$$

$$\ddot{a}_{\overline{x:n|}}^{(m)} = \frac{m+1}{2m}\ddot{a}_{\overline{x:n|}} + \frac{m-1}{2m}a_{\overline{x:n|}}.$$

Дійсна вартість одиниці страхових виплат для договорів страхування життя з негайною виплатою страхової суми в разі настання страхової події (позначення з рискою над виразом) визначається за допомогою співвідношень:

$${}_j\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}\,{}_jA_x; \qquad {}_j\overline{A}^{1}_{\overline{x:n|}} = \frac{i}{\delta}\,{}_jA^{1}_{\overline{x:n|}};$$

де $\delta = \ln(1+i)$ — інтенсивність річної ставки i інвестиційного доходу.

Дійсна вартість страхових ануїтетів, які відстрочені на w років (позначення з бічним індексом $_{w|}$), визначається аналітично або за допомогою комутаційних чисел такими співвідношеннями:

$${}_{w|}a_x = v^w\,{}_wp_x\,a_{x+w}, \text{ або } \qquad {}_{w|}a_x = \frac{N_{x+w+1}}{D_x};$$

$${}_{w|}\ddot{a}_x = v^w\,{}_wp_x\,\ddot{a}_{x+w}, \text{ або } \qquad {}_{w|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+w}}{D_x};$$

$${}_{w|}a_{\overline{x:n|}} = v^w\,{}_wp_x\,a_{\overline{x+w:n|}}, \qquad \text{або} \qquad {}_{w|}a_{\overline{x:n|}} = \frac{N_{x+w+1} - N_{x+w+n+1}}{D_x};$$

$${}_{w|}\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = v^w\,{}_wp_x\,\ddot{a}_{\overline{x+w:n|}}, \qquad \text{або} \qquad {}_{w|}\ddot{a}_{\overline{x:n|}} = \frac{N_{x+w} - N_{x+w+n}}{D_x}.$$

Розрахунок нетто-премій за договорами страхування життя. Нетто-премії розраховуються на підставі принципу еквівалентності зобов'язань, що їх беруть страховик (страхові зобов'язання) та страхувальник (зобов'язання сплати страхових внесків) на час укладення договору страхування (принцип еквівалентності дійсних вартостей зобов'язань).

Наведені щойно співвідношення дають змогу обчислювати нетто-премії (у разі сплати премій пренумерандо) для договорів страхування життя, які враховують настання однієї, кількох або всіх зазначених страхових подій.

Розмір нетто-премії N за кожним договором страхування життя визначається співвідношенням

$$N = TS,$$

де T — нетто-тариф страхового внеску з одиниці страхової суми;

S — страхова сума за укладеним договором страхування життя.

Якщо умови договору страхування життя передбачають настання кількох страхових подій, нетто-премія за таким договором страхування розраховується як сума відповідних нетто-премій для кожної страхової події.

При визначенні нетто-премій актуарій прогнозує значення річної ставки i інвестиційного доходу залежно від терміну дії договору страхування. Розрахункове значення річної ставки i' інвестиційного доходу може коригуватися з урахуванням значення річної ставки інфляції f за формулою

$$i' = \frac{i - f}{1 + f} \approx i - f \ .$$

При розрахунку нетто-премії N лише на випадок дожиття застрахованої у віці x років особи до закінчення строку дії договору страхування (n — кількість років дії договору страхування) величина нетто-премії визначається пропорційно до величини страхової суми S:

- у разі сплати страхової премії одноразово:

$$N = {}_nE_x S\ ;$$

- у разі сплати річних страхових премій протягом перших обумовлених договором страхування k років:

$$N = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}} S, \quad k \le n.$$

При розрахунку нетто-премії лише на випадок настання j-ї страхової події нетто-премія пропорційна до страхової суми S, яка виплачується негайно після настання страхової події, і визначається співвідношеннями:

- при довічному страхуванні в разі сплати страхової премії одноразово:

$$N = {}_j\overline{A}_x S\ ;$$

- при довічному страхуванні в разі сплати річних страхових премій протягом перших обумовлених договором страхування k років:

$$N = \frac{{}_j\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}} S;$$

- при довічному страхуванні в разі сплати річних страхових премій довічно:

$$N = \frac{{}_j\overline{A}_x}{\ddot{a}_x} S\ ;$$

- при страхуванні на строк n років у разі сплати страхової премії одноразово:

$$N = {}_j\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}\ S\ ;$$

- при страхуванні на строк n років у разі сплати річних страхових премій протягом перших обумовлених договором страхування k років:

$$N = \frac{{}_j \overline{A}^{1}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}} S, \quad k \leq n.$$

