МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕКОНОМІКИ ТА УПРАВЛІННЯ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для здобувачів вищої освіти
освітнього ступеня «Магістр»
спеціальності 208 «Агроінженерія»
для денної та заочної форм навчання

Миколаїв
2020

УДК 519.673:004.382.7
М34

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 23 грудня 2020 року, протокол № 4.

Укладачі:
О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор
А. М. Могильницька – канд. фіз.-мат. наук, в.о. доцента
В.П. Клочан– канд. екон. наук, доцент
І.В. Клочан – д-р екон. наук, доцент
С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент
І. І. Хилько – старший викладач
В.О. Крайній – канд. екон. наук, в.о. доцента

Рецензенти:
І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету
А.В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Чорноморського національного університету імені Петра Могили

© Миколаївський національний аграрний університет, 2020

ЗМІСТ

Передмова 4

Тема 1. Вступ. основні поняття моделювання. математичне моделювання 5

Тема 2. Технічна система як об’єкт математичного моделювання……18

Тема 3. Загальна задача лінійного програмування та методи її розвязання 31

Тема 4. Транспортна задача..... 44

Тема 5. Економіко-математичні моделі для розрахунку оптимального складу машино-тракторного парку та його використання 59

Тема 6. Дробово-лінійне програмування..... 69

Тема 7. Цілочислове програмування..... 71

Тема 8. Нелінійне програмування..... 76

Тема 9. Елементи теорії ігор 84

Питання для самостійної роботи 99

Рекомендована література.....102

ПЕРЕДМОВА

Моделювання є важливим засобом розв’язання багатьох технічних і технологічних завдань. Для інженера агроінженерії особливого значення набуває математичне моделювання. Згідно з освітньою програмою підготовки магістрів з агроінженерії до переліку нормативних дисциплін циклу професійно-практичної та наукової дисциплін підготовки майбутніх фахівців входить «Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ». Навчальна дисципліна покликана сформувати у здобувачів вищої освіти систему знань з методології та інструментарію побудови й використання різних типів математичних моделей. Тому виникає необхідність у розкритті сутності математичного моделювання.

Одним з головних напрямків науково-технічного прогресу протягом кількох десятиріч є розвиток методів та засобів інформатики та обчислювальної техніки. Використання методів математичного моделювання і комп’ютерного розв’язання інженерних та наукових задач дозволяє значно підвищити ефективність процесів проектування та управління. Впровадження персональних комп’ютерів, комп’ютерних інформаційних мереж, побудова та розвиток INTERNET, широке та різноманітне використання методів математичного моделювання призвели до розширення як практичної, так і теоретичної бази комп’ютерної математики. Математичне комп’ютерне моделювання стало головним засобом дослідження складних процесів і систем, на якому базуються сучасні підходи до проектування, оптимізації та управління в різних галузях науки і техніки. Обчислювальна математика стала основою для реалізації та комп’ютерного розрахунку методів математичного моделювання.

Метою даних рекомендацій є ознайомлення ЗВО інженерно-технічних спеціальностей з основними поняттями математичного моделювання технічних та технологічних систем і процесів та методи розв’язання на комп’ютерах сучасних задач обчислювальної математики, що виникають в процесі дослідження та проектування технічних систем.

ТЕМА 1. ВСТУП. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МОДЕЛЮВАННЯ. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

ПЛАН

1.1. Поняття моделі та моделювання
1.2. Класифікація видів моделювання
1.3. Поняття математичного моделювання
1.4. Принципи і етапи побудови математичних моделей
1.5. Принципи моделювання
1.6. Засоби математичного моделювання

1.1. ПОНЯТТЯ МОДЕЛІ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

Будь-які два об'єкти О1 та О2 людської діяльності в чомусь подібні, а в чомусь різні. Заміщення об'єкта О1 об'єктом О2 з метою вивчення найважливіших рис О1 за допомогою об'єкту О2 називається ***моделюванням*** об'єкта О1 об'єктом О2. При цьому об'єкт О1 називають ***оригіналом*** (або ***натурою***), а об'єкт О2 – ***моделлю***.

Таким чином, ***модель*** – це замісник оригіналу, який дозволяє вивчити або зафіксувати деякі важливі риси оригіналу.

Приклад 1.1. При проектуванні літаків, ракет, кораблів, автомобілів для дослідження залежності сили опору середовища рухові об'єкта від його швидкості (що практично неможливо визначити аналітично) використовують спосіб продувки зменшеної моделі транспортного засобу в аеродинамічній трубі. Заміщення оригінала моделлю в цьому випадку дозволяє зафіксувати важливі властивості оригінала та дослідити їх.

Приклад 1.2. При дослідженні роботи електричного генератора на споживача підключити реального споживача до генератора практично неможливо, тому споживача замінюють як правило послідовним підключенням опору та конденсатора. Тут має місце лише фіксація найбільш важливих рис оригіналу.

Історію вживання терміну модель і практичного використання методу моделювання можна умовно поділити на чотири етапи:

- на першому етапі моделювання застосовувалось без теоретичного обґрунтування в будівництві та архітектурі для дослідження споруд;
- на другому етапі формувались та ефективно використовувались теоретичні основи моделювання (у працях Галілео Галілея та Ісаака Ньютона в XVII – XVIII ст.);
- третій етап характеризується детальним дослідженням методу моделювання;
- четвертим є етап кібернетичного або комп'ютерного моделювання.

Як моделі, що заміщують оригінали, можуть використовуватися зокрема засоби спілкування людей (мова, писемність), засоби пізнання матеріального світу (модель сонячної системи, модель будови атома), засоби навчання та тренування (тренажери для льотчиків, водіїв), засоби прогнозування поведінки оригіналів в різних умовах (наприклад, для підбору параметрів, що відповідають оптимальному функціонуванню роботи приладу в певних умовах).

1.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ВИДІВ МОДЕЛЮВАННЯ

Єдина класифікація видів моделювання неможлива через багатозначність поняття моделі в науці, техніці, суспільстві. Ми розглянемо чотири способи класифікації.

Моделювання можна поділити на *детерміноване і ймовірнісне*. Детерміноване моделювання відображає процеси, у яких припускається відсутність випадкових впливів. Імовірнісне (стохастичне) моделювання враховує ймовірнісні процеси і події.

Залежно від того, яким чином відтворюються в часі стани моделі, розрізняють *неперервне, дискретне і змішане* (дискретно-неперервне) моделювання.

Неперервні моделі логічно використовувати для моделювання неперервних систем, а дискретні – для дискретних. Проте часто бувають випадки, коли дискретні системи успішно моделюють з допомогою неперервних моделей, а неперервні – з допомогою дискретних. Об'єднуючи попередні класифікації, отримуємо неперервно-детерміноване, дискретно-детерміноване, неперервно-ймовірнісне і дискретно-ймовірнісне моделювання.

Моделювання буває *статичним і динамічним*. Статичне моделювання описує стан об'єкта у фіксований момент часу, а динамічне – зміну станів об'єкта в часі.

Моделювання ділять також на *уявне і реальне*. Уявне моделювання в свою чергу ділять на наочне, символічне і математичне, а реальне – на натурне і макетне (рис. 1).

Уявне моделювання (його називають також абстрактним) є єдиним способом моделювання систем, які не можуть бути вивчені безпосередньо. Зокрема, нереально поставити експеримент по прямому дослідженню зірок чи планет. У цивілізованих країнах неприпустимо експериментувати з економікою чи здоров'ям людей. Часто безпосередні експерименти неможливі у зв'язку зі складністю, великими матеріальними затратами, унікальністю системи, тривалістю експерименту тощо. У таких випадках уявним моделям немає альтернативи. При наочному моделюванні на базі уявлень людини про реальні системи створюються наочні моделі, які відображають явища і процеси, що відбуваються в системі. Прикладами таких моделей є навчальні плакати, рисунки, графіки, схеми, діаграми, анімація. З допомогою спеціальних комп'ютерних програм можна створювати тривимірні моделі. До наочного моделювання також відносять створення макетів, які відобра- жають окремі сторони об'єкта. Детальніші макети відносять до макетного моделювання.

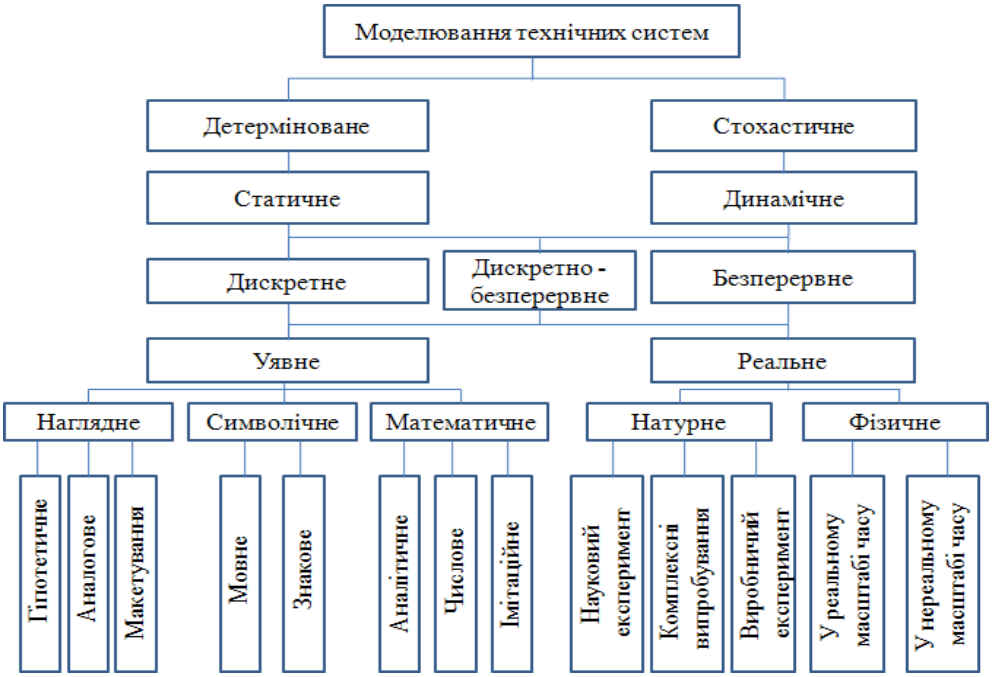


Рисунок 1. Класифікація методів моделювання технічних систем

Символьне моделювання є штучним процесом створення логічного об’єкта, що замінює реальний і виражає його основні властивості з допомогою певної системи слів чи знаків. Символічне моделювання можна поділити на мовне і знакове. В основі мовного моделювання лежить деякий тезаурус.

Під тезаурусом розуміють словник, який відображає зв’язки між словами чи іншими елементами даної мови, причому кожному слову у тезаурусі відповідає єдине поняття.

Якщо ввести умовні позначення окремих понять, тобто знаки, а також певні операції між цими знаками, то можна реалізувати знакове моделювання і з допомогою цих знаків складати ланцюжки слів і речень.

При реальному моделюванні досліджується реальний об’єкт, його частина або подібний до нього об’єкт. Реальне моделювання ділять на натурне і макетне.

Натурним моделюванням називають проведення дослідження на реальному об’єкті з наступною обробкою результатів. Методами натурного моделювання є науковий експеримент, комплексні випробування і виробничий експеримент.

Науковий експеримент характеризується використанням різноманітних засобів обробки інформації і можливістю втручання людини в процес проведення експерименту. У ході експерименту здійснюються збурювальні впливи на процес функціонування об’єкта, при цьому можуть виявитись окремі критичні ситуації і визначитись межі стійкості процесу. Комплексні випробування здійснюють шляхом багаторазових повторень випробувань об’єктів. У цьому випадку моделювання зводиться до обробки й узагальнення інформації про помічені закономірності. Виробничий експеримент полягає в узагальненні досвіду, накопиченого під час виробничого процесу.

Іншим видом реального моделювання є макетне моделювання, яке відрізняється від натурного тим, що моделювання здійснюється на об’єктах, які зберігають природу явищ і є подібними до реальних систем. Часто такими об’єктами є макети, які відтворюють модельовану систему в певному масштабі. Найпростіші макетні моделі є зменшеними копіями реальних систем. Наприклад, можна створити макет гідротехнічних споруд і досліджувати його в умовах, близьких до реальних. Інші приклади макетного моделювання – дослідження крила літака або лісу, утвореного зі штучних дерев, в

аеродинамічній трубі, дослідження моделі корабля в басейні. Макетне моделювання може відбуватись у реальному і модельному часі. Наприклад, якщо дослідження поведінки об'єкта в аеродинамічній трубі здійснюють у реальному часі, то моделювання поведінки гірських систем можливе лише в модельному часі.

1.3. ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

У практичній діяльності інженера-механіка як в галузі виробництва, так і в галузі проектування або наукової діяльності в основному використовується моделювання з використанням методів та засобів математики, тому подальша увага буде сконцентрована саме на математичному моделюванні.

Математичне моделювання - один з найбільш універсальних видів моделювання, що ставить у відповідність модельованому фізичному процесу систему математичних співвідношень, розв'язання якої дозволяє отримати відповідь на питання про поведінку об'єкту без створення фізичної моделі, яка часто є дорогою і малоефективною. Отже, *математичною моделлю* називається сукупність математичних співвідношень, рівнянь, нерівностей, що описують основні закономірності, властиві досліджуваному процесу, об'єкту або системі. При цьому використовують фундаментальні положення та закони математики, що описують явище, систему чи пристрій, що моделюються, на деякому рівні ідеалізації.

Кожна математична модель описує реальний об'єкт з деякою мірою наближення. Дослідження моделі дає можливість встановити характеристики реального об'єкта. Математичне моделювання є одним з основних способів моделювання систем. Математичне моделювання ділять на аналітичне, імітаційне і комбіноване.

При *аналітичному моделюванні* глобальні рівняння системи, які описують її закон функціонування, записуються у вигляді деяких аналітичних співвідношень (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних, інтегродиференціальних та інших рівнянь чи їхніх систем) і деяких додаткових умов (початкових, крайових, багатоточкових умов чи деяких обмежень). У цьому випадку моделюється переважно функціональний аспект системи. Найчастіше зустрічаються диференціальні моделі, в яких реальні об'єкти описуються з допомогою звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь з частинними похідними.

Аналітична модель досліджується кількома методами: аналітичними, числовими або якісними.

Аналітичні методи дозволяють отримати в загальному вигляді залежності, що пов'язують шукані характеристики з початковими умовами, параметрами і змінними станами моделі.

Числові методи використовують тоді, коли не вдається знайти розв'язок рівняння чи системи рівнянь аналітичними методами. У цьому випадку знаходять наближений розв'язок у числовій формі.

Якісні методи також використовуються у тому випадку, коли, не маючи розв'язку в аналітичному вигляді, можна знайти деякі властивості розв'язку (наприклад, оцінити стійкість чи продовжуваність розв'язку). Якісні методи часто використовують разом з числовими.

Якщо задачу можливо розв'язати і аналітично і чисельно, то віддають перевагу аналітичному методу. Деколи аналітичний розв'язок дозволяє отримати висновки якісного характеру, які неможливо зробити на основі числового розв'язку.

При імітаційному моделюванні математичною моделлю є, як правило, комп'ютерна програма, яка відтворює поведінку системи в часі, причому імітуються елементарні явища, які складають процес, зі збереженням їхньої логічної структури і послідовності протікання. Це дозволяє по вхідним даним отримати інформацію про стани системи в певні моменти часу та оцінити характеристики системи. У наш час імітаційне моделювання є дуже поширеним у зв'язку з активним розвитком комп'ютерної техніки.

Основною перевагою імітаційного моделювання порівняно з аналітичним є можливість розв'язування більш складних задач, для яких не вдається побудувати систему рівнянь, що їх описують, або не вдається її розв'язати. Імітаційні моделі дозволяють досить просто враховувати такі фактори, як наявність дискретних і неперервних елементів, нелінійні характеристики елементів системи, випадкові впливи та інше, що часто створює труднощі при аналітичних дослідженнях.

У рамках імітаційного моделювання виділяють метод Монте-Карло, метод мереж Петрі, метод клітинних автоматів, метод нейронних мереж та інші.

Метод Монте-Карло використовується для моделювання систем з випадковими впливами, ймовірнісні характеристики яких відомі, і полягає в багаторазовому відтворенні моделі з наступною обробкою

інформації методами математичної статистики. Метод мереж Петрі використовують для імітаційного та аналітичного моделювання дискретних технологічних процесів. Клітинні автомати дозволяють моделювати різноманітні процеси у дискретному просторі і часі з випадковими впливами чи без них.

Метод нейронних мереж полягає в тому, що створену нейронну мережу по тестовим прикладам навчають діяти так, як діє реальна система. Процес цей досить трудомісткий. Навчена нейронна мережа буде працювати так, як система, імітуючи її. До речі, нейронна мережа не містить фізичних нейронів. Чи при її програмній реалізації, чи при апаратній реалізації нейрони моделюються кількома елементарними об'єктами. З'єднання нейронів задається певним чином при створенні мережі.

Імітаційна модель може бути написана на універсальних мовах програмування, таких як Delphi, C++, але краще використовувати спеціальні мови і середовища моделювання, як- от: GPSS, AnyLogic, Arena, AweSim, PowerSim, SIMSCRIPT, Extend тощо.

Комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання дозволяє об'єднати переваги аналітичного й імітаційного моделювання. Спочатку здійснюється розбиття процесу функціонування об'єкта на складові підпроцеси. Там, де це можливо, використовуються аналітичні моделі, а для інших підпроцесів будуються імітаційні моделі.

1.4. ПРИНЦИПИ І ЕТАПИ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Математичне моделювання є скоріше мистецтвом, ніж чіткою і завершеною теорією. Тут дуже великою є роль досвіду, інтуїції та інших інтелектуальних якостей людини. Тому неможливо скласти формалізовану інструкцію, яка б визначила, як повинна будуватись модель тієї чи іншої системи. Тим не менше відсутність точних правил не заважає досвідченим спеціалістам будувати вдалі моделі. Розглянемо основні принципи побудови моделей.

1. Достатність інформації. Якщо інформації надто мало, то модель побудувати не вдасться, якщо все відомо, то немає потреби в моделюванні. Існує критичний рівень достатності інформації для моделювання.

2. Адекватність. Цей принцип передбачає відповідність

моделі меті дослідження і реальній системі.

3. Відповідність моделі розв’язуваній задачі. Модель має будуватись для розв’язування певного класу задач чи конкретної задачі дослідження системи. Спроби створення універсальної моделі, спрямованої на розв’язування великої кількості різноманітних задач, призводять до такого ускладнення, що модель виявляється практично непридатною. Досвід показує, що при розв’язуванні кожної конкретної задачі треба мати свою модель, яка відображатиме ті аспекти системи, які є найважливішими в цій задачі. Цей принцип тісно пов’язаний з принципом адекватності.

4. Спрощення при збереженні істотних властивостей. Модель має бути в деяких відношеннях простішою за прототип – у цьому сенс моделювання. Чим складнішою є система, що розглядається, тим по можливості простішим має бути її опис, який би зумисно підкреслював типові (суттєві в цій задачі) й ігнорував менш суттєві властивості. Цей принцип можна ще назвати абстрагуванням від другорядних деталей.

5. Відповідність між потрібною точністю результатів моделювання і складністю моделі. Моделі по своїй природі є наближеними. Для підвищення точності моделі її потрібно деталізувати, що ускладнює модель. Тому потрібно шукати певний компроміс між точністю і складністю моделі, що часто досягається методом спроб і помилок.

6. Баланс похибок різних видів (моделювання, вхідних даних і заокруглень). Зокрема, точність моделі не може бути більшою за точність вхідних даних.

7. Блочна будова. При виконанні цього принципу полегшується розробка складних моделей і з’являється можливість використання накопиченого досвіду і готових блоків з мінімальними зв’язками між ними.

Практичні рекомендації по спрощенню моделей.

Зменшення кількості змінних у моделі, тобто деякі змінні параметри розглядаються як сталі.

Зміна природи змінних параметрів: дискретні параметри замінюють неперервними або навпаки. Наприклад, кількість живих організмів у популяції можна вважати неперервною функцією часу або час вважати дискретним.

Зміна функціональної залежності між змінними: нелінійна залежність часто замінюється лінійною. Наприклад, замість

нелінійного диференціального рівняння $x + k \sin x = 0$, яке описує коливання математичного маятника, розглядають лінійне рівняння $x + kx = 0$, яке наближено описує малі коливання математичного маятника.

Зміна обмежень: додавання, вилучення чи їхня модифікація.

1. Етапи побудови математичної моделі:
2. Формулювання проблеми та змістова постановка задачі.
3. Створення концептуальної моделі.
4. Формалізація.
5. Перевірка адекватності моделі.
6. Дослідження моделі.
7. Аналіз результатів моделювання.
8. Оформлення результатів дослідження.

