МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління

Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕКОНОМІЦІ

методичні рекомендації та завдання для практичних занять і самостійної роботи здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «бакалавр» для спеціальностей ***073 «Менеджмент»*** та ***281 «Публічне управління та адміністрування»*** денної та заочної форм навчання

Миколаїв
2020

УДК 330.4

М-54

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету
від 21.09.2020 р., протокол № 1.

Укладачі:

О.В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В.П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І.В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С.І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

А.М. Могильницька – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В.О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І.І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

М.В. Зось-Кіор – д-р екон. наук, доцент, професор кафедри менеджменту, Полтавська державна аграрна академія;

О.В. Величко – канд. екон. наук, доцент, доцент кафедри готельно-ресторанної справи та організації бізнесу, Миколаївський національний аграрний університет.

© Миколаївський національний аграрний університет, 2020

ЗМІСТ

Мета, завдання курсу, вимоги до основних знань здобувачів вищої освіти……...…….…….……...4

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 1. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ….…….…….5

Тема 1. Предмет, завдання та методологічні засади курсу……..5

Тема 2. Задачі математичного і лінійного програмування та методи її розв’язування……...7

Тема 3. Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування.....…11

Тема 4. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування…23

Тема 5. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач...33

Тема 6. Економічна і математична постановка транспортної задачі…….....44

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ....61

Тема 7. Концептуальні аспекти математичного моделювання в економіці.....61

Тема 8. Нелінійні оптимізаційні моделі в економічних системах…….63

Тема 9. Аналіз та управління ризиком в економіці……68

Тема 10. Принципи побудови економетричних моделей……..……72

Тема 11. Математичне моделювання виробничих процесів в рослинництві....86

Тема 12. Математичне моделювання виробничих процесів в тваринництві....86

Список використаних джерел……91

МЕТА, ЗАВДАННЯ КУРСУ, ВИМОГИ ДО ОСНОВНИХ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Застосування математичних методів є важливим напрямком удосконалення економічного аналізу, підвищення ефективності аналізу діяльності підприємств та їхніх підрозділів. Основними причинами швидкого поширення методів математичного моделювання в економіці є різке ускладнення сучасної економічної практики, викликане високим рівнем розвитку виробництва, зростанням темпів інформатизації суспільства, вимогами підвищення використання природних ресурсів. Це досягається за рахунок скорочених термінів проведення аналізу, більш повного охоплення впливу факторів на результати комерційної діяльності.

Моделювання – це наукова теорія побудови і реалізації моделей, за допомогою яких досліджуються явища, процеси в природі і суспільному житті. Побудова економіко-математичних моделей складний процес, який вимагає змістовних знань з економічної теорії, предмета дослідження і математичного інструментарію.

Викладання дисципліни «Методи оптимізації в економіці» має на **меті** формування у майбутніх фахівців сучасних підходів до моделювання економічних процесів, набуття практичних навичок побудови та використання математичних моделей для пошуку оптимальної стратегії або для прогнозу економічних ситуацій.

Завдання дисципліни: вивчення основних принципів та інструментарію постановки задач, побудови оптимізаційних економіко-математичних моделей, методів їх розв’язування та аналізу з метою використання в аграрній економіці.

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач вищої освіти повинен **знати:**

- концептуальні основи побудови оптимізаційних економіко-математичних моделей;
- особливості та методологію розробки економіко-математичних моделей;
- принципи та прийоми математичного моделювання;
- послідовність та сутність етапів моделювання соціально-економічних явищ та процесів у аграрному секторі економіки;
- методи оптимізації різних задач, принципи кількісного аналізу економічних процесів;
- властивості та основні аспекти економічної інтерпретацій розв’язків задач економіко-математичного моделювання.

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач вищої освіти повинен **вміти:**

- створювати економіко-математичні моделі економічних процесів та явищ з використанням комп’ютерної техніки з метою пояснення поведінки досліджуваних економічних процесів у аграрному секторі економіки;
- проводити комплексний аналіз результатів оптимізації процесів в діяльності суб'єктів господарювання;
- перевіряти гіпотези про властивості економічних показників прийняття обґрунтованих економічних рішень;
- розробляти тактичні і стратегічні програми діяльності суб'єктів господарювання в аграрному секторі економіки.

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ 1. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ

Тема 1. Предмет, завдання та методологічні засади курсу

Питання до розгляду:

1.1. Основні поняття курсу.

1.2. Постановка оптимізаційних задач.

1.3. Найпростіша класифікація задач математичного програмування.

Тестові завдання:

1. Математичне програмування – це …

1) один з головних інструментів теорії дослідження операцій, що полягає в розробленні методів розв’язування оптимізаційних задач та дослідження отриманого розв’язку;

2) реалізація у вигляді програми одного чи кількох взаємопов’язаних алгоритмів, що охоплює і створення, тобто розробку, алгоритмів, і аналіз потреб майбутніх користувачів програмного забезпечення;

3) це метод дослідження явищ і процесів, що ґрунтується на заміні конкретного об’єкта досліджень (оригіналу) іншим, подібним до нього (моделлю);

4) сукупність математичних співвідношень, рівнянь, нерівностей, що описують основні закономірності, властиві досліджуваному процесу, об'єкту або системі.

2. Алгоритм побудови математичної моделі складається з:

1) трьох етапів;

2) чотирьох етапів;

3) п’яти етапів;

4) шести етапів.

3. Моделювання в економіці – це …

1) відтворення економічних об’єктів і процесів в обмежених, малих, експериментальних формах, у штучно створених умовах;

2) розроблення методів розв’язування оптимізаційних задач та дослідження отриманого розв’язку;

3) метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей і дослідження цих моделей;

4) процес побудови математичної моделі, об’єктом якої є технологічний процес чи його складові, і яка призначена для розроблення нових технологічних процесів чи вдосконалення існуючих, або прогнозування характеристик чи показників технологічного процесу або його результатів, які неможливо чи економічно недоцільно визначити в реальних умовах.

4. Функцію F називають …

1) системою обмежень, або системою умов задачі;

2) цільовою функцією, або функцією мети;

3) допустимим планом;

4) оптимальним планом.

5. Задача математичного програмування формулюється так:

1) знайти такі значення керованих змінних x_j щоб цільова функція набувала екстремального (максимального) значення;

2) знайти такі значення керованих змінних x_j щоб цільова функція набувала екстремального (мінімального) значення;

3) знайти такі значення керованих змінних x_j щоб цільова функція набувала екстремального (фіксованого) значення;

4) знайти такі значення керованих змінних x_j щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального) значення.

6. Система, що описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності даної системи називається …

1) системою обмежень, або системою умов задачі;
2) цільовою функцією, або функцією мети;
3) допустимим планом;
4) оптимальним планом.

7. Для економічних систем змінні x_j мають бути:

1) від'ємними;
2) додатними;
3) невід'ємними;
4) будь-якими.

8. Будь-який набір змінних x_1, x_2, … x_n, що задовольняє таким умовам, що процеси, які відбуваються в середині економічної системи можна описати системою математичних рівностей та нерівностей, а також змінні є невід'ємними називають …

1) системою обмежень, або системою умов задачі;
2) цільовою функцією, або функцією мети;
3) допустимим планом;
4) оптимальним планом.

9. План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається …

1) системою обмежень, або системою умов задачі;
2) цільовою функцією, або функцією мети;
3) допустимим планом;
4) оптимальним планом.

10. В задачі математичного програмування передбачається …

1) одна цільова функція, яка кількісно визначена;
2) одна цільова функція, яка якісно визначена;

3) декілька цільових функцій, які кількісно визначені;
4) безліч цільових функцій, які кількісно визначені.

11. Задачі математичного програмування поділяються на два великі класи:
1) лінійні і нелінійні;
2) керовані і некеровані;
3) змінні і сталі;
4) стохастичні і функціональні.

12. Якщо всі змінні можуть набувати будь-якого значення в деяких інтервалах числової осі, то задача є …
1) детерміновані;
2) стохастичні;
3) дискретні;
4) неперервною.

13. Задачі, що не містять випадкових змінних і параметрів, котрі набувають значень відповідно до функції розподілу називаються …
1) детерміновані;
2) стохастичні;
3) дискретні;
4) неперервною.

14. Сутність цього методу полягає в тому, що оптимальні значення розглядуваної множини змінних знаходять крок за кроком, послідовно застосовуючи індукцію, причому рішення, яке приймається на кожному кроці, має задовольняти умови оптимальності щодо рішення, прийнятого на попередньому кроці.
1) теорія ігор;
2) однокроковість;
3) багатокроковість;
4) симплексний метод.

Тема 2. Задачі математичного і лінійного програмування та методи її розв’язування

Питання до розгляду:
2.1. Поняття математичного та лінійного програмування.
2.2. Економіко-математична модель задач лінійного програмування.

Тестові завдання:
1. Математичне програмування виникло …
1) в 30-ті роки XIX століття;
2) в 30-ті роки XX століття;
3) на початку XX століття;
4) в 70-ті роки XX століття.

2. Лінійне програмування – це …

1) випадок математичного програмування, у якому цільовою функцією чи обмеженнями є нелінійна функція;

2) процес орієнтації економіки з боку органів державного управління шляхом регулярного і комплексного впливу на її структуру відповідно до поставленої мети соціально-економічного розвитку на певний період ;

3) прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремум функції (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання;

4) напрямок математики, що вивчає методи розв'язання екстремальних задач, які характеризуються лінійною залежністю між змінними і лінійним критерієм оптимальності.

3. Нелінійне програмування – це …

1) випадок математичного програмування, у якому цільовою функцією чи обмеженнями є нелінійна функція;

2) процес орієнтації економіки з боку органів державного управління шляхом регулярного і комплексного впливу на її структуру відповідно до поставленої мети соціально-економічного розвитку на певний період ;

3) прикладна математична дисципліна, яка досліджує екстремум функції (задачі пошуку максимуму або мінімуму) і розробляє методи їх розв'язання;

4) напрямок математики, що вивчає методи розв'язання екстремальних задач, які характеризуються лінійною залежністю між змінними і лінійним критерієм оптимальності.

4. Дослідження конкретних виробничо-господарських ситуацій, які в тому чи іншому вигляді інтерпретуються як завдання про оптимальне використання обмежених ресурсів відноситься до …

1) математичних задач лінійного програмування;

2) технологічних задач лінійного програмування;

3) соціально-економічних задач лінійного програмування;

4) економічних задач лінійного програмування.

5. Математична модель – це …

1) система, здатна замінити оригінал (тобто реальну систему) так, що її вивчення дає інформацію про оригінал, може повністю або частково відтворювати структуру системи, що моделюється, та її функції.

2) процес побудови, реалізації та дослідження моделювання, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї;

3) система математичних і логічних співвідношень, які описують структуру та функції реальної системи, що відрізняється за своєю природою від оригіналу;

4) математичний опис економічного процесу чи явища з метою його дослідження та керування, що включає в себе систему рівнянь та нерівностей математичного опису економічних процесів і явищ, які складаються з набору змінних і параметрів.

6. Економіко-математична модель – це …

1) система, здатна замінити оригінал (тобто реальну систему) так, що її вивчення дає інформацію про оригінал, може повністю або частково відтворювати структуру системи, що моделюється, та її функції.

2) процес побудови, реалізації та дослідження моделювання, який здатний замінити реальну систему та дати інформацію про неї;

3) система математичних і логічних співвідношень, які описують структуру та функції реальної системи, що відрізняється за своєю природою від оригіналу;

4) математичний опис економічного процесу чи явища з метою його дослідження та керування, що включає в себе систему рівнянь та нерівностей математичного опису економічних процесів і явищ, які складаються з набору змінних і параметрів.

7. Економіко-математична модель будь-якої задачі лінійного програмування включає:

1) цільову функцію, оптимальне значення якої (максимум чи мінімум) потрібно відшукати; обмеження у вигляді системи лінійних рівнянь або нерівностей; вимога невід'ємності змінних;

2) цільову функцію, оптимальне значення якої (максимум) потрібно відшукати; обмеження у вигляді системи лінійних рівнянь; вимога невід'ємності змінних;

3) цільову функцію, оптимальне значення якої (мінімум) потрібно відшукати; обмеження у вигляді системи лінійних рівнянь або нерівностей; вимога невід'ємності змінних;

4) цільову функцію, оптимальне значення якої (максимум чи мінімум) потрібно відшукати; обмеження у вигляді системи лінійних нерівностей; вимога невід'ємності змінних.

8. У загальному вигляді цільова функція економіко-математичної моделі записується таким чином:

1) $f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)\ \rightarrow\ const$;
2) $f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)\ \rightarrow\ min$;
3) $f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)\ \rightarrow\ max$;
4) $f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)\ \rightarrow\ \max\ (min)$.

