МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні рекомендації
з вивчення дисципліни та виконання контрольних робіт
здобувачами вищої освіти заочної форми навчання освітнього
ступеня «Бакалавр» спеціальності 051 «Економіка», 073
«Менеджмент», 281 «Публічне управління та адміністрування»

Миколаїв
2020

УДК 519.85
М 34

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 24 листопада 2020 року, протокол № 3.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

А. М. Могильницька – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

© Миколаївський національний аграрний університет, 2020

ЗМІСТ

Мета, завдання курсу, вимоги до основних знань здобувачів вищої освіти ……...……..……..4

Порядок виконання та правила оформлення контрольної роботи…….....5

Теоретичні питання курсу……..……...7

Практичні завдання контрольної роботи……...…….…8

Методичні рекомендації до виконання практичних завдань……59

Приклад виконання завдання 1……...60

Приклад виконання завдання 2……...93

Питання для поточного та підсумкового контролю знань здобувачів вищої освіти.……125

Рекомендована література……127

МЕТА, ЗАВДАННЯ КУРСУ, ВИМОГИ ДО ОСНОВНИХ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Мета дисципліни «Математичне програмування» – формування теоретичних знань, практичних навичок та вмінь з формалізації задач управління, створення математичних моделей, пошуку екстремуму функцій і функціоналів з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів.

Завдання – вивчення здобувачами вищої освіти основних принципів та інструментарію постановки задач, методики побудови економіко-математичних моделей та методів їх розв’язування; формування практичних вмінь та навиків:

- дослідження кількісних взаємозв'язків та закономірностей розвитку економічних процесів;
- побудови та аналізу економіко-математичних моделей;
- розв’язування оптимізаційних задач у MS EXCEL;
- розв’язування задач лінійного, цілочислового, дробово-лінійного програмування, транспортних задач;
- застосування математичного апарату для обґрунтування управлінських рішень у економічній сфері.

Предмет – математичні властивості та закономірності пошуку екстремуму функцій і функціоналів, методи і алгоритми оптимізації та їх застосування до економічних задач, у тому числі за допомогою програмного забезпечення.

Об'єкт – закономірності побудови та дослідження математичних оптимізаційних моделей.

<u>У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувачі вищої освіти повинні</u>

знати: визначення основних економіко-математичних понять моделювання; класифікацію та методи розв’язання задач; методологію побудови та використання економіко-математичних моделей;

вміти: розв’язувати задачі лінійного, цілочислового, дробово-лінійного програмування, транспортні задачі; застосовувати математичну теорію та методи для дослідження реальних економічних процесів, побудови оптимізаційних моделей та прийняття оптимальних управлінських рішень.

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Порядок виконання роботи

Виконання та захист контрольної роботи є важливим етапом вивчення курсу «Математичне програмування». Контрольна робота виконуються згідно з навчальним планом і є формою проміжного контролю знань здобувачів вищої освіти та оцінки ефективності їх самостійної роботи.

Перед виконанням контрольної роботи здобувачу вищої освіти необхідно вивчити теоретичний матеріал та ознайомитися з прикладами виконання практичних завдань, використовуючи відповідну літературу та матеріали, розміщені на сайті дистанційної форми навчання Миколаївського національного аграрного університету

https://moodle.mnau.edu.ua/course/view.php?id=231

Контрольна робота складається з двох практичних завдань, що вибираються згідно з двома останніми цифрами шифру залікової книжки.

Правила оформлення роботи

Контрольна робота повинна мати адресну частину, тобто титульний лист, на якому приводяться відповідні відомості про здобувача вищої освіти та бланк для рецензії. Робота повинна бути написана акуратно, розбірливим та чітким почерком (або надрукована), з нумерацією сторінок, таблиць і рисунків. Графіки та таблиці повинні виконуватися з урахуванням вимог до їх побудови та оформлення.

Роботи, в яких відсутні пояснення, а також роботи не свого варіанту не перевіряються. В кінці роботи необхідно привести список літератури, якою користувався здобувач вищої освіти при виконанні роботи, поставити дату та особистий підпис і прізвище її виконавця.

Виконану роботу здобувач вищої освіти повинен здати на рецензування в установлений термін. Після рецензування здобувач вищої освіти повинен виправити в роботі всі вказані рецензентом недоліки. Якщо робота направлена на

доопрацювання, то після виконання усіх вимог рецензента, її слід подати на повторне рецензування, додаючи при цьому попередню роботу.

Контрольна робота повинна виконуватися **самостійно**. Якщо буде встановлено протилежне, вона не зараховується, навіть якщо в цій роботі всі завдання виконані вірно.

У період лабораторно-екзаменаційної сесії здобувач вищої освіти повинен представити прорецензовану та допущену до захисту контрольну роботу. За вимогою викладача, він пояснює розв'язання практичного завдання та відповідає на поставленні теоретичні запитання. Після успішного захисту роботи здобувач вищої освіти допускається до здачі екзамену.

Якщо в процесі вивчення матеріалу чи при розв'язанні практичного завдання у здобувача вищої освіти виникають запитання, на які він не може відповісти самостійно, то він може звернутися до викладача для одержання від нього консультації. В своїх запитаннях потрібно найбільш точно вказати, які труднощі в нього виникли. При цьому потрібно вказати книгу, рік її видання та сторінку, на якій розглянуто питання, що викликає труднощі, або сформульована відповідна задача.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ КУРСУ

1. Предмет, особливості та сфери застосування математичного програмування в економіці. Класифікація задач.
2. Загальна задача лінійного програмування. Поняття про цільову функцію, допустимий та оптимальний плани.
3. Форми запису задачі лінійного програмування.
4. Графічний метод розв'язання ЗЛП.
5. Симплекс-метод розв'язання ЗЛП.
6. Структура симплексної таблиці. Визначення першого опорного плану. Перевірка опорного плану на оптимальність.
7. Метод штучного базису розв’язання ЗЛП.
8. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач. Правила утворення двоїстої ЗЛП.
9. Економічна інтерпретація двоїстих задач.
10. Економічна постановка транспортної задачі.
11. Математична постановка транспортної задачі.
12. Метод північно-західного кута побудови першого опорного плану ТЗ.
13. Метод мінімальної вартості побудови першого опорного плану ТЗ.
14. Метод подвійної переваги побудови першого опорного плану ТЗ.
15. Метод апроксимації Фогеля побудови першого опорного плану ТЗ.
16. Основні етапи методу потенціалів.
17. Перевірка опорного плану ТЗ на оптимальність за допомогою методу потенціалів.
18. Перехід від одного опорного плану ТЗ до іншого у випадку порушення умов оптимальності.
19. Постановка задачі цілочислового програмування.
20. Метод Гоморі та метод «віток і меж».
21. Постановка задачі дробово-лінійного програмування.
22. Графічний та симплексний методи розв’язання задачі дробово-лінійного програмування.
23. Постановка задачі нелінійного програмування.
24. Графічний метод та метод множників Лагранжа розв’язання задач нелінійного програмування.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Завдання 1

1. Використовуючи метод Жордана-Гаусса звести систему обмежень задачі до базисної форми та симетричної форми.
2. Визначити оптимальний план задачі в симетричній формі за допомогою графічного методу.
3. Визначити оптимальний план задачі в базисній формі за допомогою симплекс-методу.
4. Визначити оптимальний план вихідної задачі методом штучного базису (*M*-методом).
5. Визначити оптимальний план вихідної задачі за допомогою надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЙ».
6. Побудувати двоїсту задачу до вихідної задачі лінійного програмування.
7. Визначити оптимальний план двоїстої задачі, застосовуючи першу теорему двоїстості.
8. Визначити оптимальний план двоїстої задачі, застосовуючи другу теорему двоїстості.

Завдання 2

1. Побудувати математичну модель транспортної задачі.
2. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом північно-західного кута.
3. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом мінімальної вартості.
4. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом подвійної переваги.
5. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом апроксимації Фогеля.
6. Використовуючи початкові опорні плани за допомогою методу потенціалів визначити оптимальний план перевезень транспортної задачі.
7. Проаналізувати знайдені початкові опорні плани.
8. Визначити оптимальний план транспортної задачі за допомогою надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЙ».

ВАРІАНТИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант 1

1.

$$Z = -3x_1 - x_2 + 4x_4 + x_6 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 13 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_4 + x_6 = 26 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	4	3	4	40
2	5	5	4	3	70
3	2	4	4	3	40
bj	45	25	30	50	

Варіант 2

1.

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,5}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	4	1	4	40
2	5	4	3	5	70
3	2	1	3	2	40
bj	50	35	20	45	

Варіант 3

1.

$$Z = -4x_1 - 0{,}5x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	3	4	40
2	2	2	3	2	90
3	4	5	6	4	20
bj	50	20	60	20	

Варіант 4

1.

$$Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	1	4	50
2	2	3	1	3	55
3	2	2	3	3	45
bj	40	30	20	60	

Варіант 5

1.

$$Z = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25 \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	4	3	2	2	50
2	5	2	3	1	50
3	1	3	5	2	50
bj	40	30	30	50	

Варіант 6

1.

$$Z = -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	4	1	3	2	50
2	3	1	4	2	40
3	3	3	2	5	60
bj	45	25	30	50	

Варіант 7

1.

$$Z = 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	1	3	2	50
2	2	3	2	1	40
3	4	1	3	2	60
bj	40	30	35	45	

Варіант 8

1.

$$Z = x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	1	3	60
2	1	3	4	1	50
3	2	4	5	3	40
bj	45	25	45	35	

Варіант 9

1.

$$Z = -4x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	3	3	5	70
2	2	2	3	4	30
3	2	3	2	5	50
bj	25	50	50	25	

Варіант 10

1.

$$Z = -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + x_4 + 6x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	3	2	4	40
2	2	4	2	4	50
3	3	2	4	3	60
bj	30	45	35	40	

Варіант 11

1.

$$Z = 4x_1 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	4	30
2	2	3	2	5	50
3	4	3	3	5	70
bj	50	25	50	25	

Варіант 12

1.

$$Z = -5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	3	35
2	3	2	1	4	75
3	2	3	1	3	40
bj	45	50	35	20	

Варіант 13

1.

$$Z = 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 - x_4 + x_6 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	3	1	50
2	2	2	1	2	70
3	1	2	1	3	30
bj	25	40	25	60	

Варіант 14

1.

$$Z = -2x_1 - 6x_2 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	5	3	4	50
2	2	3	2	5	80
3	4	3	4	3	20
bj	55	30	35	30	

Варіант 15

1.

$$Z = -6x_1 - 10x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	4	2	3	3	35
2	2	4	3	1	45
3	2	4	3	2	70
bj	30	40	50	50	

Варіант 16

1.

$$Z = -8x_1 - 10x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	4	3	2	3	80
2	2	3	2	2	40
3	4	6	5	4	30
bj	20	45	40	45	

Варіант 17

1.

$$Z = -x_1 + 12x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	3	1	4	1	50
2	1	2	1	3	65
3	3	2	2	1	40
bj	35	40	60	20	

Варіант 18

1.

$$Z = -4x_1 + 13x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	2	2	1	3	60
2	1	3	2	2	45
3	1	2	3	1	45
bj	20	30	60	40	

Варіант 19

1.

$$Z = -9x_1 - 10x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_6 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	2	1	3	45
2	3	3	2	2	65
3	4	3	1	2	50
bj	35	40	45	30	

Варіант 20

1.

$$Z = -2x_1 - 6x_2 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	2	3	55
2	2	3	3	4	40
3	2	2	3	3	55
bj	40	30	65	15	

Варіант 21

1.

$$Z = -x_1 - 5x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	1	2	1	40
2	1	4	1	3	55
3	1	2	2	3	60
bj	20	65	20	50	

Варіант 22

1.

$$Z = -6x_2 - 3x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	6	5	4	3	70
2	2	4	3	4	40
3	2	4	4	3	40
bj	30	40	50	30	

Варіант 23

1.

$$Z = -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	4	3	70
2	2	1	3	1	45
3	2	4	3	2	35
bj	20	60	40	30	

Варіант 24

1.

$$Z = 4x_1 + 0{,}5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	5	6	4	20
2	3	2	3	4	40
3	2	2	3	2	90
bj	60	50	20	20	

Варіант 25

1.

$$Z = -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	3	45
2	3	2	1	4	50
3	2	3	1	3	55
bj	30	40	60	20	

Варіант 26

1.

$$Z = -x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25 \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_6 + x_5 = -9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	5	2	3	2	50
2	4	3	2	2	50
3	5	3	3	4	50
bj	30	40	50	30	

Варіант 27

1.

$$Z = 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	2	3	40
2	4	2	3	5	50
3	3	3	4	5	60
bj	25	45	55	25	

Варіант 28

1.

$$Z = -3x_1 + 9x_2 + 2x_3 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	3	2	2	40
2	4	3	2	4	50
3	2	4	3	4	60
bj	30	40	45	35	

Варіант 29

1.

$$Z = x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	3	1	60
2	2	2	3	1	40
3	1	2	1	2	50
bj	20	55	20	55	

Варіант 30

1.

$$Z = 5x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	4	1	3	55
2	3	1	2	1	40
3	1	2	2	3	60
bj	65	20	50	20	

Варіант 31

1.

$$Z = x_1 - 12x_2 - 3x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	1	3	65
2	3	1	4	1	50
3	3	2	2	1	40
bj	40	35	20	60	

Варіант 32

1.

$$Z = 6x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	4	3	5	40
2	2	2	3	4	40
3	3	4	3	5	70
bj	40	50	30	30	

Варіант 33

1.

$$Z = 6x_1 - 11x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	4	4	3	40
2	5	5	4	3	70
3	2	4	3	4	40
bj	40	30	50	30	

Варіант 34

1.

$$Z = 6x_1 + 10x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	4	3	2	70
2	4	2	3	3	35
3	4	2	3	1	45
bj	40	30	30	50	

Варіант 35

1.

$$Z = 2x_1 - 12x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ 3x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	4	4	2	30
2	3	4	5	5	70
3	4	3	2	4	50
bj	30	45	35	40	

Варіант 36

1.

$$Z = 5x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	1	3	40
2	2	2	3	3	35
3	3	2	1	4	75
bj	50	45	35	20	

Варіант 37

1.

$$Z = 4x_1 + 10x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	1	2	1	60
2	2	1	1	2	35
3	1	2	3	2	55
bj	50	30	30	40	

Варіант 38

1.

$$Z = 4x_1 - 13x_2 - 3x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	4	3	5	70
2	2	2	3	4	40
3	3	4	3	5	40
bj	50	40	30	30	

Варіант 39

1.

$$Z = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_5 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 10 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,5}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	3	1	3	50
2	2	2	3	3	60
3	1	3	1	1	40
bj	40	30	50	30	

Варіант 40

1.

$$Z = 5x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	4	3	4	60
2	3	4	2	4	50
3	3	3	2	2	40
bj	40	30	45	35	

Варіант 41

1.

$$Z = 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_6 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	4	5	3	20
2	2	3	6	5	60
3	4	4	5	5	70
bj	40	30	40	40	

Варіант 42

1.

$$Z = x_1 - 7x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_3 - x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	3	4	70
2	3	2	4	2	40
3	2	2	4	4	40
bj	30	50	40	30	

Варіант 43

1.

$$Z = -2x_1 - 6x_2 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	1	3	55
2	3	2	1	4	50
3	2	2	3	3	45
bj	40	30	60	20	

Варіант 44

1.

$$Z = 3x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	4	3	60
2	3	4	5	3	60
3	3	3	4	4	30
bj	25	35	35	55	

Варіант 45

1.

$$Z = -6x_2 - 3x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	3	2	4	1	60
2	4	3	5	2	55
3	3	2	2	3	35
bj	30	20	40	60	

Варіант 46

1.

$$Z = -x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	2	4	2	4	50
2	3	3	2	4	40
3	2	3	4	2	60
bj	30	45	35	40	

Варіант 47

1.

$$Z = 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	3	1	60
2	1	2	1	2	50
3	2	2	3	1	40
bj	50	20	60	55	

Варіант 48

1.

$$Z = 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	1	2	70
2	1	2	2	1	50
3	1	4	1	3	30
bj	40	30	20	60	

Варіант 49

1.

$$Z = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9 \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	3	1	60
2	2	2	3	1	40
3	1	2	1	2	50
bj	20	55	20	55	

Варіант 50

1.

$$Z = 4x_1 + 0{,}5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	4	2	2	45
2	3	2	1	1	55
3	2	2	3	1	50
bj	30	40	30	50	

Варіант 51

1.

$$Z = -4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	3	35
2	3	1	2	4	45
3	2	1	3	4	70
bj	35	45	25	45	

Варіант 52

1.

$$Z = 3x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	3	5	2	55
2	3	2	4	1	60
3	3	2	2	3	35
bj	30	20	60	40	

Варіант 53

1.

$$Z = 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	1	3	60
2	2	4	3	1	30
3	3	1	4	2	60
bj	35	25	55	35	

Варіант 54

1.

$$Z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	3	5	4	45
2	1	2	5	2	60
3	2	3	1	4	45
bj	40	20	30	60	

Варіант 55

1.

$$Z = -x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	4	1	60
2	4	2	5	3	20
3	5	1	3	4	70
bj	40	30	45	35	

Варіант 56

1.