На першому етапі визначаються мета і завдання моделювання, ставиться задача. На другому етапі формується уявлення про систему: здійснюється визначення сукупності елементів, зв'язків між ними, можливих станів кожного елемента тощо.

На етапі формалізації обирається спосіб математичного моделювання і розробляється сама модель. На цьому етапі задаються диференціальні чи інші рівняння, які описують процес, або складається комп'ютерна програма, створюється мережа Петрі чи використовуються інші способи для моделювання системи.

На етапі перевірки адекватності моделі здійснюється порівняння отриманої моделі з реальною системою. Адекватність перевіряється порівнянням результатів моделювання з результатами експерименту над реальною системою при однакових умовах. Модель завжди лише приблизно відповідає реальній системі, абсолютно адекватних моделей не існує. Важливою є відповідність моделі конкретній меті дослідження. Для оцінки адекватності бажано залучати фахівців, які не брали участь у розробці моделі. За результатами перевірки адекватності приймається рішення про необхідність коригування або оптимізації моделі.

Під час дослідження моделі шукають і досліджують аналітичний чи числовий розв'язок задачі при аналітичному моделюванні або планують і проводять комп'ютерний експеримент з моделлю для досягнення поставлених цілей. Далі аналізують і оцінюють результати моделювання. Наводять результати у вигляді аналітичних функцій, графіків, таблиць. За отриманими результатами формулюють висновки і приймають рішення.

1.5. ПРИНЦИПИ МОДЕЛЮВАННЯ

Моделювання базується на декількох основоположних принципах.

Принцип інформаційної достатності. При повній відсутності інформації про досліджуваний об'єкт побудова його моделі неможливо. З іншого боку, за наявності повної інформації про об'єкт побудова його моделі не має сенсу. Існує певний рівень апріорної інформації про об'єкт, при досягненні якої може бути побудована його адекватна модель.

Принцип здійсненності. Створювана модель повинна забезпечувати досягнення поставленої мети досліджуваного з ймовірністю, що істотно відрізняється від нуля.

Принцип множинності моделей. Даний принцип є ключовим. Мова йде про те, що створювана модель повинна відображати в першу чергу ті властивості реальної системи, які цікавлять дослідника. Відповідно, при використанні будь-якої конкретної моделі пізнаються лише деякі сторони реальності. Для більш повного її дослідження необхідний ряд моделей, що дозволяє з різних сторін і з різним ступенем деталізації розглянути досліджуваний об'єкт.

Принцип агрегування. У більшості випадків складну систему можна уявити що складається з агрегатів (підсистем), для адекватного математичного опису яких виявляються придатним деякі стандартні математичні схеми.

Принцип параметризації. Цей принцип означає, що модель будується у вигляді відомої системи, параметри якої невідомі.

1.6. ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Математичне моделювання суспільних, економічних, біологічних та фізичних явищ, об'єктів, систем та різних пристроїв – важливий засіб пізнання природи та проектування доволі різноманітних систем та пристроїв. Відомими є приклади ефективного використання моделювання при створенні ядерних технологій, авіаційних та аерокосмічних систем, в прогнозуванні атмосферних та океанічних явищ, погоди тощо.

Однак для таких сфер моделювання частіше за все потрібні суперкомп'ютери та роки роботи великих груп вчених для підготовки даних для моделювання та його відпрацювання.

Між тим математичне моделювання на рівні рішення більш простих задач, наприклад, в галузі механіки, електротехніки, автоматики, електроніки та радіотехніки, як для потреб виробництва, так і для потреб проектування чи наукових досліджень в наш час стало доступним багатьом користувачам сучасних ПК. А використання узагальнених моделей дало можливість моделювати досить складні системи: систему управління, електроенергетичних систем або промислових комплексів.

Існує досить багато програмних пакетів, які дозволяють більш легко проводити моделювання різноманітних систем та пристроїв. Для здійснення математичних досліджень та розрахунків зокрема використовуються пакети Mathematica, Maple, Mathcad, для моделювання електронних пристроїв – EWB, для моделювання систем управління та електротехнічних систем – VisSim, для наукових досліджень та для програмування робото технічних систем – LabView, але найбільше розповсюдження практично у всіх прикладних галузях отримав програмний пакет MATLAB, що має в своєму складі багато спеціалізованих за окремими напрямками чи галузями програмних пакетів.

При дослідженні систем автоматичного регулювання, обчислювальних математичних задач, найбільш ефективним є використання програмної системи **Matlab** з широким класом предметно-орієнтованих бібліотек (toolbox) та інструментом візуального моделювання Simulink. У системі MatLab також існують широкі можливості для програмування. Для візуалізації моделювання система MatLab має бібліотеку Image Processing Toolbox, що забезпечує широкий спектр функцій, що підтримують візуалізацію проведених обчислень безпосередньо із середовища MatLab. Систему MatLab можна використовувати для обробки зображень, сконструювавши власні алгоритми, які будуть працювати з масивами графіків як з матрицями даних. Оскільки мова MatLab оптимізована для роботи з матрицями, у результаті забезпечується простота використання, висока швидкість і економічність проведення операцій над зображеннями.

Серед інших бібліотек системи MatLab можна також відзначити System Identification Toolbox – набір інструментів для створення математичних моделей динамічних систем, заснованих на спостережуваних вхідні/вихідних даних. Особливістю цього інструменту є наявність гнучкого користувацького інтерфейсу, що

дозволяє організувати дані й моделі. Бібліотека System Identification Toolbox підтримує як параметричні, так і непараметричні методи. Інтерфейс системи полегшує попередню обробку даних, роботу з ітеративним процесом створення моделей для одержання оцінок і виділення найбільш значимих даних. Що стосується математичних обчислень, то MatLab надає доступ до величезної кількості підпрограм, що містяться в бібліотеці NAG Foundation Library компанії Numerical Algorithms Group Ltd (інструмент має сотні функцій з різних областей математики, і багато з цих програм були розроблені широко відомими у світі фахівцями). Це унікальна колекція реалізацій сучасних чисельних методів комп'ютерної математики, створених за останні три десятки років. Лише додану до системи велику кількість документації цілком можна розглядати як фундаментальний багатотомний електронний довідник по математичному забезпеченню. Сьогодні система MatLab широко використовується в техніці, науці та освіті, але все-таки вона більше підходить для аналізу даних і організації обчислень, ніж для чисто математичних викладень.

Для візуального моделювання та моделювання сумісно з реальною апаратурою більш зручним є програмний пакет VisSim.

Аналітичні перетворення дозволяють виконувати більшість математичних програмних продуктів MathCad, Mathematica, Maple. З цих трьох поширених математичних пакетів, найбільш потужним є Maple. **Maple** надає зручне середовище для комп'ютерних експериментів. Пакет дозволяє створювати інтегровані середовища за участю інших систем і універсальних мов програмування високого рівня. Коли розрахунки зроблені й потрібно оформити результати, то можна використовувати засоби цього пакета для візуалізації даних і підготовки ілюстрацій для публікації. Робота проходить інтерактивно – користувач вводить команди й відразу бачить на екрані результат їхнього виконання. При цьому пакет Maple зовсім не схожий на традиційне середовище програмування, де потрібна тверда формалізація всіх змінних і дій з ними. Тут же автоматично забезпечується вибір типів змінних і перевіряється коректність виконання операцій, так що в загальному випадку не потрібно опису змінних і строгої формалізації запису. Ядро символьних обчислень Maple включено до складу цілого ряду систем комп'ютерної математики – від систем для широкого кола користувачів типу

MathCad до однієї із кращих систем для чисельних розрахунків і моделювання MatLab.

На відміну від потужного та орієнтованого на високоефективні обчислення при аналізі даних пакета MatLab, програма **MathCad** – це, скоріше, редактор математичних текстів із широкими можливостями символьних обчислень і прекрасним інтерфейсом. MathCad не має мови програмування як такої, а можливості символьних обчислень запозичений з пакета Maple. Проте інтерфейс програми MathCad дуже простий, а можливості візуалізації широкі. Всі обчислення тут здійснюються на рівні візуального запису виразів у загальновживаній математичній формі. Пакет має гарні підказки, докладну документацію, цілий ряд додаткових модулів та вбудованих функцій.

Звичайно, кожен з математичних пакетів має свої переваги та недоліки та є зручнішим для розв’язання конкретних завдань. В даній книзі більш детально зосереджено увагу на системах MatLab та MathCad, які орієнтовані на різні типи задач і дають можливість розв’язання різних за складністю завдань.

Лекція 2

ТЕМА 2. ТЕХНІЧНА СИСТЕМА ЯК ОБ'ЄКТ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

ПЛАН

2.1. Поняття про терміни «технічна система» та «технологічна система»

2.2. Властивості та ознаки технічних (технологічних) систем

2.3. Основні етапи математичного моделювання технічних (технологічних) процесів

2.4. Структура математичної моделі

2.5. Математичні моделі в інженерних дисциплінах

2.6. Використання результатів математичного моделювання

2.1. ПОНЯТТЯ ПРО ТЕРМІНИ «ТЕХНІЧНА СИСТЕМА» ТА «ТЕХНОЛОГІЧНА СИСТЕМА»

Технічна система – це система, яка має хоча б один штучний елемент.

Технічні системи можуть бути **процесами і об'єктами** залежно від характеру зв'язків між елементами системи. *Технічна система об'єкт* – це система, що складається з матеріальних тіл, певним чином пов'язаних в просторі. *Технічна система процес* – це система, що складається з дій (операцій), певним чином взаємопов'язаних в часі.

Різновид технічної системи-процесу – технологічна система. В науково-технічній літературі технологічна система – це сукупність фізико-хімічних процесів і засобів для їх реалізації. Для поняття технологічної системи застосовують і більш вузьке поняття – об'єкт технології.

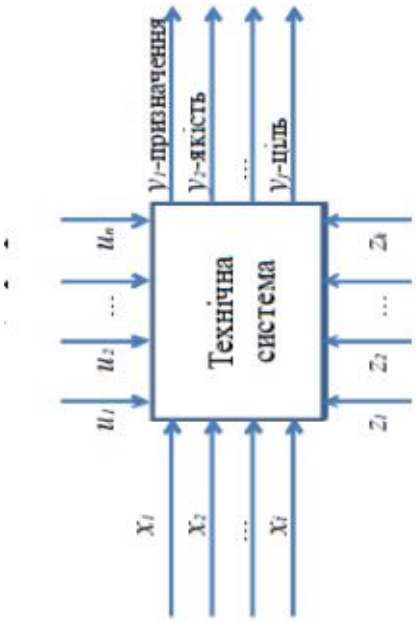
Об'єктом технології (технологічною системою) будемо називати типовий *технологічний процес*, що протікає в апараті визначеної конструкції (простий об'єкт), або технологічну ланку, що охоплює кілька процесів й апаратів.

Рівень складності технічної системи визначається задачею, що виконується у кожному конкретному випадку. Задача навчального процесу (використовуючи математичний апарат) – навчитися

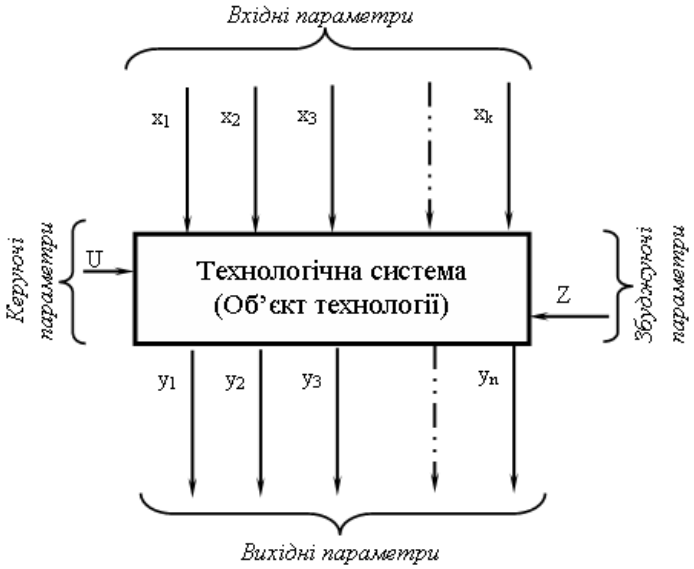
моделювати технічну систему з метою подальшого управління, автоматизації та вирішення поставлених задач.

Технічна та технологічна системи представляють собою цілісний об’єкт (множина взаємопов’язаних об’єктів), у рамках якого визначено їх функціональне призначення, сформульовано цілі, поставлені перед системою та визначено показник якості її функціонування, що кількісно визначає ціль функціонування.

Для загального опису технічної (технологічної) системи зручно користуватись кібернетичним підходом, пов’язаним з поняттям «чорна скринька». (рис. 2.1). Будь-яка система чи її елемент мають входи (ресурси) і виходи (цілі). Вхід ($x_1, x_2, \ldots, x_i$) – це множина контактів, через які середовище діє на систему, їх значення можуть бути виміряні (встановлені), але можливість впливу на них з боку системи відсутня. Входи «чорної скриньки» називаються факторами.



Графічне представлення технічної системи



Графічне представлення технологічної системи

Рисунок 2.1. Кібернетична модель технічної та технологічної систем

Вихід ($y_1, y_2, \ldots, y_j$) – це множина контактів, через які система діє на середовище, вони характеризують стан технічної системи або результат її функціонування від загального впливу вхідних, управляючих та збурюючих параметрів. Між входом і виходом існує взаємозв’язок, який характеризує процес, що протікає в системі. Крім того система зазнає збудження (некеровані входи), для компенсації яких, використовують керування.

Невід'ємними елементами технічної системи (технологічного процесу) як об'єкта моделювання є:

- управляючі (керуючі) параметри ($u_1, u_2, \ldots, u_n$), що мають прямий вплив на технічну систему та дозволяють управляти вихідними параметрами;
- збурюючі параметри ($z_1, z_2, \ldots, z_k$) – значення змінюються випадково з плином часу та недоступні для зміни дослідником.

2.2. ВЛАСТИВОСТІ ТА ОЗНАКИ ТЕХНІЧНИХ (ТЕХНОЛОГІЧНИХ) СИСТЕМ

Складним системам притаманна низка властивостей, які потрібно враховувати в їх моделюванні, інакше неможливо твердити про адекватність побудованої моделі. Серед цих властивостей зазначимо, зокрема, такі:

• ***емерджентність*** – це результат виникнення між елементами системи так званих ***синергетичних*** зв'язків, які забезпечують збільшення загального ефекту до більших обсягів, ніж сума ефектів окремо взятих елементів системи, що діють (функціонують) незалежно. Тому технічні та технологічні системи потрібно досліджувати й моделювати, зважаючи на синергізм;

• ***динамічність*** технологічних процесів, що полягає в зміні у часі параметрів і структури систем під впливом як внутрішніх, так і зовнішніх чинників (навколишнього середовища), часу;

• ***невизначеність*** щодо розвитку технічних явищ (процесів). Економічні явища та процеси мають випадковий характер. Невизначеність притаманна економічним системам, тому для вивчення їх потрібно застосовувати економіко-математичні моделі на базі теорії ймовірностей і математичної статистики, а також на базі теорії нечітких (розпливчастих) множин тощо. Важливою також є розбудова *ризикології (науки про економічний ризик)* тощо;

• ***неможливість*** ізолювати процеси, котрі здійснюються в технічних системах від процесів у навколишньому середовищі. Тому не правильно спостерігати та досліджувати їх незалежно.

Досліджувану множину елементів можна розглядати як систему, якщо вона характеризується такими ознаками:

1) ***цілісність***, тобто принципова не зведеність властивостей системи до суми властивостей окремих її елементів;

2) ***наявність цілей і критеріїв*** щодо дослідження даної множини елементів;

3) ***наявність*** більш загальної системи – зовнішньої стосовно до даної, котру називають «***надсистемою***», чи «середовищем».

4) ***можливість виокремлення*** в даній системі певних частин («***підсистем***»).

До найбільш складних типів систем належать системи ***цілеспрямовані*** і ***здатні до самоорганізації***, які у процесі функціонування змінюють свою структуру й організацію.

Визначною властивістю системи є цілісність, яка обґрунтована взаємодією елементів системи у відповідності з метою її функціонування. Отже, в системі виявляються якісно нові характеристики, які не притаманні її початковим елементам.

Загальносистемні якості існують у всіх складних системах. Ліс має властивості, які відрізняються від властивостей окремих дерев. Поведінка групи людей не співпадає з сумою поведінки окремих особистостей.

Під зв'язаністю системи розуміють особливий характер взаємозв'язків між їх елементами. До властивості зв'язності приєднується поняття різноманітності системи. Цілеспрямоване функціонування системи можливе лише за умови обмеження різноманітності елементів. Таке обмеження покладено в основу управління системами.

Кожній системі притаманна визначена степінь складності, яка залежить від числа елементів системи. Удосконалення структури і організованості збільшує керованість системи.

2.3. ОСНОВНІ ЕТАПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНІЧНИХ (ТЕХНОЛОГІЧНИХ) ПРОЦЕСІВ

Розглянемо схему математичного моделювання технічних пристроїв і процесів, вихідною позицією якої служить технічний об'єкт.

На *першому етапі* здійснюють неформальний перехід від розглянутого (існуючого чи того, що розробляється) технологічного об'єкта до його розрахункової схеми. При цьому залежно від спрямованості обчислювального експерименту та його кінцевої мети акцентують ті властивості, умови роботи та особливості технології,

які разом з параметрами, що їх характеризують, повинні знайти відображення в розрахунковій схемі, і, навпаки, аргументують допущення і спрощення, що дозволяють не враховувати в розрахунковій схемі ті якості технічного об'єкту, вплив яких припускають у розглянутому випадку несуттєвим. Іноді замість розрахункової схеми використовують термін змістовна модель технічного об'єкту, а в деяких випадках – концептуальна модель.

У сформованих інженерних дисциплінах (наприклад, в опорі матеріалів, електротехніці та електроніці) крім описової (вербальної) інформації для характеристики розрахункової схеми розроблені спеціальні прийоми і символи наочного графічного зображення.

При розробці нових технологічних об'єктів (систем) успішне проведення першого етапу значною мірою залежить від професійного рівня інженера, його творчого потенціалу та інтуїції. Повнота і правильність врахування в розрахунковій схемі властивостей технологічної системи, істотних з точки зору поставленої мети дослідження, є основною передумовою отримання в подальшому достовірних результатів математичного моделювання. І навпаки, сильна ідеалізація технологічного об'єкту заради отримання простої розрахункової схеми може знецінити всі наступні етапи дослідження.

Зміст *другого етапу* полягає, по суті, в формальному, математичному описі розрахункової схеми. Цей опис у вигляді математичних співвідношень, що встановлюють зв'язок між параметрами, що характеризують розрахункову схему технологічного об'єкту, і називають математичною моделлю.

На *третьому етапі* проводять якісний і оцінюють кількісний аналіз побудованої математичної моделі. При цьому можуть бути виявлені суперечності, ліквідація яких вимагатиме уточнення або перегляду розрахункової схеми. Кількісні оцінки можуть дати підстави спростити модель, виключивши з розгляду деякі параметри, співвідношення або їх окремі складові, незважаючи на те, що вплив описуваних ними чинників враховано в розрахунковій схемі. У більшості випадків, приймаючи додаткові по відношенню до розрахункової схеми допущення, корисно побудувати такий спрощений варіант математичної моделі, який дозволяв би отримати або залучити відоме точне рішення. Це рішення потім можна використовувати для порівняння при тестуванні результатів на наступних етапах. У деяких випадках вдається побудувати кілька математичних моделей для одного і того ж технологічного об'єкту,

які відрізняються різним рівнем спрощення. У цьому випадку говорять про ієрархію математичних моделей, що в даному випадку означає впорядкування математичних моделей за ознакою їх складності і повноти.

Побудова ієрархії математичних моделей пов'язана з різною деталізацією властивостей досліджуваної технологічної системи. Порівняння результатів дослідження різних математичних моделей може істотно розширити і збагатити знання про цю технологічну систему. Крім того, таке порівняння дозволяє оцінити достовірність результатів подальшого обчислювального експерименту: якщо більш проста математична модель правильно відображає деякі властивості технологічного об'єкту, то результати дослідження цих властивостей повинні бути близькі до результатів, отриманих при використанні більш повної і складної математичної моделі.

Підсумок аналізу на даному етапі – це обгрунтований вибір робочої математичної моделі технологічної системи, яка підлягає надалі детальному кількісному аналізу. Успіх у проведенні третього етапу залежить, як правило, від глибини розуміння зв'язку окремих складових математичної моделі з властивостями технічного об'єкту, що знайшли відображення в його розрахунковій схемі, що передбачає органічне поєднання володіння математикою та інженерними знаннями в конкретній предметній області.