При розрахунку нетто-премії на випадок настання страхової події «хвороба застрахованої особи» або страхової події «тимчасова непрацездатність застрахованої особи внаслідок нещасного випадку», коли умовами договору передбачається послідовність страхових виплат розміром $\overline{S}$ за кожний день хвороби (непрацездатності), нетто-премія визначається співвідношеннями:

- при довічному страхуванні в разі сплати страхової премії одноразово:

$$N = \overline{a}_x^{\,пр}\, \overline{S};$$

- при довічному страхуванні в разі сплати річних страхових премій протягом перших обумовлених договором страхування k років:

$$N = \frac{\overline{a}_x^{\,пр}}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}} \overline{S};$$

- при довічному страхуванні в разі сплати річних страхових премій довічно:

$$N = \frac{\overline{a}_x^{\,пр}}{\ddot{a}_x} \overline{S};$$

- при страхуванні на строк n років у разі сплати страхової премії одноразово:

$$N = \overline{a}^{\,пр}_{x:\overline{n|}}\, \overline{S};$$

- при страхуванні на строк n років у разі сплати річних страхових премій протягом перших обумовлених договором страхування k років:

$$N = \frac{\overline{a}^{\,пр}_{x:\overline{k|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}} \overline{S}; \quad k \leq n.$$

При розрахунку нетто-премії на випадок настання страхових подій «досягнення застрахованою особою пенсійного віку або віку, який визначено у договорі страхування», а також «смерті застрахованої особи» нетто-премія визначається через страхову суму S, яка виплачується в разі смерті застрахованої особи негайно, та через розмір R щорічної пенсії пренумерандо співвідношеннями:

- при довічному страхуванні особи у віці x років на випадок смерті та на випадок виплати довічної пенсії, починаючи з віку застрахованої особи $x + w$ років, у разі сплати страхової премії одноразово:

$$N = {}_0\overline{A}_x S + {}_w|\ddot{a}_x R;$$

- при страхуванні на строк n років застрахованої у віці x років особи на випадок смерті та на випадок виплати пенсії, починаючи з віку $x + w$ років до віку $x + n$ років, у разі сплати річних страхових премій протягом перших обумовлених договором страхування k років:

$$N = \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{x:k|}}} \left({}_0\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}} S + {}_w| \ddot{a}_{\overline{x:n-w|}} R \right).$$

Залежність нетто-тарифу від запланованої кількості договорів. Наведені формули розрахунку нетто-премій являють собою математичне сподівання виплат страховика і задовольняють резерви компанії за договорами страхування життя в разі багатьох (кількох тисяч) договорів. При плануванні меншої кількості договорів наведені формули слід коригувати з урахуванням середньоквадратичного відхилення ануїтетів виплат та платежів. Розглянемо, як це потрібно робити.

Тариф T_0 розрахованих нетто-премій збільшують на значення у ризикової надбавки ΔT так, щоб виконувалася рівність

$$T = T_0 + \Delta T.$$

Ризикова надбавка до нетто-тарифу визначається з урахуванням запланованої кількості N договорів страхування рівнем γ довірчої ймовірності ($\gamma \in [0,9;\ 0,99]$), квантилем нормального розподілу t_γ рівня γ і обчислюється за формулою

$$\Delta T = t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

де σ — стандартне відхилення тарифу розрахованої нетто-премії.

Стандартне відхилення $\sigma(T)$ залежить від дисперсії ануїтету виплат, нормується розміром ануїтету платежів і визначається для кожного типу договору страхування окремо:

- при довічному страхуванні лише на випадок настання j-ї страхової події для застрахованої у віці x років особи, якщо страхова премія сплачується одноразово і негайно виплачується одиниця страхової суми в разі настання страхової події:

$$\sigma(T) = \frac{\sqrt{{}^2_j\overline{A}_x - \left({}_j\overline{A}_x\right)^2}}{d},$$

де d — розмір дисконту, який визначається через річну ставку і інвестиційного доходу за формулою

$$d = \frac{i}{1+i};$$

- при довічному страхуванні лише на випадок настання j-ї страхової події для застрахованої у віці x років особи, якщо річні страхові премії сплачуються протягом перших обумовлених договором страхування k років і негайно виплачується одиниця страхової суми в разі настання страхової події:

$$\sigma(T)=\frac{\sqrt{{}_j^2\overline{A}_x-({}_j\overline{A}_x)^2}}{d\left(\ddot{a}_{\overline{x:k|}}\right)^2};$$