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + x_6 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	4	1	60
2	4	2	5	3	20
3	5	1	3	4	70
bj	40	30	45	35	

Варіант 57

1.

$$Z = -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	2	1	50
2	2	2	1	2	70
3	1	2	1	3	30
bj	40	25	60	25	

Варіант 58

1.

$$Z = -x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9 \\ 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10 \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	1	2	50
2	3	2	3	1	60
3	2	2	3	1	40
bj	55	20	55	20	

Варіант 59

1.

$$Z = x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	4	1	3	55
2	1	2	2	3	60
3	3	1	2	1	40
bj	50	20	65	20	

Варіант 60

1.

$$Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	5	5	4	3	70
2	2	4	4	3	40
3	2	4	3	4	40
bj	30	40	50	30	

Варіант 61

1.

$$Z = -5x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	4	2	60
2	3	3	2	4	40
3	2	4	2	4	50
bj	30	40	30	50	

Варіант 62

1.

$$Z = -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	4	3	3	65
2	5	4	5	3	40
3	4	5	3	4	45
bj	55	25	45	25	

Варіант 63

1.

$$Z = -x_1 - 12x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_3 - x_5 = -4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	2	1	45
2	1	3	2	2	50
3	3	1	2	3	55
bj	50	30	40	30	

Варіант 64

1.

$$Z = -4x_1 - 10x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	1	1	2	35
2	1	2	3	2	55
3	3	1	2	1	60
bj	30	50	40	30	

Варіант 65

1.

$$Z = -2x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	4	5	5	70
2	4	3	2	4	50
3	3	4	4	2	30
bj	45	30	35	40	

Варіант 66

1.

$$Z = -3x_1 + 9x_2 + 2x_3 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	3	2	5	40
2	2	3	1	4	60
3	2	3	3	2	50
bj	55	35	30	30	

Варіант 67

1.

$$Z = -7x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_6 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	1	1	55
2	2	2	3	1	50
3	1	4	2	2	45
bj	40	30	50	30	

Варіант 68

1.

$$Z = -x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_3 - x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	1	40
2	3	2	3	1	60
3	1	2	1	2	50
bj	55	20	55	20	

Варіант 69

1.

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	1	3	30
2	1	2	2	1	50
3	2	2	1	2	70
bj	25	25	40	60	

Варіант 70

1.

$$Z = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9 \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	1	40
2	1	2	1	2	50
3	3	2	3	1	60
bj	20	20	55	55	

Варіант 71

1.

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_5 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	2	3	4	2	60
2	3	3	2	4	40
3	2	4	2	4	50
bj	40	40	40	30	

Варіант 72

1.

$$Z = 4x_1 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

i \ j	1	2	3	4	α_i
1	3	1	2	4	45
2	2	2	3	3	35
3	2	1	3	4	70
bj	25	35	45	45	

Варіант 73

1.

$$Z = -3x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_6 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	2	3	3	35
2	4	3	5	2	55
3	3	2	4	1	60
bj	20	30	40	60	

Варіант 74

1.

$$Z = -4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	3	4	4	30
2	3	4	5	3	60
3	2	3	4	3	60
bj	35	35	25	25	

Варіант 75

1.

$$Z = 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_2 + x_4 - x_5 = 1 \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	4	5	45
2	3	3	5	4	45
3	1	2	5	4	60
bj	20	40	60	30	

Варіант 76

1.

$$Z = x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	4	4	40
2	3	2	4	2	40
3	2	3	3	4	70
bj	30	30	40	50	

Варіант 77

1.

$$Z = -x_1 - 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	4	5	5	70
2	2	3	6	5	60
3	2	4	5	3	20
bj	40	40	40	30	

Варіант 78

1.

$$Z = -6x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	1	2	70
2	1	2	2	1	50
3	1	2	1	3	30
bj	40	25	60	25	

Варіант 79

1.

$$Z = -x_1 - 5x_2 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	1	1	40
2	2	2	3	3	60
3	1	3	1	3	50
bj	30	40	50	30	

Варіант 80

1.

$$Z = 4x_1 - 13x_2 - 3x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	3	2	2	45
2	2	2	1	3	60
3	1	2	3	1	45
bj	30	20	60	40	

Варіант 81

1.

$$Z = 2x_1 + 6x_2 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	3	4	40
2	3	2	2	3	55
3	2	2	3	3	55
bj	30	40	15	65	

Варіант 82

1.

$$Z = x_1 - 8x_2 - 3x_3 + x_4 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	5	4	5	3	40
2	4	4	3	3	65
3	4	5	3	4	45
bj	25	45	55	25	

Варіант 83

1.

$$Z = x_1 + 12x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_5 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_5 - x_6 = -4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	3	2	2	50
2	1	2	2	1	45
3	3	1	2	3	55
bj	40	50	30	30	

Варіант 84

1.

$$Z = 2x_1 + 6x_2 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	3	4	3	20
2	3	5	3	4	50
3	2	3	2	5	80
bj	30	55	35	30	

Варіант 85

1.

$$Z = 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	3	3	2	50
2	3	4	2	5	40
3	2	3	1	4	60
bj	35	55	30	30	

Варіант 86

1.

$$Z = 8x_1 + 10x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	4	6	5	4	30
2	4	3	2	3	90
3	2	3	2	2	40
bj	45	20	40	45	

Варіант 87

1.

$$Z = 12x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 - x_5 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_5 - x_6 = -4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	5	4	5	3	40
2	4	4	3	3	65
3	4	5	3	4	45
bj	25	45	55	25	

Варіант 88

1.

$$Z = -x_1 + 12x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	4	4	4	60
2	2	4	5	3	45
3	3	5	5	3	45
bj	45	25	50	30	

Варіант 89

1.

$$Z = -4x_1 - 10x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	3	55
2	3	2	2	3	55
3	2	3	3	4	40
bj	40	30	15	65	

Варіант 90

1.

$$Z = 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -5x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	5	4	60
2	3	3	5	4	45
3	2	2	4	5	45
bj	40	20	60	30	

Варіант 91

1.

$$Z = -5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	3	4	5	60
2	4	2	3	5	50
3	3	2	2	3	40
bj	45	25	55	25	

Варіант 92

1.

$$Z = -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	5	3	3	4	50
2	4	3	2	2	50
3	5	2	3	2	50
bj	40	30	50	30	

Варіант 93

1.

$$Z = x_1 + 5x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	1	3	4	70
2	2	2	3	3	35
3	3	1	2	4	45
bj	35	25	45	45	

Варіант 94

1.

$$Z = 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + x_5 \to min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -2x_1 - x_2 - x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	2	90
2	3	2	3	4	40
3	4	5	6	4	20
bj	50	60	20	20	

Варіант 95

1.

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	4	4	3	40
2	2	4	3	4	40
3	5	5	4	3	70
bj	40	30	50	30	

Варіант 96

1.

$$Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \to min$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	2	3	60
2	1	4	1	3	55
3	3	1	2	1	40
bj	65	20	20	50	

Варіант 97

1.

$$Z = -4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	3	2	60
2	4	1	5	2	40
3	1	3	1	4	55
bj	10	65	90	50	

Варіант 98

1.

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 6 \\ x_1 + x_4 + 6x_5 = 9 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	2	2	3	1	50
2	3	2	1	1	55
3	1	4	2	2	45
bj	30	40	30	50	

Варіант 99

1.

$$Z = -4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5 \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	3	1	4	2	50
2	2	2	3	1	40
3	3	3	4	1	60
bj	55	20	20	55	

Варіант 100

1.

$$Z = 3x_1 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_6 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}$$

2.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	1	2	1	3	30
2	2	1	1	4	50
3	2	1	3	1	70
bj	25	40	60	25	

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

Мета завдання 1

Застосування теоретичних знань та отримання практичних навичок:

- по зведенню задачі лінійного програмування до базисної та симетричної форми;
- по розв'язуванню задачі лінійного програмування графічним методом;
- по застосуванню алгоритму симплексного методу для розв'язування задач лінійного програмування;
- по застосуванню алгоритму штучного методу (*M*-методу) для розв'язування задач лінійного програмування;
- по застосуванню надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЙ» для визначення оптимального плану задачі лінійного програмування;
- по побудові двоїстих задач за відомою умовою прямої задачі лінійного програмування;
- по застосуванню першої теореми двоїстості для отримання оптимального плану двоїстої задачі;
- по застосуванню другої теореми двоїстості для отримання оптимального плану двоїстої задачі;

Мета завдання 2

Застосування теоретичних знань та отримання практичних навичок:

- побудови математичної моделі транспортної задачі;
- по отриманню початкового опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута;
- по отриманню початкового опорного плану транспортної задачі методом мінімальної вартості;
- по отриманню початкового опорного плану транспортної задачі методом подвійної переваги;
- по отриманню початкового опорного плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля;
- по застосуванню методу потенціалів для знаходження оптимального плану транспортної задачі;
- по застосуванню надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЙ» для визначення оптимального плану транспортної задачі.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ 1

$$Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

1. Використовуючи метод Жордана-Гаусса звести систему обмежень задачі до симетричної форми.

Теоретичні відомості

Метод Жордана-Гаусса (метод повного виключення невідомих) зводиться до виконання перетворень над системою рівнянь і заміни її еквівалентною системою, з якої можна знайти загальний і базисний розв'язки.

Якщо розглядати стовпці розширеної матриці системи, то згідно теореми Кронекера-Капеллі, серед n векторів-стовпців існує r лінійно незалежних векторів, які утворюють базис системи. Таких базисів можна обрати не більше C_n^r, тому що деякі стовпці матриці коефіцієнтів системи можуть бути лінійно залежними. Метод Жордана-Гаусса дозволяє визначити одиничний базис, характерною особливістю векторів якого є те, що у кожного з них усі координати, окрім однієї, дорівнюють нулю, а координата, яка дорівнює одиниці, у різних векторів базису розташована на різних місцях. При розв'язку системи методом Жордана-Гаусса використовуються спеціальні таблиці, які є по суті розширеними матрицями.

Алгоритм кроку перетворення метода Жордана-Гаусса

1. Вибрати в матриці системи рівнянь напрямний (розв'язувальний) елемент, відмінний від нуля ($a_{ij} \neq 0$), який є перетином відповідно напрямного $i-$го рядка та напрямного $j-$го стовпця.

2. Елементи напрямного $i-$го рядка необхідно поділити на напрямний елемент a_{ij} і одержані числа записати у відповідний $i-$й рядок нової симплексної таблиці.

3. Напрямний $j-$й стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість напрямного елементу.

4. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплекс-таблицю без змін.

5. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

6. Усі інші елементи наступної симплекс-таблиці розраховують за ***правилом прямокутника.***

7. Наступні кроки перетворень виконуються аналогічно, при цьому кожному разі напрямний елемент вибирають з інших рядків та стовпців.

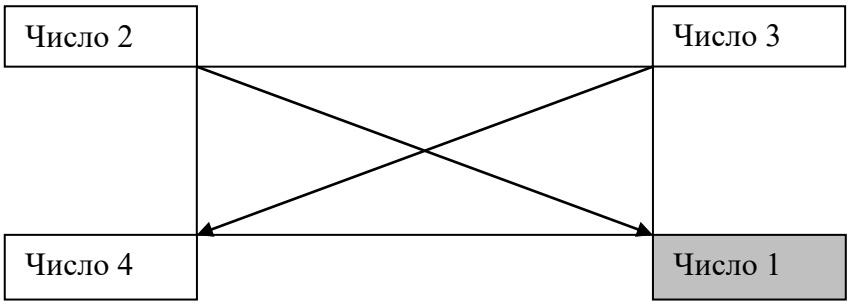
Правило прямокутника

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці, необхідно в попередній симплекс таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

Число 1 – напрямний елемент;

Число 2 – число, що стоїть на місці елемента нової симплекс-таблиці, який ми маємо розрахувати;

Число 3 та Число 4 – елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.



Необхідний елемент нової симплекс таблиці визначають таким чином :

$$Число2' = \frac{Число2 \cdot Число1 - Число3 \cdot Число4}{Число1}.$$

Розглянемо задачу лінійного програмування.

$$Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Основні обмеження в задачі є рівностями, а змінні невід'ємні. З цільової функції утворимо рівняння $Z + 6x_1 - 11x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$ і, використовуючи метод Жордана-Гаусса, зведемо систему обмежень до базисної форми.

Одночасно з цим базисні змінні будуть виключені з цільової функції. Для цього крім коефіцієнтів і вільних членів рівнянь системи внесено в таблицю рядок, якому відповідає лінійна функція. Будемо розглядати її як рівняння відносно базової змінної Z.

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 5, \\ 0x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 4, \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 5, \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 1x_5 - 1x_6 = -2, \end{cases}$$

$$Z + 6x_1 - 11x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 + 0x_6 = 0.$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Усі розрахунки оформимо у вигляді спеціальної таблиці (таблиця 1).

Таблиця 1.1

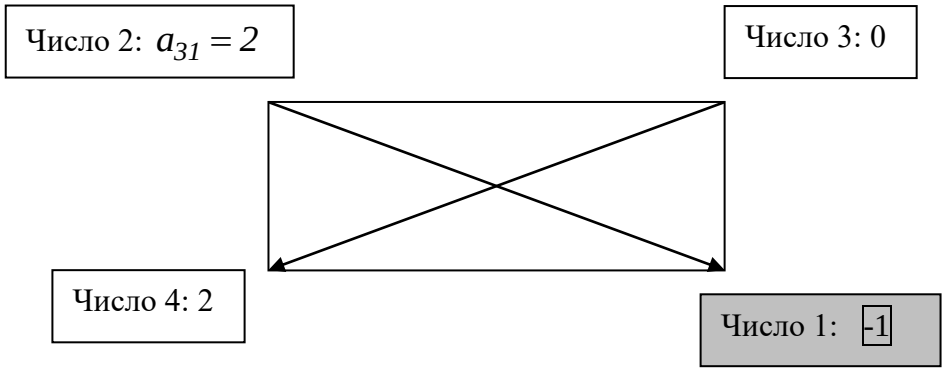
Номер ітерації	Номер рядка	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{A}_0$
0	1	0	-1	3	2	1	0	0	5
	2	0	0	2	1	1	0	0	4
	3	0	2	1	0	1	1	0	5
	4	0	2	1	0	0	-1	-1	-2
	5	1	6	-11	-4	2	-1	0	0

На нульовій ітерації (табл. 1.1) напрямний елемент взагалі можна вибрати довільним чином, тільки щоб він був відмінний від нуля, наприклад візьмемо $a_{46} = -1$. Тоді згідно з п.2 методу Жордана-Гаусса у першій ітерації (табл. 1.2) четвертий рядок, отримується з відповідного четвертого рядка нульової ітерації, елементи якого поділили на напрямний елемент $a_{46} = -1$, а згідно з п.3 стовпчик x_6 записується як одиничний з 1^* замість напрямного елементу a_{46}.

Таблиця 1.2

Номер ітерації	Номер рядка	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{A}_0$
0	1	0	-1	3	2	1	0	0	5
	2	0	0	2	1	1	0	0	4
	3	0	2	1	0	1	1	0	5
	4	0	2	1	0	0	-1	-1	-2
	5	1	6	-11	-4	2	-1	0	0
1	1	0	-1	3	2	1	0	0	5
	2	0	0	2	1	1	0	0	4
	3	0	2	1	0	1	1	0	5
	4	0	-2	-1	0	0	1	1^*	2
	5	1	6	-11	-4	2	-1	0	0

Інші елементи першої ітерації розраховуються за правилом прямокутника. Наприклад, визначимо елемент a'_{31}, який розміщується у нульовій ітерації. Складемо умовний прямокутник для елемента $a_{31} = 2$.