Четвертий етап полягає в обгрунтованому виборі методу кількісного аналізу математичної моделі, в розробці ефективного алгоритму обчислювального експерименту, а п'ятий етап – у створенні працездатної програми, що реалізує цей алгоритм засобами обчислювальної техніки. Для успішного проведення четвертого етапу необхідно володіти арсеналом сучасних методів обчислювальної математики, а при математичному моделюванні досить складних технологічних систем виконання *п'ятого етапу* вимагає професійної підготовки в області програмування на ЕОМ.

Отримані на *шостому етапі* (у результаті роботи програми) результати обчислень повинні перш за все пройти тестування шляхом зіставлення з даними кількісного аналізу спрощеного варіанту математичної моделі розглянутого технологічного об'єкту. Тестування може виявити недоліки як у програмі, так і в алгоритмі, і зажадати доопрацювання програми або ж модифікації і алгоритму, і програми. Аналіз результатів обчислень та їх інженерна інтерпретація можуть викликати необхідність у коригуванні розрахункової схеми і

відповідної математичної моделі. Після усунення всіх виявлених недоліків тріаду «модель – алгоритм – програма» можна використовувати як робочий інструмент для проведення обчислювального експерименту та вироблення на основі одержуваної кількісної інформації практичних рекомендацій, спрямованих на вдосконалення технологічної системи, що становить зміст сьомого, завершального етапу математичного моделювання.

Представлена послідовність етапів носить загальний і універсальний характер, хоча в деяких конкретних випадках вона може і дещо видозмінюватися. Якщо при розробці технологічної системи можна використовувати типові розрахункові схеми і математичні моделі, то відпадає необхідність у виконанні ряду етапів, а при наявності й відповідного програмного комплексу процес обчислювального експерименту стає в значній мірі автоматизованим. Проте математичне моделювання технологічного об’єкту, що не мають близьких прототипів, як правило, пов’язано з проведенням усіх етапів описаного "технологічного циклу".

2.4. СТРУКТУРА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

При математичному моделюванні технічних систем математична модель повинна мати такі структурні елементи:

обмеження системи – граничні значення, які накладаються на параметри функціонування технічної системи;

цільову функцію, яка виражає залежність ефекту функціонування технічної системи від параметру, що регулюється;

вхідні параметри – сукупність вхідних показників процесу, які визначають зміст та властивості технічної системи при її моделюванні;

вихідні параметри – кількісні та якісні показники системи (продуктивність, точність, якість, собівартість), які характеризують функціонування системи та залежать від сумарної дії зовнішніх факторів, вхідних параметрів;

управляючі параметри – чинять пряму дію на нестабільність і дозволяють керувати роботою технічної системи;

збурюючі параметри – постійно вимірювані параметри, які впливають на вихідні параметри.

У досить загальному випадку досліджуваний технічний об'єкт кількісно можна охарактеризувати векторами $X \in R^k$, $g \in R^m$ і $y \in R^n$ зовнішніх, внутрішніх і вихідних параметрів відповідно. Одні й ті ж фізичні, механічні або інформаційні характеристики технологічного об'єкта в моделях різного рівня і змісту можуть виконувати роль як зовнішніх або внутрішніх, так і вихідних параметрів.

При створенні технологічного об'єкта значення вихідних параметрів або діапазони їх можливої зміни обумовлюють в технічному завданні на розробку технологічного об'єкта, тоді як зовнішні параметри характеризують умови його функціонування. У порівняно простому випадку математична модель технологічної системи може представляти собою співвідношення

$$y = f(x, g),\ x \in R^k \text{ і } g \in R^m\ y \in R^n,$$

де *f (x, g)* – векторна функція векторного аргументу. Така модель дозволяє легко обчислювати вихідні параметри по заданим значенням зовнішніх і внутрішніх параметрів, тобто розв'язувати пряму задачу. При створенні технологічного об'єкту виникає необхідність вирішувати більш складну так звану зворотну задачу: за обумовленим технічним завданням на проектування технологічного об'єкта значенням зовнішніх і вихідних параметрів знаходити його внутрішні параметри.

Однак при побудові математичної моделі технологічної системи функція *f (x, g),* зазвичай, заздалегідь невідома і її потрібно встановити. Це найбільш складна так звана задача ідентифікації математичної моделі (від латинського слова identifico – ототожнюю, якому в даному випадку додають сенсу «розпізнаю»). Задача ідентифікації може бути вирішена шляхом математичної обробки інформації про ряд таких станів технологічної системи, для кожного з яких відомі (наприклад, виміряні експериментально) значення вихідних, внутрішніх і зовнішніх параметрів. Один з таких способів пов'язаний із застосуванням регресійного аналізу. Якщо інформація про внутрішні параметри відсутня або ж внутрішній устрій технологічної системи занадто складний, то математичну модель такого об'єкта будують за принципом чорного ящика – встановлюють співвідношення між вхідними і вихідними параметрами шляхом дослідження реакції технологічного об'єкта на зовнішні (вхідні) впливи.

2.5. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ІНЖЕНЕРНИХ ДИСЦИПЛІНАХ

Здійснення окремих етапів математичного моделювання вимагає певних знань, навичок та практичної підготовки. Якщо перший, сьомий і частково шостий етапи стосовно до моделювання технічних об'єктів типові для амплуа інженера, то другий, третій і четвертий етапи передбачають наявність серйозної математичної підготовки, а п'ятий – навичок у розробленні та налагодженні ЕОМ-програм. Тому до математичного моделювання складних технологічних систем доводиться залучати і інженерів, і математиків, і програмістів. Однак для координації їх зусиль необхідні фахівці, здатні здійснити кожен з розглянутих етапів на високому професійному рівні.

Зупинимося на особливостях побудови математичних моделей в інженерних дисциплінах. Математик-теоретик зазвичай вибирає для дослідження вже побудовану математичну модель, тобто починає роботу з формулювання математичної задачі і потім вже не піддає сумніву це формулювання, а лише обгрунтовує свої перетворення та етапи рішення завдання. При цьому в деяких випадках отримані результати вдається застосувати безпосередньо до конкретного технологічного об'єкту. Але в техніці жодну досить складну задачу не можна поставити таким чином. Будь-яке формулювання технічного завдання є умовним. Якщо деякий наслідок формулювання такого завдання невірний або неприйнятний, то завдання доводиться переформулювати, так як будь-яка послідовність математичних символів, записаних при побудові математичної моделі, є в дійсності послідовністю тверджень змістовного характеру, пов'язаних з конкретним досліджуваним технологічним об'єктом. Тому при математичному моделюванні технологічної системи необхідно враховувати як математичну, так і змістовну сторону завдання, пов'язуючи одне до одного.

Необхідно пам'ятати про відповідність математичної моделі реальному технічному об'єкту може призвести до помилок, пов'язаних з приписуванням йому властивостей його математичної моделі. Ізолювання етапів, пов'язаних з побудовою математичних моделей або розробкою алгоритмів і пакетів програм, як і навчання виконанню цих етапів окремо, не достатньо для ефективного використання переваг математичного моделювання. Наявність сучасних ЕОМ саме по собі ще не вирішує проблему. Необхідно

«інтелектуальне ядро» обчислювальної техніки, яким є її математичне забезпечення, що становить, за оцінками, не менше 80% загальної вартості розробки інформаційних технологій.

Вигоди, що надаються програмним забезпеченням сучасних ЕОМ їх користувачам, часто призводять до прагнення звернутися при кількісному аналізі математичних моделей до існуючих і постійно вдосконалючихся універсальних пакетів типу MathCad, MatLab і т.п. Більш того, універсальність математичних моделей і формування банків типових матмоделей дозволяють створювати програмні комплекси типу NASTГAN, ANSYS або FlowVision, в які вихідна інформація вводиться навіть не у вигляді математичної моделі, а у вигляді розрахункової схеми досліджуваної технологічної системи.

Однак метод, який працює для вирішення багатьох стандартних завдань, часто не є найкращим при вирішенні конкретного завдання, особливо нестандартною, а нерідко і взагалі не може бути застосованим. Але в інженерній практиці вирішувати доводиться в основному нестандартні задачі, тому що стандартні майже всі вирішені або можуть бути вирішені без особливих творчих зусиль. При вирішенні нових і складних завдань, які не мають близьких аналогів, шлях формального звернення до універсальних пакетів і програмних комплексів може призвести до отримання результатів, які не вдасться інтерпретувати стосовно до розглянутої технологічної системи. У таких випадках аналіз математичної моделі потрібно будувати на вмілому поєднанні якісних оцінок, аналітичних методів і застосування ЕОМ, пам’ятаючи, що мета розрахунків – не числа, а розуміння. Все це говорить про те, що ЕОМ, звільняючи нас від багатьох турбот і обов’язків, не звільняє у всякому випадку від двох з них – від необхідності володіти математикою і творчо мислити.

2.6. ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Вітчизняна промисловість уже має значний досвід у вирішенні задач, в яких використовуються математичні методи та комп’ютерні технічні засоби в області розробки нової техніки, проектуванні технологій, плануванні та управлінні технічними системами. Процес проникнення математики в інженерну діяльність інтенсивно проходив в останні 20 років. Існують наукові школи по впровадженню математичних методів у прикладні задачі

промисловості у США, Франції, ФРН, Росії та Україні, викликаному об'єктивними причинами. Так, розширення масштабів виробництва, поглиблення його спеціалізації, зростання вимог до якості та надійності продукції, призвели до різкого збільшення кількості проектних, управлінських та інших рішень, серед яких потрібно обирати найкращі.

У загальному вигляді математичне моделювання технічних систем використовується:

а) для дослідження технічної системи ще до того, як вона буде спроектована з метою встановлення чутливості характеристик до змін структури та параметрів об'єкту моделювання і зовнішнього середовища;

б) на етапі проектування технічної системи для аналізу та синтезу різних варіантів системи й відбору такого варіанту, який би задовольняв заданому критерію оцінки ефективності системи за прийнятих обмежень;

в) при експлуатації технічної системи для отримання інформації, яка б доповнювала результати експлуатації реальної системи та для отримання прогнозів із розвитку системи в часі.

Названі випадки відображають лише загальний підхід до використання математичного моделювання. У реальних навчальних, дослідницьких чи виробничих процесах їх значно більше, вони більш різноманітні за своїми вхідними та вихідними параметрами і характеристиками.

Методи моделювання успішно застосовують у таких галузях, як автоматизація проектування, організація роботи виробничих комплексів, транспорту, сфери обслуговування, аналіз різних аспектів діяльності людини, при автоматизованому управлінні виробничими та іншими процесами. Треба зауважити, що моделювання використовують під час проектування, виробництва, впровадження й експлуатації технічних систем, а також на різних рівнях її вивчення – від аналізу роботи елементів до дослідження систем загалом у процесі взаємодії з навколишнім середовищем, тобто на всіх етапах життєвого циклу технічної системи.

Математичне моделювання, як альтернатива дослідному (пробному) фізичному експерименту, методу спроб та помилок, вже входить у практику промислового виробництва як достатньо ефективний та економічно вигідний шлях розвитку та вдосконалення.

Так, наприклад, розробка автоматизованих вимірювальних комплексів не може обійтись без моделювання таких об'єктів як «деталь», «вимірювальний процес», «пристрій» тощо. При цьому використовується апарат дискретної математики: теорія множин, теорія графів, математична логіка, теорія прийняття рішень, лінійне та динамічне програмування та ін.

Успішно використовуються на практиці методи математичного програмування, теорії масового обслуговування, мережеві методи планування та управління. Так, методами лінійного програмування оптимізуються рішення від порівняно простих завдань різки листового металу, пошуку оптимальної траєкторії обробки складних контурів різальним інструментом до складних завдань оптимізації планів дільниці цеху при максимальному завантаженні обладнання тощо.

Значні можливості для вирішення складних задач промислового виробництва закладено у використанні методів динамічного програмування, випадкового пошуку та евристичного програмування. Методи теорії масового обслуговування широко розповсюджені при управлінні технологічною підготовкою виробництва, забезпечують потрібне завантаження обладнання та виконання робіт в установлені терміни.

У зв'язку зі швидким розвитком інформаційних технологій, відкриваються нові можливості для широкого використання методів теорії ймовірності та математичної статистики, особливо методів кореляційного та дисперсійного аналізів при проектуванні технологічних процесів, прогнозуванні та ін.

Розвиток теорії та практики автоматизованого управління створив основу для створення адаптивних слідкуючих систем у металообробці. Математичне моделювання системи «верстат – пристрій – інструмент – заготовка» дозволило розробити для таких систем принципові основи автоматизованого управління точністю обробки, управління продуктивністю верстатного обладнання тощо.

На жаль, як у технічних науках, так і в їх практичному втіленні ще багато вузьких «неформалізованих» задач, які стримують використання автоматизованих систем типу САПР, АСУ ТП та ін. Напевно, головним прискорювачем рішення цих задач і є використання методів математичного моделювання.

Загальновживаний вираз: "Ніколи не починати справу, якщо не знаєш як вести її до заданої цілі", у перекладі на інженерно-

математичну мову, означає: “Промоделюйте та розрахуйте за допомогою програмних засобів те, що ви отримаєте при ваших вхідних даних, тоді зрозумієте шляхи розв’язання задачі”.

Використання автоматизованих систем і масове впровадження комп’ютерної техніки на промислових підприємствах суттєво збільшує первинні капіталовкладення та основні фонди. Звичайно, у виробників і теоретиків виникає цікавість до оцінки ефективності цих витрат, терміну їх окупності. Кажучи про критерії ефективності, звичайно мають на увазі кількісну оцінку якісних характеристик, які відображають відношення досягнутих цілей до витрат. Прямим показником ефективності у цьому випадку може бути значення досягнутого результату, віднесене до суми витрат.

Наприклад, Ви – керівник підприємства, якому запропонували декілька альтернативних замовлень. Як обрати те, яке при мінімумі витрат принесе Вам максимум прибутку? Тут потрібно оцінити свої ресурси, ступінь завантаження підприємства, наявність обладнання та інше. Використання математичного моделювання та інформаційних технологій дозволять у лічені хвилини визначити всі переваги і недоліки запропонованих варіантів та обрати найкращий (оптимальний). Такі ж конкретні рішення й конкретні ефекти у натуральних та економічних показниках досягаються за допомогою математичного моделювання у більшості проектних і виробничих задач.

ТЕМА 3. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВЯЗАННЯ

ПЛАН

3.1. Загальна математична модель лінійного програмування.
3.2. Форми запису задач лінійного програмування.
3.3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування.
3.4. Двоїстість у задачах лінійного програмування. Правила побудови двоїстих задач.

3.1. ЗАГАЛЬНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Лінійне програмування – це розділ математичного програмування, в якому розглядаються методи розв'язання екстремальних задач з лінійною цільовою функцією та лінійними обмеженнями, яким повинні задовольняти шукані змінні.

Загальна лінійна математична модель, так звана загальна задача лінійного програмування (ЗЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$L = \tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 x_2 + \ldots + \tilde{n}_n x_n , \qquad (3.1)$$

або

$$L = \tilde{n}_1 x_1 + \tilde{n}_2 x_2 + \ldots + \tilde{n}_n x_n \to \max \ (\min)$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 . \qquad (3.3)$$

Необхідно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють обмеженням (3.2), (3.3) тоді як цільова функція (3.1) набуває екстремального значення.

3.2. ФОРМИ ЗАПИСУ ЗЛП

Задачі лінійного програмування можуть бути записані в загальній, стандартній (симетричній) та канонічній (основній) формі.

Більш компактно ***загальну задачу лінійного програмування*** можна записати у вигляді:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Стандартна (симетрична) форма задачі лінійного програмування має вид:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Канонічною (основною) формою задачі лінійного програмування називається задача (3.1)–(3.3), коли в системі обмежень (3.2) всі значення $\boldsymbol{b_j \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)}$ невід'ємні, а всі обмеження є рівностями, тобто

$$\boldsymbol{Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min)}$$

за умов

$$\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = 1, 2, \ldots, m);}$$

$$\boldsymbol{x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).}$$

Для цього якщо якесь значення $\boldsymbol{b_i}$ від'ємне, то помноживши i-обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності

додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in} \le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну балансуючу змінну x_{n+1}:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i$$

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну балансуючу змінну $\boldsymbol{x_{n+2}}$, тобто

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k.$$

Якщо в задачі деяка змінна x_k довільного знаку, то її заміняють як $x_k = x'_k - x''_k$, де $x'_k \ge 0, x''_k \ge 0$. У випадку, коли деяка змінна $x_p \le 0$, то її заміняють на $x'_p = -x_p$

Якщо задача задана на знаходження максимуму, то її можна розв'язати також і на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$$\max Z = -\min(-Z) == \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots c_nx_n)$$

залишивши систему обмежень без зміни.

Канонічну форму задачі лінійного програмування можна записати компактніше у ***векторно-матричному*** вигляді:

$$Z = CX \to \max(\min)$$

за умов

$$\begin{matrix} AX = A_0, \\ X \ge 0, \end{matrix},$$

де $A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$ є матриця коефіцієнтів при змінних;

$X = \begin{pmatrix} \tilde{o}_1 \\ \tilde{o}_2 \\ \vdots \\ \tilde{o}_n \end{pmatrix}$ — вектор змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_o \end{pmatrix}$ — вектор вільних членів;

$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Канонічну форму задачі лінійного програмування часто записують у ***векторній формі***

$$Z = CX \to \max(\min)$$

за умов

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0,$$
$$X \ge 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних,

Розглянуті форми задачі лінійного програмування (загальна, стандартна та канонічна) еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути приведена до любої з двох інших.

3.3. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Загальним методом розв'язування задач лінійного є симплекс-метод (метод послідовного поліпшення плану), основна ідея якого полягає в тому, щоб збільшуючи значення вільної змінної, збільшити значення цільової функції, але при цьому залишити невід'ємними базисні змінні.

Процес розв'язання задачі симплекс-методом має ітераційний характер: однотипні обчислювальні процедури (ітерації) повторюються у певній послідовності доти, доки не буде отримано оптимальний план задачі або з'ясовано, що його не існує.

Отже, симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи з певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Алгоритм розв'язування ЗЛП симплекс-методом

Нехай необхідно знайти *max* цільової функції (3.1), запишемо (3.1) у вигляді:

$$L = -\tilde{n}_1(-x_1) - \tilde{n}_2(-x_2) - \ldots - \tilde{n}_n(-x_n).$$

Систему обмежень нерівностей (3.2) зведемо до системи обмежень-рівностей. Для цього до лівої частини кожної нерівності додаємо відповідну невід'ємну невідому.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m \end{cases}.$$

Виражаємо невід'ємну невідому:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1n}(-x_n) + b_1 \\ y_2 = a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \ldots + a_{2n}(-x_n) + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = a_{m1}(-x_1) + a_{m2}(-x_2) + \ldots + a_{mn}(-x_n) + b_m \end{cases}.$$

Умови задачі запишемо в вигляді симплекс-таблиці

Таблиця 3.1.

	$-x_1$	$-x_2$	$\ldots$	$-x_s$	$\ldots$	$-x_n$	
y_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1s}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_i	a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{is}	$\ldots$	a_{in}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{ms}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
$L =$	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_s$	$\ldots$	$-c_n$	0

<u>*Алгоритм знаходження опорного плану*</u>

1. Розглядаємо стовпець вільних членів. Якщо всі $b_i \geq 0$, то опорний розв'язок знайдено, а саме: всі елементи (невідомі), які розташовані зверху таблиці дорівнюють нулю, а решта – вільним членам.
2. Нехай $b_i < 0$. Розглянемо рядок з номером i. Якщо всі $a_{ij} > 0$, то система обмежень несумісна і задача розв'язку не має.

Припустимо, i-му рядку є і додатні, і від'ємні елементи, знаходимо $\min\left(\frac{b_i}{a_{ij}} > 0\right) = \frac{b_r}{a_{is}}$. Звідки, a_{is} - ключовий або ведучий елемент.

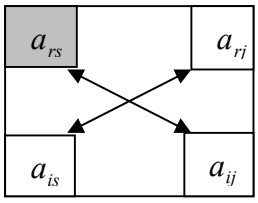
3. Виконуємо *крок модифікованих жорданових виключень.*

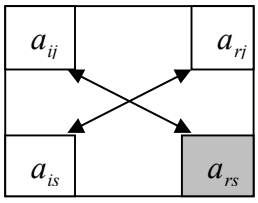
Перехід до нової таблиці здійснюється за правилами:

- ключовий елемент замінюється одиницею;
- елементи ключового стовпця змінюють знак на протилежний;
- елементи ключового рядка залишаються без змін;

- решта елементів обчислюється за формулою $b_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{rj}a_{is}$;
- всі елементи нової таблиці діляться на ключовий елемент.