9. Точку, координати якої задовольняють визначеним виробничим обмеженням і невід'ємності шуканих змінних називають …

1) допустимим рішенням задач лінійного програмування;
2) оптимальним рішенням задач лінійного програмування;
3) економічним рішенням задач лінійного програмування;
4) математичним рішенням задач лінійного програмування.

10. Допустиме рішення, до задовольняє співвідношенню цільової функції даної економіко-математичної моделі називають …

1) допустимим рішенням задач лінійного програмування;
2) оптимальним рішенням задач лінійного програмування;
3) економічним рішенням задач лінійного програмування;

4) математичним рішенням задач лінійного програмування.

11. Залежно від виду спеціальних обмежень розрізняють наступні задачі лінійного програмування:

1) канонічна та стандартна;
2) статистична та динамічна;
3) дискретна та змінна;
4) стохастична та детермінована.

12. Канонічна задача лінійного програмування, що включає в якості обмежень:

1) тільки рівняння;
2) тільки нерівності;
3) і рівняння і нерівності;
4) переважно рівняння, але в окремих випадках можуть бути і нерівності.

13. Стандартна задача лінійного програмування, що включає в якості обмежень:

1) тільки рівняння;
2) тільки нерівності;
3) і рівняння і нерівності;
4) переважно нерівності, але в окремих випадках можуть бути і рівняння.

14. Лінійне програмування – найбільш розроблений і широко застосовуваний розділ математичного програмування, що пояснюється …

1) математичні моделі великого числа економічних задач лінійні відносно шуканих змінних; даний тип задач в даний час найбільш вивчений. Для нього розроблено спеціальні методи, за допомогою яких ці завдання вирішуються, і відповідні програми для ЕОМ; багато задачі лінійного програмування, будучи вирішеними, знайшли широке застосування; деякі завдання, які в первісної формулюванні не є лінійними, після низки додаткових обмежень і допущень можуть стати лінійними або можуть бути приведені до такої форми, що їх можна вирішувати методами лінійного програмування;

2) даний тип задач в даний час найбільш вивчений. Для нього розроблено спеціальні методи, за допомогою яких ці завдання вирішуються, і відповідні програми для ЕОМ; багато задачі лінійного програмування, будучи вирішеними, знайшли широке застосування; деякі завдання, які в первісної формулюванні не є лінійними, після низки додаткових обмежень і допущень можуть стати лінійними або можуть бути приведені до такої форми, що їх можна вирішувати методами лінійного програмування;

3) математичні моделі великого числа економічних задач лінійні відносно шуканих змінних; даний тип задач в даний час найбільш вивчений; деякі завдання, які в первісної формулюванні не є лінійними, після низки додаткових обмежень і допущень можуть стати лінійними або можуть бути приведені до такої форми, що їх можна вирішувати методами лінійного програмування;

4) для рішення економічних задач розроблено спеціальні методи, за допомогою яких ці завдання вирішуються, і відповідні програми для ЕОМ; багато

задачі лінійного програмування, будучи вирішеними, знайшли широке застосування; деякі завдання, які в первісної формулюванні не є лінійними, після низки додаткових обмежень і допущень можуть стати лінійними або можуть бути приведені до такої форми, що їх можна вирішувати методами лінійного програмування.

Тема 3. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Питання до розгляду:

3.1. Зміст розв'язання задач лінійного програмування графічним методом.

3.2. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування з двома змінними.

3.3. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування з n-вимірного простору.

Тестові завдання:

1. Метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування. Його обмежене використання зумовлене складністю побудови багатогранника розв'язання у тривимірному просторі (для задач з трьома змінними), а графічне зображення задачі з кількістю змінних більше трьох взагалі неможливе.

1) графічний метод;
2) симплексний метод;
3) метод потенціалів;
4) метод північно-західного кутка.

2. Системою обмежень графічно можна зобразити спільну частину, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множину точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі, що називається …

1) трикутник розв'язання;
2) квадрат розв'язання;
3) багатокутник розв'язання;
4) прямокутник розв'язання.

3. Умова невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язання задачі належить …

1) першому квадранту системи координат двовимірного простору;
2) другому квадранту системи координат двовимірного простору;
3) третьому квадранту системи координат двовимірного простору;
4) четвертому квадранту системи координат двовимірного простору.

4. Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то …

1) екстремального значення цільова функція набуває його в будь-якій точці прямокутника, що є лінійною комбінацією вершин прямокутника розв'язання;

2) екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатокутника розв'язання;

3) екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її прямокутника розв’язання;

4) екстремального значення цільова функція набуває його в будь-якій точці багатокутника, що є лінійною комбінацією вершин багатокутника розв’язання.

5. Розв’язати задачу лінійного програмування графічно означає:

1) знайти таку вершину багатокутника розв’язання, у результаті підстановки координат якої в рівняння лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення;

2) знайти таку вершину прямокутника розв’язання, у результаті підстановки координат якої в рівняння лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення;

3) знайти таку вершину багатокутника розв’язання, у результаті підстановки координат якої в рівняння лінійна цільова функція набуває найбільшого значення;

4) знайти таку вершину прямокутника розв’язання, у результаті підстановки координат якої в рівняння лінійна цільова функція набуває найменшого значення.

6. Алгоритм графічного методу розв’язування задачі лінійного програмування складається з …

1) п’яти основних кроків;

2) шести основних кроків;

3) семи основних кроків;

4) восьми основних кроків.

7. Алгоритм графічного методу розв’язування задач лінійного програмування представлений послідовно …

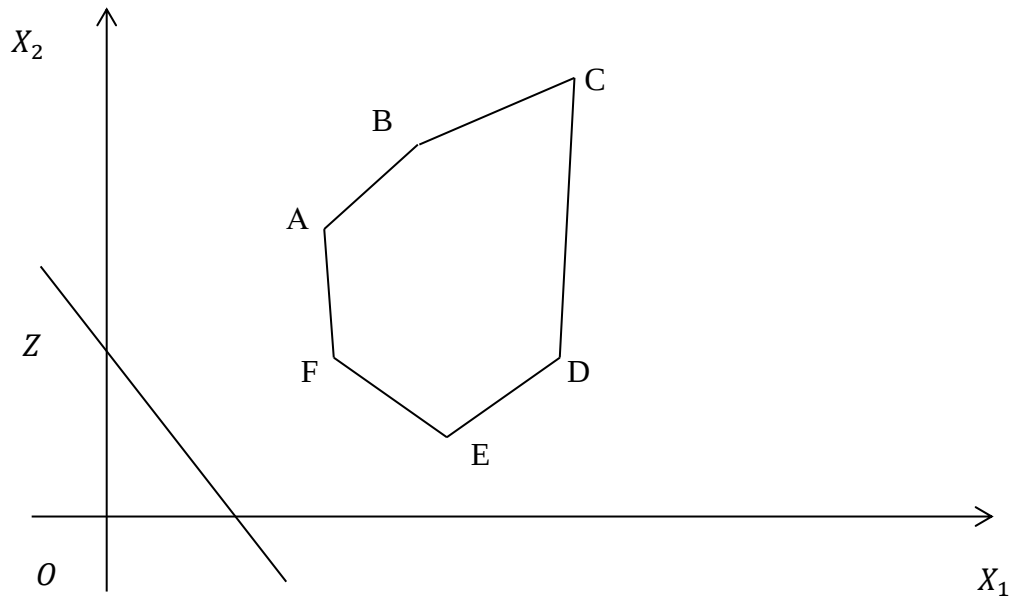
1) будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей; визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі; знаходимо багатокутник розв’язання задачі лінійного програмування; будуємо вектор N, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі; будуємо пряму, перпендикулярну до вектору N; рухаючи пряму в напрямку вектору N (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв’язання, де цільова функція набирає екстремального значення; визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці;

2) визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі; будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей; будуємо пряму, перпендикулярну до вектору N; знаходимо багатокутник розв’язання задачі лінійного програмування; будуємо вектор N, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі; рухаючи пряму в напрямку вектору N (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв’язання, де цільова функція набирає екстремального значення; визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці;

3) будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей; знаходимо багатокутник розв'язання задачі лінійного програмування; будуємо вектор N, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі; будуємо пряму, перпендикулярну до вектору N; рухаючи пряму в напрямку вектору N (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язання, де цільова функція набирає екстремального значення; визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці;

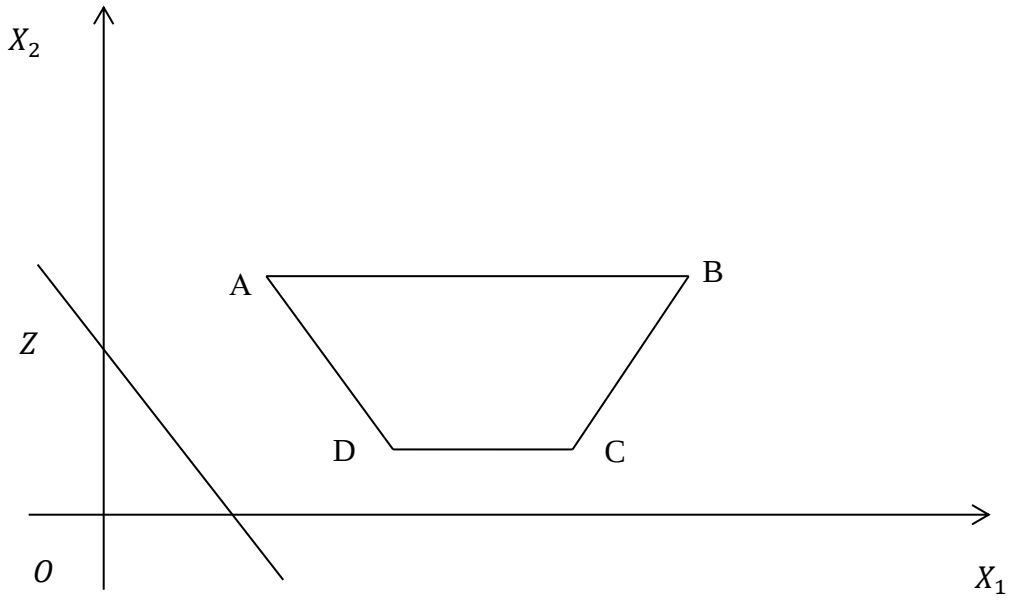
4) будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей; визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі; будуємо вектор N, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі; будуємо пряму, перпендикулярну до вектору N; рухаючи пряму в напрямку вектору N (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язання, де цільова функція набирає екстремального значення; визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

8. На рисунку зображено випадок, коли свого максимального значення функція досягає в точці …



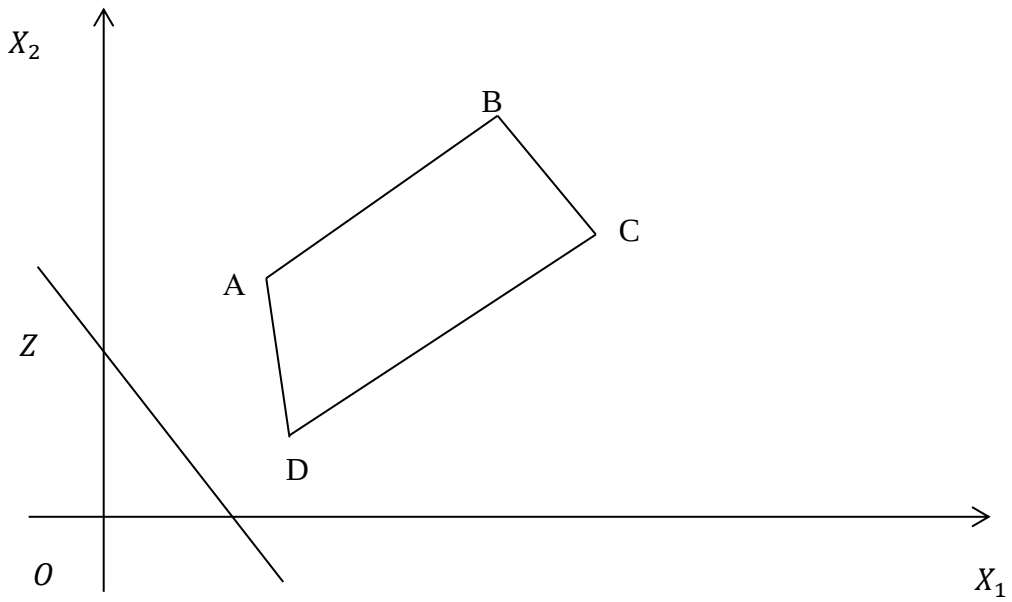
1) A;
2) C;
3) E;
4) F.

9. Який варіант розв'язку зображений на нижче приведеному рисунку …



1) система обмежень не сумісна;
2) максимум в точці А;
3) лінійна форма не обмежена знизу;
4) мінімум в точці С.