.

Тоді відповідний елемент $a'_{31} = \dfrac{2 \cdot (-1) - 0 \cdot 2}{-1} = 2$.

Аналогічно розраховуються інші елементи першої ітерації (табл. 1.2).

На першій ітерації візьмемо за напрямний елемент $\boldsymbol{a_{35} = 1}$, на другій ітерації – $\boldsymbol{a_{23} = 1}$, на третій ітерації – $\boldsymbol{a_{11} = -1}$.

В результаті, одержимо приведену таблицю 1:

Таблиця 1

Номер ітерації	Номер рядка	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{A}_0$
0	1	0	-1	3	2	1	0	0	5
	2	0	0	2	1	1	0	0	4
	3	0	2	1	0	1	1	0	5
	4	0	2	1	0	0	-1	$\boxed{-1}$	-2
	5	1	6	-11	-4	2	-1	0	0
1	1	0	-1	3	2	1	0	0	5
	2	0	0	2	1	1	0	0	4
	3	0	2	1	0	1	$\boxed{1}$	0	5
	4	0	-2	-1	0	0	1	1^*	2
	5	1	6	-11	-4	2	-1	0	0
2	1	0	-1	3	2	1	0	0	5
	2	0	0	2	$\boxed{1}$	1	0	0	4
	3	0	2	1	0	1	1^*	0	5
	4	0	-4	-2	0	-1	0	1	-3
	5	1	8	-10	-4	3	0	0	5
3	1	0	$\boxed{-1}$	-1	0	-1	0	0	-3
	2	0	0	2	1^*	1	0	0	4
	3	0	2	1	0	1	1	0	5
	4	0	-4	-2	0	-1	0	1	-3
	5	1	8	-2	0	7	0	0	21
4	1	0	$\mathbf{1}^*$	1	**0**	1	**0**	**0**	3
	2	0	**0**	2	**1**	1	**0**	**0**	4
	3	0	**0**	-1	**0**	-1	**1**	**0**	-1
	4	0	**0**	2	**0**	3	**0**	**1**	9
	5	1	0	-10	0	-1	0	0	-3

Оскільки на четвертій ітерації отримали чотири одиничні лінійно незалежні вектори, які відповідають базисним змінним x_1, x_3, x_5, x_6, то система обмежень набула необхідного базисного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_2 - x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_2 + 3x_4 + x_6 = 9, \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} x_2 + x_4 \le 3, \\ 2x_2 + x_4 \le 4, \\ -x_2 - x_4 \le -1, \\ 2x_2 + 3x_4 \le 9, \end{cases} \quad \text{оскільки } x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0.$$

Виразимо базисні змінні x_1, x_3, x_5, x_6 через вільні змінні x_2, x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_4, \\ x_3 = 4 - 2x_2 - x_4, \\ x_5 = -1 + x_2 + x_4, \\ x_6 = 9 - 2x_2 + 3x_4, \end{cases}$$

і підставимо в цільову функцію

$$Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 =$$
$$= -6(3 - x_2 - x_4) + 11x_2 + 4(4 - 2x_2 - x_4) - 2x_4 + (-1 + x_2 + x_4) =$$
$$= -18 + 6x_2 + 6x_4 + 11x_2 + 16 - 8x_2 - 4x_4 - 2x_4 - 1 + x_2 + x_4 =$$
$$= 10x_2 + x_4 - 3.$$

Отримаємо симетричну форму задачі лінійного програмування з двома змінними x_2 *і* x_4 :

$$Z = 10x_2 + x_4 - 3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 \le 3, \\ 2x_2 + x_4 \le 4, \\ -x_2 - x_4 \le -1, \\ 2x_2 + 3x_4 \le 9, \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0, \ x_4 \ge 0.$$

Даний результат, можна отримати безпосередньо з останньої ітерації таблиці 1, якщо у ній відкинути стовпчики, що відповідають базисним змінним x_1, x_3, x_5 *і* x_6 (табл. 1.3)

Таблиця 1.3

Номер ітерації	Номер рядка	Z	x_2	x_4	$\overline{A}_0$
4	1	0	1	1	3
	2	0	2	1	4
	3	0	-1	-1	-1
	4	0	2	3	9
	5	1	-10	-1	-3

і записати відповідну систему обмежень:

$$\begin{cases} x_2 + x_4 \le 3, \\ 2x_2 + x_4 \le 4, \\ -x_2 - x_4 \le -1, \\ 2x_2 + 3x_4 \le 9, \end{cases}$$

$$Z - 10x_2 - x_4 = -3$$

$$x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Звідси,

$$Z = 10x_2 + x_4 - 3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 \le 3, \\ 2x_2 + x_4 \le 4, \\ -x_2 - x_4 \le -1, \\ 2x_2 + 3x_4 \le 9, \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Зауважимо, що оскільки напрямні елементи на кожній ітерації можна вибирати довільно, то задача може мати різні симетричні форми.

2. Визначити оптимальний план задачі в симетричній формі за допомогою графічного методу.

Оскільки задача в симетричній формі містить тільки дві змінні, то її можна розв'язати за допомогою графічного методу.

Розв'яжемо одержану задачу графічним методом.

$$Z = 10x_2 + x_4 - 3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 \le 3, \\ 2x_2 + x_4 \le 4, \\ -x_2 - x_4 \le -1, \\ 2x_2 + 3x_4 \le 9, \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Перший крок згідно з алгоритмом графічного методу полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих.

Для цього знаходимо координати двох довільних точок через які проходить кожна пряма. Замість однієї змінної, наприклад x_2, беремо довільне значення і підставляємо в рівняння прямої, з якого і знаходимо відповідне значення іншої змінної x_4. При цьому зручно використовувати точки перетину прямої з координатними осями.

Для першої прямої, маємо:

$$(l_1): x_2 + x_4 = 3,$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 3, \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow A(0;3).$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 3, \\ x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3, \\ x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow B(3;0).$$

Знайдені точки відкладаємо в системі координат x_2Ox_4 і проводимо лінію l_1 (рис.1).

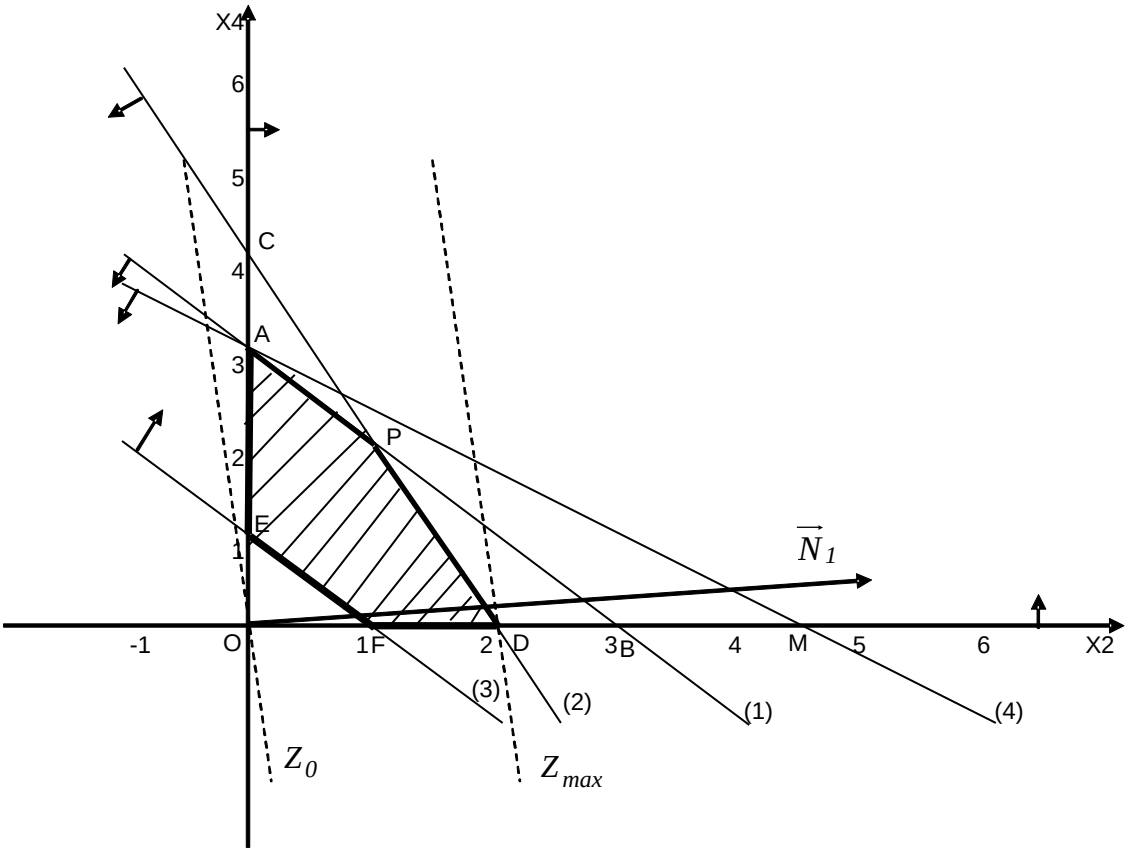


Рис.1. Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

Аналогічно виконуємо побудову інших ліній відповідно за точками:

$$(l_2): 2x_2 + x_4 = 4 \qquad C(0;4),\ D(2;0).$$
$$(l_3): -x_2 - x_4 = -1 \qquad E(0;1),\ F(1;0).$$
$$(l_4): 2x_2 + 3x_4 = 9 \qquad A(0;3),\ M(4{,}5;0).$$

Кожна з побудованих прямих ділить площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з них задовольняють нерівність, що розглядається, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (її напрям позначимо стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку, що не належить заданій прямій, і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина.

Підставимо в першу нерівність $x_2 + x_4 \le 3$ координати довільної точки, що не знаходиться рядом із заданою прямою 1, наприклад $O(0;0)$:

$$0+0 \le 3 \Rightarrow 0 \le 3 \Rightarrow \textit{вірна нерівність}.$$

Оскільки координати цієї точки задовольняють нерівність, то на рисунку позначаємо штрихуванням півплощину (ліву нижню відносно прямої 1), що включає вибрану точку та відмічаємо її напрям відповідною стрілкою.

Аналогічно, виконуємо розрахунки для кожного обмеження:

для другого обмеження:

$$2x_2 + x_4 \le 4,$$

$$2 \cdot 0 + 0 \le 4,$$

$$0 \le 4 \Rightarrow \textit{вірна нерівність};$$

для третього обмеження:

$$-x_2 - x_4 \le -1,$$

$$-0 - 0 \le -1,$$

$$0 \le -1 \Rightarrow \textit{невірна нерівність};$$

для четвертого обмеження:

$$2x_2 + 3x_4 \le 9,$$

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \le 9,$$

$$0 \le 9 \Rightarrow \textit{вірна нерівність}.$$

Для 1, 2 і 4 обмеження вибираємо ту півплощину, що включає точку $O(0;0)$, а для 3-го обмеження вибираємо іншу півплощину, що не включає точку $O(0;0)$, оскільки дане обмеження не справджується. На рисунку позначаємо штрихуванням відповідні півплощини (рис. 1).

Враховуючи умову невід'ємності змінних $x_2 \ge 0, x_4 \ge 0,$ будемо розглядати тільки перший квадрант системи координат.

Таким чином, переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів, – многокутник ***EAPDF***. Координати будь-якої його точки, задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних.

Поставлену задачу буде розв'язано, якщо відшукаємо таку точку многокутника планів ***EAPDF*** в якій цільова функція Z набуває найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор-нормалі $\vec{N} = grad\, Z = (c_1; c_2)$ компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор протилежний йому, – напрям їх зменшення, при цьому довжина вектора має другорядне значення. Тому будується довільний співнапрямлений вектор $\vec{N}_1 = \frac{\vec{N}}{\alpha}$, де $\alpha > 0$ вибираємо з врахуванням масштабності.

Таким чином, для цільової функції заданої задачі $Z = 10x_2 + x_4 - 3 \to max$, маємо:

$$\vec{N} = (10;1), \quad \vec{N}_1 = \frac{\vec{N}}{2} = \left(5; \frac{1}{2}\right).$$

Будуємо лінію рівня цільової функції Z, якою є пряма $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, що перпендикулярна до вектора $\vec{N}$.

Оскільки $Z = 10x_2 + x_4 - 3 \to max$, то побудуємо пряму $10x_2 + x_4 = 0$ за знайденими точками $O(0;0), M(-0{,}5;5)$. Позначимо лінію рівня на рисунку Z_0. Переміщуючи одержану лінію рівня Z_0 в напрямі вектора $\vec{N}$, знаходимо вершину многокутника планів, де цільова функція досягає екстремального значення.

Із рис.1 бачимо, що останньою спільною точкою (точкою виходу) лінії рівня цільової функції Z_0 та многокутника планів $EAPDF$, є точка D, через яку і проходить одержана пряма Z_{max}.

Для визначення координат точки D розглянемо систему рівнянь прямих l_2 і осі Ox_2, оскільки $D = l_2 \cap Ox_2$:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2, \\ x_4 = 0, \end{cases} \Rightarrow D(2;0).$$

Отже, згідно з графічним методом отримали наступний оптимальний план задачі лінійного програмування, яка попередньо була записана у симетричній формі: $X_{max} = (2;0)$, при цьому $Z_{max} = Z(X_{max})$, тобто максимальне значення цільової функції $Z_{max} = 10 \cdot 2 + 0 - 3 = 17$.

Для знаходження оптимального плану вихідної задачі необхідно знайти значення базисних змінних із загального розв'язку:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - x_4, \\ x_3 = 4 - 2x_2 - x_4, \\ x_5 = -1 + x_2 + x_4, \\ x_6 = 9 - 2x_2 + 3x_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - 2 - 0, \\ x_3 = 4 - 2 \cdot 2 - 0, \\ x_5 = -1 + 2 + 0, \\ x_6 = 9 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 0, \\ x_5 = 1, \\ x_6 = 5. \end{cases}$$

Таким чином, отримуємо оптимальний план вихідної задачі

$$X_{max} = (1;2;0;0;1;5)$$

зі значенням цільової функції

$$Z_{max} = -6 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 17 .$$

3. Визначити оптимальний план задачі в базисній формі за допомогою симплекс-методу.

Розглянемо задачу лінійного програмування в базисній формі

$$Z = 10x_2 + x_4 - 3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_2 - x_4 + x_5 = -1, \\ 2x_2 + 3x_4 + x_6 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6} .$$

Однією з необхідних умов застосування симплекс-методу є умова невід'ємності елементів правої частини системи обмежень. Тому домноживши ліву та праву частини третього обмеження системи обмежень у базисному вигляді на -1, одержимо задачу лінійного програмування в канонічній формі:

$$Z' = Z + 3 = 0x_1 + 10x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + 3x_4 + x_6 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Канонічну форму задачі можна б було отримати інакше. А саме в симетричній формі задачі

$$Z = 10x_2 + x_4 - 3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_2 + x_4 \leq 3, \\ 2x_2 + x_4 \leq 4, \\ -x_2 - x_4 \leq -1, \\ 2x_2 + 3x_4 \leq 9, \end{cases}$$

$$x_2 \geq 0, \; x_4 \geq 0.$$

ввести до лівої частини обмежень-нерівностей додаткові балансуючи змінні x_1, x_3, x_5, x_6 і, враховуючи умову невід'ємності елементів правої частини системи обмежень, третє рівняння домножити на -1. У цільовій функції Z, додаткові змінні мають коефіцієнти, що дорівнюють нулю.