4. Таким чином, перетворюємо всі від'ємні вільні члени.





Цю схему обчислень назвемо схемою (правилом) прямокутника. Так перетворюють всі елементи розширеної матриці системи рівнянь, які розташовані поза ключовим рядком і стовпчиком.

У результаті знайдемо опорний план, або доведемо, що система несумісна.

Алгоритм знаходження оптимального плану

1. Опорний план знайдено. Усі вільні члени невід'ємні числа. Розглянемо рядок $\boldsymbol{L}$. Якщо всі коефіцієнти L- рядка невід'ємні, то знайдений розв'язок і буде оптимальним. Якщо в L- рядку декілька від'ємних коефіцієнтів, то беремо найбільший з них по абсолютній величині. Припустимо, що це елемент $c_s < 0$. Тоді s- ключовий стовпець.
2. У ключовому стовпці визначаємо додатні коефіцієнти і знаходимо $\frac{b_i}{a_{is}} > 0$. Якщо додатних елементів не має, то лінійна форма необмежена зверху.
3. Ключовий елемент знаходимо з найменшого симплексного відношення $\min\left(\frac{b_j}{a_{js}} > 0\right) = \frac{b_r}{a_{rs}}$, a_{rs} - ключовий елемент.
4. Виконуємо крок модифікованих жорданових виключень.
5. Отриманий план перевіряємо на оптимальність. Якщо план не оптимальний, то алгоритм повторюється.

Приклад 3.1. Знайти оптимальний план ЗЛП симплекс методом.

$L = 48x_1 - 69x_2 + 58x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 \le 4 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 \le -1 \\ -6x_1 - 8x_2 + 4x_3 \ge -6 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

Розв'язання. 1. Систему обмежень-нерівностей зведемо до системи обмежень-рівностей. Для цього до лівої частини кожної нерівності додамо відповідну невід'ємну невідому.

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + y_1 = 4 \\ 7x_1 + x_2 - 6x_3 + y_2 = -1 \\ 6x_1 + 8x_2 - 4x_3 + y_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 4 - 4x_1 - 9x_2 - 5x_3 \\ y_2 = -1 - 7x_1 - x_2 + 6x_3 \\ y_3 = 6 - 6x_1 - 8x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

2. Складаємо першу симплекс-таблицю (Всі коефіцієнти при змінних заносяться до симплекс-таблиці з протилежним знаком).

Таблиця 3.2.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	b_i
y_1	4	9	5	4
y_2	7	1	[redacted]	-1
y_3	6	8	-4	6
$L =$	-48	69	-58	0

3. Знайдемо опорний план. Розглянемо стовпчик вільних членів. Оскільки $b_2 < 0$, то даний план не опорний. Розглянемо II-й рядок. Оскільки $a_3 < 0$, то $a_3 -$ ключовий або ведучий елемент. Виконуємо *крок модифікованих жорданових виключень.* Результати заносимо до таблиці 3.3.

Таблиця 3.3.

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_2$	b_i
y_1	[redacted]	(-59)/(-6)	5/6	(-19)/(-6)
x_3	7/(-6)	1/(-6)	1/(-6)	-1/(-6)
y_3	(-8)/(-6)	(-44/(-6)	(-4)/6	(-40)/(-6)
$L =$	694/(-6)	(-356)/(-6)	(-58)/6	(-58)/(-6)

Перевіряємо знайдений план на опорність. Оскільки всі $b_i \ge 0$, то даний план опорний, перевіримо його на оптимальність. У L рядку є

від'ємні елементи. Отже, даний план не оптимальний, беремо найбільший з них по абсолютній величині: 694/(-6), тоді І-й стовпчик – ключовий. Знайдемо відношення $\frac{b_i}{a_{i1}} > 0$. Ключовий елемент знаходимо з найменшого симплексного відношення $\min\left(\frac{19}{6}:\frac{59}{6};\frac{1}{6}:\frac{7}{-6};\frac{40}{6}:\frac{8}{6}>0\right)$, a_{11}- ключовий елемент. Виконуємо крок модифікованих жорданових виключень.

4. Обчислюємо елементи симплекс-таблиці (таблиця 3.4) з ключовим елементом $a_{11} = \frac{-59}{-6}$.

Таблиця 2.4.

	$-y_1$	$-x_2$	$-y_3$	b_i
x_1	0,102	1	0,085	0,322
y_2	0,119	1	-0,068	0,543
x_3	-0,136	6	-0,78	6,238
$L =$	11,763	175	0,132	46,921

В останній таблиці крім невід'ємних вільних членів невід'ємні всі коефіцієнти $\boldsymbol{L}$- рядка. Отже, отриманий розв'язок є оптимальним. $L_{\max} = 46{,}921$, при $x_1 = 0{,}322$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}543$.

Для перевірки правильності обчислення підставимо знайдений розв'язок у лінійну функцію: $L_{\max} = 48 \cdot 0{,}322 + -69 \cdot 0 + 58 \cdot 0{,}543 = 46{,}921$.

Відповідь: $L_{\max} = 46{,}921$, при $x_1 = 0{,}322$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}543$.

3.4. ДВОЇСТІСТЬ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ПРАВИЛА ПОБУДОВИ ДВОЇСТИХ ЗАДАЧ

Кожній задачі лінійного програмування відповідає ***двоїста***, що формується за допомогою певних правил безпосередньо з умови прямої задачі.

Якщо пряма задача лінійного програмування має вигляд

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge o,\ j = \overline{1,n},$$

то двоїста задача записується так:

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots b_my_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Порівнюючи ці дві сформульовані задачі, доходимо висновку, що ***двоїста задача лінійного програмування утворюється з прямої задачі за такими правилами.***

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі — на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця ***A***

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця $\boldsymbol{A^T}$ коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків — рядками.

7. Якщо змінна $\boldsymbol{x_j}$ прямої задачі може приймати тільки додатні значення, то $\boldsymbol{j}-$те обмеження в системі двоїстої задачі є нерівність виду «$\geq$». Якщо змінна $\boldsymbol{x_j}$ може приймати як додатні, так і від'ємне значення, та $\boldsymbol{j}-$те обмеження в системі двоїстої задачі є рівняння.

Якщо $\boldsymbol{i}-$те обмеження в системі прямої задачі є нерівність, то $\boldsymbol{i}-$змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. В противному випадку змінна $\boldsymbol{y_i}$ може приймати як додатні, так і від'ємні значення.

Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої—лише як нерівності. У цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком.

Форми прямих ЗЛП та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач

Пряма задача	**Двоїста задача**
Симетричні	
$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$	$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i;$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j;$
$x_j \geq 0.$	$y_i \geq 0.$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \qquad F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_i \ge 0.$$

Несиметричні

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \qquad F = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_i \in [-\infty; \infty].$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min; \qquad F = \sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j;$$

$$x_j \ge 0. \qquad y_i \in]-\infty; \infty[.$$

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний взаємозв’язок, який випливає з наведених далі теорем.

Перша теорема двоїстості. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв’язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\boldsymbol{max\, Z = min\, F}$, і навпаки.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв’язків. Якщо пряма задача лінійного програмування має оптимальний план X^*, визначений симплекс-методом, то оптимальний план двоїстої задачі Y^* визначається зі співвідношення

$$Y^* = \vec{c}_{\text{áàç}} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{\text{áàç}}$ — вектор-рядок, що складається з коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при змінних, які є базисними в оптимальному плані; D^{-1}—матриця, обернена до матриці D, складеної з базисних векторів оптимального плану, компоненти яких узято з початкового опорного плану задачі.

Обернена матриця D^{-1} завжди міститься в останній симплекс-таблиці в тих стовпчиках, де в першій таблиці містилася одинична матриця.

За допомогою зазначеного співвідношення під час визначення оптимального плану однієї з пари двоїстих задач лінійного програмування знаходять розв'язок іншої задачі.

Друга теорема двоїстості. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі $\boldsymbol{i}-$те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний $\boldsymbol{i}-$й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо $\boldsymbol{i}-$й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне $\boldsymbol{i}-$те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Третя теорема двоїстості. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження.

Економічний зміст третьої теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

Розв'язавши пряму задачу ЛП симплекс-методом, можна побачити, що оптимальне значення $\boldsymbol{i}-$двоїстої змінної дорівнює сумі оптимальної оцінки вектора, який входить в початковий базис і взятого з цільової функції прямої задачі коефіцієнтів біля невідомих з тим же індексом, що і у вектора.

Наприклад, якщо змінні x_3 ³ x_5 входять в початковий базис – то

$$y_1^{opt} = \Delta_3^{opt} + c_3^{opt}$$

$$y_1^{opt} = \Delta_5^{opt} + c_5^{opt}$$

Отже, компоненти оптимального плану двоїстої задачі співпадають з елементами $(m+1)$ рядка стовпців одиничних векторів, якщо даний коефіцієнт $c_j = 0$, і дорівнюють сумі відповідного елементу цього рядка і c_j, якщо $c_j \neq 0$.

Приклад 3.2. Скласти двоїсту задачу до даної.

Знайти $min\ L^* = 5y_1 - y_2$, при обмеженнях

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \geq 2 \\ 4y_1 + 6y_2 \geq -1 \\ -2y_1 - 2y_2 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 .$$

Двоїста задача буде мати вигляд max $L = 2x_1 - x_2 + 3x_3$, при обмеженнях

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 5 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 \leq -1 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 .$$

ТЕМА 4. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

ПЛАН

4.1. Математична постановка транспортної задачі
4.2. Метод потенціалів

4.1. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

Транспортна задача (ТЗ) — це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників ($A_1, A_2, ..., A_m$) до споживачів ($B_1, B_2, ..., B_n$) (або мінімальна вартість перевезення всього товару, або ж мінімальний час його перевезення).

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min; \qquad (4.1)$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right); \qquad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right); \qquad (4.3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right), \qquad (4.4)$$

де x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i – го постачальника до j – го споживача;

c_{ij} – вартість перевезення одиниці продукції від i – го постачальника до j – го споживача (тариф перевезення);

a_i – запаси продукції i – го постачальника; b_j – попит на продукцію j – го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \qquad (4.5)$$

то таку транспорту задачу називають ***збалансованою***, або ***закритою***. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають ***незбалансованою***, або ***відкритою***.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень (4.2)—(4.4) транспортної задачі, який позначають матрицею $X = (x_{ij})\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = (\vec{x}^*_{ij})\ (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція (4.1) набуває найменшого значення.

Транспортна таблиця

Постачальники A_i та запаси продукції	Споживачі B_j та попит на продукцію					Потенціали u_i
	$B_1 = b_1$	$B_2 = b_2$	$B_3 = b_3$	…	$B_n = b_n$	
$A_1 = a_1$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	…	c_{1n} x_{1n}	u_1
$A_2 = a_2$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	…	c_{2n} x_{2n}	u_2
$A_3 = a_3$	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	…	c_{3n} x_{3n}	u_3
…	…	…	…	…	…	…
$A_m = a_m$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	…	c_{mn} x_{mn}	U_m
Потенціали v_j	v_1	v_2	v_3	…	v_n	Z_1

Теорема *(умова існування розв'язку транспортної задачі)*.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вихідні дані ТЗ заносять в спеціальну таблицю, яку називають транспортною таблицею, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі — стовпчиками.

4.2. МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування більш ефективний метод – ***метод потенціалів***, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму.

Алгоритм методу потенціалів

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.

3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості (4.5) виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$, то до

закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} або фіктивного споживача B_{n+1} вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану ТЗ задачі існує декілька методів:

- північно-західного кута;
- мінімальної вартості;
- подвійної переваги;
- апроксимації Фогеля.

Метод північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці x_{11}, в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Метод мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції c_{ij}. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць декілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один

рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

У транспортній задачі з $m-$постачальниками і $n-$споживачами кількість невідомих $x_{ij} = m \cdot n$, а кількість рівнянь в (4.2)—(4.4) повинна дорівнювати $m + n$.

Після побудови першого опорного плану одним із розглянутих методів у таблиці має бути заповнено $(m + n - 1)$ клітинок, де $m-$кількість постачальників; $n-$кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***невиродженим***.

Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $(m + n - 1)$, то початковий план побудовано неправильно і він є ***неопорним.*** *Ознакою опорності* плану транспортної задачі є його *ациклічність*, тобто неможливість побудови циклу.

Циклом у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці. Якщо ламана лінія, що утворює цикл перетинається, то точки самоперетину не є вершинами циклу.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $(m + n - 1)$, то опорний план називають ***виродженим***. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану, тобто щоб не утворилося циклу.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно постачальників та споживачів.

Теорема (*умова оптимальності опорного плану транспортної задачі*). Якщо для деякого опорного плану $X^* = (x_{ij}^*)$ існують числа u_i та v_j, для яких виконується умови

$$1)\ u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0,$$

$$2)\ u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1,m}$ та $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

Правильність обчислення потенціалів перевіряється згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = z$$

4. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності

$$u_i + v_j \le c_{ij}$$

для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j \ge c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок декілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $max\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$, яке записують в лівому нижньому куточку відповідної клітинки. Якщо декілька однакових порушень Δ_{ij} , то вибираємо ту клітинку, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Для вибраної порожньої клітинки, яку називають ***потенціальною клітинкою*** будують ***цикл перерахування*** та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим по черзі — знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, що стоять у клітинках зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+», і віднімають від чисел у клітинках зі знаком «–».

Отже, потенціальна клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

Якщо знайдений опорний план є оптимальним, але в останній транспортній таблиці серед значень Δ_{ij} крім від'ємних є також нульові, то існують альтернативні опорні плани, які можна знайти взявши відповідні клітинки в яких $\Delta_{ij} = 0$ як потенціальні і виконати цикл перерахування.

Приклад 4.1. Для будівництва 4 доріг використовується гравій із 3 кар'єрів із запасами 120, 280 та 160 ум.од. Для будівництва кожної з доріг необхідно 130, 220, 60 та 70 ум.од. гравію. Тарифи перевезення 1 ум.од гравію із кожного кар'єру до кожної з доріг, що будується задані матрицею перевезення $C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Скласти такий план перевезення гравію, при якому попит в ньому був би задоволений при найменшій загальній вартості перевезення.

Розв'язання. 4.1.1. Побудова математичної моделі транспортної задачі.

Побудуємо математичну модель транспортної задачі. Нехай x_{ij}– кількість продукції (гравію), що перевозиться від $i-$го постачальника (кар'єра) до $j-$го споживача (дороги) $(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4})$; c_{ij} – вартість (тарифи) перевезення одиниці продукції від $i-$го постачальника до $j-$го споживача задані у матриці C; a_i–- запаси продукції $i-$го постачальника; b_j – попит на продукцію $j-$го споживача.

Оскільки $\sum_{i=1}^{3} a_i = 120 + 280 + 160 = 560$, а

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 130 + 220 + 60 + 70 = 480,$$

то транспортна задача є незбалансованою.

Щоб отримати збалансовану модель, введемо додаткового споживача B_5 з попитом $b_5 = 560 - 480 = 80$ ум.од. Вартість перевезення 1 ум. од. продукції до споживача B_5 беремо рівну нулю.

Таким чином, транспортна таблиця матиме вигляд:

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 x_{11}	7 x_{12}	9 x_{13}	5 x_{14}	0 x_{15}
$A_2 = 280$	4 x_{21}	2 x_{22}	6 x_{23}	8 x_{24}	0 x_{25}
$A_3 = 160$	3 x_{31}	8 x_{32}	1 x_{33}	2 x_{34}	0 x_{35}

Тоді, математична модель транспортної задачі запишеться таким чином:

$$Z = x_{11} + 7x_{12} + 9x_{13} + 5x_{14} + 0x_{15} +$$
$$+ 4x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24} + 0x_{25} +$$
$$+ 3x_{31} + 8x_{32} + 1x_{33} + 2x_{34} + 0x_{35} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 120, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 280, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 160, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 130, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 220, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,3}, \ j = \overline{1,5}.$$

Економічний зміст перших трьох обмежень полягає в тому, що вся продукція від кожного постачальника має вивозитися до споживачів повністю, а **економічний зміст інших чотирьох обмежень** полягає в тому, що вся продукція, що надходить до кожного споживача, має повністю задовольняти його попит.

4.1.2.Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом «північно-західного» кута.

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0
$A_1 = 280$	4 **10**	2 **220**	6 **50**	8	0
$A_3 = 160$	3	8	1 **10**	2 **70**	0 **80**

Послідовність заповнення клітинок: 120 – 10 – 220 –50 – 10 –70 –80.

4.1.3. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом мінімальної вартості

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **40**	7	9	5	0 **80**
$A_1 = 280$	4 **60**	2 **220**	6	8	0
$A_3 = 160$	3 **30**	8	1 **60**	2 **70**	0

Послідовність заповнення клітинок: 80 – 40 – 60 –220 – 70 – 30 –60

4.1.4. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом подвійної вартості

Постачальники A_i	Споживачі B_j				
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$
$A_1 = 120$	1 **40** V	7	9	5	0 **80** VV
$A_1 = 280$	4 **60**	2 **220** V	6	8	0 VV
$A_3 = 160$	3 **30**	8	1 **60** V	2 **70** V	0 VV

Послідовність заповнення клітинок: 80 – 40 – 220 –60 – 70 – 30 –60

4.1.5. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Різниці для рядків
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	1,1,1,1,1,1,1
$A_1 = 280$	4	2 **220**	6	8	0 **60**	2,2,**4**,–,–,–,–
$A_3 = 160$	3 **10**	8	1 **60**	2 **70**	0 **20**	1, 2,2,2,**3,5**,–
Різниці для стовпців	2 2 2 2 2 2	5 **5** – – – –	**5** – – – – –	3 3 3 **3** – –	0 0 0 0 0 –	

Послідовність заповнення клітинок: 60 – 220 – 60 –70 – 20 – 10 –120

4.1.6. Метод потенціалів визначення оптимального плану транспортної задачі

Розглянемо початковий опорний план ТЗ, що був одержаний методом «північно-західного» кута.

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали,
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6 **50**	8	0	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1 **10**	2 **70**	0 **80**	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_1 = 1050$

Визначимо початкове значення цільової функції

$$Z_1 = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 6 \cdot 50 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 80 = 1050.$$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок *7*, то перший опорний план **невироджений.**

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j.

Згідно **1 умови оптимальності** $u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 6 \\ u_3 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_3 = 3 \\ u_3 = -2 \\ v_4 = 4 \\ v_5 = 2 \end{cases}$$

Правильність обчислення потенціалів перевіримо згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$0 \cdot 120 + 3 \cdot 280 + (-2) \cdot 160 + 1 \cdot 130 + (-1) \cdot 220 + 3 \cdot 60 + 4 \cdot 70 + 2 \cdot 80 = 1050$. Перевіримо виконання **2 умови оптимальності** $u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0$ для незаповнених клітинок:

$A_iB_j : u_i + v_j \qquad c_{ij}, \qquad \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$

$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + (-1) = -1 < 7, \quad \Delta_{12} = -1 - 7 = -8$

$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 0 + 3 = 3 < 9, \quad \Delta_{13} = 3 - 9 = -6$

$A_1B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 4 = 4 < 5, \quad \Delta_{14} = 4 - 5 = -1$

$A_1B_5 : u_1 + v_5 = 0 + 2 = 2 > 0, \quad \Delta_{15} = 2 - 0 = 2 > 0$

$A_2B_4 : u_2 + v_4 = 3 + 4 = 7 < 8, \quad \Delta_{24} = 7 - 8 = -1$

$A_2B_5 : u_2 + v_5 = 3 + 2 = 5 > 0, \quad \Delta_{25} = 5 - 0 = 5 > 0 \quad \max$

$A_3B_1 : u_3 + v_1 = -2 + 1 = -1 < 3, \quad \Delta_{31} = -1 - 3 = -4$

$A_3B_2 : u_3 + v_2 = -2 + (-1) = -3 < 8, \quad \Delta_{32} = -3 - 8 = -11$

Перший опорний план **неоптимальний**, оскільки існують значення $\Delta_{ij} > 0$. Визначимо найбільше порушення

$max\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$, яке записуємо в лівому нижньому куточку відповідної потенціальної клітинки:

$$max\{\Delta_{15} = 2; \Delta_{25} = 5\} = \Delta_{25}$$

Для вибраної порожньої клітинки A_2B_5, яку називають ***потенціальною клітинкою*** будуємо ***цикл перерахування*** та виконуємо перерозподіл продукції в межах цього циклу.