10. Який варіант розв’язку зображений на нижче приведеному рисунку …



1) мінімум в точці А;
2) лінійна форма не обмежена зверху;
3) максимум в точці В;
4) задача має безліч розв’язків.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Якщо умови задачі лінійного програмування не суперечливі, то область її допустимих розв'язків утворює опуклий багатогранник в n-мірному просторі. При цьому оптимальний розв'язок, якщо він існує, обов'язково досягається в якійсь вершині багатогранника. Щоб знайти розв'язок задачі лінійного програмування досить розглянути лише ті плани, що відповідають вершинами багатогранника. Такі плани є ***опорними***.

Здійснити впорядкований розгляд вершин багатогранника дозволяє симплексний метод, назва якого походить від назви багатогранника, тобто області допустимих розв'язків, яка називається ***симплексом***.

Після визначення однієї з вершин цей метод дає змогу встановити, чи є знайдений план оптимальним, тобто чи досягнуто у цій вершині екстремуму цільової функції. Якщо план не є оптимальним, то перехід здійснюється до тієї сусідньої вершини багатогранника, яка забезпечує екстремальне значення цільової функції. Повторне застосування вказаної процедури призводить насамперед до вершини, яка відповідає ***оптимальному планові***. Кількість кроків (переходів) від вихідної вершини до точки екстремуму, звичайно, є величиною одного порядку з числом обмежень задачі.

При розв'язуванні задачі лінійного програмування графічним методом можуть бути такі варіанти розв'язків:

1. Задача не має розв'язку, оскільки система умов не сумісна, тобто не існує загальної області допустимих розв'язків – ОДР (рис. 3.1).

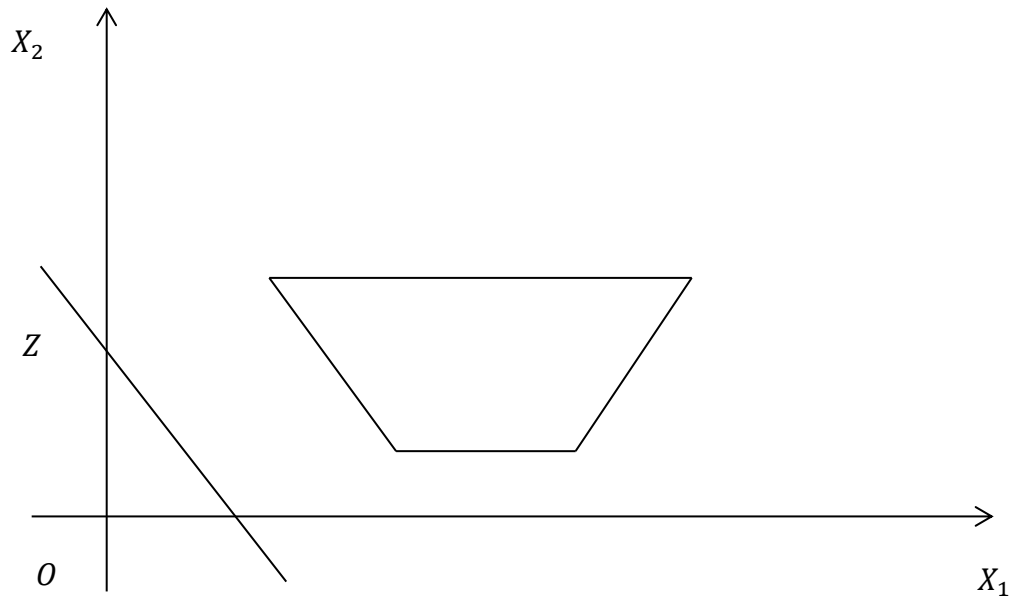


Рисунок 3.1 – Система обмежень не сумісна

2. Задача не має розв'язку, оскільки цільова функція не обмежена і прямує до нескінченності. При розв'язуванні задачі на максимум вона не обмежена зверху (рис. 3.2), а при розв'язуванні на мінімум – знизу (рис. 3.3).

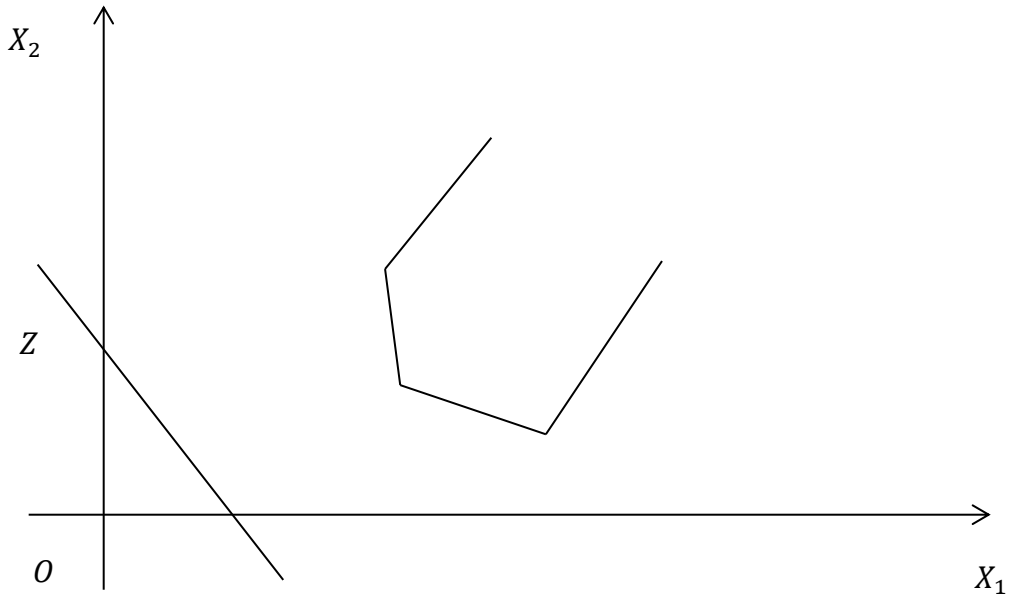


Рисунок 3.2 – Лінійна форма не обмежена зверху

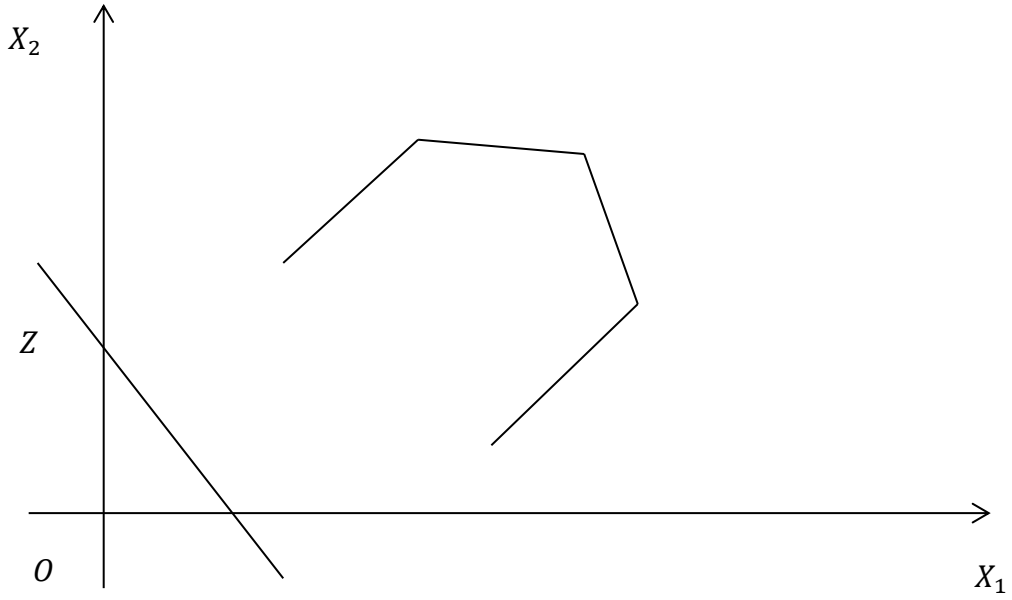


Рисунок 3.3 – Лінійна форма не обмежена знизу

3. Задача має один єдиний розв’язок, система умов задачі сумісна і цільова функція досягає свого екстремального значення в одній з вершин багатогранника (рис. 3.4).

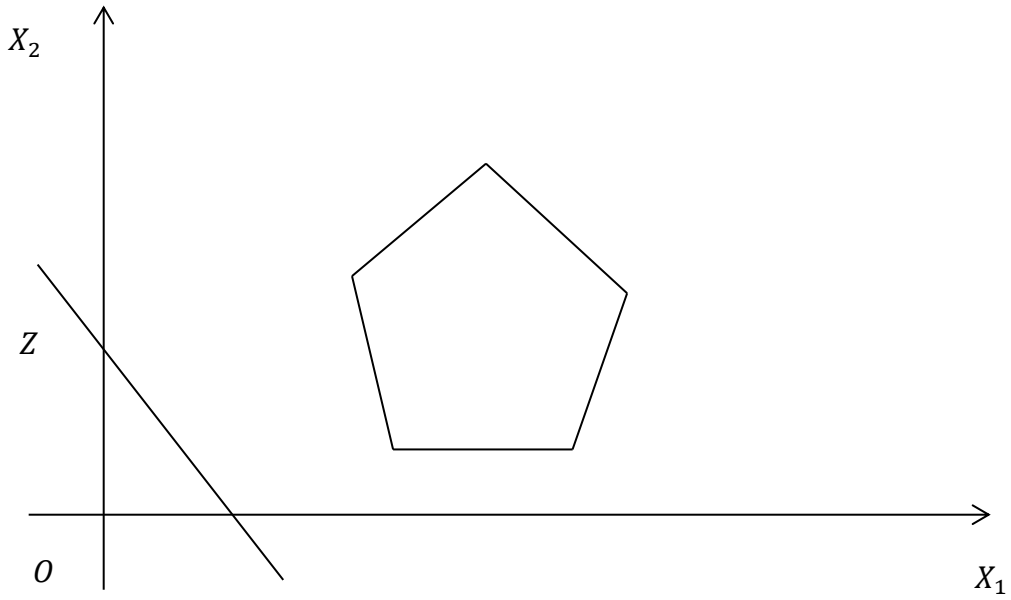


Рисунок 3.4 – Задача має лише один розв'язок

4. Задача має безліч розв'язків, тобто система умов сумісна, а цільова функція при прямуванні до екстремуму накладається на одну з граней багатогранника (рис. 3.5).

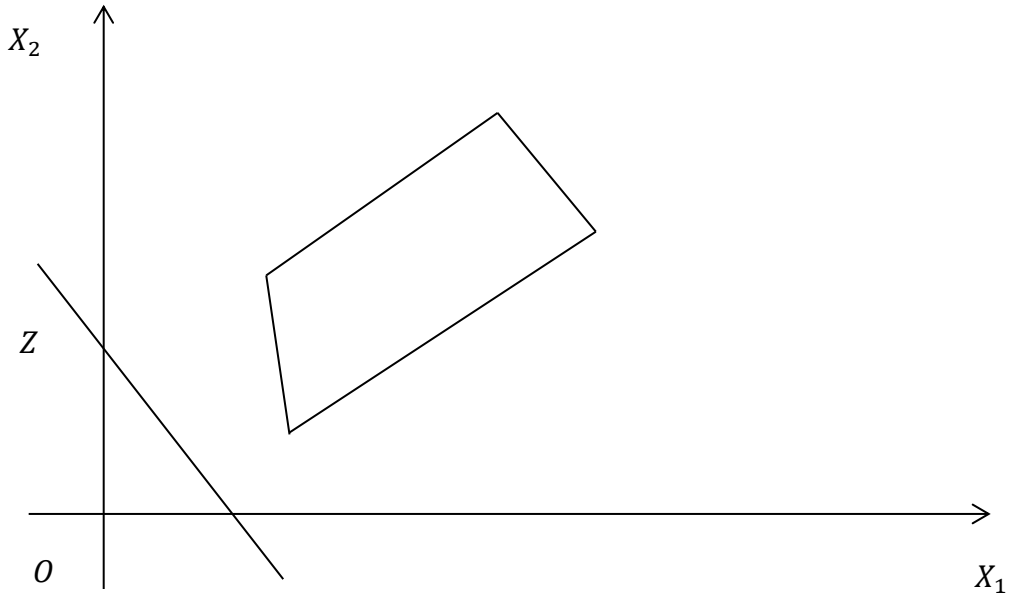


Рисунок 3.5 – Задача має безліч розв'язків

Графічний спосіб, оснований на геометричній задачі лінійного програмування, використовується для розв'язування задач у двомірному просторі. Задачі трьохмірному простору розв'язуються дуже рідко, оскільки побудова їх розв'язку не зручна.