Запишемо канонічну систему обмежень задачі лінійного програмування у векторній формі:

$$x_1 \cdot \overrightarrow{A_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{A_2} + x_3 \cdot \overrightarrow{A_3} + x_4 \cdot \overrightarrow{A_4} + x_5 \cdot \overrightarrow{A_5} + x_6 \cdot \overrightarrow{A_6} = \overrightarrow{A_0},$$

де

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів є лише три одиничні: $\vec{A}_1, \vec{A}_3, \vec{A}_6$, а базис у чотирьохвимірному просторі має складатися з чотирьох одиничних лінійно-незалежних векторів, оскільки базис повинен дорівнювати кількості обмежень заданої системи ($m = 4$). Необхідний одиничний вектор можна дістати, ввівши в третє обмеження з коефіцієнтом $+1$ штучну змінну x_7, якій відповідатиме одиничний вектор $\overrightarrow{A_7} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

При цьому на відміну від додаткових балансуючих змінних, штучна змінна x_7 має в цільовій функції Z коефіцієнт $-M$ (для задачі на max) або $+M$ (для задачі на min), де M – досить велике додатне число.

Таким чином, отримали розширену задачу ($M-$задачу) лінійного програмування:

$$Z' = 0x_1 + 10x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7 \to max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3; \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_2 + x_4 - x_5 + x_7 = 1; \\ 2x_2 + 3x_4 + x_6 = 9; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,7}.$$

У розширеній задачі базисними змінними є x_1, x_3, x_6, x_7, а решта змінних є вільні. Прирівнявши вільні змінні до нуля, з кожного обмеження розширеної задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_2 = x_4 = x_5 = 0,\ x_1 = 3, x_3 = 4, x_7 = 1, x_6 = 9.$$

Отже, початковий опорний план задачі

$$X_0 = (3;0;4;0;0;9;1)$$

і початкове значення цільової функції

$$Z'_0 = 0 \cdot 3 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 9 - M \cdot 1 = -M.$$

Подальше розв’язування задачі лінійного програмування оформимо у вигляді симплекс-таблиці (таблиця 2).

Таблиця 2

№ ітерації	№ обмеження	Базис	$C_{баз}$	План $\overline{A}_0$	0	10	0	1	0	0	$-M$	θ
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	1	x_1	0	3	1	1	0	1	0	0	0	3
	2	x_3	0	4	0	2	1	1	0	0	0	2
	3	x_7	-M	1	0	$\boxed{1}$	0	1	-1	0	1	1
	4	x_6	0	9	0	2	0	3	0	1	0	4,5
	5	Z, Δ_j		**0**	**0**	**-10**	**0**	**-1**	**0**	**0**	**0**	$\Delta_j < 0$
	6			**-M**	**0**	**-M**	**0**	**-M**	**M**	**0**	**0**	
I	1	x_1	0	2	1	0	0	0	1	0	-1	2
	2	x_3	0	2	0	0	1	-1	$\boxed{2}$	0	-2	1
	3	x_2	10	1	0	1^*	0	1	-1	0	1	-
	4	x_6	0	7	0	0	0	1	2	1	-2	3,5
	5	Z, Δ_j		**10**	**0**	**0**	**0**	**9**	**-10**	**0**	**10**	$\Delta_j < 0$
	6			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	
II	1	x_1	0	1	1	0	-1/2	1/2	0	0	0	
	2	x_5	0	1	0	0	1/2	-1/2	1^*	0	-1	
	3	x_2	10	2	0	1	1/2	1/2	0	0	0	
	4	x_6	0	5	0	0	-1	2	0	1	0	
	5	Z, Δ_j		**20**	**0**	**0**	**5**	**4**	**0**	**0**	**0**	$\Delta_j \geq 0$
	6			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	

Заносимо умову задачі в симплекс-таблицю (0 ітерація)

Оскільки наша задача розв'язується за допомогою $M-$методу (методу штучних змінних), то таблиця містить на один рядок більше, ніж при звичайному симплекс-методі. При цьому в оціночний ($m+2$)-й рядок записують коефіцієнти з M, а в оціночний ($m+1$)-й – доданки, які не містять M.

Далі оціночні рядки визначаються за допомогою формул

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad (j = \overline{1,7}),$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків «$\vec{C}_{баз}$» та «$\vec{X}_j$» мінус відповідний коефіцієнт c_j, тобто

$$\Delta_j = \overline{C_{баз}} \cdot \overline{X_j} - c_j .$$

Значення $\Delta_o = \overline{C_{баз}} \cdot \overline{A_o}$ записується у стовпчику «План» і дорівнює початковому значенню цільової функції.

Отже,

$$\Delta_0 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 9 = 0 - M;$$

$$\Delta_1 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_2 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 2) - 10 = -10 - M$$

$$\Delta_3 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 3) - 1 = -1 - M;$$

$$\Delta_5 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + 0 \cdot 0) - 0 = M;$$

$$\Delta_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_7 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 0) - (-M) = 0.$$

Одержані значення записуємо в оціночні 5 і 6 рядки.

Одержані оціночні рядки перевіряють на оптимальність згідно теореми оптимальності.

Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на ***max***) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на ***min***), то визначений опорний план є оптимальний. Якщо ж в оціночних рядках присутня хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності, то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У нульовій ітерації в 5 і 6-му рядку є два однакових від'ємні значення $\Delta_2 = -10 - M$ ***і*** $\Delta_4 = -1 - M$, що суперечить умові оптимальності, і тому початковий опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу його необхідно поліпшити, перейшовши до іншого опорного плану задачі.

Даний перехід виконують зміною базису, тобто за рахунок виключення з поточного базису деякої змінної та введення замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Для задачі на ***max*** серед від'ємних оцінок Δ_j вибирають найбільшу за абсолютною величною

$$max|\Delta_j| = |\Delta_k|, \quad \Delta_j < 0 .$$

У випадку задачі на $\boldsymbol{min}$ серед додатних оцінок Δ_j вибирають найбільшу величину

$$\max \Delta_j = \Delta_k, \quad \Delta_j > 0.$$

Відповідний $\boldsymbol{k}$-стовпчик називається напрямним.

Якщо у цьому стовпчику всі елементи $a_{ik} \le 0$, $i = \overline{1,m}$, то це означає, що цільова функція є необмеженою й оптимальних планів не існує, тобто $\max Z = \infty$, або для задачі мінімум $\min Z = -\infty$.

Якщо є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок Δ_j, то до базису вводять ту змінну, якій відповідає $\max c_j$ (для задачі на $\boldsymbol{max}$) і $\min c_j$ (для задачі на $\boldsymbol{min}$).

Для даної задачі вибираємо напрямним $\boldsymbol{k}$-стовпчиком стовпчик x_2, оскільки $\max\{|\Delta_2|;|\Delta_4|\} = |\Delta_2|$. Вибраний стовпчик позначаємо вертикальною стрілкою. Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних значень a_{ik} напрямного стовпчика симплексне відношення $\theta = \dfrac{b_i}{a_{ik}}$. Вибирають найменше його значення, тобто

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_r}{a_{rk}} \ (a_{ik} > 0),$$

яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Нехай це буде рядок $i = r$ – напрямний рядок. Симплексні відношення можна отримати розділивши елементи стовпчика «План» на відповідні додатні елементи напрямного стовпчика.

Елемент a_{rk}, який розміщений на перетині напрямного рядка і напрямного стовпчика є напрямним елементом.

Для нашої задачі $\min\theta = \min\left\{\frac{3}{1};\frac{4}{2};\frac{1}{1};\frac{9}{2}\right\} = 1$, і відповідає 3-рядку, який в таблиці позначено горизонтального стрілкою вліво. На перетині маємо напрямний елемент (виділено рамкою) $a_{32} = 1$.

Отже, з базису виключаємо змінну x_7 (штучну змінну) і вводимо вільну змінну x_2. Будуємо нову ітерацію симплекс-таблиці, елементи якої розраховуємо за методом Жордана-Гаусса.

Для першої ітерації, маємо у нульовій ітерації напрямний елемент $a_{32} = 1$. Тому у першій ітерації третій рядок записується без змін, другий стовпчик – одиничний з 1^* замість напрямного елементу a_{32}. Інші елементи першої ітерації розраховані за правилом прямокутника.

Наприклад, елементи стовпчика «План» першої ітерації

$$\frac{3\cdot 1-1\cdot 1}{1}=2;\ \frac{4\cdot 1-2\cdot 1}{1}=2;\ \frac{9\cdot 1-2\cdot 1}{1}=7;$$
$$\frac{0\cdot 1-(-10)\cdot 1}{1}=10\ ;\frac{-M\cdot 1-(-M)\cdot 1}{1}=0 .$$

Елементи стовпчика «x_4» другої ітерації:

$$\frac{1\cdot 1-1\cdot 1}{1}=0;\ \frac{1\cdot 1-2\cdot 1}{1}=-1;\ \frac{3\cdot 1-2\cdot 1}{1}=1;$$
$$\frac{-1\cdot 1-(-10)\cdot 1}{1}=9\ ;\frac{-M\cdot 1-(-M)\cdot 1}{1}=0.$$

Враховуючи п. 4, 5 методу Жордана-Гаусса можна значно полегшити заповнення симплекс-таблиці.

Перейшовши до першої ітерації в симплекс-таблиці бачимо, що в оціночному 6-му рядку відсутні від'ємні елементи та штучна змінна x_7 виведена з базису. Тому аналіз оцінок Δ_j ведемо по оціночному 5-му рядку. Маємо $\Delta_5 = -10 < 0$, а це означає що даний опорний план також неоптимальний. За напрямний стовпчик беремо стовпчик зі змінною x_5, а за напрямний рядок – другий, оскільки $\min\theta = \min\left\{\frac{2}{1};\frac{2}{2};\frac{7}{2}\right\} = 1$.

У першій ітерації напрямний елемент $a_{25} = 2$. Тому у другій ітерації другий рядок утворений з елементів другого рядка попередньої ітерації поділених на число $a_{25} = 2$, тобто маємо

$$1\quad 0\quad 0\quad 1/2\quad -1/2\quad 1^*\quad 0\quad -1\ ,$$

а п'ятий стовпчик другої ітерації – відповідно одиничний.

Інші елементи другої ітерації розраховані за правилом прямокутника.

Елементи стовпчика «План» другої ітерації:

$$\frac{2\cdot 2-1\cdot 2}{2}=1;\quad \frac{1\cdot 2-(-1)\cdot 2}{2}=2;\ \frac{7\cdot 2-2\cdot 2}{2}=5;$$
$$\frac{10\cdot 2-(-10)\cdot 2}{2}=20;\ \frac{0\cdot 2-0\cdot 2}{2}=0.$$

Елементи стовпчика «x_3» другої ітерації:

$$\frac{0\cdot 2-1\cdot 1}{2}=-\frac{1}{2};\quad \frac{0\cdot 2-1\cdot(-1)}{2}=\frac{1}{2};\quad \frac{0\cdot 2-1\cdot 2}{2}=-1;$$
$$\frac{0\cdot 2-1\cdot(-10)}{2}=5;\ \frac{0\cdot 2-(-1)\cdot 0}{2}=0.$$

Враховуючи п. 4, 5 методу Жордана-Гаусса можна значно полегшити заповнення симплекс-таблиці.

Переходимо до наступної ітерації симплексної таблиці.

Як видно з оціночних 5 і 6-го рядків всі $\Delta_j > 0\ (j=\overline{1,n})$, тобто задовольняється умова оптимальності.

Використовуючи стовпчик «План», маємо наступний оптимальний план заданої задачі лінійного програмування

$$X_{max}=(1;2;0;0;1;5),$$

і оптимальне значення цільової функції

$$Z'_{max}=Z_{max}+3=0\cdot 1+10\cdot 2+0\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 5=20,$$

тоді

$$Z_{max}=20-3=17,$$

що відповідає результатам, одержаним графічним методом.

При застосуванні симплекс-методу для розв'язування задач лінійного програмування можуть бути такі випадки:

1. Якщо в $(m+1)$ оціночному рядку останньої симплексної таблиці оцінка $\Delta_j = 0$ відповідає вільній (небазисній) змінній, то задача лінійного програмування має альтернативний оптимальний план, який можна отримати, вибравши напрямний елемент у зазначеному стовпчику таблиці та здійснивши один крок симплекс-методом.

2. Якщо для опорного плану задачі лінійного програмування всі оцінки $\Delta_j \ (j = \overline{1,n})$ задовольняють умову оптимальності, але при цьому хоча б одна штучна змінна є базисною і має додатне значення, то система обмежень задачі несумісна й оптимальних планів такої задачі не існує.

3. Якщо мінімальне значення симплексного відношення θ не єдине, то новий опорний план – вироджений, тобто одна чи декілька базисних змінних дорівнюють нулю і при переході від одного опорного плану до іншого значення цільової функції не змінюється.

4. Якщо в $(m+1)$ оціночному рядку останньої симплекс-таблиці, яка включає в себе оптимальний план, є хоча б одна нульова оцінка Δ'_j, що відповідає вільній змінній, то задача лінійного програмування має нескінченну множину оптимальних планів. Для знаходження альтернативного плану, необхідно виконати ще одну ітерацію, розглянувши в якості напрямного стовпчика той, що має оцінку Δ'_j.

Тоді розв'язок задачі лінійного програмування можна записати у вигляді:

$$X_{опт} = \lambda_1 X'_{опт} + \lambda_2 X''_{опт} \quad ,де \ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

4. Визначити оптимальний план вихідної задачі методом штучного базису (М-методом).

Розв'яжемо безпосередньо вихідну задачу, не виділяючи в системі обмежень попередньо одиничний базис, методом Жордана-Гаусса.

$$Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Розглянувши систему обмежень вихідної задачі, бачимо, що її четверте обмеження у правій частині має від'ємне число, що суперечить умовам симплекс-метода. Помножимо четверте обмеження на -1. Оскільки отримана задача має систему обмежень, яка представлена в канонічному виді, але одиничний базис не виділений, то задачу лінійного програмування можна розв'язати методом штучного базису (*М*-методом) ввівши необхідні штучні змінні.

Запишемо векторну форму запису системи обмежень

$$\overrightarrow{A_1} \cdot x_1 + \overrightarrow{A_2} \cdot x_2 + \overrightarrow{A_3} \cdot x_3 + \overrightarrow{A_4} \cdot x_4 + \overrightarrow{A_5} \cdot x_5 + \overrightarrow{A_6} \cdot x_6 = \overrightarrow{A_0},$$

де

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_6} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_0} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

У систему векторів для утворення початкового одиночного базису необхідно ввести три одиничні вектора

$$\overrightarrow{A_7}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{A_8}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{A_9}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},$$

які відповідають штучним змінним x_7, x_8, x_9 введеним у перші три обмеження з коефіцієнтом $+1$. У цільовій функції Z вони матимуть коефіцієнт $-M$ (для задачі на ***max***) або $+M$ (для задачі на ***min***), де M – досить велике додатне число.

Таким чином розширена задача лінійного програмування буде мати наступний вигляд:

$$Z=-6x_1+11x_2+4x_3-2x_4+1\cdot x_5+0\cdot x_6-Mx_7-Mx_8-Mx_9\to max$$

$$\begin{cases}-x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_7=5,\\ 2x_2+x_3+x_4+x_8=4,\\ 2x_1+x_2+x_4+x_5+x_9=5,\\ -2x_1-x_2+x_5+x_6=2,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0;\ j=\overline{1,9}.$$

Подальше розв’язування задачі надано у вигляді симплекс-таблиці (таблиця 3).

Розглянемо основні її етапи.

Після нульової ітерації виводимо з базису штучну змінну x_7 та замінюємо її змінною x_2, після першої – штучну змінну x_8 та замінюємо її змінною x_1, після другої – штучну змінну x_9 та замінюємо її змінною x_5. Після третьої ітерації виключено всі штучні змінні. При цьому всі оцінки оціночних 5 і 6-го рядків задовольняють умові оптимальності, оскільки $\Delta_j\ge 0$ для задачі на *max.*

З останньої ітерації визначаємо оптимальний план вихідної задачі лінійного програмування

$$X_{max}=(1;2;0;0;1;5),\ Z_{max}=17,$$

що співпадає з попередніми розрахунками.