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали,
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	$u_1 = 0$
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6	8	+ 0	$u_2 = 3$
$A_3 = 160$	3	8	+ 1	2 **70**	− 0	$u_3 = -2$
Потенціали, v_i	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$	$v_5 = 1$	$Z_1 = 1050$

У результаті отримаємо новий опорний план

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали,
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4 **10**	2 **220**	6	8	0	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1	2 **70**	0	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_2 = 800$

$$Z_2 = 1 \cdot 120 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 220 + 0 \cdot 50 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 30 = 800$$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок *7*, то другий опорний план **невироджений.**

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів $\boldsymbol{u_i}$ та $\boldsymbol{v_j}$.

Згідно **1 умови оптимальності** $\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0}$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_1 = 4 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_2 + v_5 = 0 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ v_2 = -1 \\ v_5 = -3 \\ u_3 = 3 \\ v_4 = -1 \\ v_3 = -2 \end{cases}$$

Правильність обчислення потенціалів перевіримо згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$0 \cdot 120 + 3 \cdot 280 + 3 \cdot 160 + 1 \cdot 130 + (-1) \cdot 220 + (-2) \cdot 60 + (-1) \cdot 70 + (-3) \cdot 80 = 800$$

Перевіримо виконання **2 умови оптимальності** $u_i + v_j \le c_{ij}$, $x_{ij} = 0$ для незаповнених клітинок:

$A_i B_j : u_i + v_j \qquad c_{ij}, \quad \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$

$A_1 B_2 : u_1 + v_2 = 0 + (-1) = -1 < 7, \quad \Delta_{12} = -1 - 7 = -8$

$A_1 B_3 : u_1 + v_3 = 0 + (-2) = -2 < 9, \quad \Delta_{13} = -2 - 9 = -11$

$A_1 B_4 : u_1 + v_4 = 0 + (-1) = -1 < 5, \quad \Delta_{14} = -1 - 5 = -6$

$A_1 B_5 : u_1 + v_5 = 0 + (-3) = -3 < 0, \quad \Delta_{15} = -3 - 0 = -3$

$A_2 B_3 : u_2 + v_3 = 3 + (-2) = 1 < 6, \quad \Delta_{23} = 1 - 6 = -5$

$A_2 B_4 : u_2 + v_4 = 3 + (-1) = 2 < 8, \quad \Delta_{25} = 2 - 8 = -6$

$A_3 B_1 : u_3 + v_1 = 3 + 1 = 4 > 3, \quad \Delta_{31} = 4 - 3 = 1 > 0$

$A_3 B_2 : u_3 + v_2 = 3 + (-1) = 2 < 8, \quad \Delta_{32} = 2 - 8 = -6$

Другий опорний план **неоптимальний**, оскільки $\Delta_{31} = 1 > 0$.

Для вибраної потенціальної порожньої клітинки A_3B_1 будуємо ***цикл перерахування*** та виконуємо перерозподіл продукції в межах цього циклу

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали, u_i
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	$u_1 = 0$
$A_2 = 280$	− 4	2 **220**	6	8	+ 0	$u_2 = 3$
$A_3 = 160$	+ 3	8	1	2 **70**	− 0	$u_3 = -2$
Потенціали, v_i	$v_1 = 1$	$v_2 = -1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 4$	$v_5 = 1$	$Z_2 = 800$

В результаті отримаємо новий опорний план

Постачальники A_i	Споживачі B_j					Потенціали,
	$B_1 = 130$	$B_2 = 220$	$B_3 = 60$	$B_4 = 70$	$B_5 = 80$	
$A_1 = 120$	1 **120**	7	9	5	0	u_1
$A_2 = 280$	4	2 **220**	6	8	0	u_2
$A_3 = 160$	3	8	1	2 **70**	0	u_3
Потенціали, v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	$Z_3 = 790$

$$Z_3 = 1 \cdot 120 + 2 \cdot 220 + 0 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 60 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 20 = 790$$

Оскільки $m = 3, n = 5,\ m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ і дорівнює кількості заповнених клітинок *7*, то новий опорний план **невироджений.**

Перевіримо його на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j.

Згідно **1 умови оптимальності** $u_i + v_j = c_{ij}, x_{ij} > 0$, потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_5 = 0 \\ u_3 + v_1 = 3 \\ u_3 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_4 = 2 \\ u_3 + v_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 1 \\ u_3 = 2 \\ v_3 = -1 \\ v_4 = 0 \\ v_5 = -2 \\ u_2 = 2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Правильність обчислення потенціалів перевіримо згідно умови:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$0 \cdot 120 + 2 \cdot 280 + 2 \cdot 160 + 1 \cdot 130 + 0 \cdot 220 + (-1) \cdot 60 + 0 \cdot 70 + (-2) \cdot 80 = 790$$

Перевіримо виконання **2 умови оптимальності** $u_i + v_j \le c_{ij}, x_{ij} = 0$ для незаповнених клітинок:

$$\begin{array}{lll}
A_i B_j : u_i + v_j & c_{ij}, & \Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \\
A_1 B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 0 & = 0 < 7, & \Delta_{12} = 0 - 7 = -7 \\
A_1 B_3 : u_1 + v_3 = 0 + (-1) & = -1 < 9, & \Delta_{13} = -1 - 9 = -10 \\
A_1 B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 0 & = 0 < 5, & \Delta_{14} = 0 - 5 = -5 \\
A_1 B_5 : u_1 + v_5 = 0 + (-2) & = -2 < 0, & \Delta_{15} = -2 - 0 = -2 \\
A_2 B_1 : u_2 + v_1 = 2 + 1 & = 3 < 4, & \Delta_{23} = 3 - 4 = -1 \\
A_2 B_3 : u_2 + v_3 = 2 + (-1) & = 1 < 6, & \Delta_{25} = 1 - 6 = -5 \\
A_2 B_4 : u_2 + v_4 = 2 + 0 & = 2 < 8, & \Delta_{31} = 2 - 8 = -5 \\
A_3 B_2 : u_3 + v_2 = 2 + 0 & = 2 < 8, & \Delta_{32} = 2 - 8 = -6
\end{array}$$

Третій опорний план **оптимальний**, оскільки усі значення $\Delta_{ij} < 0$.

Отже оптимальний план має вигляд

$$X^* = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 220 & 0 & 0 & 60 \\ 10 & 0 & 60 & 70 & 20 \end{pmatrix},$$

Йому відповідає оптимальне (мінімальне) значення цільової функції $Z_{\min} = 790$.

При цьому залишаються не використанні 60 ум.од. у 2 постачальника і 20 ум.од у 3 постачальника.

Лекція 7

ТЕМА 5. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ОПТИМАЛЬНОГО СКЛАДУ МАШИНО-ТРАКТОРНОГО ПАРКУ

ПЛАН

5.1. Економіко-математична модель задачі комплектування машинно-тракторного парку

5.2. Економіко-математична модель задачі доукомплектування машинно-тракторного парку

5.3. Економіко-математична модель задачі розподілу наявної техніки

5.4. Формування вихідної інформації і спосіб формування різноманітних матриць для вирішення задач оптимізації машинно-тракторного парку

Сільське господарство відноситься до складних економічних систем, які, задля виживання в ринкових умовах, потребують постійного розвитку всіх компонентів виробничого потенціалу: земля, трудовий, фінансовий, техніко-технологічний, підприємницький тощо. Тому, послаблення або припинення розвитку одного із них призводить до поступового (а інколи і стрімкого) занепаду економічної системи. Раціональне формування машинно-тракторних парків сільськогосподарських підприємств є одним із можливих шляхів підвищення ефективності використання техніко-технологічного потенціалу аграріїв.

Повне оснащення сільськогосподарських підприємств сучасною технікою потребує великих капіталовкладень, тому особливо важливо, щоб ця техніка використовувалася з максимальним ефектом. Одним з найважливіших завдань фахівців інженерно-технічної служби агропромислового комплексу є визначення для кожного окремого господарства або машинно-технічної станції такої мінімальної, але достатньої кількості машин і машинного парку в цілому, яка забезпечить найефективніше його використання.

Задача про визначення оптимального з точки зору розглянутого критерію складу машинно-тракторного парку сільськогосподарських підприємств - одна з найважливіших задач розвитку аграрної галузі.

В якості критерію оптимальності в цій задачі можна обрати мінімум загальних витрат, тобто мінімум грошових витрат на придбання техніки та виконання всіх сільськогосподарських робіт. В якості критерію оптимальності можна взяти і мінімум машин, і мінімум витрати пального тощо.

Таким чином, задача планування потреби сільськогосподарського підприємства в техніці полягає у виборі такого складу машинно-тракторного парку та такого плану його використання, при якому дотримуються агротехнологічні вимоги, забезпечується виконання всіх заданих обсягів робіт у визначені терміни з мінімальними загальними витратами (тут і надалі в якості критерію оптимальності обираємо мінімум приведених витрат).

Для обґрунтування та оптимізації машино-тракторного парку використовується *математичне моделювання*. А з використанням ПЕОМ розв'язання цієї задачі удосконалюється.

В умовах конкретного господарства ця економічна модель задачі планування потреби в техніці передбачає три різні варіанти.

1. Задача визначення оптимального складу машинно-тракторного парку за умови, що в господарстві повністю відсутні машини, тобто *задача комплектування парку*, найбільш доцільного його придбання.

2. Задача визначення оптимального складу машинно-тракторного парку за умови, що певний парк в господарстві вже є, то є *задача доукомплектування наявного парку*. У цьому випадку передбачається можливість списання окремих машин, якщо витрати на їх утримання більше того ефекту, який господарство може отримати при їх використанні.

3. *Задача визначення плану найкращого використання наявного* в господарстві машинно-тракторного парку за умови, що господарство не має можливості докуповувати нові машини. У цьому випадку також передбачено списання окремих машин.

Розглянемо кожну з цих задач.

5.1. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ КОМПЛЕКТУВАННЯ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКУ

Задача по визначенню оптимального складу машинно-тракторного парку є однією з найважливіших задач наукового

обґрунтування ефективної організації сільськогосподарського виробництва.

Для того щоб з безлічі можливих варіантів складу машинно-тракторного парку вибрати оптимальний варіант з точки зору розглянутого критерію, тобто знайти економіко-математичний оптимум, потрібно вирішувати громіздкі задачі лінійного програмування, а значить, використовувати економіко-математичні методи і ПЕОМ.

Природно, для різних критеріїв будуть отримані різні оптимальні плани. Розглянемо в якості оптимального варіанту машинно-тракторного парку такий, при якому виконуються всі задані обсяги робіт у визначені терміни при мінімальних приведених витратах і дотриманні агротехнічних умов.

Передбачається, що у господарстві повністю відсутні машини, парк комплектується з усіх можливих марок тракторів і сільськогосподарських машин.

Уточнимо загальну постановку задачі, використовуючи апарат лінійної алгебри, тобто запишемо алгебраїчні співвідношення, в які закладемо економічний зміст. Отримаємо економіко-математичну модель задачі.

Введемо наступні загальноприйняті позначення.

Кількість марок тракторів і сільськогосподарських машин, з яких буде комплектуватися машинно-тракторний парк (МТП), позначимо через n, їх номери $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$. Кількість всіх сільськогосподарських робіт, які виконуються в даному господарстві, позначимо через m, їх номери $1, 2, \ldots, j, \ldots, m$, через, $1, 2, \ldots, t, \ldots, T$ позначимо номера розрахункових періодів, на які потрібно розбити весь термін, що відводиться на виконання всього комплексу робіт.

Обсяг кожної роботи передбачається заданим. Зручно вважати його заданим для роботи з номером j в розрахунковому періоді t і позначити P_{jt}.

Припустимо, що з кожною маркою трактора можуть агрегатуватися на кожній роботі різні сільськогосподарські машини, тобто для кожної марки трактора можливі різні способи агрегатування.

Кількість всіх можливих агрегатів в господарстві позначимо через l, їх номери $1, 2, \ldots, k, \ldots, l$.

Задамо продуктивність агрегатів на кожній роботі за кожен розрахунковий період (тобто продуктивності тракторів на кожній роботі з урахуванням агрегатованих з ними сільськогосподарських машин).

Позначимо продуктивність агрегату k на роботі j за період t через a_{kjt}.

Далі через x_{kjt} позначимо кількість агрегатів з номером k потрібних для виконання роботи j за період t.

Умова, що гарантує виконання всього заданого обсягу робіт, записується таким алгебраїчним співвідношенням:

$$\sum_{k=1}^{l_j} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, \left(j = 1,2,...,m;\ t = 1,2,...,T\right) \qquad (1)$$

де l_j – загальна кількість одиниць, які можуть виконувати j-ту роботу.

Кількість цих співвідношень не перевищує $m \cdot T$.

Позначимо через x_i загальну кількість машин марки i, що необхідні для даного господарства, і через b_{kj}^i – кількість машин марки, з номером i, що входить в k-й агрегат, який виконує j-ю роботу.

Парк буде комплектуватися з найбільш ефективних марок машин з точки зору розглянутого критерію.

Умова, що кількість машин марки $\boldsymbol{i}$, що виконують усі роботи за період t, не повинно перевищувати їх загального числа x_i запишеться так:

$$\sum_{j \in J_t} \sum_{k=1}^{l_j} b_{kj}^i x_{kjt} \le x_i, \left(i = 1,2,...,n;\ t = 1,2,...,T\right) \qquad (2)$$

де J_t – підмножина, якій належать всі роботи, що виконуються за період t.

Кількість обмежень в (2), не перевищує значення $n \cdot T$. Крім того, очевидно, мають місце тривіальні обмеження:

$$x_i \ge 0 \left(i = 1,2,...,n\right);$$

$$x_{kjt} \ge 0 \left(k = 1,2,...,l_j;\ j \in J_t; t = 1,2,...,T\right) \qquad (3)$$

Позначимо, нарешті, через c_{kjt} прямі витрати на один агрегат k, що виконує роботу j за період t.

Різні способи агрегування для однієї і тієї ж марки трактора відрізняються, очевидно, прямими виробничими витратами. Тоді наведені витрати, тобто сума прямих виробничих витрат на

виконання всіх тракторних робіт і витрат на придбання техніки, запишуться у вигляді:

$$F = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in J_t} \sum_{k=1}^{l_j} c_{kjt} x_{kjt} + \sum_{i=1}^{n} (\alpha c_i + p_i) x_i, \qquad (4)$$

де α - нормативний коефіцієнт ефективності капіталовкладень; c_i c_i– балансова вартість машини марки ***i;*** p_i – вартість утримання машини марки ***i***.

Задача визначення оптимального складу машинно-тракторного парку тепер, очевидно, буде сформульована так: визначити склад парку (всі x_i) і план його використання протягом всього року (всі x_{ijt}), при якому досягається мінімум (4), якщо виконуються обмеження (1)–(3).

(1)–(4) – математична постановка задачі оптимізації машинно-тракторного парку.

Розглянута модель є найбільш повною, так як вона будується з урахуванням всього машинно-тракторного парку, і, отже, при розв'язанні задач, для яких за критерій оптимальності вибирається мінімум витрат, в функціоналі (4) враховується і вартість тракторів, і вартість агрегатованих з ними сільськогосподарських машин.

Однак ця модель навіть для окремих господарств приводить до задачі з істотно великими розмірами матриці системи обмежень (1)–(2). Задачі ж з великими матрицями, як відомо, вельми важкі для розв'язання на сучасних ПЕОМ.

Тому у ряді випадків можна розглядати спрощену модель, побудовану тільки для тракторного парку. У цій моделі різні способи агрегування тракторів з сільськогосподарськими машинами враховуються, як зазвичай, в продуктивності агрегатів і в прямих виробничих витратах.

Приймаючи до уваги, що вартість тракторів значно перевищує вартість сільськогосподарських машин, вартість останніх в моделі не враховується. Система обмежень в цьому випадку має такий вигляд.

Умови виконання заданих обсягів робіт:

$$\sum_{k=1}^{l_j} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, (j = 1, 2, ..., m;\ t = 1, 2, ..., T), \qquad (5)$$

де l_j – загальна кількість агрегатів, що виконують у-ю роботу; a_{kjt} – продуктивність *k*-х агрегату на *j*-й роботи за період *t*, x_{kjt} – кількість *k*-х агрегатів на *j*-й роботи за період *t*.

Позначимо через ***n*** число марок тракторів, з яких буде комплектуватися тракторний парк, їх номери 1, 2,. .., і, ... *n*.

Тоді умови, що кількість тракторів марки *i*, що працюють в період *t*, не перевищує загального числа тракторів x_i в господарстві, будуть записані:

$$\sum_{j \in J_t} \sum_{k \in L_i} x_{kjt} \le x_i, \left(i = 1, 2, ..., n;\ t = 1, 2, ..., T\right) \qquad (6)$$

де J_t – підмножина, якій належать всі роботи, що виконуються за період *t*; L_i – підмножина, якій належать всі агрегати, що містять трактор марки *i,* працюючі на *j*-й роботі.

Умови невід'ємності розв’язку:

$$x_i \ge 0 \left(i = 1, 2, ..., n\right);$$

$$x_{kjt} \ge 0 \left(k = 1, 2, ..., l_j;\ j \in J_t; t = 1, 2, ..., T\right) \qquad (7)$$

Наведені витрати в цьому випадку мають вигляд:

$$F = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in J_t} \sum_{k=1}^{l_j} c_{kjt} x_{kjt} + \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \qquad (8)$$

де c_{kjt} – прямі витрати на *k*-й агрегат, який виконує *j*-у роботу за період *t*; c_i – балансова вартість трактора марки *i*.

Формулювання задачі визначення оптимального складу тракторного парку, очевидно, аналогічна наведеній вище: знайти такий склад тракторного парку (всі x_i) і такий план його використання (всі x_{kjt}) при якому досягається мінімум функціоналу (8) при виконанні обмежень (5)–(7). Таким чином, в цій моделі передбачається, що є деякі штучні марки тракторів (трактор-сільськогосподарська машина) різної продуктивності і з різними прямими виробничими витратами на кожній роботі. При цьому ціна кожної такої штучної марки приймається рівній ціні трактора, тобто в функціоналі (8) враховується тільки балансова вартість тракторів і не враховується вартість агрегатованих з ними сільськогосподарських машин, за винятком тих, вартість яких порівнюється з вартістю тракторів. Його припущення не повинно в значній мірі вплинути на рішення задачі.

Отримані в результаті розв’язки приведені витрати будуть, очевидно, занижені на вартість всіх агрегованих з тракторами сільськогосподарських машин, окрім тих, які беруть участь в розрахунку, тобто входять в (6)– (8).

Проведені за цією спрощеною моделлю розрахунки показують, що похибка розв'язку при зробленому припущенні невелика, а розміри задачі істотно зменшуються.

Отже, задача щодо визначення оптимального складу машинно-тракторного парку та вибору найбільш раціонального графіку його роботи звелася до розв'язання задачі лінійного програмування, тобто до знаходження такого розв'язку системи обмежень (5)– (7), при якому досягається ***min*** умови (8).

5.2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДОУКОМПЛЕКТУВАННЯ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКУ

Припустимо, що господарство має в своєму розпорядженні деякий машинно тракторний парк, але має можливість купити ще таку кількість машин, яку необхідно для виконання всього заданого обсягу робіти у визначений термін з найменшими загальними витратами.

У цьому випадку виникає задача про доукомплектування наявного парку.

Використовуючи наведені вище позначення, складемо математичну модель даної задачі. Вона має такий вигляд.

Знайти мінімум цільової функції:

$$F = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in J_t} \sum_{k=1}^{l_j} c_{kjt} x_{kjt} + \sum_{i=1}^{n} (\alpha c_i + p_i) x_i - \sum_{i=1}^{n} (p_i + \rho_i) y_i, \qquad (9)$$

За умов:

$$\sum_{k=1}^{l_j} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, (j = 1, 2, ..., m;\ t = 1, 2, ..., T) \qquad (10)$$

$$\sum_{j \in J_t} \sum_{k=1}^{l_j} b_{kj}^{i} x_{kjt} \le d_i + x_i - y_i, (i = 1, 2, ..., n;\ t = 1, 2, ..., T) \qquad (11)$$

$$x_{kjt} \ge 0 \ (k = 1, 2, ..., l_j;\ j \in J_t; t = 1, 2, ..., T) \qquad (12)$$

$$x_i \ge 0 \ (i = 1, 2, ..., n);$$

$$y_i \ge 0 \ .$$

де x_i – кількість машин марки *i*, що потрібно купити; y_i – кількість машин марки *i*, що необхідно списати; d_i – кількість машин марки *i*, наявне в господарстві; p_i – вартість утримання однієї машини марки *i*

за що розглядається час; ρ_i – остаточна вартість однієї машини марки i при знятті з балансу.