• при довічному страхуванні лише на випадок настання j-ї страхової події для застрахованої у віці x років особи, якщо річні страхові премії сплачуються довічно і негайно виплачується одиниця страхової суми в разі настання страхової події:

$$\sigma(T)=\frac{\sqrt{{}_j^2\overline{A}_x-({}_j\overline{A}_x)^2}}{d(\ddot{a}_x)^2};$$

• при страхуванні на строк n років лише на випадок настання j-ї страхової події для застрахованої у віці x років особи, якщо страхова премія сплачується одноразово і негайно виплачується одиниця страхової суми в разі настання страхової події:

$$\sigma(T)=\frac{\sqrt{{}_j^2A^1_{\overline{x:n|}}-\left({}_jA^1_{\overline{x:n|}}\right)^2}}{d};$$

• при страхуванні на строк n років лише на випадок настання j-ї страхової події для застрахованої у віці x років особи, якщо річні страхові премії виплачуються протягом перших обумовлених договором страхування k років і негайно виплачується одиниця страхової суми в разі настання страхової події:

$$\sigma(T)=\frac{\sqrt{{}_j^2A^1_{\overline{x:n|}}-({}_jA^1_{\overline{x:n|}})^2}}{d(\ddot{a}_{\overline{x:k|}})^2};$$

• при страхуванні лише на випадок дожиття застрахованої у віці x років особи до закінчення терміну дії договору страхування (n — кількість років дії договору страхування), коли страхова премія сплачується одноразово:

$$\sigma(T)=\frac{\sqrt{{}_n^2E_x-({}_nE_x)^2}}{d};$$

• при страхуванні лише на випадок дожиття застрахованої у віці x років особи до закінчення терміну дії договору страхування (n — кількість років дії договору страхування) в разі сплати річних страхових премій протягом перших обумовлених договором страхування k років:

$$\sigma(T)=\frac{\sqrt{{}_n^2E_x-({}_nE_x)^2}}{d(\ddot{a}_{\overline{x:k|}})^2}.$$

Аналогічно стандартне відхилення нетто-тарифу визначається для кожного розглянутого типу договору страхування.

Приклад. Розглянемо основну частину T_0 та можливі (відносно запланованої кількості договорів страхування) ризикові надбавки ΔT до нетто-тарифу T при укладанні договору довічного страхування життя чоловіка у віці 45 років лише на випадок смерті, якщо сплачуються перші 5 річних страхових премій і негайно виплачується одиниця страхової суми при настанні страхової події.

Кількість N договорів страхування	Нетто-тариф T з урахуванням ризикової надбавки ΔT
1	0,551609
10	0,241453
25	0,188733
50	0,162162
100	0,143373
500	0,118299
1000	0,112357
5000	0,104429
10 000	0,102549
100 000	0,099448
1 000 000	0,098467
. . . .	. . . .
Розрахований нетто-тариф (T_0)	0,0980134

Для розрахунків виберемо значення ставки та інвестиційного доходу таким, що дорівнює 4 % (i = 0,04), і візьмемо рівень довірчої ймовірності $\gamma = 0{,}95$, так що $t_\gamma = 1{,}645$.

На підставі даних таблиці дожиття та смертності в Україні за 1994, 1995 рр., за формулою

$$N = \frac{{}_j\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{k|}}} \cdot S$$

при $S = 1$ обчислюємо нетто-тариф $T_0 = 0{,}0980134$.

Згідно з формулою

$$\sigma(T) = \frac{\sqrt{{}^2_j\overline{A}_x - ({}_j\overline{A}_x)^2}}{d\left(\ddot{a}_{x:\overline{k|}}\right)^2};$$

залежність нетто-тарифу від запланованої кількості договорів страхування

Практичне заняття № 13. Побудова моделей довгострокового страхування

Мета: Набути навички та вміння розраховувати розміри ставок та тарифів моделей довгострокового страхування.

Завдання 13.1. Припустимо, що тривалість життя описується моделлю де Муавра з граничним віком 120 років, а ефективна річна процентна ставка дорівнює 15%. Підрахуйте нетто-премії для людини у віці 40 років, якщо укладається договір:

а) довічного страхування;

б) 5-річного змішаного страхування життя;

в) довічного страхування, відстроченого на 2 роки;

г) довічного страхування з безперервно збільшується страховою сумою.

Рішення.