Таблиця 3

№ ітерації	№ обмеження	Базис	$C_{баз}$	План $\overline{A}_0$	-6 x_1	11 x_2	4 x_3	-2 x_4	1 x_5	0 x_6	-M x_7	-M x_8	-M x_9	8 -3M $\sum$	θ
0	1	x_7	-M	5	-1	3	2	1	0	0	1	0	0	11	**1,7**
	2	x_8	-M	4	0	2	1	1	0	0	0	1	0	9	2
	3	x_9	-M	5	2	1	0	1	1	0	0	0	1	11	5
	4	x_6	0	2	-2	-1	0	0	1	1	0	0	0	1	-
	5	Z, Δ_j		**0**	**6**	**-11**	**-4**	**2**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-8**	$\Delta_j < 0$
	6			**-14M**	**-M**	**-6M**	**-3M**	**-3M**	**-M**	**0**	**0**	**0**	**0**	**-28M**	
I	1	x_2	11	5/3	-1/3	1^*	2/3	1/3	0	0	1/3	0	0	11/3	-
	2	x_8	-M	2/3	2/3	0	-1/3	1/3	0	0	-2/3	1	0	5/3	**1**
	3	x_9	-M	10/3	7/3	0	-2/3	2/3	1	0	-1/3	0	1	22/3	1,4
	4	x_6	0	11/3	-7/3	0	2/3	1/3	1	1	1/3	0	0	14/3	-
	5	Z, Δ_j		**55/3**	**7/3**	**0**	**10/3**	**17/3**	**-1**	**0**	**11/3**	**0**	**0**	**97/3**	$\Delta_j < 0$
	6			**-4M**	**-3M**	**0**	**M**	**-M**	**-M**	**0**	**2M**	**0**	**0**	**-6M**	
II	1	x_2	11	2	0	1	1/2	1/2	0	0	0	1/2	0	9/2	-
	2	x_1	-6	1	1^*	0	-1/2	1/2	0	0	-1	3/2	0	5/2	-
	3	x_9	-M	1	0	0	1/2	-1/2	1	0	2	-7/2	1	3/2	**1**
	4	x_6	0	6	0	0	-1/2	3/2	1	1	-2	7/2	0	21/2	6
	5	Z, Δ_j		**16**	**0**	**0**	**9/2**	**9/2**	**-1**	**0**	**6**	**-7/2**	**0**	**53/2**	$\Delta_j < 0$
	6			**-M**	**0**	**0**	**-1/2M**	**1/2M**	**-M**	**0**	**-M**	**9/2 M**	**0**	**3/2M**	

III	1	x_2	11	2	0	1	1/2	1/2	0	0	0	1/2	0	9/2	
	2	x_1	-6	1	1	0	-1/2	1/2	0	0	-1	3/2	0	5/2	
	3	x_5	1	1	0	0	1/2	-1/2	1^*	0	2	-7/2	1	3/2	
	4	x_6	0	5	0	0	-1	2	0	1	-4	7	-1	9	
	5	Z, Δ_j		**17**	**0**	**0**	**5**	**4**	**0**	**0**	**8**	**-7**	**1**	**28**	$\Delta_j \geq 0$
	6			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	**3M**	

При розрахунку симплекс-таблиць за допомогою штучного методу потрібно врахувати, що стовпчик, який включав в собі штучну змінну, після її виведення, взагалі, можна виключити з розгляду. Але, якщо нам потрібно розв'язувати крім прямої задачі ще і двоїсту задачу, то ми залишаємо усі стовпчики і виконуємо необхідні розрахунки повністю до отримання оптимального плану.

Для додаткового контролю за бажанням можна ввести (як в таблиці 3), на нульовій ітерації в симплексну таблицю додатковий стовпчик «∑», елементи якого є відповідно контрольною сумою усіх коефіцієнтів цільової функції $\boldsymbol{Z}$ $(\boldsymbol{8-3M})$ та контрольними сумами відповідного елемента стовпчика «План» з усіма елементами кожного рядка окремо ($11,9,11,1$), і виконувати над ним усі дії згідно алгоритму метода Жордана-Гаусса.

Після кожної ітерації сума всіх елементів по кожному рядку окремо з відповідним елементом стовпчика «План», в тому числі і для оціночних рядків повинна співпадати з відповідним числом у контрольному стовпчику. Це дає можливість проконтролювати правильність обчислень по кожному рядку окремо.

Наприклад, після виконання першої ітерації для оціночного 5-го маємо

$$\frac{55}{3}+\frac{7}{3}+0+\frac{10}{3}+\frac{17}{3}+(-1)+0+\frac{11}{3}+0+0=\frac{97}{3},$$

що співпадає з числом у контрольному стовпчику.

5. Визначити оптимальний план вихідної задачі за допомогою надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЙ».

Використовуючи надбудову «ПОИСК РЕШЕНИЙ» визначимо оптимальний план вихідної задачі

$$Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}.$$

Вводимо вихідні дані задачі, формули лівої частини кожного обмеження та формулу цільової функції (рис. 1):

H34 =СУММПРОИЗВ(B25:G25;B34:G34)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
24	Змінні	x1	x2	x3	x4	x5	x6			
25	Розв'язок									
26								Формули		
27								обмежень		
28	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень						Ліва частина	Знак	Права частина
29	1	-1	3	2	1	0	0	=СУММПРОИЗВ($B$25:$G$25;B29:G29)	=	5
30	2	0	2	1	1	0	0	=СУММПРОИЗВ($B$25:$G$25;B30:G30)	=	4
31	3	2	1	0	1	1	0	=СУММПРОИЗВ($B$25:$G$25;B31:G31)	=	5
32	4	2	1	0	0	-1	-1	=СУММПРОИЗВ($B$25:$G$25;B32:G32)	=	-2
33								ЦФ	Напрям	
34	Цільова функція	-6	11	4	-2	1	0	=СУММПРОИЗВ(B25:G25;B34:G34)	max	

Рис. 1. Початкові дані для розв’язання задачі

Відкриваємо діалогове вікно *Данные – Поиск решения* і вводимо необхідні дані, обмеження та параметри розрахунку (рис. 2):

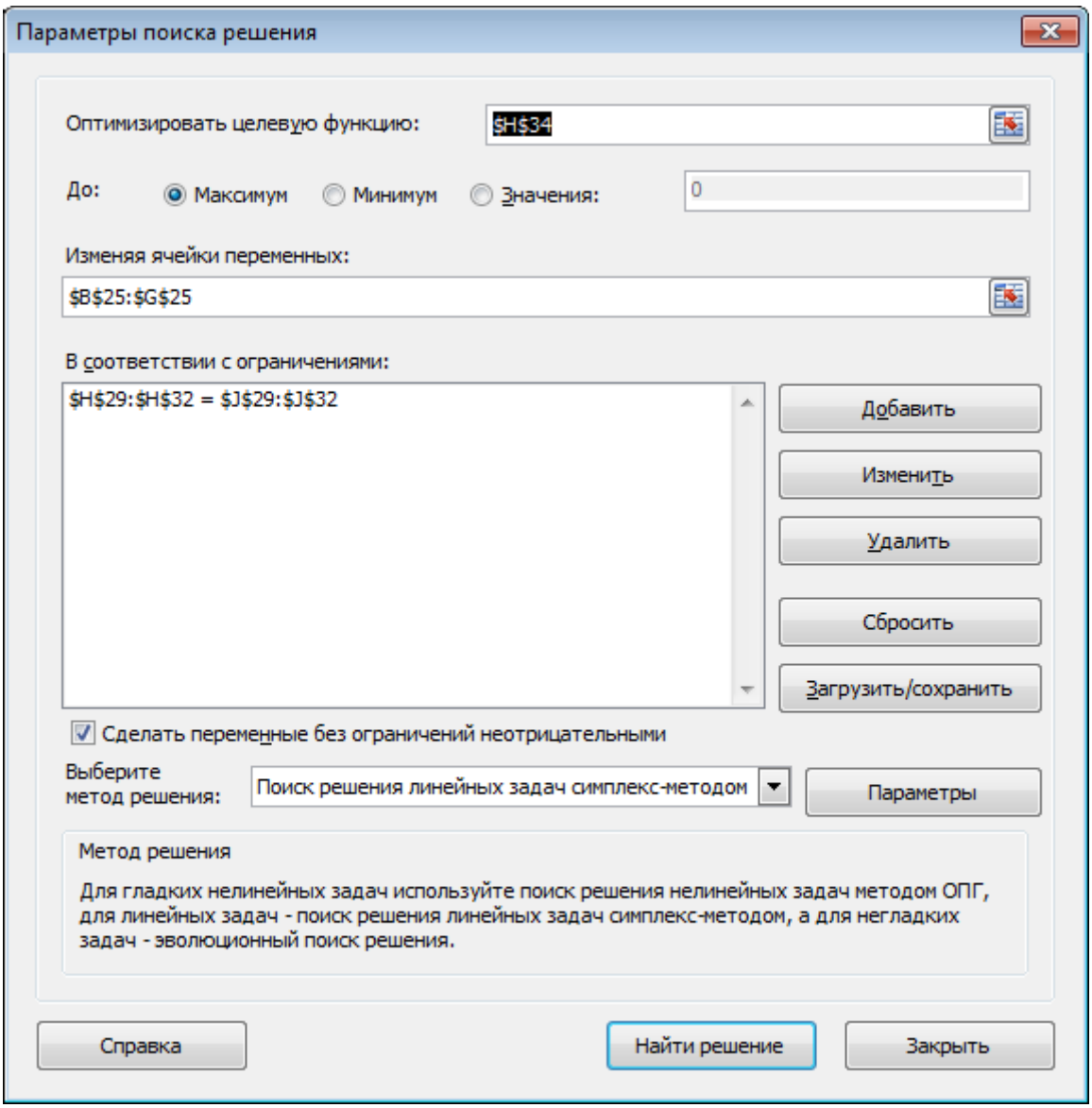


Рис. 2. Діалогове вікно «Поиск решения»

Нажимаємо *Найти решение* і отримаємо в клітинках B25:G25 значення оптимального розв’язку, а в клітинці H34 оптимальне значення цільової функції (рис. 3):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
24	Змінні	x1	x2	x3	x4	x5	x6			
25	Розв'язок	1	2	0	0	1	5			
26								Формули		
27								обмежень		
28	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень						Ліва частина	Знак	Права частина
29	1	-1	3	2	1	0	0	5	=	5
30	2	0	2	1	1	0	0	4	=	4
31	3	2	1	0	1	1	0	5	=	5
32	4	2	1	0	0	-1	-1	-2	=	-2
33								ЦФ	Напрям	
34	функція	-6	11	4	-2	1	0	17	max	

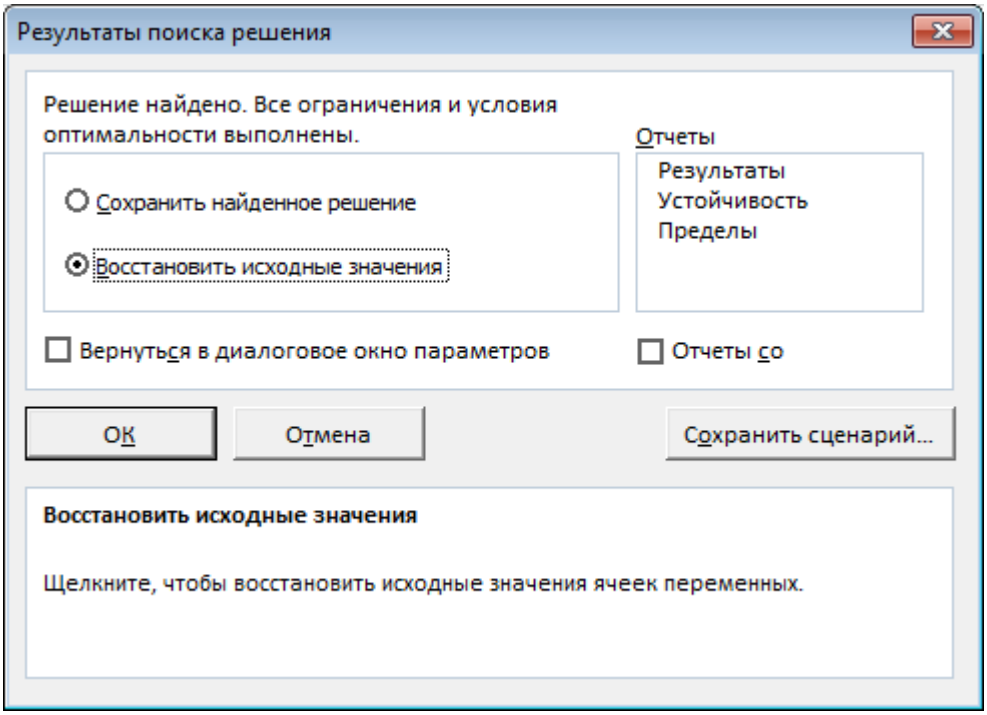


Рис. 3. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Таким чином отримуємо оптимальний план вихідної задачі лінійного програмування

$$X_{max} = (1;2;0;0;1;5),\ Z_{max} = 17,$$

що підтверджує попередні розрахунки.

6. Побудувати двоїсту задачу до вихідної задачі лінійного програмування.

Побудуємо двоїсту задачу до даної задачі лінійного програмування, яку ще називають прямою задачею.

Пряма задача

$$Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, & y_1 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, & y_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, & y_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2, & y_4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0;\ j = \overline{1,6}$$

Використовуючи відповідні правила складемо двоїсту задачу.

Оскільки $Z \to max$, то $F \to min$.

Коефіцієнти цільової функції прямої задачі Z стають вільними членами в системі обмежень двоїстої задачі, а вільні члени системи обмежень прямої задачі – коефіцієнтами цільової функції F двоїстої задачі.

Оскільки усі змінні прямої задачі $x_j \geq 0, j = \overline{1,6}$, то обмеження-нерівності двоїстої задачі будуть вигляду "$\geq$".

Двоїста задача

$$F = 5y_1 + 4y_2 + 5y_3 - 2y_4 \to min;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_3 + 2y_4 \geq -6, & x_1 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 \geq 11, & x_2 \\ 2y_1 + y_2 \geq 4, & x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \geq -2, & x_4 \\ y_3 - y_4 \geq 1 & x_5 \\ -y_4 \geq 0. & x_6 \end{cases}$$

$$y_i \in [-\infty; +\infty],\ i = \overline{1,4}$$

Двоїста задача має чотири змінні y_1, y_2, y_3, y_4, які можуть мати будь-який знак, оскільки пряма задача містить чотири обмеження-рівності. Кількість змінних $x_j, j = \overline{1,6}$ прямої задачі вимагає стільки ж умов-обмежень (6) у двоїстій задачі, а коефіцієнти стовпчики вихідної задачі стають коефіцієнтами умов-обмежень у двоїстій задачі.

Формуючи умови-обмеження двоїстої задачі, змінну y_1 множимо на коефіцієнти першої обмеження прямої задачі, змінну y_2 – на коефіцієнти другого обмеження і т.д.

7. Визначити оптимальний план двоїстої задачі, застосовуючи першу теорему двоїстості.

Визначимо оптимальний план двоїстої задачі за першою теоремою двоїстості. Для цього використовуємо результати розв'язання прямої задачі симплекс-методом (таблиця 3):

№ ітерації	№ обмеження	Базис	$C_{баз}$	План $\overline{A_0}$	-6	11	4	-2	1	0	-M	-M	-M	θ
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
III	1	x_2	11	2	0	1	1/2	1/2	0	**0**	**0**	**1/2**	**0**	
	2	x_1	-6	1	1	0	-1/2	1/2	0	**0**	**-1**	**3/2**	**0**	
	3	x_5	1	1	0	0	1/2	-1/2	1^*	**0**	**2**	**-7/2**	**1**	
	4	x_6	0	5	0	0	-1	2	0	**1**	**-4**	**7**	**-1**	
	5	Z, Δ_j		**17**	**0**	**0**	**5**	**4**	**0**	**0**	**8**	**-7**	**1**	$\Delta_j \geq 0$
	6			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	**M**	**M**	

$$X_{max} = (1;2;0;0;1;5),\ Z_{max} = 17.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна записати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$F_{min} = Z_{max} = 17,$$

$$Y_{min} = \overrightarrow{C}_{баз} \cdot D^{-1},$$

де $\overrightarrow{C_{баз}} = (11; -6; 1; 0)$ міститься в стовпчику «$C_{баз}$» останньої симплекс-таблиці (3 ітерації), а матриця

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{7}{2} & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_7», «x_8», «x_9», «x_6», які утворювали початковий базис (0 ітерація).