Співвідношення (9) – (12) мають такий же економічний зміст, як і співвідношення (1) – (4). Зрозуміло, що розглянута задача (9) – (12), так само як і задача (1) – (4), є задачею лінійного програмування. Якщо розміри матриці системи обмежень (10) - (11) цієї задачі такого ж порядку, як і розглянутої (5) - (8), то все сказане щодо розв'язання задачі на придбання тракторного парку переноситься без будь-яких змін і на випадок задачі доукомплектування тракторного парку.

Якщо задача доукомплектування тракторного парку ставиться з урахуванням можливості списання неефективних машин, то число потрібних невідомих збільшується.

5.3. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ РОЗПОДІЛУ НАЯВНОЇ ТЕХНІКИ

Припустимо, що господарство має достатній машинно-тракторний парк і не має можливості купувати нові машини. Задача полягає в тому, щоб визначити такий план використання наявного парку, при якому забезпечується виконання всього заданого комплексу робіт в установлені агротехнічні терміни з мінімальними експлуатаційними витратами. Така задача називається задачею про розподіл наявної техніки. Математично вона формулюється наступним чином.

Знайти мінімум функції мети:

$$F = \sum_{t=1}^{T} \sum_{j \in J_t} \sum_{k=1}^{l_j} c_{kjt} x_{kjt} - \sum_{i=1}^{n} (p_i + \rho_i) y_i, \tag{13}$$

за умов:

$$\sum_{k=1}^{l_j} a_{kjt} x_{kjt} = P_{jt}, (j = 1,2,...,m;\ t = 1,2,...,T) \tag{14}$$

$$\sum_{j \in J_t} \sum_{k=1}^{l_j} b_{kj}^i x_{kjt} \le d_i, (i = 1,2,...,n;\ t = 1,2,...,T) \tag{15}$$

$$x_{kjt} \ge 0\ (k = 1,2,...,l_j;\ j \in J_t; t = 1,2,...,T) \tag{16}$$

$$y_i \ge 0\ (i = 1,2,...,n).$$

Співвідношення (13) – (16) мають такий же економічний зміст, як і співвідношення (1) – (4). Таким чином, розглянута задача, як і дві вище, звелась до задачі лінійного програмування.

Розв'язання її значно простіше, ніж розглянуті вище, так як число невідомих в ній зменшилось.

5.5. ФОРМУВАННЯ ВИХІДНОЇ ІНФОРМАЦІЇ І СПОСІБ ФОРМУВАННЯ РІЗНОМАНІТНИХ МАТРИЦЬ ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ МАШИННО-ТРАКТОРНОГО ПАРКУ

Для розв'язання задачі оптимізації структури машинно-тракторного парку потрібна наступна вихідна інформація:

1) об'єми механізованих робіт по окремих технологічних операцій;

2) агротехнічні терміни проведення механізованих робіт;

3) ціни на випущені промисловістю трактори, автомобілі та сільськогосподарські машини;

4) норми виробітку на механізовані роботи;

5) прямі експлуатаційні витрати за видами механізованих робіт і способам їх виконання.

Перелік механізованих робіт, їх обсяги і терміни проведення встановлюються на основі технологічних карт.

Нормативи продуктивності агрегатів встановлюються на основі діючих типових норм виробітку на сільськогосподарські механізовані роботи, а також матеріалів зональних і обласних нормативних станцій.

Розрахунок нормативів експлуатаційних витрат. До прямих експлуатаційних витрат на механізовані роботи відносять оплату праці, вартість пального, амортизаційні відрахування, витрати на ремонт і технічний догляд.

Витрати на оплату праці розраховують на основі діючих тарифних ставок за норми виробітку.

Витрати на пальне визначають на основі норм його витрати на 1 га за видами робіт і марками тракторів і вартості 1 кг комплексного пального. У вартість комплексного пального включається вартість бензину і мастил.

В основу розрахунку амортизації належить обчислення амортизаційних відрахувань на 1 годину роботи машини. Річну суму амортизації на кожній марці машин визначають шляхом обчислення відсотка відрахувань від балансової вартості. Для визначення відрахувань на 1 годину роботи машини необхідно встановити річне

завантаження машини в годинах. Наприклад, знаючи балансову вартість трактора, відсоток амортизаційних відрахувань і річне завантаження трактора в годинах, амортизаційні відрахування на 1 годину його роботи визначають за формулою:

$$А_Т = \frac{Б * Н}{100 * Г},$$

де $А_Т$ - амортизаційні відрахування на 1 годину роботи трактора; Б - балансова вартість трактора в рублях (оптова ціна + вартість доставки в господарство + націнка «Сільгосптехніки»); Н - норма відрахувань на амортизацію у відсотках; Г-річне завантаження трактора в годинах.

Аналогічно розраховують амортизаційні відрахування на 1 годину роботи комбайнів і сільськогосподарських машин.

Відрахування на ремонт сільськогосподарських машин роблять так само на 1 годину роботи і розраховують за формулою:

$$Q = \frac{Б * П}{100 * Г}$$

де Q - відрахування на ремонт за 1 годину роботи машини; Б - балансова вартість однієї машини; Г - річний обсяг роботи машини в годинах; П - відсоток відрахувань на поточний ремонт.

Відрахування на ремонт розраховують за кожною маркою тракторів, комбайнів і сільськогосподарських машин.

Лекція 8

ТЕМА 6. ДРОБОВО-ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ПЛАН

6.1. Постановка задачі дробово-лінійного програмування
6.2. Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

При розв'язанні задач, часто за критерій оптимальності беруть показники рентабельності, продуктивності праці тощо, які математично подаються дробово-лінійними функціями. Загальна математична модель у цьому разі матиме вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_o}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_o} \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \left(i = \overline{1,n}\right),$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Припускають, що знаменник цільової функції в області допустимих розв'язків системи обмежень не дорівнює нулю.

6.2. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ

Алгоритм розв'язування задачі дробово-лінійного програмування передбачає зведення її до задачі лінійного програмування. Для цього позначимо знаменник

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0},$$

зробимо заміну змінних

$$y_j = y_0 x_j \Rightarrow x_j = \frac{y_j}{y_0}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \ ,$$

і виконаємо відповідні перетворення:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{y_j}{y_0} + c_0}{\frac{1}{y_0}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0}{y_0} \cdot \frac{y_0}{1} = \sum_{j=1}^{n} c_l y_j + c_0 y_0 \to max(min)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{y_j}{y_0} = b_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = b_i y_0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 = \frac{1}{y_0} \Rightarrow \sum_{j-1}^{n} d_j x_j y_0 + d_0 y_0 = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$y_0 > 0 .$$

У результаті отримаємо задачу лінійного програмування, яку можна розв’язати симплексним методом.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 \to \max(\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{il} y_j - b_i y_0 = 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1$$

$$y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

$$y_0 > 0$$

Нехай її оптимальний план $y_{0j} = \{y_{01}, \quad y_{02}, \quad ..., \quad y_{0n}, \quad y_0\}$.

Тоді значення x_{0j} оптимального плану заданої задачі дробово-лінійного програмування знайдемо за формулою

$$x_{0j} = \frac{y_{0j}}{y_0} \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$$

ТЕМА 7. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ПЛАН

7.1. Постановка задачі цілочислового програмування
7.2. Метод Гоморі
7.3. Метод «віток і меж»

7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Існує доволі широкий клас задач математичного програмування, в економіко-математичних моделях яких одна або кілька змінних мають набувати цілих значень, наприклад, коли йдеться про кількість верстатів у цеху, корів у сільськогосподарських підприємствах тощо, тобто коли така вимога випливає з особливостей технології виробництва. До цілочислового програмування належать також задачі оптимізації, в яких змінні набувають лише двох значень — 0 або 1 (бульові, або бінарні змінні).

До цілочислового програмування відносять задачі про призначення, найкоротший шлях і т. ін. У реальних задачах часто цілочислових значень набувають не всі, а одна чи кілька змінних. Такі задачі називають ***частково цілочисловими***.

Загальна задача цілочислового програмування записується так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min), \qquad (7.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (7.2)$$

$$x_j \ge 0 \qquad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad (7.3)$$

$$x_j \text{ — цілі} \qquad \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (7.4)$$

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів:

- методи відтинання;

- комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими ***послабленими обмеженнями***, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є ***метод віток і меж***.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбіновані методи, причому оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

7.2. МЕТОД ГОМОРІ

Нехай маємо задачу цілочислового програмування (7.1)—(7.4). Для її розв'язування можна скористатися ітеративним методом Гоморі.

1. Знаходять розв'язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних — (7.1)—(7.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (7.1)—(7.4).

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове ***обмеження Гоморі***:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_j\},$$

де символ $\{\ \}$ позначає ***дробову частину*** числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа від цього числа віднімають ***цілу його частину*** — найбільше ціле число, що не перевищує даного. Цілу частину числа позначають символом $[\ ]$. Наприклад,

$$[1{,}8] = 1; \quad \{1{,}8\} = 1{,}8 - 1 = 0{,}8;$$

$$[-1{,}8] = -2; \quad \{-1{,}8\} = -1{,}8 - (-2) = -1{,}8 + 2 = 0{,}2$$

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Здобуту розширену задачу розв'язують, а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Істотними є також похибки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

7.3. МЕТОД «ВІТОК І МЕЖ»

Ефективнішим за метод Гоморі розв'язування задач цілочислового програмування є метод ***«віток і меж».***

1. Розв'язується послаблена без умови цілочисловості задача — (7.1)—(7.3) за допомогою симплекс-методу.

2. Нехай x_j – шукана цілочислова змінна, значення якої x_j^* в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Тоді можна стверджувати, що в інтервалі $\left(\lfloor x_j^* \rfloor,\ \lfloor x_j^* \rfloor + 1\right)$ цілих значень немає.

Наприклад, якщо $x_j^* = 3{,}2$, то в інтервалі $(3;4)$ цілих значень x_j не існує, а якщо $x_j^* = -3{,}2$, то в інтервал $(-4;3)$ також не існує цілих значень x_j.

Отже, допустиме ціле значення x_j має задовольняти одну з нерівностей

$$x_j \le \lfloor x_j^* \rfloor \quad \text{або} \quad x_j \ge \lfloor x_j^* \rfloor + 1.$$

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \quad (7.5)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i,\ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (7.6)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (7.7)$$

$$x_j \text{ — цілі}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (7.8)$$

$$x_j \le \lfloor x_j^* \rfloor; \quad (7.9)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \quad (7.10)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i,\ \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (7.11)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (7.12)$$

$$x_j \text{ — цілі}, \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \quad (7.13)$$

$$x_j \ge \lfloor x_j^* \rfloor + 1, \quad (7.14)$$

де x_j^* — компонент розв'язку задачі (7.1)—(7.4).

3. Далі симплекс-методом розв'язуємо послаблені задачі (7.5)—(7.9) і (7.10)—(7.14), тобто з відкиданням обмежень (7.8) і (7.13).

Якщо знайдені оптимальні плани задовольняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (7.1)—(7.4).

Інакше пошук розв’язку задачі триває. Для подальшого розгалуження беремо задачу з найбільшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з найменшим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв’язку. Здобутий план – оптимальний.

Розв’язування цілочислових задач методом «віток і меж» можна значно прискорити, приєднавши обмеження виду (7.9) і (7.14) до останньої симплекс-таблиці не початкової (7.1) – (7.4), а відповідних задач.

Приклади цілочислових економічних задач

1. Задача лінійного розкрою.
2. Задача комівояжера
3. Задача планування виробничої лінії.
4. Задача оптимального призначення.

Лекція 10

ТЕМА 8. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ПЛАН

8.1. Постановка задачі нелінійного програмування.
8.2. Методи розв'язування задач нелінійного програмування.
8.3. Екстремуми функцій багатьох змінних.
8.4. Метод Лагранжа розв'язування задач нелінійного програмування.

8.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Розв'язуючи задачі оптимального управління (планування), доводиться враховувати нелінійний характер взаємозв'язків між показниками. У загальному вигляді ***нелінійна економіко-математична модель*** має вигляд:

$$Z = f(x_1, \quad x_2, \quad ..., \quad x_n) \to \max(\min) \tag{8.1}$$

за умов

$$q_i(x_1, \ x_2, \quad ..., x_n)\{\le, =, \ge\} b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{8.2}$$

де

$$f(x_1, \ x_2, \quad ..., x_n) \text{ і } q_i(x_1, \ x_2, \quad ..., x_n) \text{ — нелінійні функції.} \tag{8.3}$$

Труднощі розв'язування задач нелінійного програмування

Задачу нелінійного програмування намагаються звести до лінійного вигляду, при цьому можливі значні похибки. Взагалі лінеаризація нелінійних процесів є досить складною математичною задачею.

Для задач нелінійного програмування не існує універсального методу розв'язування, тому щоразу слід доводити існування розв'язку задачі, а також його єдиність. Це досить складна математична задача.

Відомі точні методи розв'язування нелінійних задач, але при цьому постають труднощі обчислювального характеру. Навіть для сучасних ПЕОМ відповідні алгоритми є доволі трудомісткими.

Для розв'язування нелінійних задач застосовують наближені методи, стикаючись із проблемою локальних і глобальних оптимумів.

8.2. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Для розв'язування задач нелінійного програмування не існує, як уже зазначалося, універсального методу, а тому доводиться застосовувати багато методів і обчислювальних алгоритмів, які ґрунтуються, здебільшого, на теорії диференціального числення, і вибір їх залежить від конкретної постановки задачі та форми економіко-математичної моделі.

Методи нелінійного програмування бувають ***прямі*** та ***непрямі.***

Прямими методами оптимальні розв'язки відшукують у напрямку найшвидшого збільшення (зменшення) цільової функції. Типовими для цієї групи методів є ***градієнтні***.

Непрямі методи полягають у зведенні задачі до такої, знаходження оптимуму якої вдається спростити. До них належать, насамперед, найбільш розроблені методи ***квадратичного*** та ***сепарабельного*** програмування.

Оптимізаційні задачі, на змінні яких не накладаються обмеження, розв'язують методами ***класичної математики***. Оптимізацію з обмеженнями-рівностями виконують методами ***зведеного градієнта***, скажімо ***методом Якобі***, та ***множників Лагранжа***. У задачах оптимізації з обмеженнями-нерівностями досліджують необхідні та достатні умови існування екстремуму ***Куна—Таккера***.

8.3. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області точки (x_0, y_0). Кажуть, що функція $z = f(x, y)$ має в точці (x_0, y_0) строгий максимум (мінімум), якщо $f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$ $(f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0))$ для всіх точок (x, y) достатньо близьких до x_0, y_0. Точка (x_0, y_0)*)* – точка ***максимуму*** (***мінімуму***).

Максимум і мінімум функції називають ***екстремумами*** функціями.

Теорема 8.1. (Необхідні умови екстремуму).

Якщо диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $P_0(x_0, y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Теорема 2. (Достатні умови існування екстремуму).

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в *D(f)* разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядків і точка $P_0(x_0, y_0)$ є критичною. Знайдемо в точці P_0 похідні другого порядку і позначимо: $A = (z''_{xx})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $B = (z''_{xy})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$, $C = (z''_{yy})_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$.

Якщо $AC - B^2 > 0$, то функція має в точці $P_0(x_0, y_0)$ екстремум: максимум якщо $A < 0$ і мінімум якщо $A > 0$.

Якщо $AC - B^2 < 0$, то в точці $P_0(x_0, y_0)$ екстремуму немає.

Якщо $AC - B^2 = 0$, то висновок про екстремум зробити не можна.

8.4. МЕТОД ЛАГРАНЖА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

Нехай задано функцію Z, стосовно якої ставиться вимога знайти її екстремуми при умові, що $q_i(x_1\ x_2,\ \ldots, x_n) = b_i\ \ (i = \overline{1, m})$, – рівняння розв'язку.

Ця задача умовного екстремуму зводиться до знаходження звичайного екстремуму функції

У класичному математичному аналізі для знаходження умовного екстремуму задачі нелінійного програмування застосовується метод множників Лагранжа, який дозволяє звести задачу пошуку умовного екстремуму до пошуку безумовного екстремуму.

Розглянемо таку задачу нелінійного програмування:

$$Z = f(x_1, x_2,\ \ldots, x_n) \to \max(\min) \tag{8.4}$$

за умов

$$q_i(x_1\ x_2,\ \ldots, x_n) = b_i\ \ (i = \overline{1, m}), \tag{8.5}$$

де функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервні та диференційовані в деякій області *D*. Рівняння (8.5) називаються **рівняннями** (або **умовами**) **зв'язку**.

Означення. Точка $X_0 \in D$, що задовольняє умові (8.5), називається точкою умовного максимуму (мінімуму) функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо в *D* існує такий окіл точки X_0, що нерівність $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ виконується для всіх точок *X* околу, координати яких задовольняють систему рівнянь (8.5).

Точки умовного максимуму та мінімуму називають точками умовного екстремуму, а задачу (8.4)-(8.5) називаються **задачею на умовний екстремум.**

Ідея методу множників Лагранжа полягає в заміні даної задачі простішою: на знаходження екстремуму іншої функції, на аргументи якої не накладено обмежень.

У розгляд вводять функцію виду:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n;\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n)), \tag{8.7}$$

яка називається ***функцією Лагранжа.*** Тут λ_i – не визначені поки що величини, так звані ***множники Лагранжа***.

Метод множників Лагранжа дозволяє вести пошук точок умовного екстремуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ серед стаціонарних точок функції Лагранжа L.

Необхідні умови умовного екстремуму.

Якщо $X_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – точка екстремуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умов зв'язку (8.5), то (за деяких додаткових обмежень на функції $q_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ існують сталі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, для яких виконуються умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1,n}\right), \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 & \left(i = \overline{1,m}\right), \end{cases} \tag{8.8}$$

запишемо систему у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial q_i(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_j} = 0 & \left(j = \overline{1,n}\right), \\ b_i - q_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 & \left(i = \overline{1,m}\right), \end{cases} \tag{8.9}$$

що забезпечує виконання умов (8.5) початкової задачі нелінійного програмування і, яка, як правило, нелінійна.

Розв'язавши цю систему, знайдемо $X_0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ — ***стаціонарні точки функції Лагранжа***. Оскільки їх визначено з необхідної умови екстремуму, то в них можливий максимум або мінімум задачі (8.4)-(8.6), або можуть бути точками перегину (***сідловими точками***). Серед стаціонарних точок функції Лагранжа є точки умовного екстремуму, однак серед них можуть бути і точки, в яких функція $\boldsymbol{f(x_1, x_2, ..., x_n)}$ не досягає умовного екстремуму.

Якщо стаціонарні точки знайдено, то питання про існування в них екстремуму вирішується на основі достатніх умов екстремуму – дослідження знака другого диференціалу

$$d^2L(x,\lambda_0,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda_0,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j \qquad (8.10)$$

$$\left(d^2L(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 L(x,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j\right).$$

в кожній стаціонарній точці за умови, що диференціали $dx_j,\ j=1,2,...,n$, пов'язані співвідношеннями

$$dq_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial q_i(x)}{\partial x_j}dx_j,\ i=1,...,m, \qquad (8.11)$$

які отримують диференціюванням рівнянь зв'язку (8.5).

Достатні умови умовного екстремуму.

Нехай для $X_0=(x_1,x_2,...,x_n)$ і $\lambda_0=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ справджуються умови (8.8), тобто X_0 є стаціонарною точкою функції Лагранжа. Тоді:

- X_0 є точкою умовного максимуму функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ за умов (8.5), якщо $d^2L(X_0,L)<0$ для довільних значень $dx_1,dx_2,...,dx_n$, які всі одночасно не дорівнюють нулю і пов'язані між собою умовами (8.11);
- X_0 є точкою умовного мінімуму функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ за умов (8.5), якщо $d^2L(X_0,L)>0$ для довільних значень $dx_1,dx_2,...,dx_n$, які всі одночасно не дорівнюють нулю і пов'язані між собою умовами (8.11);
- X_0 не є точкою умовного екстремуму функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ за умов (8.5), якщо $d^2L(X_0,L)$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень залежно від значень $dx_1,dx_2,...,dx_n$, пов'язаних між собою умовами (8.11);
- питання про наявність умовного екстремуму в точці X_0 залишається відкритим, якщо не справджуються умови жодного з попередніх підпунктів.

Достатні умови умовного екстремуму можна записати у вигляді таблиці 8.1.

Таблиця 8.1

№	$\lambda_0^* \neq 0$ $d^2 L(x^*,\lambda)$	$dg_i(x^*)$, $i = 1...m$	Тип умовно стаціонарної точки x^*
1	>0	0, $dx \neq 0$	Умовний локальний мінімум
2	<0	0, $dx \neq 0$	Умовний локальний максимум
3	≥ 0	0	Може бути умовний локальний мінімум. Потрібні додаткові дослідження
4	≤ 0	0	Може бути умовний локальний максимум. Потрібні додаткові дослідження.
5	=0	0	Потрібні додаткові дослідження.
6	><0	0	Немає екстремуму

Примітка. Якщо виявиться, що X_0 є точкою звичайного екстремуму функції Лагранжа $L(X,\lambda)$, то X_0 буде також точкою умовного екстремуму функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ і потреби в застосуванні достатніх умов немає.