Як ми знаємо, залишкове час життя застрахованого має рівномірний розподіл на проміжку $(0, \omega - x) = (0{,}80)$, значить, функція щільності має вигляд:

$$f_{40}(t) = \frac{1}{80},\ 0 < t < 80.$$

Інтенсивність відсотків $\delta = \ln(1+i) \approx 13{,}9762\%$, коефіцієнт дисконтування $v = 1/(1+i) \approx 86{,}9565\%$. Після цих попередніх зауважень приступимо до розрахунків:

а) для довічного страхування маємо

$$A_{40} = \int_0^{80} v^t \frac{1}{80} dt = \frac{1 - v^{80}}{80\delta} = 8{,}944\%.$$

б) для змішаного 5-річного страхування

$$\overline{A}_{40:\overline{5}|} = \int_0^5 v^t \frac{1}{80} dt + v^5 \int_5^{80} \frac{1}{80} dt = \frac{1 - v^{80}}{80\delta} = 51{,}107\%.$$

в) для довічного, відстроченого на 2 роки

$${}_{2|}\overline{A}_{40} = \int_2^{80} v^t \frac{1}{80} dt = \frac{v^2 - v^{80}}{80\delta} = 6{,}763\%.$$

г) для довічного, з безперервно збільшуваною страховою сумою

$$(\overline{IA})_{40} = \int_0^{80} t v^t \frac{1}{80} dt = \frac{1 - (1 + 80\delta) v^{80}}{80\delta^2} = 63{,}982\%.$$

Завдання 13.2. Страхова компанія уклала 10000 договорів довічного страхування. Припустимо, що залишкове час життя кожного з застрахованих характеризується інтенсивністю смертність $\mu = 0{,}04$, яка не змінюється з плином часу, а інтенсивність відсотків $\delta = 6\%$.

Підрахуйте величину премії, яка гарантувала б 95% ймовірність виконання компанією своїх зобов'язань.

Рішення.

Підрахуємо спочатку нетто-премію. Відповідно до формули $\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t f_x(t)dt = \frac{1}{v^x s(x)} \int_x^\infty v^t f(t)dt$, де $f_x(t)$ - щільність залишкового часу життя. Оскільки нам відома інтенсивність смертності, то ми можемо знайти функцію виживання

$$s_x(t) = e^{-\mu t},$$

що, в свою чергу, дає формулу для щільності:

$$f_x(t) = \mu e^{-\mu t}.$$

Тепер ми можемо підрахувати нетто-премію:

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty \mu e^{-(\mu+\delta)t} dt = \frac{\mu}{\mu+\delta} = 0{,}4.$$

другий момент

$$E\overline{Z}_x^2 = {}^2\overline{A}_x = \frac{\mu}{\mu+\delta} = 0{,}25,$$

отже, дисперсія

$$D\overline{Z}_x = 0{,}25 - 0{,}16 = 0{,}09.$$

Тепер відносна страхова надбавка дорівнює:

$$\theta = x_\alpha \frac{\sqrt{D\overline{Z}_x}}{\overline{A}_x \sqrt{N}} = 1{,}645 \cdot \frac{\sqrt{0{,}09}}{0{,}4\sqrt{10000}} = 1{,}23375\%.$$

Відповідно премія є

$$p = \overline{A}_x (1+\theta) = 40{,}4935\%.$$

Нагадаємо, що величина страхової суми b використовується нами як одиниця вимірювання грошових сум, так що, якщо, наприклад $b = 100000$, грн., то $p = 40493{,}5$ грн.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Зубченко В.П. Математичні основи страхування життя. К., ВПЦ «Київський університет», 2016. URL: http://www.library.univ.kiev.ua/ukr/elcat/new/detail.php3?doc_id=1707723 (дата звернення 06.05.2020).
2. Оленко А.Я. Лекції з актуарної математики. URL: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/Olenko_actuarial_mathematics.rar (дата звернення 12.05.2020).
3. Ямненко Р.Є. Актуарна математика. II семестр 2020. URL: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/am_lecture-2.pdf (дата звернення 14.05.2020).
4. Оленко А.Я. Збірник задач з актуарної математики. – К., ВПЦ «Київський університет», 2005. URL: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/Book8.pdf (дата звернення 13.05.2020).
5. Бауерс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж., Актуарная математика. URL: http://probability.univ.kiev.ua/userfiles/yamnenko/Actuar_Bible.pdf (дата звернення 07.05.2020).

Навчальне видання

АКТУАРНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 2,05.
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.