Тоді, оптимальний план двоїстої задачі

$$Y_{min} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 2 & -7/2 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(11 \cdot 0 + (-6) \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) \quad 11 \cdot 1/2 + (-6) \cdot 3/2 + 1 \cdot (-7/2) + 0 \cdot 7$$
$$11 \cdot 0 + (-6) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \quad 11 \cdot 0 + (-6) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

і значення цільової функції

$$F_{min} = 5 \cdot 8 + 4 \cdot (-7) + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 17 .$$

8. Визначити оптимальний план двоїстої задачі, застосовуючи другу теорему двоїстості.

Знайдемо оптимальний план двоїстої задачі, використовуючи другу теорему двоїстості.

Для цього підставимо компоненти оптимального плану прямої задачі $X_{max} = (1;2;0;0;1;5)$ у систему обмежень прямої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} -1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 0 = 5, \\ 2\cdot 2 + 0 + 0 = 4, \\ 2\cdot 1 + 2 + 0 + 1 = 5, \\ 2\cdot 1 + 2 - 1 - 5 = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5, \\ 4 = 4, \\ 5 = 5, \\ -2 = -2. \end{cases}$$

Оскільки ні одне обмеження не виконується як строга нерівність, то відповідні їм змінні двоїстої задачі y_1, y_2, y_3 *і* y_4 не обов'язково дорівнюють нулю.

Так як x_1, x_2, x_5 і x_6 оптимального плану прямої задачі додатні, то згідно другої частини другої теореми двоїстості відповідні обмеження (перше, друге, п'яте і шосте) двоїстої задачі виконуються як рівняння.

Таким чином, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_3 + 2y_4 = -6, \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 = 11, \\ y_3 - y_4 = 1, \\ -y_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8, \\ y_2 = -7, \\ y_3 = 1, \\ y_4 = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку визначимо оптимальний план двоїстої задачі $Y_{min} = (8;-7;1;0)$, який співпадає з раніше знайденим

Виконаємо перевірку знайденого розв'язку, підставивши знайдені значення оптимального плану Y_{min} в систему обмежень двоїстої задачі:

$$\begin{cases} -8 & & +2\cdot 1 & +2\cdot 0 & \geq -6, \\ 3\cdot 8 & +2\cdot(-7) & +1 & +0 & \geq 11, \\ 2\cdot 8 & +(-7) & & & \geq 4, \\ 8 & +(-7) & +1 & & \geq -2, \\ & & 1 & -0 & \geq 1, \\ & & & -0 & \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6=-6, \\ 11=11, \\ 9>4, \\ 2>-2, \\ 1=1, \\ 0=0. \end{cases}$$

Як бачимо, усі обмеження виконуються. Крім того, оскільки третє і четверте обмеження виконуються як строгі нерівності, то відповідні їм змінні x_3 *і* x_4 прямої задачі дорівнюють нулю, що відповідає знайденим значенням оптимального плану прямої задачі.

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ 2

j / i	1	2	3	4	α_i
1	5	4	1	2	60
2	4	2	6	3	40
3	7	3	5	4	35
bj	40	25	20	50	

1. Побудувати математичну модель транспортної задачі.

Побудуємо математичну модель транспортної задачі. Нехай x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача $(i=\overline{1,3}; j=\overline{1,4})$; c_{ij} – вартість (тариф) перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача задана у таблиці; a_i – запаси продукції i-го постачальника; b_i – попит на продукцію j-го споживача.

Оскільки $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 135$, то транспортна задача є збалансованою.

Математична модель транспортної задачі запишеться таким чином:

$$Z = 5x_{11} + 4x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 7x_{31} +$$
$$+ 3x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 35, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,4}.$$

Економічний зміст перших трьох обмежень полягає в тому, що вся продукція від кожного постачальника має вивозитися до споживачів повністю.

Аналогічно, вся продукція, що надходить до кожного споживача, має повністю задовольняти його попит. Дана умова відповідає іншим чотирьом обмеженням.

2. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом північно-західного кута.

Побудову початкового опорного плану за методом північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки x_{11} таблиці, в яку записують менше із чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т.д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці.

За допомогою методу північно-західного кута побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі.

A_i	B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5 **40**	4 **20**	1	2
$A_2 = 40$	4	2 **5**	6 **20**	3 **15**
$A_3 = 35$	7	3	5	4 **35**

У клітинку (1;1) поміщаємо $x_{11} = min(60;40) = 40$. Попит першого споживача задоволено повністю, тому перший стовпчик з розрахунку виключаємо. Залишок продукції $x_{12} = 20$ від першого постачальника записуємо у клітинку (1;2). У цьому випадку запас першого постачальника вичерпано.

Переходимо до розподілу продукції другого постачальника. У клітинку (2;2) записуємо необхідну кількість продукції $x_{22} = 5$. Тоді попит другого споживача задоволено повністю і другий стовпчик виключаємо з розгляду. Залишок продукції від другого постачальника з урахуванням попиту

третього споживача поміщаємо у клітинку (2;3), тобто $x_{23} = 20$. Оскільки попит третього споживача задоволено повністю, то третій стовпчик виключаємо з розгляду. Залишок продукції другого постачальника, з урахуванням попиту четвертого споживача, поміщаємо в клітинку (2;4), тобто $x_{24} = 15$. У цьому випадку запас другого постачальника вичерпано.

Запас продукції третього постачальника поміщаємо у клітинку (3;4), тобто $x_{34} = 35$. В результаті одержали повний розподіл продукції і задовольнили попит кожного споживача.

Після побудови початкового плану у таблиці має бути заповненою $(m+n-1)$ клітинок, де $m-$кількість постачальників, а $n-$кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають ***невиродженим***. Якщо кількість заповнених клітинок у таблиці перевищує $(m+n-1)$, то початковий план побудований неправильно і він є неопорним. Ознакою опорності плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. ***Циклом*** у транспортній задачі називають ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо кількість заповнених клітинок у таблиці менш як $(m+n-1)$, то опорний план називають ***виродженим.*** У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так щоб не порушилася ациклічність циклу, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу.

Для побудованого плану заданої транспортної задачі заповнені 6 клітинок, що дорівнює $m+n-1=3+4-1=6$, а це означає, що початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

є невиродженим.

Відповідне значення цільової функції для нього

$$Z = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 595.$$

3. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом мінімальної вартості.

Метод мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість c_{ij} перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками і споживачами.

Побудуємо вихідний опорний план заданої транспортної задачі за методом мінімальної вартості.

A_i	B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5	4	1 **20**	2 **40**
$A_2 = 40$	4 **5**	2 **25**	6	3 **10**
$A_3 = 35$	7 **35**	3	5	4

Оскільки найменший тариф у клітинці (1;3), $c_{13} = 1$, то в неї поміщаємо кількість продукції $x_{13} = 20$ і виключаємо з розгляду третій стовпчик, так як попит третього споживача задоволено. Наступний найменший тариф $c_{14} = c_{22} = 2$. З урахуванням попиту четвертого споживача помістимо необхідну кількість продукції в клітинку (1;4), тобто $x_{14} = 40$ і виключимо з розгляду перший рядок, оскільки запас першого постачальника вичерпано Потім в клітинку (2;2) поміщаємо кількість продукції $x_{22} = 25$ і виключаємо з розгляду другий стовпчик, так як попит другого споживача задоволено.

Наступним мінімальним тарифом буде $c_{24} = 3$. Отже, в клітинку (2;4) поміщуємо продукцію $x_{24} = 10$ і виключаємо з розгляду четвертий стовпчик, оскільки попит четвертого споживача також задоволено.

Наступний найменший тариф $c_{21} = c_{34} = 4$. Поміщаємо у клітинку (2;1) кількість продукції $x_{21} = 5$ і виключаємо з розгляду другий рядок, оскільки запаси другого постачальника вичерпано. У нас залишився єдиний не викреслений перший стовпчик і єдиний третій рядок, для яких спільна клітинка (3;1), у яку поміщаємо залишок продукції $x_{31} = 35$.

Після розподілення всієї продукції та задоволення попиту всіх споживачів дістанемо вихідний початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для якого значення цільової функції

$$Z = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 35 = 445.$$

4. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом подвійної переваги.

Метод подвійної переваги полягає в тому, що перед заповненням таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю заповнюють з клітинок позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім заповнюють за методом мінімальної вартості.

Побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі методом подвійної переваги.

A_i	B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5	4	VV 1 **20**	V 2 **40**
$A_2 = 40$	V 4 **15**	VV 2 **25**	6	3
$A_3 = 35$	7 **25**	V 3	5	4 **10**

Помітимо у кожному рядку значком V клітинки, що мають найменший тариф. У першому рядку – клітинку (1;3), у другому – (2;2), у третьому – (3;2). Аналогічно у першому стовпчику – клітинку (2;1), у другому – (2;2), у третьому – (1;3), у четвертому – (1;4). Отже, клітинки (1;3) і (2;2) мають дві позначки, а тому треба заповнити їх першими: $x_{13} = 20$, $x_{22} = 25$. Потім заповнюємо клітинки з однією позначкою – (1;4) і (2;1): $x_{14} = 40$, $x_{21} = 15$. Клітинку (3;2) не заповнюємо, оскільки попит другого споживача уже повністю задоволено. Далі збалансуємо задачу, використовуючи метод мінімальної вартості. А саме, $x_{34} = 10$, $x_{31} = 25$.

Отже, отримали початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 15 & 25 & 0 & 10 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для якого значення цільової функції

$$Z = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 25 = 425.$$

5. Визначити початковий опорний план перевезень транспортної задачі методом апроксимації Фогеля.

Метод апроксимації Фогеля полягає в тому, що на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими тарифами в кожному рядку і в кожному стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Потім серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшим тарифом. Якщо ж однакових найбільших різниць декілька, то вибирають будь-який рядок чи стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок чи стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі методом апроксимації Фогеля.

A_i	B_j				Різниці для рядків
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	1 $\boxed{2}$ —
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3	1 1 1
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10	1 1 1
Різниці для стовпчиків	1 1 $\boxed{1}$	1 1 1	$\boxed{4}$ — —	1 1 1	

Для даної задачі маємо, що після першого кроку найбільша різниця у третьому стовпчику дорівнює ***4***. А найменший у ньому тариф $c_{13} = 1$ у клітинці (1;3), тому заповнюємо $x_{13} = 20$. Не враховуючи заповнену клітинку (1;3), на другому кроці визначаємо відповідні різниці між найменшими тарифами у всіх рядках, і всіх стовпцях, крім третього стовпчика, оскільки попит третього споживача уже задоволено. Найбільша різниця ***2*** у першому рядку, а найменший тариф у цьому рядку $c_{14} = 2$. Отже, заповнюємо $x_{14} = 40$ і виключаємо з розгляду перший рядок. Визначаємо знову відповідні різниці. Оскільки вони усі рівні між собою, то виберемо довільним чином.

Наприклад, виберемо перший стовпчик. У ньому найменший тариф $c_{21} = 4$, тому заповнюємо $x_{21} = 40$ і виключаємо з розгляду перший стовпчик. Таким чином, залишився тільки третій рядок. Згідно методу мінімальної вартості заповнюємо клітинку (3;2), а потім – (3;4), відповідно $x_{32} = 25$, $x_{34} = 10$. Отже, початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

для якого значення цільової функції

$$Z = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375.$$

6. Використовуючи початкові опорні плани за допомогою методу потенціалів визначити оптимальний план перевезень транспортної задачі.

Опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно до постачальників та споживачів.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі).

Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ існують такі числа u_i та v_j, для яких виконуються умови:

$$1)\ u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0,$$

$$2)\ u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1,m}$ та $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j \ge c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок декілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $max\left\{\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - c_{ij}\right\}$. Дану клітинку називають потенціальною.

Для вибраної порожньої потенціальної клітинки будують цикл перерахування та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці – знак «+», а всім іншим по черзі – знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел $\boldsymbol{x_{ij}}$, що стоять у клітинках зі знаком «-». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+», і і віднімають від чисел у клітинках зі знаком **«–».**

Отже, потенціальна клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом $\boldsymbol{x_{ij}}$ вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі, який знову перевіряють на оптимальність.

Розглянемо застосування методу потенціалів для розв'язування вихідної транспортної задачі.

6.1. Знайдемо оптимальний план транспортної задачі за допомогою метода потенціалів, використовуючи початковий опорний план знайдений методом північно-західного кута.

Отже, маємо першу транспортну таблицю.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 40	4 20 –	1 + 7	2	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4	2 5 +	6 **20** –	3 15	$u_2 = -2$
$A_3 = 35$	7	3	5	4 35	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 8$	$v_4 = 5$	$Z_1 = 595$

Оскільки опорний план невироджений, то його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Потенціали $\boldsymbol{u_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ будемо записувати у відповідних місцях транспортної таблиці.

На основі першої умови оптимальності $\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}}$ для усіх заповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij} > 0}$) складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_2 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases}$$

Одержана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо візьмемо довільне число, наприклад, $u_1 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $v_1 = 5$, $v_2 = 4$, $u_2 = -2$, $v_3 = 8$, $v_4 = 5$, $u_3 = -1$.

Виконаємо перевірку обчислених потенціалів, згідно умови

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$60 \cdot 0 + 40 \cdot (-2) + 35 \cdot (-1) + 40 \cdot 5 + 25 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 50 \cdot 5 = 595;$$

$$595 = 595.$$

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ ($x_{ij} = 0$):

$$A_1B_3 : u_1 + v_3 = 0 + 8 = 8 > 1;$$

$$A_1B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 > 2;$$

$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = -2 + 5 = 3 < 4;$$

$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = -1 + 5 = 4 < 7;$$

$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = -1 + 4 = 3 = 3;$$

$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = -1 + 8 = 7 > 5.$$

Умова оптимальності не виконується для трьох клітинок A_1B_3, A_1B_4 та A_3B_3. Знайдемо для кожної з них відповідні порушення згідно формули $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$.

Отже,

$$\Delta_{13} = 8 - 1 = 7, \ \Delta_{14} = 5 - 2 = 3, \ \Delta_{33} = 7 - 5 = 2.$$

Серед них вибираємо найбільше, тобто

$$max\{\Delta_{13}; \Delta_{14}; \Delta_{33}\} = max\{7;3;2\} = \Delta_{13} = 7.$$

Дане порушення $\Delta_{13} = 7$ записуємо в лівому нижньому куті відповідної клітинки.

Отже, перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього переходимо до наступного плану, використовуючи вихідну потенціальну клітину A_1B_3.

У клітинці A_1B_3 ставимо знак «+» і для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл перерахування, починаючи з потенціальної клітинки A_1B_3: (1;3), (1;2), (2;2), (2;3) та позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У транспортній таблиці одержаний цикл показуємо у вигляді замкненої лінії, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці. У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Для даної задачі $min\{x_{12}; x_{23}\} = min\{20;20\} = 20$.

Якщо у двох клітинках одинакові значення, то звільняємо ту, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Оскільки $c_{12} = 4, c_{23} = 6$, то вибираємо клітинку A_2B_3. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_2B_3 порожня, оскільки з неї забираємо 20 і переносимо його в потенціальну клітинку A_1B_3: $x_{13} = 20$, у A_1B_2: $x_{12} = 20 - 20 = 0$, у A_2B_2: $x_{22} = 5 + 20 = 25$. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін.

Таким чином, отримуємо другу транспортну таблицю.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 40	4 **0** –	1 20	2 + **3**	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4	2 25 +	6	3 15 –	$u_2 = -2$
$A_3 = 35$	7	3	5	4 35	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 5$	$Z_2 = 455$

Для знайденого опорного плану

$$X_2 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_2 = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 455 .$$

Перевіримо новий опорний план на оптимальність, аналогічно раніше описаним діям.

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_2 = 4, \\ u_1 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 5, \\ v_2 = 4, \\ v_3 = 1, \\ u_2 = -2, \\ v_4 = 5, \\ u_3 = -1. \end{cases}$$

Перевірка розрахунків потенціалів:

$$60 \cdot 0 + 40 \cdot (-2) + 35 \cdot (-1) + 40 \cdot 5 + 25 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 50 \cdot 5 = 455;$$

$$455 = 455.$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 > 2;$$

$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = -2 + 5 = 3 < 4;$$

$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = -2 + 1 = -1 < 6;$$

$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = -1 + 5 = 4 < 7;$$

$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = -1 + 4 = 3 = 3;$$

$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = -1 + 1 = 0 < 5.$$

План не оптимальний, оскільки $\Delta_{14} = 5 - 2 = 3 > 0$.