ПРИКЛАД

Розглянемо алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування графічним способом на прикладі:

$$Z_{min} = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$6x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 4$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

Для побудови графіку необхідно спочатку побудувати прямі, а потім визначити область допустимих розв'язків кожної лінійної нерівності. Для цього записуємо дану задачу з умовами у вигляді рівнянь, як один з можливих розв'язків задачі:

$$Z_{min} = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 = 4$$
$$6x_1 + 2x_2 = 8$$
$$x_1 + 5x_2 = 4$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

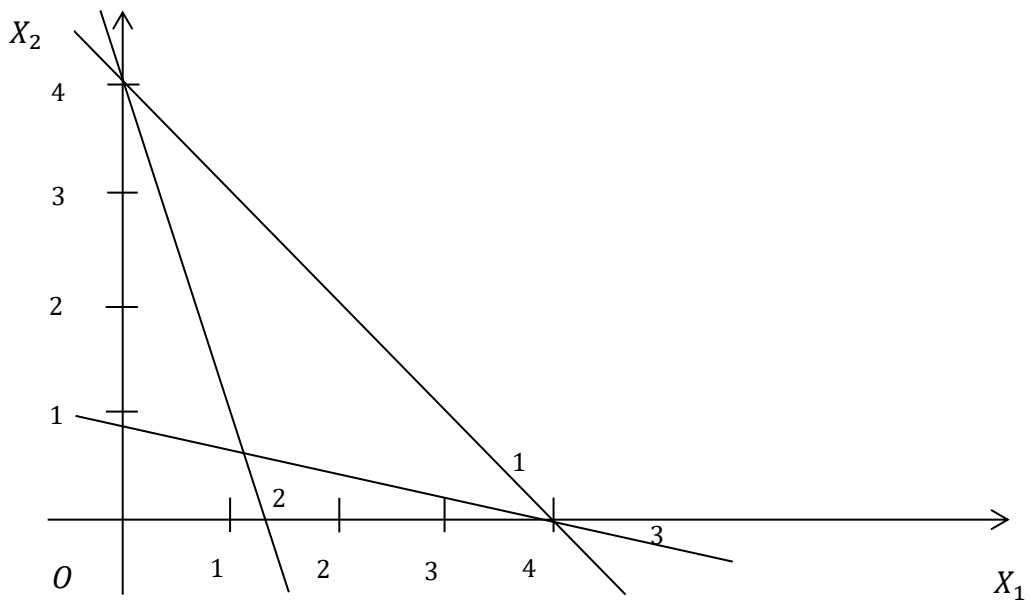
По кожному рівнянню знайдемо такі дві точки, через які можна побудувати пряму.

Наприклад, по першому рівнянню, допустимо, що $x_1 = 0$, тоді $x_2 = 4$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 4$.

Відповідно по другому рівнянню: $x_1 = 0$, тоді $x_2 = 4$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 1{,}33$.

Відповідно по третьому рівнянню: $x_1 = 0$, тоді $x_2 = 0{,}8$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 4$.

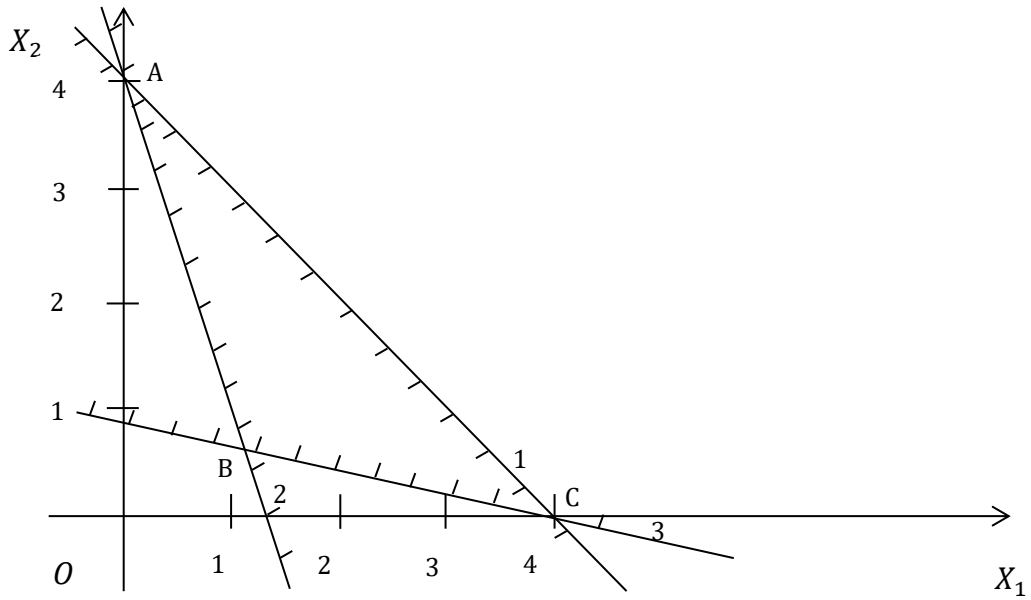
Нанесемо на площину прямі, які називаються ***граничними***, оскільки кожна з них ділить площину на дві ***напівплощини, тобто є границею***.



Областю допустимих розв'язків (ОДР) кожної лінійної нерівності з двома невідомими є безліч точок на півплощини, що лежить по одну сторону від граничної прямої, яку необхідно визначити. Для цього на площині вибирається будь-яка точка, визначаються її координати, їх значення підставляються відповідно в кожну нерівність. Якщо ці значення задовольняють умову нерівності, то це значить, що як вибрана точка, так і всі точки, що лежать на цій напівплощині, задовольнятимуть дану умову. У разі, якщо координати точки не задовольнятимуть умову нерівності, то ОДР буде знаходитися на протилежній на півплощині. Для зручності обирають точку початку координат, в якій $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ і визначають ОДР для кожної нерівності:

$$0 + 0 \leq 4 \text{ (вірно) (1)}$$
$$0 + 0 \geq 8 \text{ (невірно) (2)}$$
$$0 + 0 \geq 4 \text{ (невірно) (3)}$$

Визначаємо ОДР для даних умов:



Таким чином, визначивши ОДР кожної нерівності, можна визначити ОДР усієї системи. Це буде замкнена область, представлена трикутником *ABC*, де ОДР усіх граничних прямих перетинаються.

Для знаходження екстремального значення цільової функції прирівнюють умову цільової функції до будь-якого додатного числа.

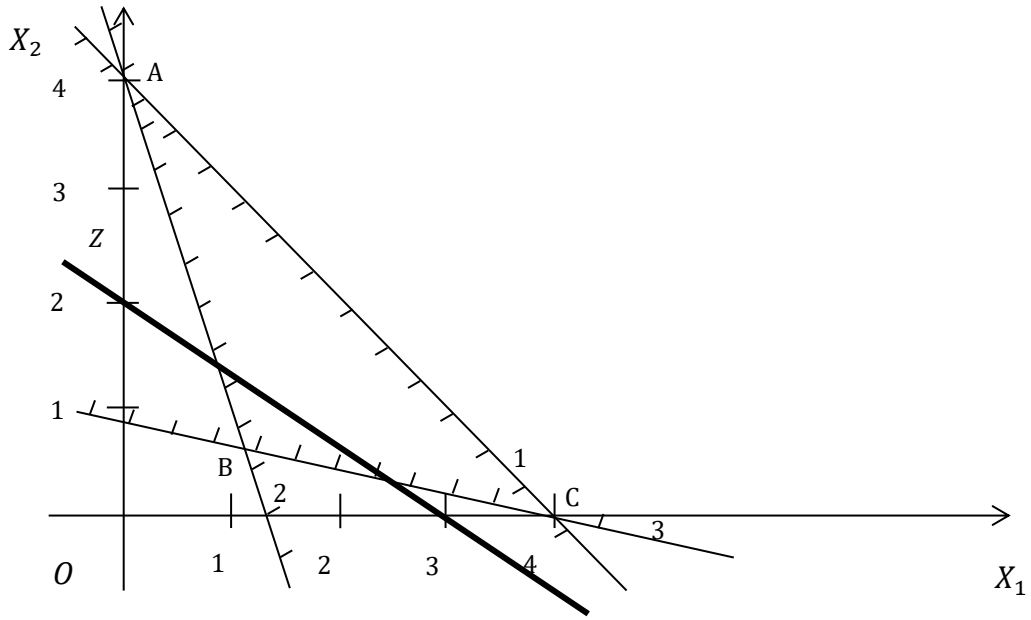
Наприклад:

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

Припустимо, що $x_1 = 0$, тоді $x_2 = 2$, якщо $x_2 = 0$, то $x_1 = 3$.

Потім будують лінію цільової функції на площині. Якщо пряму переміщати у напрямку поставленого до неї перпендикуляра в напрямку до початку координат, то

значення буде зменшуватися і в крайній точці B воно досягне мінімуму. Визначивши координати цієї точки, знайдемо мінімальне значення цільової функції.



Точка B відповідно: $x_1 = 1{,}1$, тоді $x_2 = 0{,}6$.
При цьому $Z_{min} = 2 * 1{,}1 + 3 * 0{,}6 = 4$.

У разі, коли задача розв'язується на максимум, лінію цільової функції необхідно переміщати у напрямку від початку координат і у крайній точці вона досягатиме свого максимального значення.

Крім того, обов'язково розв'язку задачі необхідно дати геометричну інтерпретацію, тобто визначити, який з варіантів, описаних на початку даної теми, відповідає отриманому результатові.

Завдання:
Розв'язати задачу лінійного програмування графічним способом

1. $Z_{min} = 7x_1 + 5x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$-3x_1 - x_2 \geq 9$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1{,}2)$$

2. $Z_{max} = 2x_1 + x_2$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$
$$2x_1 + x_2 \leq 12$$
$$7x_1 + 3x_2 \geq 14$$
$$-4x_1 - x_2 \leq 8$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1{,}2)$$

3. $Z_{min} = 6x_1 + 3x_2$

$$-x_1 - x_2 \geq -3$$
$$6x_1 + x_2 \leq 12$$
$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

4. $Z_{max} = x_1 + 4x_2$

$$12x_1 - 3x_2 \leq 24$$
$$8x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

5. $Z_{min} = 12x_1 + x_2$

$$4x_1 - 3x_2 \leq 12$$
$$8x_1 - 4x_2 \geq 8$$
$$12x_1 + x_2 \geq 24$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

6. $Z_{max} = 2x_1 + x_2$

$$-x_1 - 2x_2 \geq -4$$
$$5x_1 + x_2 \leq 10$$
$$2x_1 - 2x_2 \leq 7$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

7. $Z_{min} = 2x_1 + 3x_2$

$$-4x_1 + 5x_2 \leq 20$$
$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$5x_1 - x_2 \leq 15$$
$$x_1 - x_2 \leq 6$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

8. $Z_{max} = 2x_1 + 4x_2$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

9. $Z_{min} = 8x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$6x_1 + 4x_2 \geq 9$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 4$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

10. $Z_{min} = 6x_1 + 3x_2$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 24$$
$$-6x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$4x_1 - 3x_2 \geq 9$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

11. $Z_{max} = 3x_1 + 7x_2$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$3x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$4x_1 - 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 10$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

12. $Z_{max} = x_1 + 3x_2$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$
$$-6x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$4x_1 - 3x_2 \leq 24$$
$$-3x_1 - x_2 \leq 9$$
$$6x_1 + 3x_2 \geq 12$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

13. $Z_{min} = 2x_1 + 3x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$6x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$
$$x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

14. $Z_{max} = 2x_1 + 2x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$6x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 14$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

15. $Z_{min} = -5x_1 + 30x_2$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

16. $Z_{max} = 2x_1 + x_2$

$$3x_1 + x_2 \geq 8$$
$$-x_1 + 2x_2 \geq 12$$

$$-4x_1 - 7x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 17$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

17. $Z_{max} = 10x_1 + 30x_2$

$$5x_1 - 4x_2 \leq 25$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 14$$
$$x_2 \leq 8$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

18. $Z_{min} = x_1 - 3x_2$

$$x_1 - x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + x_2 \geq 3$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 1$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

19. $Z_{max} = 2x_1 + 7x_2$

$$x_1 + 3x_2 \leq 30$$
$$6x_1 + x_2 \leq 24$$
$$-4x_1 + 3x_2 \leq 15$$
$$3x_1 + 5x_2 \geq 15$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

20. $Z_{max} = 5x_1 + x_2$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 - x_2 \leq 2$$
$$x_1 \geq 1$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2)$$

Тема 4. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування

Питання до розгляду:

4.1. Теоретичні відомості щодо симплекс-методу.

4.2. Симплексний метод розв’язування задач лінійного програмування.

Тестові завдання:

1. Поетапна обчислювальна процедура, в основу якої покладено принцип послідовного поліпшення значень цільової функції переходом від одного опорного плану задачі лінійного програмування до іншого, називається …

1) симплексний метод;

2) метод теорії ігор;

3) кореляційно-регресійний аналіз;

4) економіко-математичне моделювання.