Алгоритм розв'язування задачі нелінійного програмування на умовний екстремум методом множників Лагранжа.

1. Скласти узагальнену функцію Лагранжа
$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i q_i(x)$$
2. Знайти частинні похідні функції Лагранжа за змінними $x_1, x_2, ..., x_n$ і записати необхідні умови умовного екстремуму (8.8).
3. Розв'язати систему рівнянь (8.8) і знайти стаціонарні точки функції Лагранжа.
4. Для кожної стаціонарної точки записати другий диференціал (8.10) функції Лагранжа за умов зв'язку (8.11) на диференціали $dx_1, dx_2, ..., dx_n$.
5. За достатніми умовами знайти точки умовного екстремуму.
6. Обчислити значення функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точках умовного екстремуму.

Приклад 8.1. Дослідити на екстремум функцію $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$.

1. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10$$

2. Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0, \\ x - 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо із першого рівняння *y=2x-1* і підставимо у друге:

$$\begin{cases} x - 4(2x - 1) + 10 = 0, \\ \quad y = 2x - 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 8x + 14 = 0, \\ \quad y = 2x - 1. \end{cases}$$

x = 2, y=3

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx} = -2,\ z''_{xy} = 1,\ z''_{yy} = -4.$$

Як бачимо, частинні похідні другого порядку дорівнюють сталим числам в будь-який точці, а значить і в точці $P_0(2;3)$. Тому A=-2, B=1, C=-4.

$AC-B^2=(-2)(-4)-1=7>0$.

Таким чином, в точці P_0 (2;3) функція має максимум

$$z(2;3) = 2 \cdot 3 - 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 2 + 10 \cdot 3 - 8 = 8.$$

Приклад 8.2. Знайти умовний екстремум функції $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ на множинні X при умові $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2 = 0$

Розв'язання.

1. Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2)$$

2. Запишемо необхідні умови екстремуму першого порядку:

а) $\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda_1)}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda_1 = 0$, тобто $x_1 = \frac{-\lambda_1}{2}$

$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda_1)}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda_1 = 0$, тобто $x_2 = \frac{-\lambda_1}{2}$

б) $g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 = 0$

3. Розв'язок системи $x_1^* = x_2^* = 1, \lambda_1^* = -2$ – умовно стаціонарна точка.

4. Перевіримо достатні умови екстремуму:

а) $d^2L\left(x^*,\lambda_1^*\right)=2dx_1^2+2dx_2^2$, оскільки

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1^2}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_2^2}=2$$

$$\frac{\partial^2 L(x,\lambda_1)}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 L(x,\lambda 1)}{\partial x_2\partial x_1}=0$$

б) $dq_1\left(x^*\right)=dx_1+dx_2=0$, оскільки $\frac{\partial q_1(x)}{\partial x_1}=\frac{\partial q_1(x)}{\partial x_2}=1$

в) виразимо диференціал dx_1 через $dx_2 : dx_1=-dx_2$ і підставимо в d^2L;

г) $d^2L(x*,\lambda 1*)=4dx_2^2 \rhd 0$ при $dx_2\neq 0$ в точці $x^*=(1;1)^T$ регулярний локальний умовний мінімум.

Лекція 11-13

ТЕМА 9. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР

ПЛАН

9.1. Основні поняття теорії ігор.
9.2. Класифікація ігор.
9.3. Матричні ігри двох осіб.
9.4. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловини точками.
9.5. Мішані стратегії в матричних іграх.
9.6. Геометрична інтерпретація гри теорії гри.
9.7. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

9.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІГОР

За умов ринкової економіки все частіше мають місце конфліктні ситуації, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець — покупець (монополія — монопсонія). Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об'єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, дві фірми, які надають однакові послуги, можуть об'єднуватися з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

***Теорія ігор** — це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.*

Характерною особливістю ігрової ситуації є взаємодія протилежних (не завжди) інтересів двох чи більше «розумних»

суперників, кожний з яких намагається оптимізувати свої рішення. Існує багато різних ігор, серед яких найпоширеніші ***стратегічні.*** У таких іграх джерелом невизначеності є відсутність інформації про його стратегію. Кожна протидіюча сторона (гравці) мають можливість вибору одного (або кількох) варіантів дій — стратегій.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають ***гравцями***, по-друге, опису можливих дій кожної із сторін, що називаються ***стратегіями***, по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що подаються ***функціями виграшу***.

Стратегією гравця називають план, за яким він здійснює вибір у будь-якій можливій ситуації, і володіючи будь-якою фактично можливою інформацією.

Ігри будуються за певними правилами й відбуваються в результаті певної кількості ходів. ***Ходом теорії ігор*** називають вибір однієї з можливих, визначених правилами гри дій і реалізацію цієї дії. Кожному ходові гравців відповідає певний виграш (програш), який вони одержують (сплачують).

Завдання кожного гравця — знайти оптимальну стратегію, яка за багаторазового повторення гри забезпечує йому максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор. Прикладом «гри» в буквальному розумінні цього слова, передусім, є спортивна, карточна гра, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об'єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінки можливих рішень з різних поглядів. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення за складних реальних умов, проте слугують математично обґрунтованою підставою для прийняття таких рішень.

9.2. КЛАСИФІКАЦІЯ ІГОР

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається ***парною*** (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є ***множинною***.

Залежно від кількості стратегій розрізняють скінченні та нескінченні ігри. Якщо кожен гравець має скінченну кількість стратегій, то гра — ***скінченна***, в іншому разі — ***нескінченна***.

Якщо виграш одного гравця дорівнює програшу іншого, то маємо ***гру з нульовою сумою***. Такі ігри характеризуються протилежними інтересами сторін, тобто ситуацією конфлікту. Інші ігри — з ненульовою сумою, виникають як за умов конфліктної поведінки гравців, так і за їх узгоджених дій.

За можливості поєднання інтересів гравців та домовленості між ними про вибір стратегій можна казати про ***кооперативну гру***, коли ж гравці не мають можливості чи не бажають координувати свої дії, то гра називається ***некооперативною***.

9.3. МАТРИЧНІ ІГРИ ДВОХ ОСІБ

Щоб описати гру, потрібно вказати множину гравців, їх допустимі ходи, правила проведення і оцінки результатів гри.

Множина гравців задається переліком учасників гри, множина їх допустимих ходів – описом ходів. У правилах звичайно вказано, які ходи є в розпорядженні гравця, деколи може задаватися також кількість ходів у грі. Оцінку результатів гри гравець отримує за допомогою функції виграшу, яка може набувати певного значення під час гри або після її закінчення.

Надалі будемо розглядати найпростіші варіанти деяких ігор. Для цього зробимо три припущення. Перше – у грі беруть участь лише двоє гравців. Друге – кожен гравець має скінченну кількість допустимих ходів, серед яких повинен вибрати лише один. Третє – всі ігри двоходові, тобто кожна гра складається лише з двох ходів, виконаних по одному кожним гравцем, але так, що, обираючи свій хід, гравець нічого не знає про вибір суперника. За умов двоходової гри стратегія як план на гру зводиться до допустимого ходу гравця. Тому надалі поняття стратегії і ходу ми ототожнюватимемо.

Отже, припускаємо, що гра відбувається між двома учасниками A та B; така гра називається парною. Учасник A може користуватися допустимими ходами (стратегіями) $A_1, A_2, ..., A_m$, а учасник B –

допустимими ходами $B_1, B_2, ..., B_n$. Правила гри: кожен з гравців *A* та *B* вибирає по одній зі своїх допустимих стратегій відповідно A_i та B_j, ($i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}$) і на цьому гра закінчується. Пара стратегій $\left(A_i, B_j\right)$ називається **ситуацією**. Повторення гри полягає в створенні гравцями іншої ситуації $\left(A_i, B_j\right)$. Ступінь зацікавленості гравців у результатах гри відображають функції виграшу.

Нехай $\varphi_1(A_i; B_j)$ – виграш гравця A, $\left(i = \overline{i,m};\ j = \overline{i,n}\right)$;

$\varphi_2\left(A_i; B_j\right)$ — виграш гравця B, $\left(i = \overline{i,m};\ j = \overline{i,n}\right)$.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1\left(A_i; B_j\right) + \varphi_2\left(A_i; B_j\right) \equiv 0$.

Тоді в разі $\varphi_1(A_i; B_j) = \varphi(A_i; B_j)$ маємо $\varphi_2(A_i; B_j) = -\varphi(A_i; B_j)$.

Отже, мета гравця A максимізувати $\varphi(A_i; B_j)$, а гравця B – її мінімізувати.

Функції виграшу набувають mn значень кожна. Тому їх можна задавати матрицями розміру $m \times n$, у яких рядки матриць відповідають стратегіям першого гравця *A*, стовпці – стратегіям другого гравця *B*. Звичайно ці дві матриці об'єднують в одну матрицю виграшів (або платіжну матрицю, матрицю гри). Рядки матриці виграшів відповідають стратегіям гравця *A*, стовпці – стратегіям гравця *B*.

Нехай $\varphi(A_i; B_j) = a_{ij}$, тобто маємо матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Зображення гри платіжною матрицею виграшів називається **нормальною формою запису гри**. Ця форма особливо зручна для ігор з двома гравцями. Ігри, для зображення яких можна застосувати матриці, називають також **матричними**.

9.4. МІНІМАКСНІ СТРАТЕГІЇ. ІГРИ З СІДЛОВИНИ ТОЧКАМИ

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією гри для вибору раціональних варіантів рішень, найпоширенішим (песимістичним) є ***критерій мінімаксу-максиміну.*** Сутність його полягає ось у чому.

Нехай гравець A вибрав стратегію A_i. Тоді в найгіршому випадку він отримає виграш, що дорівнює $\min a_{ij}$. Якщо навіть гравець B знає його стратегію, гравець A має діяти так, щоб максимізувати свій мінімальний виграш: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$.

Таку стратегію гравця A називають ***максимінною***, а розмір його гарантованого виграшу — ***нижньою ціною гри.***

Стратегія, яка забезпечує цей виграш, називається ***максимінною*** і позначається A_{i0}.

Гравець B, який програє суми в розмірі елементів платіжної матриці, навпаки, має обрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця A. Стратегію гравця B називають ***мінімаксною*** і позначають B_{j_0}. Розмір його програшу — ***верхня ціна гри***: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$.

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні не вигідно змінювати обрану стратегію, оскільки суперник може у відповідь обрати іншу стратегію, яка дасть йому кращий результат. Якщо $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \upsilon$, тобто $a = \beta = \upsilon$, то гра називається ***цілком визначеною***, число υ називається ***ціною гри***. Цілком визначені ігри називаються ***іграми із сідловою точкою.*** У цій ситуації оптимальним для обох гравців є вибір чистих стратегій — максимінної для гравця A і мінімаксної для B. Адже, якщо один із гравців додержує оптимальної стратегії, то для іншого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

Приклад 9.1. Маємо гру гравців A і B, яка задана платіжною матрицею. Визначити ціну гри та оптимальні стратегії дій гравців

$$\begin{array}{cc} & \text{Гравець } B \\ \text{Гравець } A & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 & 9 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Розв'язання. Оптимізацію гри починають, як правило, визначенням домінуючих стратегій для кожної зі сторін, а також відкиданням невигідних і дублюючих стратегій.

Насамперед визначають домінуючу стратегію. Перша стратегія гравця A домінує над третьою, оскільки всі значення його виграшів

за будь-яких дій суперника є не гіршими, ніж у разі вибору третьої стратегії, тобто всі елементи першого рядка платіжної матриці не менші за відповідні елементи її третього рядка. Тому третя стратегія гірша за першу й може бути вилучена з платіжної матриці.

Аналізуючи далі можливі дії гравця ***B***, зауважимо, що його перша стратегія домінує над п'ятою, яку можна відкинути як більш збиткову, а тому невигідну для цього гравця. Отже, маємо таку платіжну матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

У разі вибору гравцем ***A*** першої стратегії, залежно від дій гравця ***B*** він може отримати $6, 3, 8, àáî\ 5$ одиниць. Але завжди його виграш буде не меншим за $\min\{6, 3, 8, 9\} = 3$, тобто незалежно від поведінки гравця ***B***. Якщо розглянути можливі наслідки вибору гравцем ***A*** другої стратегії, то аналогічно його гарантований виграш становитиме $\min(6, 5, 7, 6) = 5$. Для третьої стратегії відповідно маємо: $\min(4, 4, 3, 8) = 3$.

Отже, ***нижня ціна*** гри: $\alpha = \max\{3, 5, 3\} = 5$, а гравець ***A*** для максимізації мінімального виграшу має обрати другу з трьох можливих стратегій. Така стратегія є максимінною в цій грі.

Гравець ***B***, який намагається мінімізувати свій програш, обираючи першу стратегію, може програти 6, 6, àáî 4 одиниці. Але за будь-яких варіантів дій гравця ***A*** він може програти не більш як $\max\{6, 6, 4\} = 6$. Для другої стратегії маємо $\max\{3, 5, 4\} = 5$, для третьої — $\max\{8, 7, 3\} = 8$, для четвертої — $\max\{5, 6, 8\} = 8$. Отже, ***верхня ціна*** гри $\beta = \min\{6, 5, 8, 9\} = 5$. І гравцю ***B*** доцільно вибирати другу стратегію, яка є мінімаксною у грі.

Оскільки $\alpha = \beta$, ця гра має ***сідлову точку***, ***ціна гри*** $\upsilon = 5$. Оптимальною максимінною стратегією гравця ***A*** є друга з трьох можливих стратегій його дій. Для гравця ***B*** оптимальною є також друга з чотирьох можливих. Компактно це можна записати так:

A_i	B_j				$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	3	8	5	**3**
A_2	6	5	7	6	**5**
A_3	4	4	3	8	**3**
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	**6**	**5**	**8**	**8**	$\alpha = 5$

					$\beta = 5$

$$\alpha = \max\{\min(6;3;8;5); \min(6;5;7;6); \min(4;4;3;8)\} = \max\{3;5;3\} = 5$$

$$\beta = \min\{\max(6;6;4); \max(3;5;4); \max(8;7;3); \max(5;6;8)\}$$

$$= \min\{6;5;8;8\} = 5$$

$$\upsilon = \alpha = \beta = 5$$

9.5. МІШАНІ СТРАТЕГІЇ В МАТРИЧНИХ ІГРАХ

Ігри зі сідловою точкою на практиці трапляються рідко. Значно поширеніші ігри, у яких нижня ціна гри менша за верхню. Навіть якщо гравці A і B дотримуються своїх «обережних» стратегій, то величину виграшу заздалегідь вказати неможливо.

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $a \neq \beta$ і $a \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними: кожна зі сторін може поліпшити свій результат, обираючи інший підхід. Оптимальний розв'язок такої гри знаходять, застосовуючи ***змішані стратегії***, які є певними комбінаціями початкових чистих стратегій.

Імовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами.

Для гравця $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{X = (x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_m)}$, де $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$;

Для гравця $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{Y = (y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_n)}$, де $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

Очевидно, що $x_i \geq 0, \left(i = \overline{1,m}\right); \quad y_j \geq 0, \left(j = \overline{1,n}\right)$

9.6. Геометрична інтерпретація гри теорії гри

Найпростішим випадком скінченої гри є парна гра, коли у кожного учасника є дві стратегії (табл. 9.1).

Таблиця 9.1.

B_j / A_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Розглянемо випадок, коли гра не має сідловок точки. Отже, $\alpha \neq \beta$. Необхідно знайти змішані стратегії та ціну гри. Позначимо шукані

значення ймовірностей застосування «чистих» стратегій гравця *A* через $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, а для гравця *B* – через $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*\right)$.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, якщо гравець А притримується своєї оптимальної стратегії, то виграш дорівнюватиме ціні гри. Отже, якщо гравець А притримуватиметься своєї оптимальної стратегії $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, то:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{9.1}$$

Оскільки $x_1^* + x_2^* = 1$, то $x_2^* = 1 - x_1^*$. Підставивши цей вираз у систему рівнянь (9.1), отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}\left(1 - x_1^*\right) = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}\left(1 - x_1^*\right) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}x_1^* + a_{21}\left(1 - x_1^*\right) = a_{12}x_1^* + a_{22}\left(1 - x_1^*\right).$$

Розв'язавши дане рівняння відносно невідомого x_1^*, маємо: $x_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$, тоді $x_2^* = 1 - x_1^* = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Провівши аналогічні міркування стосовно гравця *B*, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \upsilon. \end{cases} \tag{9.2.}$$

Оскільки $y_1^* + y_2^* = 1$, то $y_2^* = 1 - y_1^*$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}\left(1 - y_1^*\right) = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}\left(1 - y_1^*\right) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}y_1^* + a_{12}\left(1 - y_1^*\right) = a_{21}y_1^* + a_{22}\left(1 - y_1^*\right).$$

Розв'язавши це рівняння відносно невідомого y_1^*, маємо: $y_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$, тоді $y_2^* = 1 - y_1^* = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Ціну гри υ знаходять, підставляючи значення x_1^*, x_2^* (або y_1^*, y_2^*) в будь-яке з рівнянь (9.1) або (9.2): $\upsilon = \dfrac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Приклад 9.2. Знайти розв'язок гри, яка задана матрицею $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, дати геометричну інтерпретацію цього розв'язку.

Розв'язання. Перевіримо наявність сідлової точки в даній матриці. Для цього знайдемо мінімальні елементи в кожному рядку (2 і 4) й максимальні елементи в кожному з стовбців (6 і 5). Отже, нижня ціна гри $\alpha = \max(2;4) = 4$, а верхня ціна гри $\beta = \min(6;5) = 5$. Оскільки $\alpha = 4 \neq \beta = 5$, то розв'язком гри є змішані оптимальні стратегії, а ціна гри υ знаходиться в межах $4 \le \upsilon \le 5$.

Припустимо, що для гравця А стратегія задається вектором $U=(u_1;u_2)$. Тоді при застосуванні гравцем В чистої стратегії B_1 або B_2 гравець А отримає середній виграш, який дорівнює ціні гри, тобто

$$2u_1^*+6u_2^*=\upsilon \text{ (при стратегії } B_1\text{)},$$

$$5u_1^*+4u_2^*=\upsilon \text{ (при стратегії } B_2\text{)}.$$

Крім цих рівнянь, добавимо рівняння, що зв'язує частоти u_1^* та u_2^*:

$$u_1^*+u_2^*=1.$$

Розв'язуючи отриману систему трьох рівнянь з трьома невідомими знаходимо $u_1^*=\frac{2}{5};\ u_2^*=\frac{3}{5};\ u_3^*=\frac{22}{5}$.

Знайдемо тепер оптимальну стратегію для гравця В. Нехай стратегія для даного гравця задається вектором $Z=(z_1;z_2)$. Тоді

$$\begin{cases} 2z_1^*+5z_2^*=\frac{22}{5}, \\ 6z_1^*+4z_2^*=\frac{22}{5}, \\ z_1^*+z_2^*=1. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, матимемо $z_1^*=\frac{1}{5}, z_2^*=\frac{4}{5}$. Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $U^*=\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5}\right)$ та $Z^*=\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$, а ціна гри $\upsilon=\frac{22}{5}$.

Дамо тепер геометричну інтерпретацію розв'язку даної гри. Для цього на площині *uOz* введемо систему координат й на осі *Ou* відкладемо відрізок одиничної довжини A_1A_2, кожній точці якого поставимо у відповідність деяку змішану стратегію $U=(u_1,u_2)=(u_1,1-u_1)$ (мал. 9.1). Зокрема, точці $A_1(0;1)$ відповідає стратегія A_1, точці $A_2(1;0)$ - стратегія A_2 і т.д.

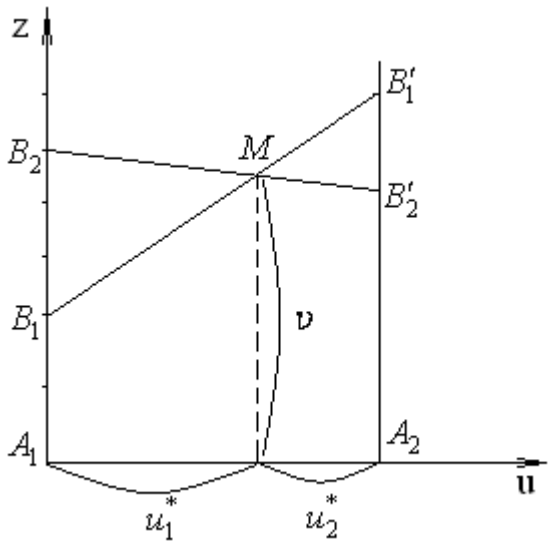


Рис. 9.1.