Будуємо новий опорний план, використовуючи клітинку A_1B_4 як потенціальну.

У клітинці A_1B_4 ставимо знак «+» і для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл перерахування, починаючи з потенціальної клітинки A_1B_4: (1;4), (1;2), (2;2), (2;4) та позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–».

У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{12}; x_{24}\} = min\{0;15\} = 0$, то в потенціальну клітинку A_1B_4 переносимо з A_1B_2 число **0**: $x_{14} = 0$, у A_2B_2: $x_{22} = 25 + 0 = 25$, у A_2B_4: $x_{24} = 15 - 0 = 15$, клітинка A_1B_2 – порожня. Усі інші заповнені клітинки другої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Отримуємо третю транспортну таблицю.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 40 –	4	1 20	2 0 +	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 + **2**	2 25	6	3 **15** –	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3	5	4 35	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_3 = 455$

Для знайденого опорного плану

$$X_3 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix},$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_3 = 5 \cdot 40 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 455.$$

Перевіримо його на оптимальність.

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 5, \\ v_3 = 1, \\ v_4 = 2, \\ u_2 = 1, \\ v_2 = 1, \\ u_3 = 2. \end{cases}$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 1 = 1 < 4;$$
$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 1 + 5 = 6 > 4;$$
$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = 1 + 1 = 2 < 6;$$
$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + 5 = 7 = 7;$$
$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = 2 + 1 = 3 = 3;$$
$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + 1 = 3 < 5.$$

План не оптимальний, оскільки $\Delta_{21} = 6 - 4 = 2 > 0$.

Будуємо новий опорний план з потенціальною клітиною A_2B_1. Маємо цикл з вершинами: (2;1), (1;1), (1;4), (2;4). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{11}; x_{24}\} = min\{40;15\} = 15$, то в потенціальну клітинку A_2B_1 переносимо з A_2B_4 число **15**: $x_{21} = 15$, у A_1B_1: $x_{11} = 40 - 15 = 25$, у A_1B_4: $x_{14} = 0 + 15 = 15$, клітинка A_2B_4 – порожня. Усі інші заповнені клітинки третьої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 **25** –	4	1 20	2 15 +	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 15 +	2 25 –	6	3	$u_2 = -1$
$A_3 = 35$	7	3 + **2**	5	4 35 –	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_4 = 425$

Для знайденого опорного плану

$$X_4 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 20 & 15 \\ 15 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix},$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_4 = 5 \cdot 25 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 425 .$$

Перевіримо його на оптимальність.

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 5, \\ v_3 = 1, \\ v_4 = 2, \\ u_2 = -1, \\ v_2 = 3, \\ u_3 = 2. \end{cases}$$

Перевірка розрахунків потенціалів:

$$60 \cdot 0 + 40 \cdot (-1) + 35 \cdot 2 + 40 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 20 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 425;$$

$$425 = 425.$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 3 = 3 < 4;$$
$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = -1 + 1 = 0 < 6;$$
$$A_2B_4 : u_2 + v_4 = -1 + 2 = 1 < 3;$$
$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + 5 = 7 = 7;$$
$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = 2 + 3 = 5 > 3;$$
$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + 1 = 3 < 5.$$

План не оптимальний, оскільки $\Delta_{32} = 5 - 3 = 2 > 0$.

Будуємо новий опорний план з потенціальною клітиною A_3B_2. Маємо цикл перерахунку з вершинами (3;2), (2;2), (2;1), (1;1), (1;4), (3;4). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{11}; x_{22}; x_{34}\} = min\{25;25;35\} = 25$, тобто в двох клітинках однакові мінімальні значення, то звільняємо ту клітинку, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Так як $c_{11} = 5, c_{22} = 2$, то звільняємо клітинку A_1B_1. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_1B_1 порожня, оскільки з неї забираємо 25 і переносимо його в потенціальну клітинку A_3B_2: $x_{32} = 25$, у A_2B_2: $x_{22} = 25 - 25 = 0$, у A_2B_1: $x_{21} = 15 + 25 = 40$, у A_1B_4: $x_{14} = 15 + 25 = 40$, у A_3B_4: $x_{34} = 35 - 25 = 10$. Усі інші заповнені клітинки четвертої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 40	2 0 –	6	3 +	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3 25 +	5	4 10 –	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_5 = 375$

Для знайденого опорного плану

$$X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_5 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375 .$$

Перевіримо його на оптимальність

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_3 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_3 = 1, \\ v_4 = 2, \\ v_1 = 3, \\ u_2 = 1, \\ v_2 = 1, \\ u_3 = 2. \end{cases}$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_1 : u_1 + v_1 = 0 + 3 = 3 < 5;$$

$$A_1B_1 : u_1 + v_2 = 0 + 1 = 1 < 4;$$

$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = 1 + 1 = 2 < 6;$$

$$A_2B_4 : u_2 + v_4 = 1 + 2 = 3 = 3;$$

$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + 3 = 5 < 7;$$

$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + 1 = 3 < 5.$$

Оскільки всі умови оптимальності виконуються, то знайдений опорний план є оптимальним. Він має вигляд

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

і йому відповідає мінімальне значення цільової функції $Z_{min} = 375$.

Розглянута транспортна задача має іще один альтернативний оптимальний план, оскільки для порожньої клітинки A_2B_4: $u_2 + v_4 = 1 + 2 = 3 = c_{24}$.

Щоб отримати альтернативний оптимальний план, достатньо виконати перерозподіл, взявши за потенціальну клітинку A_2B_4. Маємо цикл: (2;4), (3;4), (3;2), (2;2). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{22}; x_{34}\} = min\{0;10\} = 0$, то в потенціальну клітинку A_2B_4 переносимо з A_2B_2 число **0**: $x_{24} = 0$, у A_3B_4: $x_{34} = 10 - 0 = 10$, у A_3B_2: $x_{32} = 25 + 0 = 25$, клітинка A_2B_2 – порожня. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

A_i	B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3 **0**
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10

Тоді,

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

і оптимальне значення цільової функції $Z_{min} = 375$.

Ми одержали попередній оптимальний план. Це пояснюється тим, що перерозподілене значення $x_{22} = 0$. Якби воно було відмінне від нуля, то компоненти оптимального плану змінилися б, а значення цільової функції залишилося б попереднім.

6.2. Розв’яжемо транспортну задачу методом потенціалів, розглянувши в якості вихідного опорного плану – план, отриманий методом мінімальної вартості.

Отже, перша транспортна таблиця.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 5 +	2 **25 –**	6	3 10	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7 35 –	3 + **2**	5	4	$u_3 = 4$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_1 = 445$

Розв’язування задачі запишемо більш компактно.

Оскільки кількість заповнених клітинок **6** і дорівнює значенню виразу $\boldsymbol{m+n-1=3+4-1=6}$, то опорний план невироджений. Перевіримо його на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Потенціали $\boldsymbol{u_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ будемо записувати у відповідних місцях транспортної таблиці.

Визначимо потенціали плану згідно з першою умовою оптимальності $\boldsymbol{u_i+v_j=c_{ij}}$ для заповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij}>0}$). Візьмемо $\boldsymbol{u_1=0}$. Тоді, з транспортної таблиці, розраховуючи послідовно, маємо

$$\boldsymbol{v_3=c_{13}-u_1=1-0=1},$$
$$\boldsymbol{v_4=c_{14}-u_1=2-0=2},$$
$$\boldsymbol{u_2=c_{24}-v_4=3-2=1},$$
$$\boldsymbol{v_1=c_{21}-u_2=4-1=3},$$
$$\boldsymbol{v_2=c_{22}-u_2=2-1=1},$$
$$\boldsymbol{u_3=c_{31}-v_1=7-3=4}.$$

Перевіримо другу умову оптимальності $\boldsymbol{u_i+v_j\le c_{ij}}$ для незаповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij}=0}$). Вона не виконується для клітинок $\boldsymbol{A_3B_2:4+1>3}$ і $\boldsymbol{A_3B_4:4+2>4}$. Відповідні порушення

$\Delta_{32} = 5 - 3 = 2$ і $\Delta_{34} = 6 - 4 = 2$ рівні між собою. В якості потенціальної клітинки беремо A_3B_2, оскільки в неї менший тариф $(c_{32} = 3, c_{34} = 4)$. Розглянемо цикл перерахування (3;2), (2;2), (2;1), (3;1). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{22}; x_{31}\} = min\{25; 35\} = 25$, то в потенціальну клітинку A_3B_2 переносимо з A_2B_2 число **25**: $x_{32} = 25$, у A_2B_1: $x_{21} = 5 + 25 = 30$, у A_3B_1: $x_{31} = 35 - 25 = 10$, клітинка x_{22} – порожня. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Тоді, друга транспортна таблиця має вид:

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 30 +	2	6	3 10 –	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7 **10 –**	3 25	5	4 + 2	$u_3 = 4$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = -1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_2 = 395$

Для знайденого опорного плану

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 30 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & 25 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_2 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 25 = 395.$$

Перевіримо його на оптимальність згідно теореми оптимальності.

Аналогічно, як раніше, з заповнених клітинок таблиці ($x_{ij} > 0$), використовуючи першу умову оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$, визначаємо потенціали плану:

$$u_1 = 0,$$
$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_2 = c_{24} - v_4 = 3 - 2 = 1,$$
$$v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3,$$
$$u_3 = c_{31} - v_1 = 7 - 3 = 4,$$
$$v_2 = c_{32} - u_3 = 3 - 4 = -1.$$

Перевіримо другу умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) опорного плану транспортної задачі. Вона не виконується для клітинки A_3B_4: $4 + 2 > 4$. Відповідне порушення $\Delta_{34} = 6 - 4 = 2$.

Отже, клітинка A_3B_4 є потенціальна. Розглянемо цикл перерахування (3;4), (2;4), (2;1), (3;1). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{24}; x_{31}\} = min\{10;10\} = 10$, тобто в двох клітинках однакові мінімальні значення, то звільняємо ту клітинку, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Так як $c_{31} = 7, c_{24} = 3$, то звільняємо клітинку A_3B_1. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_3B_1 порожня, оскільки з неї забираємо 10 і переносимо його в потенціальну клітинку A_3B_4: $x_{34} = 10$, у A_2B_4: $x_{24} = 10 - 10 = 0$, у A_2B_1: $x_{21} = 30 + 10 = 40$. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Третя транспортна таблиця має вид:

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3 **0**	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_3 = 375$

Для знайденого опорного плану

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

обчислюємо відповідне значення цільової функції

$$Z_3 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375 .$$

Для заповнених клітинок транспортної таблиці ($x_{ij} > 0$), визначимо потенціали плану:

$$u_1 = 0,$$
$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_2 = c_{24} - v_4 = 3 - 2 = 1,$$
$$v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3,$$
$$u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 2 = 2,$$
$$v_2 = c_{32} - u_3 = 3 - 2 = 1.$$

Порівнюючи суму потенціалів $u_i + v_j$ з відповідними тарифами c_{ij} транспортної таблиці, бачимо, що друга умова оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для всіх незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) виконується, тому знайдений план є оптимальним:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{і } Z_{опт} = Z_3 = 375 .$$

Оскільки для клітинки A_2B_2: $u_2 + v_2 = 1 + 1 = 2 = c_{22}$, то існує альтернативний план, який знаходиться аналогічно виконаним діям у п 6.1.

6.3. Розв'яжемо транспортну задачу методом потенціалів, розглянувши в якості вихідного опорного плану – план, отриманий методом подвійної переваги.

Отже, перша транспортна таблиця.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 15 +	2 25 –	6	3	$u_2 = -1$
$A_3 = 35$	7 **25 –**	3 + **2**	5	4 10	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_1 = 425$

Розв'язування задачі запишемо в компактному вигляді.

Оскільки кількість заповнених клітинок **6** і дорівнює значенню виразу $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, то опорний план невироджений. Перевіримо його на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Потенціали u_i і v_j будемо записувати у відповідних місцях транспортної таблиці.

Визначимо потенціали плану згідно з першою умовою оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ для заповнених клітинок ($x_{ij} > 0$). Візьмемо $u_1 = 0$. Тоді, з транспортної таблиці, розраховуючи послідовно, маємо

$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 2 = 2,$$
$$v_1 = c_{31} - u_3 = 7 - 2 = 5,$$
$$u_2 = c_{21} - v_1 = 4 - 5 = -1,$$
$$v_2 = c_{22} - u_2 = 2 - (-1) = 3,$$

Перевіримо другу умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$). Вона не виконується для клітинки $A_3B_2 : 3 + 2 > 3$. Відповідне порушення $\Delta_{32} = 5 - 3 = 2$.

Отже, клітинка A_3B_2 є потенціальна. Розглянемо цикл перерахування: (3;2), (2;2), (2;1), (3;1). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{22}; x_{31}\} = min\{25; 25\} = 25$, тобто в двох клітинках одинакові мінімальні значення, то звільняємо ту клітинку, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Так як $c_{22} = 2, c_{31} = 7$, то звільняємо клітинку A_3B_1. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_3B_1 порожня, оскільки з неї забираємо 25 і переносимо його в потенціальну клітинку A_3B_2: $x_{32} = 25$, у A_2B_2: $x_{22} = 25 - 25 = 0$, у $A_2B_1 : x_{21} = 15 + 25 = 40$. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Отже, друга транспортна таблиця має вид:

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 40	2 0	6	3	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_2 = 375$

Для знайденого опорного плану

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

обчислюємо відповідне значення цільової функції

$$Z_2 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375 .$$

Перевіримо його на оптимальність згідно теореми оптимальності.

Аналогічно, як раніше, з заповнених клітинок таблиці ($x_{ij} > 0$), використовуючи першу умову оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$, визначаємо потенціали плану:

$$\begin{gathered} u_1 = 0, \\ v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1, \\ v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2, \\ u_3 = c_{31} - v_4 = 4 - 2 = 2, \\ v_2 = c_{32} - u_3 = 3 - 2 = 1, \\ u_2 = c_{22} - v_2 = 2 - 1 = 1, \\ v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3. \end{gathered}$$

Порівнюючи суму потенціалів $u_i + v_j$ з відповідними тарифами c_{ij} транспортної таблиці, бачимо, що друга умова оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для всіх незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) виконується, тому знайдений план є оптимальним:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{і } Z_{опт} = Z_2 = 375 .$$

Оскільки для клітинки A_2B_4: $u_2 + v_4 = 1 + 2 = 2 = c_{24}$, то існує альтернативний план, який знаходиться аналогічно виконаним діям у п 6.1.

6.4. Розв'яжемо транспортну задачу методом потенціалів, розглянувши в якості вихідного опорного плану – план, отриманий методом апроксимації Фогеля.

Отже, перша транспортна таблиця.

A_i	B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10

Розв'язування задачі запишемо в компактному вигляді.

Оскільки кількість заповнених клітинок **5**, але не дорівнює значенню виразу $\boldsymbol{m+n-1=3+4-1=6}$, то опорний план вироджений. У даному випадку потрібно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку клітинку, яка не утворює циклу. Наприклад, заповнимо клітинку $\boldsymbol{A_2B_2}$: $\boldsymbol{x_{22}=0}$.

A_i	B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 40	2 **0**	6	3	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_1 = 375$

Визначимо потенціали плану згідно з першою умовою оптимальності $\boldsymbol{u_i+v_j=c_{ij}}$ для заповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij}>0}$). Візьмемо $\boldsymbol{u_1=0}$. Тоді, з транспортної таблиці, розраховуючи послідовно маємо

$$u_1 = 0,$$
$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_3 = c_{31} - v_4 = 4 - 2 = 2,$$
$$v_2 = c_{32} - u_3 = 3 - 2 = 1,$$
$$u_2 = c_{22} - v_2 = 2 - 1 = 1,$$
$$v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3.$$

Порівнюючи суму потенціалів $u_i + v_j$ з відповідними тарифами c_{ij} транспортної таблиці, бачимо, що друга умова оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для всіх незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) виконується, тому знайдений план є оптимальним:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{і } Z_{опт} = Z_1 = 375.$$

Оскільки для клітинки A_2B_4: $u_2 + v_4 = 1 + 2 = 2 = c_{24}$, то існує альтернативний план, який знаходиться аналогічно виконаним діям у п 6.1.