2. Алгоритм розв’язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з …

1) п’яти основних етапів;

2) шести основних етапів;

3) семи основних етапів;

4) восьми основних етапів.

3. Послідовність розв’язування задачі лінійного програмування …

1) визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування; побудова симплексної таблиці; перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує; перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв’язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці; повторення дій починаючи з пункту 1;

2) визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування; побудова симплексної таблиці; перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує; перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв’язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці; повторення дій починаючи з пункту 2;

3) визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування; побудова симплексної таблиці; перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує; перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв’язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці; повторення дій починаючи з пункту 4;

4) визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування; побудова симплексної таблиці; перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $Z_j - C_j$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок $Z_j - C_j$ не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує; перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв’язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці; повторення дій починаючи з пункту 3.

4. Визначення першого опорного плану починають із запису задачі лінійного програмування в …

1) канонічній формі;
2) стандартній формі;
3) змішаній формі;
4) математичній формі.

5. Стовпчик базисних змінних. У першій симплексній таблиці у цьому стовпчику записуються додаткові змінні …
1) стовпчик *«B»*;
2) стовпчик *«C»*;
3) стовпчик *«P_0»*;
4) стовпчик змінних.

6. Стовпчик оцінок базисних змінних. У ньому відображаються значення коефіцієнтів відповідних базисних змінних, що стоять у цільовій функції.
1) стовпчик *«B»*;
2) стовпчик *«C»*;
3) стовпчик *«P_0»*;
4) стовпчик змінних.

7. Стовпчик вільних членів (ресурсний стовпчик). В ньому відображаються значення правих частин обмежень задачі.
1) стовпчик *«B»*;
2) стовпчик *«C»*;
3) стовпчик *«P_0»*;
4) стовпчик змінних.

8. Їх кількість залежить від кількості основних і додаткових невідомих. В цих стовпчиках записуються коефіцієнти, які стоять при невідомих змінних у системі рівнянь.
1) стовпчик *«B»*;
2) стовпчик *«C»*;
3) стовпчик *«P_0»*;
4) стовпчики змінних.

9. В $m + 1$ рядку записуються …
1) значення коефіцієнтів відповідних базисних змінних, що стоять у цільовій функції;
2) коефіцієнти, які стоять при невідомих змінних у системі рівнянь;
3) коефіцієнти за відповідних невідомих у цільовій функції;
4) значення правих частин обмежень задачі.

10. Щоб знайти елемент нової симплексного таблиці, потрібно скористатися …
1) значенням коефіцієнтів відповідних базисних змінних;
2) правилом прямокутника;
3) методом потенціалів;
4) правилом північно-західного кутка.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Планово-економічні задачі, що містять велику кількість змінних і обмежень, графічним способом розв'язати неможливо. Для цього використовують симплексний метод. Він базується на важливому теоретичному положенні: оптимальний розв'язок задачі відповідає одній з крайніх точок випуклого багатогранника. Для пошуку оптимального плану немає необхідності перебирати всі варіанти, що відповідають вершинам багатогранника. Обчислення проводять за певним алгоритмом. Алгоритм симплексного методу побудований так, що достатньо знайти будь-яку з вершин багатогранника, що є допустимим розв'язком, а далі, завдяки направленому перебору вершин симплекса, план буде поліпшуватися до знаходження оптимального варіанта. Кількість кроків (переходів) від вихідної вершини до точки оптимуму, звичайно, є величиною одного порядку з числом обмежень задачі.

При оптимізації плану важливе значення має логічно правильна постановка задачі, визначення цілі і формування обмежень з урахуванням технологічних і організаційних особливостей виробництва. Розв'язування планово-економічних задач проводиться за декілька етапів:

1. Математична формалізація умов задачі у вигляді системи нерівностей і рівнянь, логічна і формально-математична перевірка відповідності умов і обмежень задачі.

2. Розв'язування математичної задачі симплексним методом. При цьому слід виділити такі стадії:

- приведення задачі до канонічної форми і знаходження початкового варіанту допустимого плану, який відповідає одній з вершин випуклого багатогранника;
- перевірка знайденого варіанту плану на оптимальність (якщо отриманий варіант виявися оптимальним, то розв'язок завершено, в іншому разі план необхідно поліпшити);
- послідовність поліпшення плану виконується до отримання оптимального.

3. Оптимальний план підлягає глибокому економічному аналізу. Його можна буде додатково скорегувати за зміни умов виробництва. На основі плану проводиться визначення економічної ефективності окремих технологічних процесів виробництва деяких видів продукції, ресурсів та інше.

ПРИКЛАД

Потрібно визначити оптимальне сполучення посівів озимої пшениці і цукрового буряку, що забезпечить максимум валової продукції. Для того,щоб скласти задачу в математичному вигляді, потрібні такі показники:

Таблиця 1 – Наявність, витрати виробничих ресурсів і вихід валової продукції

Показники	Одиниці виміру	Озима пшениця	Цукровий буряк	Наявність ресурсів
Площа ріллі	га	1	1	1000
Трудові ресурси	люд.-год.	23,5	92,6	40000
Вартість валової продукції, яку одержують з 1га	в постійних цінах 2010 року, тис. грн.	0,63	2,10	x

Таким чином, у результаті розв'язування задачі необхідно знайти такі розміри площ озимої пшениці і цукрового буряку, які б забезпечили одержання максимального обсягу валової продукції. Невідомими (змінними) величинами будуть розміри посівних площ озимої пшениці (x_1) і цукрового буряку (x_2). Критерій оптимальності (вартість валової продукції) визначається як сума добутків вартості продукції з 1 га на посівну площу:

$$Z_{max} = 0{,}63x_1 + 2{,}10x_2.$$

Максимум цільової функції має бути досягнуто при дотриманні таких умов:

1. Загальна площа посівів озимої пшениці і цукрового буряку не повинна перевищувати площу ріллі:

$$x_1 + x_2 \leq 1000.$$

2. Загальні витрати праці не повинні перевищувати наявний обсяг трудових ресурсів:

$$23{,}5x_1 + 92{,}6x_2 \leq 40000.$$

3. Площі посівів культур повинні бути реальними числами:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

У наведеній задачі умови виробництва записано у вигляді нерівностей, тобто задача записана в стандартному вигляді. Для розв'язання задачі симплексним методом необхідно її записати в канонічній формі. З цією метою в ліву частину нерівностей вводять додаткові змінні, в результаті чого матимемо:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$23{,}5x_1 + 92{,}6x_2 + x_4 \leq 40000.$$

За економічним змістом змінні x_3 та x_4 означають невикористані ресурси, відповідно рілля та трудові ресурси. У цільову функцію ці змінні записуються з коефіцієнтом 0, оскільки вони не відповідають економічному змісту обраного критерію оптимальності.

$$Z_{max} = 0{,}63x_1 + 2{,}10x_2 + 0 * x_3 + 0 * x_4.$$

Для розв'язування задачі симплексним методом складають спеціальну симплексну таблицю.

Симплексна таблиця 1

N *обмежень*	B	C	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{P_0}{a_{ij}} > 0$
1	x_3	0	1000	1	1	1	0	1000
2	x_4	0	40000	23,5	92,6	0	1	431,97
$m+1$			0	-0,63	-2,1	0	0	x

Порядок заповнення симплексної таблиці:

1. У стовпчик ***«N обмежень»*** – проставляються номери обмежень задачі.

2. Стовпчик ***«B»*** – це стовпчик базисних змінних. У першій симплексній таблиці у цьому стовпчику записуються додаткові змінні.

3. Стовпчик ***«C»*** – це стовпчик оцінок базисних змінних. У ньому відображаються значення коефіцієнтів відповідних базисних змінних, що стоять у цільовій функції.

4. Стовпчик ***«P_0»*** – це стовпчик вільних членів (ресурсний стовпчик). В ньому відображаються значення правих частин обмежень задачі.

5. Стовпчики змінних. Їх кількість залежить від кількості основних і додаткових невідомих. В цих стовпчиках записуються коефіцієнти, які стоять при невідомих змінних у системі рівнянь.

6. В $\boldsymbol{m+1}$ рядку записуються коефіцієнти за відповідних невідомих у цільовій функції, на перетині $\boldsymbol{m+1}$ рядка і стовпчика ***«P_0»*** ставлять 0, а у кожній наступній і останній таблицях на цьому місці відображається значення критерію оптимальності (цільової функції).

Крім того, слід пам'ятати, що за розв'язування задачі на мінімум, знаки при коефіцієнтах, що записуються в $\boldsymbol{m+1}$ рядку, не змінюються, а за розв'язування на максимум – коефіцієнти записуються з протилежними знаками.

Побудований план називається ***опорним (базисним)***. Цей план поліпшується до тих пір, поки не буде отримано оптимальний варіант плану. Тобто розв'язок задачі полягає у послідовному введенні до плану (базису) основних змінних, доки не буле отримано оптимальний розв'язок. При цьому на кожному етапі розрахунку можна ввести тільки одну змінну. Водночас інша змінна виводиться з базису, оскільки при двох обмеженнях задачі в базисі не може бути більше ніж дві змінні.

Спочатку визначають, яка саме зі змінних вводиться до базису. Для цього за розв'язування задачі на максимум, серед від'ємних коефіцієнтів $\boldsymbol{m+1}$ рядка у стовпчиках невідомих обирають найбільший за абсолютною величиною. Стовпчик, у якому стоїть ця величина, називається ***направляючим (розв'язувальним).***

У даному прикладі це буде стовпчик, в якому стоїть $\boldsymbol{x_3}$. Яку ж змінну слід вивести з базису? Щоб дати відповідь на це питання слід елементи стовпчика ***«P_0»*** розділити на додатні елементи ***направляючого стовпчика*** (результати ділення записуються в останній стовпчик таблиці) і найменший результат покаже на ту змінну ($\boldsymbol{x_4}$), яку необхідно вивести з базису. Рядок, в якому стоїть ця змінна, називається ***направляючим (розв'язувальним)***. Елемент, що стоїть на перетині направляючих стовпчика і рядка, також називається ***направляючим***. У даному разі це буде елемент рівний 92,6.

Симплексна таблиця 2, в якій відображається перший поліпшений план, повинна заповнюватися у такій послідовності:

1. Усі елементи направляючого рядка діляться на направляючий елемент і результати записуються у відповідний рядок нової симплексної таблиці. У цьому рядку в стовпчику ***«B»*** замість старої базисної змінної ставиться нова. Відповідно у стовпчик ***«C»*** біля цієї змінної проставляється коефіцієнт, що стоїть при цій змінній у цільовій функції.

2. У новій таблиці на місці елементів направляючого стовпчика, крім 1, яку отримали в результаті ділення направляючого елемента самого на себе, проставляють нулі.

3. Змінні, крім нововведеної, що стояли в стовпчику ***«B»*** і коефіцієнти стовпчика ***«C»*** переносяться з попередньої таблиці на відповідні місця без змін.

4. Усі останні елементи нової симплексної таблиці розраховуються за правилом прямокутника.

Правило прямокутника:

Щоб знайти елемент нової симплексного таблиці, потрібно скористатися ***правилом прямокутника***. Для цього у вихідній таблиці виділяють прямокутник, вершинами якого служать потрібні для обчислення елементи. Діагональ, що містить направляючий елемент і шуканий елемент нової таблиці, називають ***головною***, а іншу – ***побічною***. Щоб отримати елемент нової симплексного таблиці, потрібно з добутку елементів головної діагоналі відняти добуток елементів побічної діагоналі і отримане число розділити на направляючий елемент, виділений рамкою.

Поліпшення плану проводиться до тих пір, поки не буде отримано ***оптимальний план***. ***Ознакою оптимальності має бути наявність усіх додатних коефіцієнтів, або нулів в $m+1$ рядку при розв'язуванні задачі на максимум і від'ємних коефіцієнтів або нулів, коли задача розв'язується на мінімум.***

На підставі вищевикладеного заповнимо другу симплексну таблицю:

Симплексна таблиця 2

N обмежень	***B***	***C***	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{P_0}{a_{ij}} > 0$
1	x_3	0	56,03	<u>0,75</u>	0	1	-0,013	757,37
2	x_2	2,1	431,97	0,25	1	0	0,01	1727,88
$m+1$			907,13	-0,1	0	0	0,02	x

Оскільки в $m+1$ рядку є від'ємний коефіцієнт (-0,1), то отриманий поліпшений план є не є оптимальний, оскільки задача розв'язується на максимум. Таким чином, стовпчик, в якому стоїть цей коефіцієнт, буде ***направляючим*** і в новому плані в базисному стовпчику повинна стояти змінна x_1. Вона має витіснити змінну x_3, оскільки найменший результат ділення елементів стовпчика ***«P_0»*** на додатні елементи ***направляючого*** стовпчика отримано в першому рядку, в якому в базисі стоїть змінна x_3. Направляючим елементом буде 0,75.