Через точки A_1 та A_2 проведемо перпендикуляри й на отриманих прямих будемо відкладати виграш гравців. На перпендикулярі, який співпадає з віссю *Oz*, відкладемо виграш гравця *A* при стратегії A_1, а на другому – при стратегії A_2. Якщо гравець *A* застосовує стратегію A_1, то його виграш при стратегії B_1 гравця *B* дорівнює 2, а при стратегії B_2 він дорівнює 5. Числам 2 і 5 на осі *Oz* відповідають точки B_1 та B_2.

Якщо ж гравець *A* приймає стратегію A_2, то його виграш при стратегії B_1 гравця *B* дорівнює 6, а при стратегії B_2 він дорівнює 4. Ці два числа визначають дві точки B_1' та B_2 на перпендикулярі, проведеного через точку A_2. З'єднуючи між собою точки B_1 та B_1', B_2 та B_2', матимемо дві прямі, відстань до яких від осі *Ou* визначає середній виграш при будь-якій комбінації відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка $B_1 B_1'$ до осі *Ou* визначає середній виграш υ_1 при будь-якій комбінації стратегій A_1 та A_2 (з частотами u_1 та u_2) й стратегії B_1 гравця *B*. Ця відстань дорівнює $2u_1 + 6u_2 = \upsilon_1$. Аналогічно, середній виграш при застосуванні стратегії B_2 визначається ординатами точок, що належать відрізку $B_2 B_2'$.

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній $B_1 M B_2'$, визначають мінімальний виграш гравця *A* при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці *M*, а отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $U^* = (u_1^*, u_2^*)$, а її ордината дорівнює ціні гри υ. Координати точки *M* знаходимо як

координати точки перетину прямих $B_1 B_1'$ та $B_2 B_2'$. Тобто матимемо три рівняння: $\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \upsilon, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \upsilon, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо: $u_1^* = \frac{2}{5}; u_2^* = \frac{3}{5}; \upsilon = \frac{22}{5}$.

Аналогічно знаходимо оптимальну стратегію для гравця *B*. Матимемо таку систему рівнянь: $\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \frac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1, \end{cases}$

яка має розв'язок: $z_1^* = \frac{1}{5}; z_2^* = \frac{4}{5}$.

Отже, розв'язком гри є змішані стратегії $U^* = \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right)$ і $Z^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{4}{5}\right)$, а ціна гри $\upsilon = \frac{22}{5}$.

Підсумовуючи викладене вище, можна вказати ***основні етапи*** знаходження розв'язку гри $2 \times n$ або $n \times 2$:

1. Будують прямі, які відповідають стратегіям другого (першого) гравця.

2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.

3. Знаходять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.

4. Визначають ціну гри та оптимальні стратегії.

Основні типові випадки взаємного розташування відрізків виграшів гравця А зображено на рис. 9.2 – 9.4.

Точки відрізків, які відповідають найменшим виграшам, позначено потовщеною лінією, вона називається **лінією найменших виграшів** гравця А. Оптимальна (максимінна) поведінка гравця А полягає у виборі такої мішаної стратегії, яка відповідає точці з найбільшою ординатою на лінії найменших виграшів. Розглянемо деякі випадки.

Випадок 1 (рис. 9.2). Лінія найменших виграшів є ламаною $B_1' N B_2''$, а точка $N(x_N; v_N), 0 < x_N < 1,$ на ній має найбільшу ординату. Тоді $v = v_N$ – ціна гри, а стратегія $\vec{X}^0 = (1 - x_N;\ x_N)^T$ – оптимальна для гравця А.

Випадок 2 (рис. 9.3). Лінія найменших виграшів є ламаною $B_1'NB_2''$, але найбільшу ординату на ній має один з кінців, наприклад, $B_2''(1;c_{22})$. Оптимальними є стратегії A_2 (для гравця А) і B_2 (для гравця В). Отже, розв'язок гри складають чисті стратегії $\vec{X}^2 = (0;1)^T$, $\vec{Y}^2 = (0;1)^T$ і сідлова точка $v = c_{22}$.

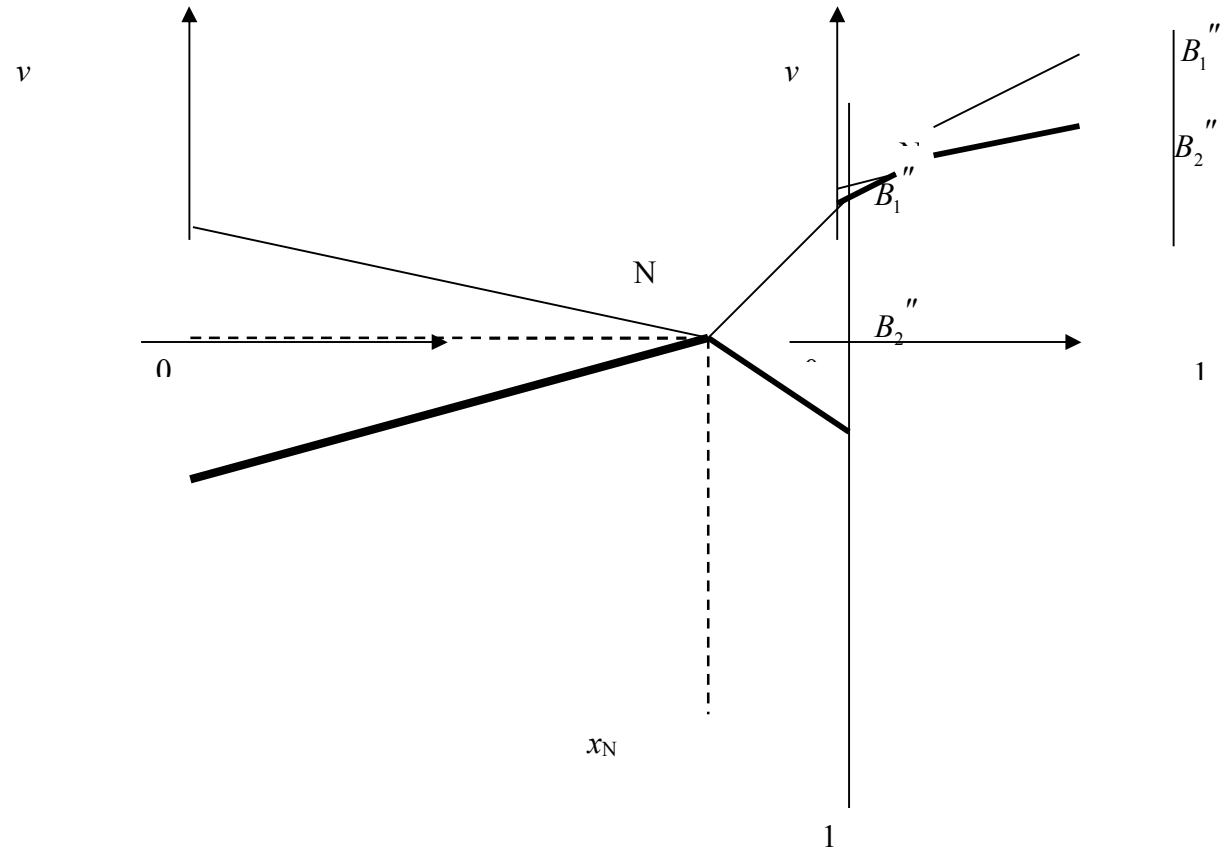


Рис. 9.2 Рис. 9.3

Випадок 3 (рис. 9.4). Лінією найменших виграшів є один з відрізків $B_1'B_1''$ або $B_2'B_2''$, наприклад, перший. Тоді стратегія B_2 є невигідною для гравця В, оскільки за стратегії B_2 він програє більше, ніж за стратегії B_1. Тому другий стовпець в матриці гри C можна викреслити і звести гру до гри 2×1. Точка $B_1''(1;\ c_{21})$ з найбільшою ординатою на відрізку найменших виграшів $B_1'B_1''$ визначає оптимальні стратегії A_2 і B_1. Розв'язок гри складають чисті стратегії $\vec{X}^2 = (0;1)$, $\vec{Y}^1 = (0;1)$ і сідлова точка $v = c_{21}$.

Оптимальну мішану стратегію гравця В можна також знайти геометрично. На рис. 9.5 побудовано графіки середніх програшів гравця B в системі координат yOv за умови застосування ним

мішаних стратегій $\vec{Y} = (1-y; y)^T$, а гравець A – чистих стратегій A_1 (відрізок $A_1'A_1''$) і A_2 (відрізок $A_2'A_2''$). Потовщена ламана $A_1'MA_2''$ складена з точок, які відповідають найбільшим програшам, і називається **лінією найбільших програшів** гравця В. Якщо точка $M(y_M; v_M)$ на ній має найменшу ординату, то v_M – ціна гри, а мішана стратегія $\vec{Y}^0 = (1-y_M; y_M)$ – оптимальна для гравця B.

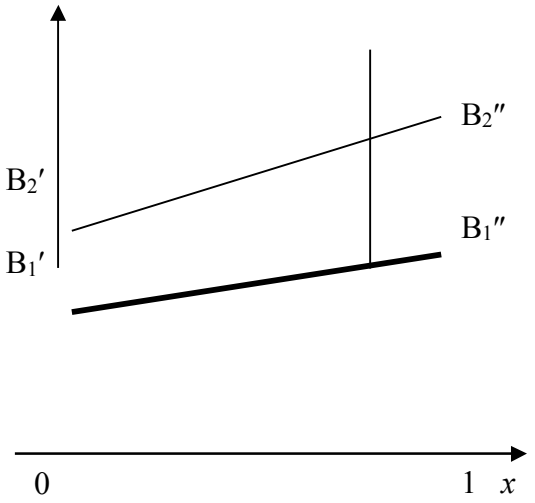


Рис. 9.4

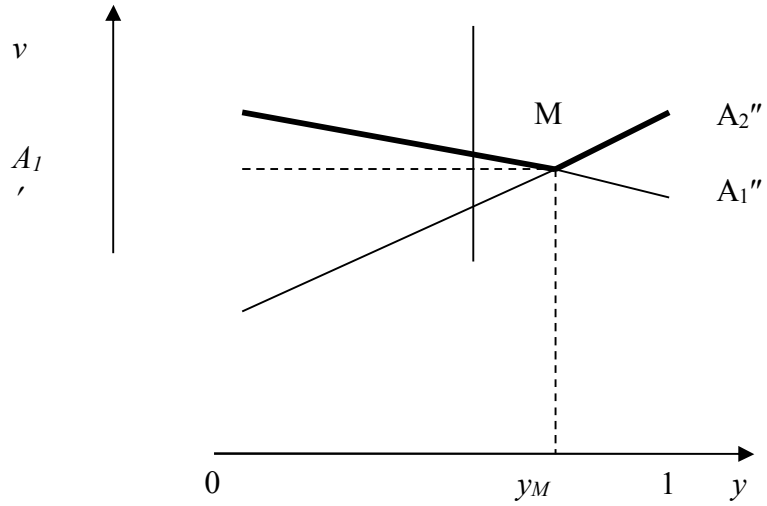


Рис. 9.5

9.7. ЗВЕДЕННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ ДО ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Якщо матрична гра не має **сідлової** точки, то знаходження її розв'язку, особливо за великої кількості стратегій, – доволі складна задача, яку можна ефективно розв'язати методами лінійного програмування.

Задача розглядається в такому формулюванні: знайти вектори ймовірностей $X = (x_1, \ x_2, \ \ldots \ x_m)$ і $Y = (y_1, \ y_2, \ \ldots \ y_n)$ з метою визначення оптимального значення ціни гри та оптимальних стратегій.

Зауважимо, що доведено ***основну теорему теорії ігор***: кожна скінчена гра має принаймні один розв'язок, який можливий в області змішаних стратегій.

Отже, нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (9.3)$$

Оскільки оптимальні стратегії гравців A і B дозволяють отримати виграш

$$\alpha \le \upsilon \le \beta,$$

то використання оптимальної змішаної стратегії гравцем ***A*** має забезпечувати виграш не менший за ціну гри в разі вибору гравцем ***B*** будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge \upsilon \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \qquad (9.4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Отже, потрібно знайти $x_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, щоб

$$\max Z = \upsilon$$

Зауважимо, що ціна гри υ невідома і має бути визначена під час розв'язування задачі.

Модель ігрової задачі може бути спрощена. З (9.4) маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \ge \upsilon, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \dots + a_{m2}x_m \ge \upsilon, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \ge \upsilon. \end{cases}$$

Поділивши всі обмеження на υ, дістанемо:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{12}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \dots + a_{m1}\dfrac{x_m}{\upsilon} \ge 1, \\ a_{21}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \dots + a_{m2}\dfrac{x_m}{\upsilon} \ge 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \dots + a_{mn}\dfrac{x_m}{\upsilon} \ge 1. \end{cases}$$

Нехай $\frac{x_i}{\upsilon} = t_i$, тоді

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + \dots + a_{m2}t_m \ge 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \dots + a_{mn}t_m \ge 1. \end{cases}$$

Згідно з умовою $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$, звідки $t_1 + t_2 + \dots + t_m = \dfrac{1}{\upsilon}$.

Отже, цільова функція початкової задачі набирає такого вигляду:

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{t=1}^{m} t_i .$$

У результаті задача лінійного програмування:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} t_i \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases}$$

$$t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, знайдемо значення $t_i\left(i = \overline{1,m}\right)$, а також $\frac{1}{\upsilon}$ і $x_i = \upsilon t_i$, тобто визначимо змішану оптимальну стратегію для гравця A.

Відповідно використання оптимальної змішаної стратегії гравцем $\boldsymbol{B}$ має за будь-яких стратегій гравця $\boldsymbol{A}$ забезпечувати програш $\boldsymbol{B}$, що не перевищує ціни гри $\boldsymbol{\upsilon}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \upsilon \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

$$y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

За аналогією запишемо задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця B. Нехай

$$u_j = \frac{y_i}{\upsilon} \quad \left(\overline{j,n}\right).$$

Тоді маємо таку лінійну модель:

$$f = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_1 + \ldots + a_{2n}u_n \leq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \leq 1, \end{cases}$$

$$u_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця B є двоїстою до задачі гравця A, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає оптимальний розв'язок спряженої.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Імітаційне моделювання.
2. Ком’ютерне моделювання.
3. Інформаційне моделювання.
4. Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування.
5. Виробнича функція та її властивості
6. Принципи побудови критеріїв оптимальності.
7. Багатокритеріальні задачі та основні підходи до їх розв’язання.
8. Двохетапна транспортна задача.
9. Міжгалузева балансова модель.
10. Задача комівояжера.
11. Задача про оптимальний план випуску продукції.
12. Задача про раціон.
13. Задача про призначення.
14. Локальний екстремум.
15. Динамічне програмування.
16. Стохастичне програмування.

Питання до іспиту

1. Поняття «модель» та «моделювання».
2. Етапи математичного моделювання.
3. Основні види та властивості моделей.
4. Принципи моделювання.
5. Засоби математичного моделювання.
6. Методи обґрунтування та оптимізації машинно-тракторного парку.
7. Коротка класифікація моделей математичного програмування.
8. Математичне моделювання технологічних процесів.
9. Основні системні поняття
10. Класифікація систем
11. Системні властивості
12. Ознаки системи
13. Динаміка системи
14. Структура систем
15. Вхідні та вихідні величини
16. Стійкість системи
17. Аграрна система
18. Загальна математична модель лінійного програмування.
19. Форми запису задач лінійного програмування.
20. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування.
21. Двоїстість у задачах лінійного програмування. Правила побудови двоїстих задач.
22. Математична постановка транспортної задачі.

23. Методи побудови початкового опорного плану транспортної задачі.
24. Метод потенціалів
25. Визначення оптимального складу машино-тракторного парку.
26. Постановка задачі дробово-лінійного програмування
27. Алгоритм розв’язування задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом
28. Постановка задачі цілочислового програмування
29. Метод Гоморі
30. Метод «віток і меж»
31. Постановка задачі нелінійного програмування.
32. Методи розв’язування задач нелінійного програмування.
33. Метод Лагранжа розв’язування задач нелінійного програмування.
34. Основні поняття теорії ігор.
35. Класифікація ігор.
36. Матричні ігри двох осіб.
37. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловини точками.
38. Мішані стратегії в матричних іграх.
39. Геометрична інтерпретація гри теорії гри.
40. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Panfilova A., Mohylnytska A. The impact of nutrition optimization on crop yield of winter wheat varieties (triticum aestivum l.) and modeling of regularities of its dependence on structure indicators. *Agriculture & Forestry.* 2019. Vol. 65 Issue 3: 157-171. https://doi.org/10.17707/AgricultForest.65.3.13.
2. Modeling the impact of weather and climatic conditions and nutrition variants on the yield of spring barley varieties (*Hordeumvulgare L.*) / A. Panfilova and etc. *Agronomy Research*. 2020. 18(S2), 1388–1403. https://doi.org/10.15159/AR.20.159
3. Математичне програмування : навчальний посібник / А. Ф Барвінський та ін. Львів : Національний університет "Львівська політехніка" (Інформаційно-видавничий центр "Інтелект+" Інститут післядипломної освіти) "Інтелект - Захід", 2004. 448 с.
4. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування : навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. Київ: КНЕУ, 2001. 248 с.
5. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Гаврилов Г. В. и др. ; под ред. А. М. Гатаулина. Москва : Агропромиздат, 1990. 432 с.
6. Могильницька А. М. Пріоритетні напрямки використання економіко-математичного моделювання в роботі аграрних підприємств. *Агросвіт*. 2020. № 17-18. С. 39-45. https://doi.org/10.32702/2306-6792.2020.17-18
7. Моделювання технологічних систем : конспект лекцій для студентів спец. 7.05050313, 8.05050313 «Обладнання переробних і харчових виробництв» ден. і заоч. форм навч / уклад. О. А. Єщенко та ін. Київ : НУХТ, 2014. 157 с. URL : http://library.nuft.edu.ua/ebook/file/38.13.pdf
8. Зацеркляний М. М., Мельников О. Ф. Основи економічної кібернетики : навч.посібник. Чернівці : ТОВ “Видавництво “Наші книги”, 2008. 392 с.
9. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник. Львів : Магнолія Плюс, 2004. 549 с.
10. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень : навч. посіб. / Р. Н. Квєтний та ін. ; Вінниц. нац. техн. ун-т. Вінниця : ВНТУ, 2013.
11. Кравченко Р. Г. Математическое моделирование экономических

процессов в сельском хозяйстве. Москва : Колос, 1978. 280 с.
12. Лященко М. Я., Головань М. С. Чисельні методи : підручник. Київ . : Либідь, 1996. 288 с.
13. Махней О. В. Математичне моделювання : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Супрун В. П., 2015. 372 с.
14. Інженерний менеджмент : навчальний посібник / І. І. Мельник та ін. ; за ред. І. І. Мельника. Вінниця : Нова книга, 2007. 536 с
15. Наконечний С. І., Савіна С. С. , Наконечний Т. С. Математичне моделювання техніко-економічних процесів АПК. Київ, 1996. 240 с.
16. Наконечный С. И., Андрийчук В. Г. Математическое моделирование экономических процессов сельскохозяйственного производства : учеб. пособие. Киев : КИНХ, 1982. 106 с.
17. Нефьодов Ю. М. Методи оптимізації в прикладах і задачах : навчальний посібник. Київ : Кондор, 2011. 324 с.
18. Оптимізаційні методи в аграрному виробництві : методичні рекомендації / Полтавська державна аграрна академія. Київ, 2004. 69 с.
19. Павленко П. М. Основи математичного моделювання систем і процесів : навч. посіб. Київ : Книжкове вид-во НАУ, 2013. 201 с.
20. Шебаніна О. В., Жорова А. М. Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ : курс лекцій для студ. ф-ту механізації сільського господарства VI курсу денної форми навч. спец. 8.10010203-"Механізація сільського господарства" та 8.01010401-"Проф.освіта. Технологія виробництва і переробка продуктів сільського господарства". Миколаїв : МНАУ, 2014. – 114 с. URL : http://dspace.mnau.edu.ua/jspui/handle/123456789/3518

Навчальне видання

Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Укладачі:
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Могильницька Алла Мколаївна
Хилько Іван Іванович та ін.

Підписано до друку ……. Формат А4.
Папір офсет. №1. Ум. друк. арк. 3.
Тираж … пр.. Зам. № ___

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54029, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.