7. Проаналізувати знайдені початкові опорні плани.

№	Початковий опорний план	Початкове значення цільової функції	Кількість етапів для знаходження оптимального плану
1	Метод північно-західного кута	$Z_0 = 595$	5
2	Метод мінімальної вартості	$Z_0 = 445$	3
3	Метод подвійної переваги	$Z_0 = 425$	2
4	Метод апроксимації Фогеля	$Z_0 = 375$	1

У попередньому пункті, за допомогою методу потенціалів, було отримано оптимальний план транспортної задачі з мінімальним значенням цільової функції $Z_{опт} = 375$.

Проаналізуємо значення цільової функції, що були отримані при знаходженні початкового опорного плану транспортної задачі різними методами. Як бачимо, для даного приклада, кожний з наступних методів дає план, ближчий до оптимального, оскільки значення його цільової функції зменшується, а метод апроксимації Фогеля дає оптимальний план. Але на практиці це не завжди так.

Для зменшення кількості розрахунків рекомендується після знаходження початкового опорного плану транспортної задачі різними методами залишити план з найменшим значенням цільової функції і до нього застосувати метод потенціалів.

8. Визначити оптимальний план транспортної задачі за допомогою надбудови «ПОИСК РЕШЕНИЙ».

Використовуючи надбудову «ПОИСК РЕШЕНИЙ» визначимо оптимальний план транспортної задачі.

j / i	1	2	3	4	α_i
1	5	4	1	2	60
2	4	2	6	3	40
3	7	3	5	4	35
bj	40	25	20	50	

Вводимо вихідні дані задачі, формули лівої частини кожного обмеження та формулу цільової функції (рис. 1):

H23 =СУММПРОИЗВ(C21:F23;C27:F29)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	5	4	1	2				
22		X2j	4	2	6	3		ЦФ	Напрям	
23		X3j	7	3	5	4		=СУММПРОИЗВ(C21:F23;C27:F29)	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j						=СУММ(C27:F27)	=	60
28		X2j						=СУММ(C28:F28)	=	40
29		X3j						=СУММ(C29:F29)	=	35
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	=СУММ(C27:C29)	=СУММ(D27:D29)	=СУММ(E27:E29)	=СУММ(F27:F29)				
32		Знак	=	=	=	=				=СУММ(J27:J29)
33	Попит	Права частина	40	25	20	50			=СУММ(C33:G33)	Баланс

Рис. 1. Введення вихідних даних та розрахункових формул

В результаті отримаємо початкові дані для розв’язання транспортної задачі (рис. 2):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	5	4	1	2				
22		X2j	4	2	6	3		ЦФ	Напрям	
23		X3j	7	3	5	4		0	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j						0	=	60
28		X2j						0	=	40
29		X3j						0	=	35
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	0	0	0	0				
32		Знак	=	=	=	=				135
33	Попит	Права частина	40	25	20	50			135	Баланс

Рис. 2. Початкові дані для розв’язання транспортної задачі

Відкриваємо діалогове вікно *Данные – Поиск решения* і вводимо необхідні дані, обмеження та параметри розрахунку (рис. 3):

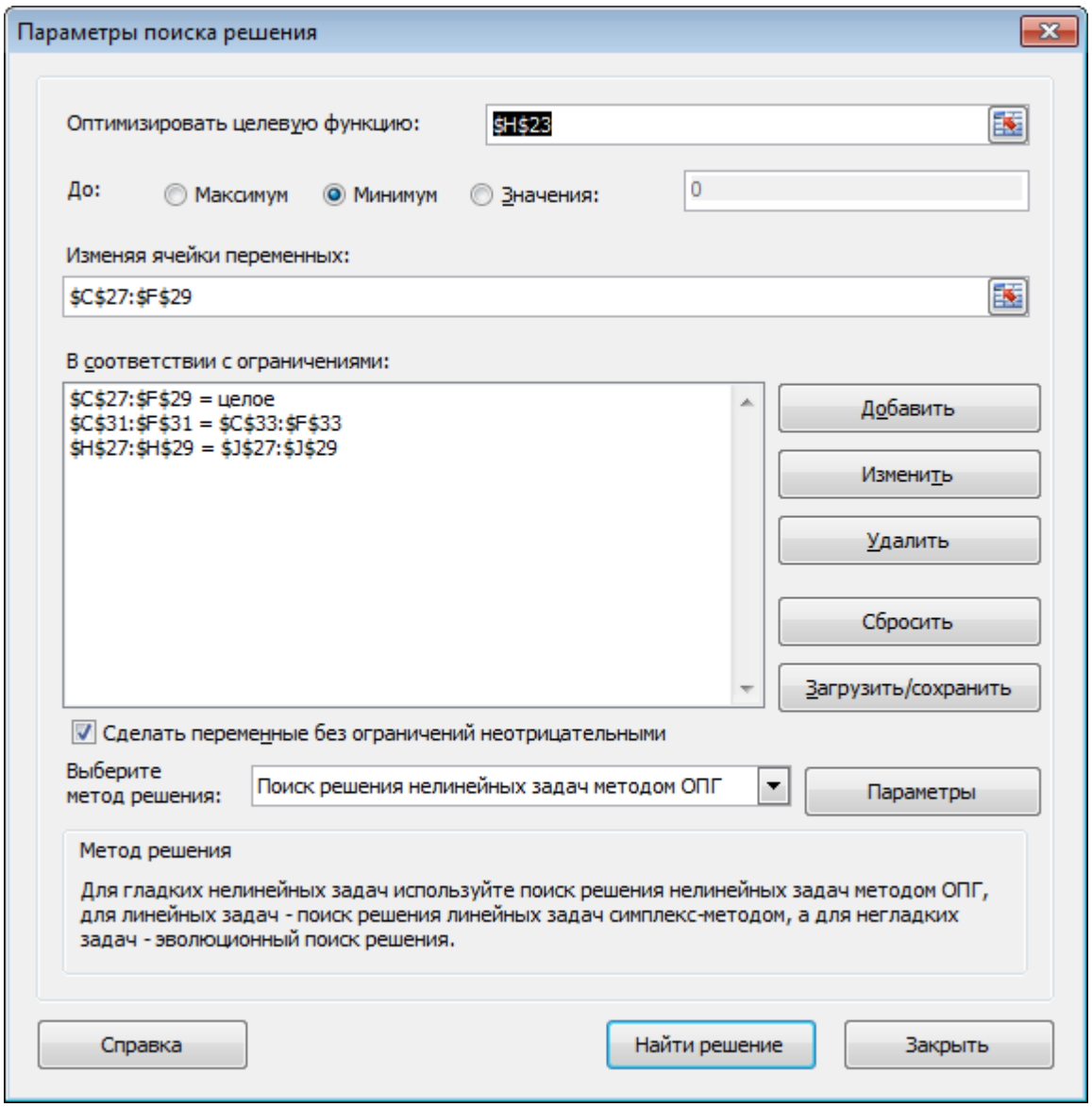


Рис. 3. Діалогове вікно «Поиск решения»

Нажимаємо *Найти решение* і отримаємо в клітинках C25:F29 значення оптимального розв’язку, а в клітинці H23 оптимальне значення цільової функції (рис. 4):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	5	4	1	2				
22		X2j	4	2	6	3		ЦФ	Напрям	
23		X3j	7	3	5	4		375	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j	0	0	20	40		60	=	60
28		X2j	40	0	0	0		40	=	40
29		X3j	0	25	0	10		35	=	35
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	40	25	20	50				
32		Знак	=	=	=	=				135
33	Попит	Права частина	40	25	20	50			135	Баланс

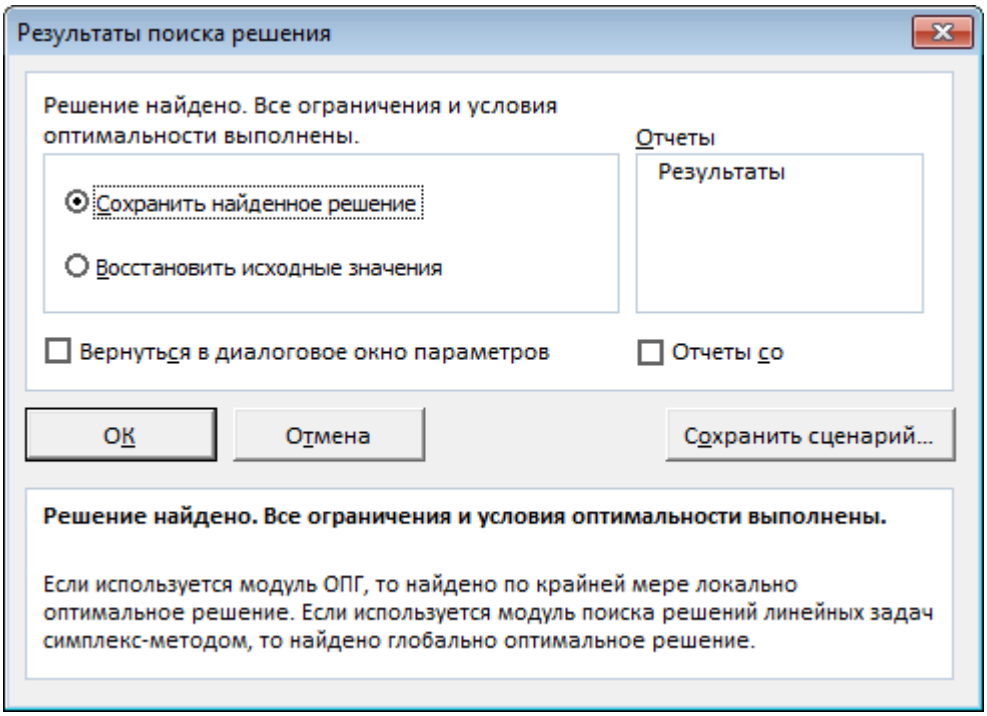


Рис. 4. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Отже, оптимальний план транспортної задачі має вигляд

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}, Z_{min} = 375,$$

що підтверджує попередні розрахунки.

ПИТАННЯ ДЛЯ ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

1. Предмет об’єкт та завдання курсу.
2. Економічна система: параметри, залежні та незалежні змінні.
3. Економічна та математична постановка оптимізаційних задач.
4. Класифікація задач математичного програмування.
5. Застосування методів математичного програмування в економіці.
6. Економічна та математична постановка задачі лінійного програмування.
7. Форми запису задачі лінійного програмування: загальна, канонічна, симетрична.
8. Допустимий, опорний та оптимальний план задачі лінійного програмування.
9. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
10. Алгоритм графічного методу розв'язання задачі лінійного програмування.
11. Алгоритм симплексного методу розв'язання задачі лінійного програмування.
12. Структура симплексної таблиці. Визначення початкового опорного плану.
13. Теорема про оптимальний план задачі лінійного програмування.
14. Перевірка опорного плану на оптимальність. Перехід до нового опорного плану. Напрямний стовпчик та напрямний рядок. Напрямний елемент.
15. Штучні змінні. Алгоритм методу штучного базису розв’язання задачі лінійного програмування.
16. Алгоритм двоїстого симплекс-методу розв’язання задач лінійного програмування.
17. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач лінійного програмування.
18. Правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування.
19. Економічна інтерпретація двоїстих задач.
20. Аналіз розв’язків лінійних економіко-математичних моделей.
21. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.
22. Аналіз коефіцієнтів цільової функції. Аналіз коефіцієнтів технологічної матриці для базисних і вільних змінних.

23. Приклади практичного використання двоїстих оцінок у аналізі економічних задач.

24. Економічна і математична постановка транспортної задачі.

25. Транспортна таблиця.

26. Теорема про існування розв’язку транспортної задачі.

27. Зведення незбалансованої транспортної задачі до збалансованої.

28. Метод північно-західного кута побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

29. Метод мінімальної вартості побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

30. Метод подвійної переваги побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

31. Метод апроксимації Фогеля побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

32. Алгоритм методу потенціалів.

33. Перевірка опорного плану транспортної задачі на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

34. Перехід від одного опорного плану транспортної задачі до іншого у випадку порушення умов оптимальності.

35. Економічна і математична постановка задачі цілочислового програмування.

36. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом Гоморі.

37. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом «віток та меж».

38. Економічна і математична постановка задачі дробово-лінійного програмування.

39. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування графічний методом.

40. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом.

41. Економічна і математична постановка задачі нелінійного програмування.

42. Визначення оптимального плану задачі нелінійного програмування графічним методом.

43. Класичний метод оптимізації задач нелінійного програмування на базі використання множників Лагранжа та їх економічна інтерпретація.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Акулич И. Л. Математическое програмирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1985. – 319 с.
2. Боровик О. В. Дослідження операцій в економіці : навчальний посібник / О. В. Боровик, Л. В. Боровик. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.
3. Бугір М. К. Математика для економістів. Лінійна алгебра, лінійні моделі : посібник для студентів вищих навчальних закладів / М. К. Бугір. – К. : Видавничий центр «Академія», 1998. – 520 с.
4. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К. : КНЕУ, 2001. – 248 с.
5. Дослідження операцій в економіці : підручник / [І. К. Федоренко, О. І. Черняк, О. О. Карагодова та ін.]. – К. : Знання, 2007. – 558 с.
6. Дослідження операцій в економіці : підручник / [О. І. Черняк, І. К. Федоренко, Г. О. Чорноуста ін.]. – Миколаїв : МНАУ, 2020. – 398 с.
7. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник / за заг. ред. В. В. Вітлінського ; [В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, О. Д. Шарапов та ін.]. – К. : КНЕУ, 2008. – 536 с.
8. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник / за ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль : ТНЕУ «Економічна думка», 2008. – 704 с.
9. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник / [Т. С. Клебанова, О. В. Равнєва, С. В. Прокопович та ін.]. – Харків : ВД «Інжек», 2012. – 352 с.
10. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навчальний посібник / І. Ю. Івченко. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 232 с.
11. Жадлун З. О. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник / З. О. Жадлун, Л. В. Галаєва, Н. Г. Шульга. – Київ, 2009. – 231 с.
12. Калихман И. С. Сборник задач по математическому программированию / И. С. Калихман. – М. : Высш. шк., 1975. – 270 с.

13. Карагодова О. О. Дослідження операцій : навчальний посібник / О. О. Карагодова, В. Р. Кігель, В. Д. Рожок. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 256 с.

14. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : навчальний посібник / В. Я. Кутковецький. – К. : Вид-во Тов “Видавничий дім “Професіонал”, 2004. – 350 с.

15. Лавренчук В. П. Вища математика. Частина 3 : навчальний посібник / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан. – Чернівці : Рута, 2002. – 168 с.

16. Математичне програмування. Дослідження операцій : навчальний посібник / [А. Ф. Барвінський, І. Я. Олексів, З. І. Крупка та ін.]. – Львів : Інтелект -Захід, 2008. – 468 с.

17. Математичне програмування : навчальний посібник / М. М. Глушик, І. М. Копич, О. С. Пенцак, В. М. Сороківський. – Львів : Новий світ-2000, 2006. – 216 с.

18. Наконечний С. І. Математичне програмування : навчальний посібник / С. І Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2005. – 452 с.

19. Охріменко М. Г. Дослідження операцій : навчальний посібник / М. Г. Охріменко, І. Ю. Дзюбан. – К. : Центр навчальної літератури, 2006. – 184 с.

20. Ржевський С. В. Дослідження операцій : підручник / С. В. Ржевський, В. М. Александрова. – К. : Академвидав, 2006. – 560 с.

21. Толбатов Ю. А. Математичне програмування : підручник для студентів екон. спец. вищ. навч. закл. / Ю. А. Толбатов, Є. Ю. Толбатов. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. – 432 с.

22. Ульянченко О. В. Дослідження операцій в економіці : підручник для студентів вузів / О. В. Ульянченко. – Харків : Гриф, 2002. – 580 с.

23. Хомченко Л. В. Вища математика. Математичне програмування. Завдання для практичних занять з методичними вказівками : навчальний посібник / Л. В. Хомченко. – К. : Центр «Методика-інформ», 2002. – 200 с.

24. Чемерис А. Методи оптимізації в економіці : навчальний посібник / А. Чемерис, Р. Кюринець, О. Мищишин. – К. : Центр навчальної літератури, 2006. – 152 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В’ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 8,06.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від
20.02.2013 р.