Розглянемо третю симплексну таблицю:

Симплексна таблиця 3

N *обмежень*	B	C	P_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$\frac{P_0}{a_{ij}} > 0$
1	x_1	0,63	757,37	$\underline{1}$	0	1,33	-0,01	-
2	x_2	2,1	242,63	0	1	-0,33	0,01	-
$m+1$			982,87	0	0	0,4	0,001	x

Оскільки в $\boldsymbol{m+1}$ рядку всі коефіцієнти додатні, то отриманий варіант плану є ***оптимальним***. Відповідно до нього для того, щоб отримати максимум валової продукції в грошовому вираженні, необхідно озиму пшеницю вирощувати на площі 757,3 ($\boldsymbol{x_1}$), а цукровий буряк – на площі 242,63 га ($\boldsymbol{x_2}$). При цьому вартість валової продукції дорівнюватиме 982,87 тис. грн..

Після отримання оптимального плану необхідно обов'язково зробити перевірку, підставляючи отримані значення змінних у канонічний запис задачі.

Так, у результаті розв'язку задачі:

$$Z_{max} = 982{,}87 \text{ тис. грн.}, \quad x_1 = 757{,}37 \text{ га}; \quad x_2 = 242{,}63; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 0\,.$$

Змінні, які не ввійшли до базису, дорівнюють нулю.

Перевірка:

$$Z_{max} = 0{,}63 * 757{,}37 + 2{,}10 * 242{,}63 + 0 * 0 + 0 * 0 = 986{,}66$$

$$986{,}66 \approx 982{,}87$$

$$757{,}37 + 242{,}63 + 0 = 1000$$

$$1000 = 1000$$

$$23{,}5 * 757{,}37 + 92{,}6 * 242{,}63 + 0 = 40005{,}70$$

$$40005{,}70 \approx 40000$$

Примітки:

1. Після одержання оптимального плану може бути так, що деякій змінній, яка не входить до останнього базису, в $\boldsymbol{m+1}$ рядку відповідатиме нуль (при цьому стовпчики одиничних векторів до уваги не беруться). Це свідчить про те, що задача має альтернативний розв'язок. Його можна одержати шляхом введення цієї змінної до базису, в результаті чого буде одержано новий план, який також буде оптимальним.

2. Якщо в направляючому стовпчику всі елементи $\boldsymbol{a_{ij} < 0}$, то задача не має розв'язку, тобто її лінійна форма на мінімум не обмежена знизу, а при розв'язуванні на максимум – зверху.

Завдання:

Розв'язати задачу лінійного програмування симплексним методом

1. $Z_{max} = 16x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 6$$
$$2x_1 + 4x_2 - x_5 \leq 8$$
$$x_j \geq 0$$

2. $Z_{min} = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3$

$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 40$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 \leq 13$$
$$2x_1 - 4x_2 - 6x_3 \leq 20$$
$$x_j \geq 0$$

3. $Z_{max} = 3x_1 + 8x_2 + 16x_3$

$$5x_1 + 8x_2 + 16x_3 \leq 2$$
$$3x_1 + 11x_2 + 4x_3 \leq 9$$
$$6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \leq 68$$
$$x_j \geq 0$$

4. $Z_{min} = 6x_1 + x_2 + 3x_3$

$$6x_1 + 5x_2 - 8x_3 \leq 12$$
$$3x_1 - 7x_2 + 5x_3 \leq 15$$
$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 16$$
$$x_j \geq 0$$

5. $Z_{max} = 3x_1 + 2x_2 + 5x_4$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \leq 6$$
$$x_j \geq 0$$

6. $Z_{max} = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3$

$$4x_1 - 8x_2 - x_3 \leq 5$$
$$28x_1 + 3x_2 - 9x_3 \leq 10$$
$$18x_2 - 9x_3 \leq 1$$
$$x_j \geq 0$$

7. $Z_{min} = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4$

$$3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 5x_4 \leq 4$$
$$8x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \leq 10$$
$$14x_1 + 10x_2 - x_3 \leq 18$$
$$x_j \geq 0$$

8. $Z_{max} = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$

$$18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \leq 360$$
$$6x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq 192$$
$$5x_1 - 3x_2 + 3x_3 \leq 180$$
$$x_j \geq 0$$

9. $Z_{min} = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3$

$$2x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 1$$
$$3x_1 - 3x_2 + 10x_3 \leq 1$$
$$x_j \geq 0$$

10. $Z_{max} = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 16$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 13$$
$$x_j \geq 0$$

11. $Z_{min} = 5x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 11x_4$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 12$$
$$x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 8x_4 \leq 6$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 7$$
$$x_j \geq 0$$

12. $Z_{max} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$-2x_1 - 2x_3 + x_4 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 \leq 12$$
$$x_j \geq 0$$

13. $Z_{min} = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 20$$
$$-3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 40$$
$$5x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 18$$
$$x_j \geq 0$$

14. $Z_{min} = 12x_1 + 6x_2 + 7x_3$

$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 12$$
$$x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 8$$
$$2x_1 + 8x_2 - x_3 \leq 11$$
$$x_j \geq 0$$

15. $Z_{max} = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 \leq 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 \leq 7$$
$$x_j \geq 0$$

16. $Z_{min} = 9x_1 + 11x_2 + 11x_3$

$$x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 \leq 60$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 \leq 20$$
$$18x_1 + 16x_2 + 14x_3 \leq 28$$
$$x_j \geq 0$$

17. $Z_{min} = 15x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 12x_4$

$$-x_1 + 5x_2 + 13x_3 \leq 25$$
$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 2x_4 \leq 13$$
$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \leq 15$$
$$x_j \geq 0$$

18. $Z_{max} = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 12$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 24$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$
$$x_j \geq 0$$

19. $Z_{max} = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3$

$$-2x_1 + 6x_3 \leq 16$$
$$2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \leq 2$$
$$2x_1 - 6x_2 - 4x_3 \leq 12$$
$$x_j \geq 0$$

20. $Z_{min} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 \leq 14$$
$$-x_2 + 4x_3 \leq 10$$
$$x_j \geq 0$$

Тема 5. Теорія двоїстості та аналіз лінійних моделей оптимізаційних задач

Питання до розгляду:

5.1. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряженних задач лінійного програмування.

5.2. Двоїсті оцінки. Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач.

5.3. Основні теореми двоїстості задач та їх економічний зміст.

Тестові завдання:

1. Кожній задачі лінійного програмування відповідає …

1) двоїста задача;

2) первісна задача;

3) взаємозамінна задача;
4) взаємозалежна задача.

2. Якщо задача лінійного програмування має вигляд:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \rightarrow max$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n} \end{gathered}$$

То двоїста задача має вигляд:

1) $$Z = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \rightarrow max$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n} \end{gathered}$$

2) $$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \rightarrow min$$

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n, \\ y_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,m} \end{gathered}$$

3) $$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \rightarrow max$$

$$\begin{gathered} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n, \\ y_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,m} \end{gathered}$$

4) $$Z = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \rightarrow min$$

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1,n} \end{gathered}$$

3. Двоїста задача лінійного програмування утворюється за такими правилами:

1) кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі; якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то і цільова функція двоїстої задачі – на найбільшого значення (max), і навпаки; коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі; правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі; матриця, що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками;

2) кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі; кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі; якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки; коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі; правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі;

3) кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі і кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі; кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі; якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки; коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі; правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі;

4) кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі і кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі; кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі; якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки; коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі; правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі; матриця, що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

4. Двоїсті пари задач лінійного програмування бувають:

1) прямі та обернені;

2) симетричні та несиметричні;

3) статичні та динамічні;

4) основні та двоїсті.

5. У симетричних задачах …

1) обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень;

2) обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – лише як нерівності, у цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком;

3) обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – лише як нерівності, у цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають лише додатних значень;

4) обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати будь-якого значення.

6. У несиметричних задачах …

1) обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень;

2) обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – лише як нерівності, у цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають будь-якого значення, не обмеженого знаком;

3) обмеження прямої задачі можуть бути записані як рівняння, а двоїстої – лише як нерівності, у цьому разі відповідні змінні двоїстої задачі набувають лише додатних значень;

4) обмеження прямої та двоїстої задач є нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати будь-якого значення.

7. Основних теорем двоїстості …

1) дві;

2) три;

3) чотири;

4) п'ять.

8. Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний план, то інша задача також має розв'язок, причому значення цільових функцій для оптимальних планів дорівнюють одне одному, тобто $\max Z = \min F$, і навпаки. Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то друга задача взагалі не має розв'язання.

1) перша теорема двоїстості;

2) друга теорема двоїстості;

3) третя теорема двоїстості;

4) четверта теорема двоїстості.

9. Якщо в результаті підстановки оптимального плану прямої задачі в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідний i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю. Якщо i-й компонент оптимального плану двоїстої задачі додатний, то відповідне i-те обмеження прямої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

1) перша теорема двоїстості;

2) друга теорема двоїстості;

3) третя теорема двоїстості;
4) четверта теорема двоїстості.

10. Двоїста оцінка характеризує приріст цільової функції, який зумовлений малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Економічний зміст даної теореми двоїстості полягає в тому, що відповідна додатна оцінка показує зростання значення цільової функції прямої задачі, якщо запас відповідного дефіцитного ресурсу збільшується на одну одиницю.

1) перша теорема двоїстості;
2) друга теорема двоїстості;
3) третя теорема двоїстості;
4) четверта теорема двоїстості.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

Задачу лінійного програмування можна розглядати як модель розподілу обмежених ресурсів, в якій цільова функція відображає прибуток або дохід від виробничої діяльності і максимізується.

Пряма задача відображає n видів економічної (виробничої) діяльності і можливості отримання m ресурсів. В прямій задачі коефіцієнт c_j, $j = \overline{1,n}$ являє собою прибуток за одиницю продукції j -го виду виробничої діяльності, причому на одиницю продукції цього виду діяльності витрачається a_{ij} одиниць ресурсу i, $i = \overline{1,m}$, максимальні запаси якого обмежені величиною b_i.

Пряма задача	Двоїста задача
Цільова функція	
$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \to max$	$F = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \ \to min$
при обмеженнях	
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = \overline{1,m}$	$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \qquad j = \overline{1,n}$
$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}$	$y_i \ge 0, \qquad i = \overline{1,m}$

Для будь-якої пари допустимих розв’язків прямої та двоїстої задачі значення їх цільових функцій задовольняє нерівність:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \le \ \sum_{j=1}^{n} b_i y_i \ = F$$

Строга рівність досягається тільки тоді, коли розв’язки прямої та двоїстої задачі оптимальні.

Виходячи з представлення прямої задачі як моделі розподілу ресурсів, можна вважати, що величина Z відповідає величині доходу і оскільки b_i – загальна доступна кількість ресурсу i , рівність $Z = F$ (точку оптимуму) можна трактувати наступним чином:

Дохід = $\sum_i$ (кількість ресурсу i) * (дохід за одиницю ресурсу i).

Це означає, що змінна p_i двоїстої задачі повинна представляти вартість одиниці ресурсу. Двоїсті змінні часто називають двоїстими цінами (тіньовими цінами, симплексними мультиплікаторами).

Аналогічно для будь-якої пари допустимих розв'язків прямої та двоїстої задач нерівність $Z < F$ можна інтерпретувати так:

дохід < загальна вартість ресурсів.

Це співвідношення показує, що до тих пір, поки сумарний дохід від всіх видів діяльності строго менший сумарної вартості всіх використовуваних ресурсів, то розв'язок як прямої, так і двоїстої задачі не може бути оптимальним. Оптимум (максимальний дохід) може бути досягнутий тільки тоді, коли всі необхідні ресурси використані повністю.

ПРИКЛАД

Знайти оптимальний план виробництва продукції А, Б, В, Д, при якому можна отримати максимум прибутку. Визначити цінність кожного ресурсу. Який ресурс найцінніший? Вихідні дані представлені в таблиці 5.1.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані

Показники	**Одиниці виміру**	**Продукти**				**Кількість ресурсів**
		А	**Б**	**В**	**Д**	
Витрати першого виду сировини на одиницю продукції	ум. од.	1	1	2	2	64
Витрати другого виду сировини на одиницю продукції	ум. од.	3	1	2	2	56
Витрати третього виду сировини на одиницю продукції	ум. од.	3	2	1	2	86
Сума прибутку на одиницю продукту	тис. грн.	4	3	2	4	x

Таким чином, у результаті розв'язування задачі необхідно знайти такі розміри виробництва продукції А, Б, В, Д, які б забезпечили одержання максимального прибутку від реалізації продукції. Невідомими (змінними) величинами будуть кількість одиниць продукції А (x_1), Б (x_2), В (x_3), Д (x_4). Критерій оптимальності (загальна сума прибутку) визначається як сума добутків прибутку отриманого на

одиницю продукції на кількість даного виду продукції. Відповідно до вихідних даних цільова функція, що відображає максимум прибутку буде мати вигляд:

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \rightarrow max$$

Максимум цільової функції має бути досягнуто при дотриманні таких умов:

1. Витрати першого виду сировини не повинні перевищувати наявний обсяг (64 ум. од.):

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 64.$$

2. Витрати другого виду сировини не повинні перевищувати наявний обсяг (56 ум. од.):

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 56.$$

3. Витрати третього виду сировини не повинні перевищувати наявний обсяг (86 ум. од.):

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 86.$$

4. Вироблена продукція повинна бути реальними числами:

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,3,4.$$

Для рішення даної задачі використовується програма Microsoft Excel.

Необхідно:

1. Ввести дані задачі – матрицю витрат A, рядок коефіцієнтів c_j, стовпець наявних ресурсів b_i, а також визначити клітинки (можна позначити певним кольором) для невідомих x_j та цільової функції (рис. 5.1):

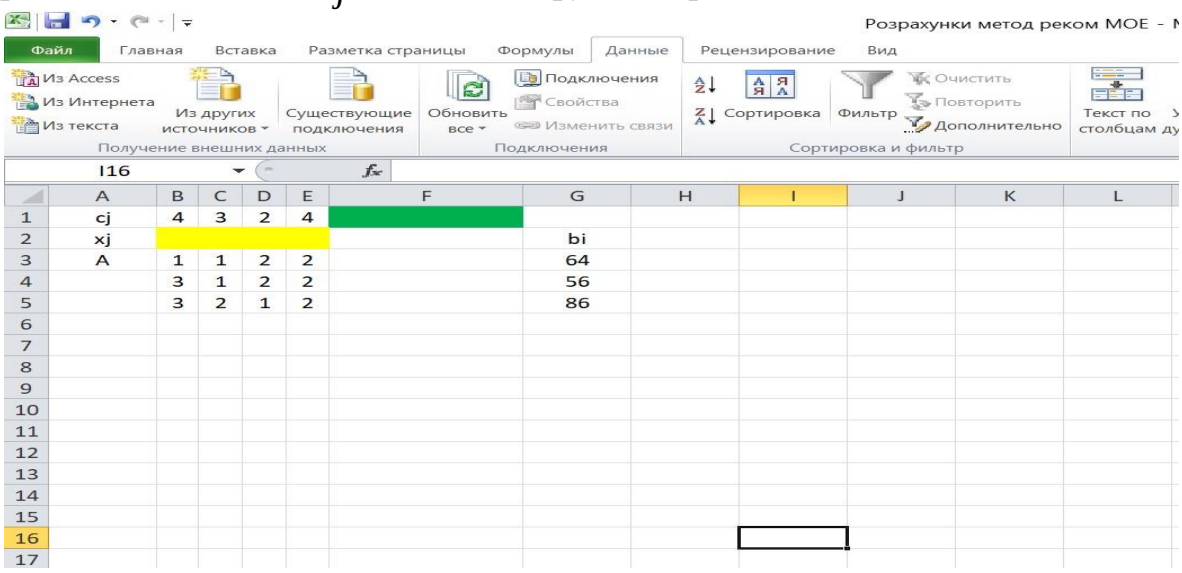


Рисунок 5.1 – Введення вихідних даних для рішення задачі

2. У стовпці F підготувати клітинки для введення формул, які виражають цільову функцію та ліві частини обмежень.

Формули можна вводити (або вручну, або за допомогою вставки відповідних функцій) (рис. 5.2). Наприклад, для даного прикладу цільову функцію можна ввести двома способами:

а) =B1*B2+C1*C2+D1*D2+E1*E2
б) =СУММПРОИЗВ(B$2:E$2;B1:E1)

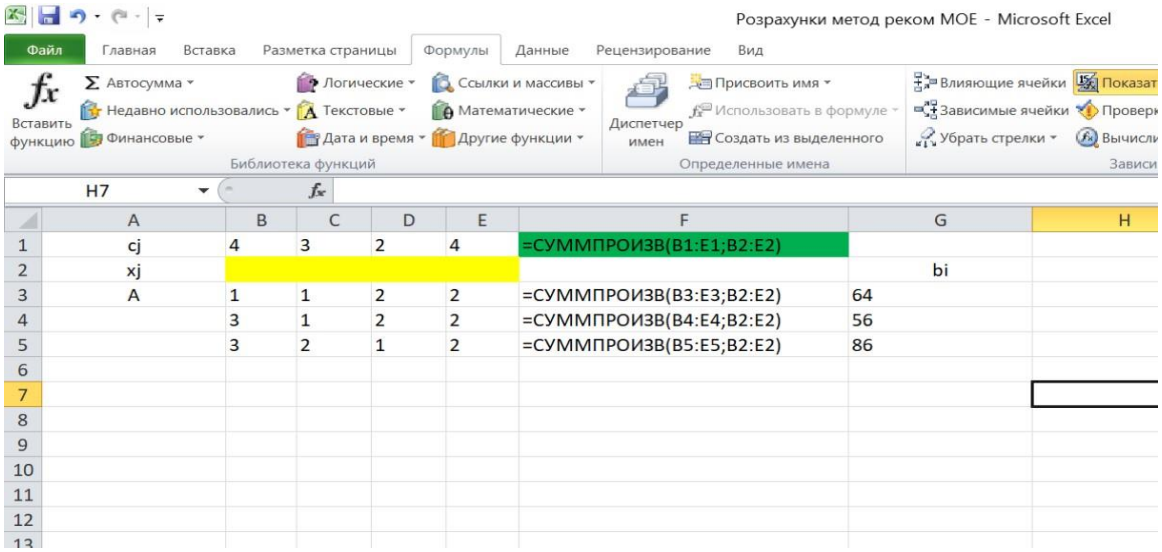


Рисунок 5.2 – Введення формул для рішення задачі

3. Підготувавши необхідні клітинки, для відшукання оптимального розв’язку задачі необхідно викликати надбудову Microsoft Excel – Пошук рішення (Дані → Пошук рішення).

4. В діалоговому вікні Параметри пошуку рішень ввести адресу клітинки, в якій міститься цільова функція, вибрати максимум, оскільки ми максимізуємо цільову функцію, а також добавити обмеження (рис. 5.3). Для даного прикладу обмеження матимуть вигляд:

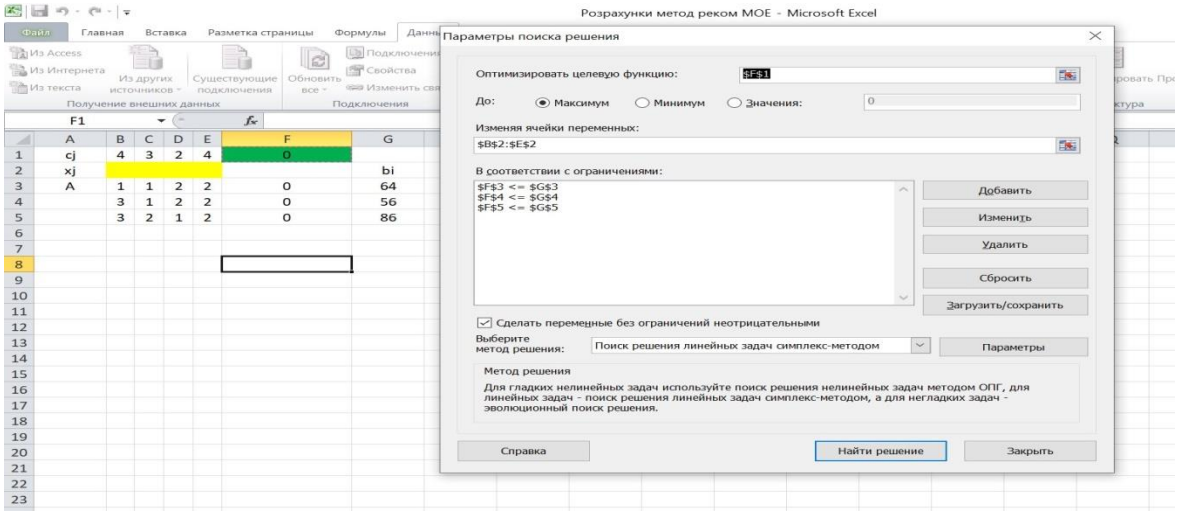


Рисунок 5.3 – Пошук рішення лінійних задач симплекс-методом

$F$3<=$G$3
$F$4<=$G$4
$F$5<=$G$5
або $F$3: $F$5<=$G$3: $G$5.

5. Обов’язково необхідно вказати невід’ємність невідомих змінних. Для цього встановити прапорець на пункті Зробити змінні без обмежень невід’ємними діалогового вікна Параметри пошуку рішень.

6. Перевірити, чи вибрано у вікні Параметри пошуку рішень метод розв’язання – Пошук рішення лінійних задач симплекс методом.

7. Після цього вибрати пункт – Знайти розв’язок. В результаті отримаємо шукані кольорові клітинки заповненими (рис. 5.4).

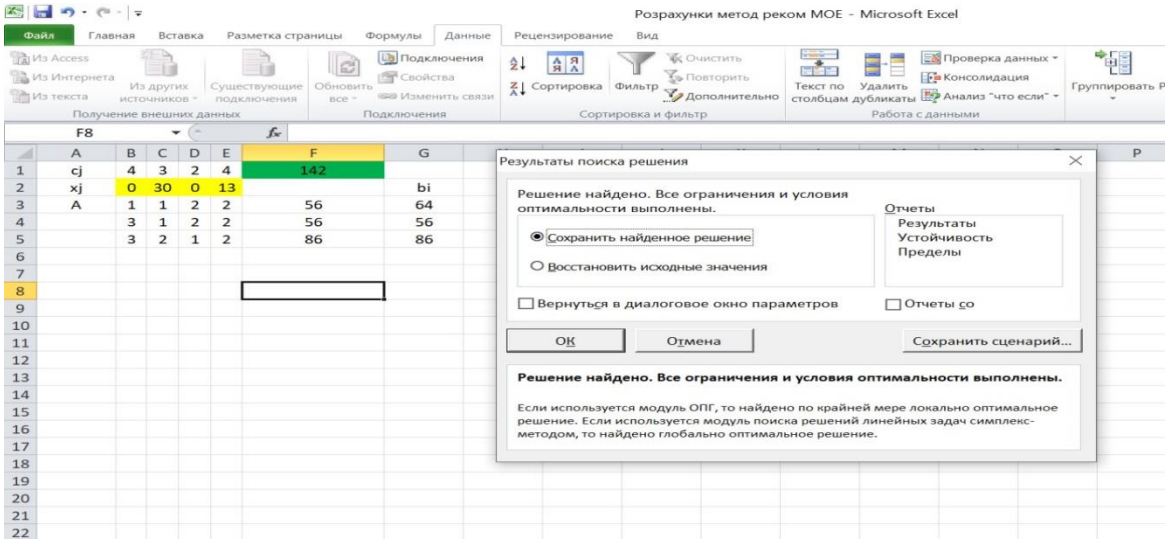


Рисунок 5.4 – Знайдене рішення задачі

Таким чином, щоб отримати максимальну суму прибутку, що становить 142 тис. грн., підприємству необхідно виробити 30 одиниць продукції Б та 13 одиниць продукції Д (при цьому продукції А і В не виробляються). Відповідно витрати першої сировини становитимуть 56 ум.од., а друга і третя сировина будуть використані у повному обсязі, що є в наявності на підприємстві.

8. Для того, визначити цінність ресурсу, потрібно розв’язати двоїсту задачу до заданої. Відповідно задача буде мати вигляд:

$$Z = 64y_1 + 56y_2 + 86y_3 \rightarrow min$$

$$y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 4$$
$$y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$$
$$2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 4$$
$$y_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3.$$

На листі 2 (рис. 5.5) введемо необхідні дані для побудови двоїстої задачі та її розв'язання: матрицю A^T, рядок b_i, стовпець c_j, а також визначити клітинки (можна позначити певним кольором) для невідомих y_i та цільової функції, яку потрібно тепер мінімізувати.

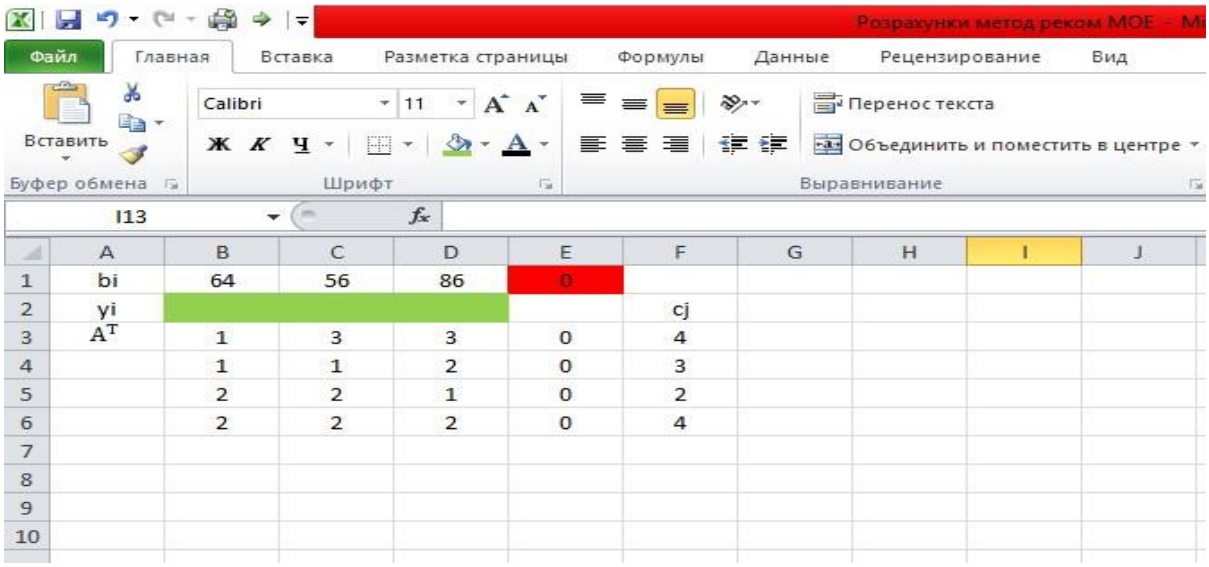


Рисунок 5.5 – Введення вихідних даних для рішення двоїстої задачі

9. У стовпці E підготовлені вже клітинки, які виражають цільову функцію та ліві частини обмежень (введені формули, як описано вище).

10. Після цього аналогічно до розв'язування прямої задачі потрібно викликати надбудову Microsoft Excel – Пошук рішення (Дані → Пошук рішення) та ввести необхідні дані.

11. У результаті отримаємо (рис 5.6):

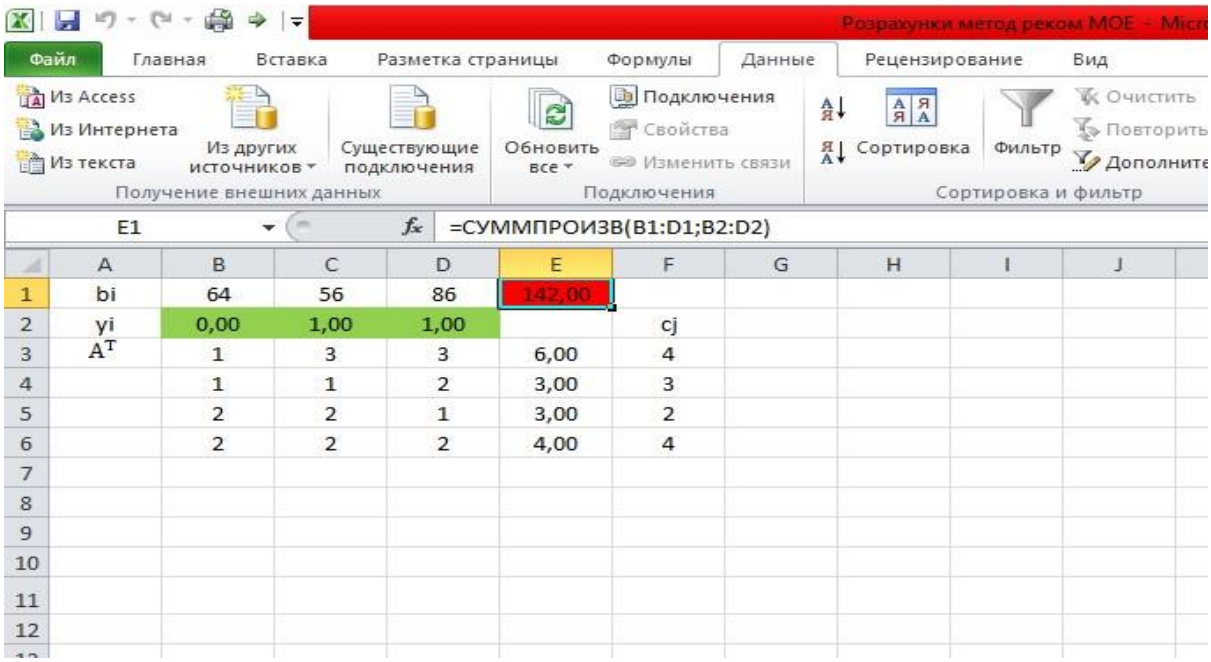


Рисунок 5.6 – Знайдене рішення двоїстої задачі

Якщо розв’язано обидві задачі правильно, значення цільових функцій прямої і двоїстої задач повинно співпадати.

Завдання:

Розв’язати пряму та двоїсту задачу лінійного програмування симплексним методом за допомогою Microsoft Excel.

1. $Z_{max} = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 140$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$
$$x_j \geq 0$$

2. $Z_{max} = 50x_1 + 58x_2 + 46x_3 + 62x_4$

$$4x_1 + 3{,}5x_2 + 4{,}6x_3 + 3{,}9x_4 \leq 600$$
$$2{,}1x_1 + 2{,}6x_2 + 3{,}5x_3 + 1{,}9x_4 \leq 500$$
$$15x_1 + 23x_2 + 18x_3 + 25x_4 \leq 3600$$
$$8x_1 + 12{,}6x_2 + 9{,}7x_3 + 10{,}5x_4 \leq 1700$$
$$x_j \geq 0$$

3. $Z_{max} = 6x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 9x_4$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 20$$
$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 240$$
$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 12x_4 \leq 170$$
$$x_j \geq 0$$

4. $Z_{min} = 9x_1 + 11x_2 + 11x_3$

$$x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 \leq 60$$
$$0{,}5x_1 + 0{,}8x_2 \leq 20$$
$$18x_1 + 16x_2 + 14x_3 \leq 28$$
$$x_j \geq 0$$

5. $Z_{min} = 15x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 12x_4$

$$-x_1 + 5x_2 + 13x_3 \leq 25$$
$$10x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 2x_4 \leq 13$$
$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \leq 15$$
$$x_j \geq 0$$

6. $Z_{max} = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 12$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 24$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$
$$x_j \geq 0$$

7. $Z_{max} = 2x_1 + 6x_2 + 4x_3$

$$-2x_1 + 6x_3 \leq 16$$
$$2x_1 + 8x_2 - 2x_3 \leq 2$$
$$2x_1 - 6x_2 - 4x_3 \leq 12$$
$$x_j \geq 0$$

Тема 6. Економічна і математична постановка транспортної задачі

Питання до розгляду:

6.1. Економічна постановка транспортної задачі.

6.2. Математична постановка транспортної задачі.

Тестові завдання:

1. Транспортна задача належить до типу … задач лінійного програмування.

1) економічних;
2) стандартних;
3) розподільчих;
4) потенціальних.

2. Перед побудовою опорного плану перевіряють, чи дана задача ...

1) відкрита чи закрита;
2) стандартна чи канонічна;
3) лінійна чи нелінійна;
4) потенціальна чи розподільча.

3. Для складання первісного вхідного плану використовують ...

1) метод «північно-західного кутка»;
2) метод потенціалів;
3) правило прямокутника;
4) графічний метод.

4. План є невиродженим, коли …

1) кількість заповнених клітинок буде на одиницю більше, ніж сумарна кількість постачальників і споживачів, тобто дорівнюватиме (m+n+1).

2) кількість заповнених клітинок буде дорівнювати сумарній кількості постачальників і споживачів, тобто дорівнюватиме (m+n).

3) кількість заповнених клітинок буде на дві одиниці менше, ніж сумарна кількість постачальників і споживачів, тобто дорівнюватиме (m+n-2).

4) кількість заповнених клітинок буде на одиницю менше, ніж сумарна кількість постачальників і споживачів, тобто дорівнюватиме (m+n-1).

5. У ході обчислень клітинка з нульовою поставкою вважається …

1) вільною;
2) зайнятою;
3) потенціальною;
4) направляючою.

6. Для перевірки отриманого плану перевезення на оптимальність і виявлення можливості його поліпшення у разі не оптимальності, використовують …

1) метод «північно-західного кутка»;
2) метод потенціалів;
3) правило прямокутника;
4) графічний метод.

7. Суть методу потенціалів полягає в тому, що …

1) $U_i + V_j = C_{ij}$;
2) $U_i - V_j = C_{ij}$;
3) $U_i * V_j = C_{ij}$;
4) $U_i / V_j = C_{ij}$.

8. Ланцюжок завжди має форму …

1) замкнутої ламаної лінії з прямими кутами в заповнених клітинках і кінець його збігається з початком у потенціальній клітинці;
2) простої ламаної лінії і кінець його не збігається з початком у потенціальній клітинці;
3) замкнутої ламаної лінії з прямими кутами в незаповнених клітинках і кінець його збігається з початком у потенціальній клітинці;
4) ламаної лінії з кутами в заповнених клітинках і кінець його не повинен збігатися з початком у потенціальній клітинці.

9. Переміщення від однієї заповненої клітинки до іншої здійснюється …

1) будь-яким способом;
2) або по вертикалі, або по діагоналі;
3) або по вертикалі, або по горизонталі;
4) або по горизонталі, або по діагоналі.

10. У вершинах ланцюжка повинен стояти знак …

1) «+» або «-»;
2) тільки «+»;
3) тільки «-»;
4) «+» або «-» або «*».

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД

Зерно з трьох районів слід перевезти (вантаж повинен бути однорідним) на три елеватори. Очікуваний збір зерна у районах становить:

I район – 170 тис. т;
II район – 150 тис. т;
III район – 260 тис. т.

Відстані від районів до елеваторів наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 – Відстані від районів до елеваторів, км

Райони	Елеватори		
	I	II	III
I	2	3	2
II	5	4	7
III	7	3	9

Необхідно знайти такий план перевезень, щоб транспортні витрати були мінімальними.

Розв'язок

Запишемо задачу в математичному вигляді. Для цього введемо змінні $x_{ij} \geq 0$, які означають обсяг перевезеного вантажу від i-того постачальника до j-того споживача.

Умови задачі:

1. Із використання вантажів, тис. т:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 170$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 260$$

2. Із задоволення попиту, тис. т:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 250$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 180$$

Цільова функція матиме вигляд, грн.:

$$Z_{min} = 2x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23} + 7x_{31} + 3x_{32} + 9x_{33}$$

Перед побудовою опорного плану перевіряють, чи дана задача відкрита чи закрита. ***Закритою*** називається така транспортна задача, в якій обсяг вантажів у постачальників дорівнює обсягу вантажів, необхідних споживачам.

У даній задачі обсяг вантажів у постачальників дорівнює:

170+150+260 = 580 тис. т,

а обсяг вантажів у споживачів:

120+250+180 = 550 тис. т.

Відповідно обсяг вантажів у постачальників виявився на 30 тис. т більший сумарного обсягу споживачів. Тому ця транспортна задача відкрита. Для того, щоб зробити задачу закритою, необхідно ввести умовного постачальника, якщо обсяг вантажів по споживачах більший , або умовного споживача, якщо обсяг вантажів по

постачальниках більший. У даному разі необхідно вести до умови задачі умовного споживача з обсягом вантажів 30 тис. т. При цьому витрати на перевезення (відстань, ціна) мають дорівнювати нулю.

Як і в симплексному методі спочатку приймають вхідний варіант перевезення, а потім послідовно здійснюють його поліпшення до одержання оптимального плану. Для складання первісного вхідного плану використовують метод «північно-західного кутка». Він полягає в тому, що спочатку максимально допустиму кількість вантажу розміщують у верхній лівій клітинці таблиці, далі заповнюють сусідню клітинку в рядку або стовпчику від того, де є ще невикористані можливості перевезень. Таким чином заповнюють клітинки до повного розподілу всього обсягу вантажів, пересуваючись при цьому вправо і вниз.

Так, розподіл вантажів у першій таблиці матиме такий вигляд:

Таблиця 6.2 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2 120	3 50	2	0	170	0
II	5	4 150	7	0	150	1
III	7	3 50	9 180	0 30	260	0
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	2	3	9	0	x	$Z_{min} = 2760$

Після перерозподілу вантажу слід перевірити план на виродженість. Щоб продовжити розв’язування задачі, необхідно щоб план був невиродженим. План є ***невиродженим***, коли кількість заповнених клітинок буде на одиницю менше, ніж сумарна кількість постачальників і споживачів, тобто дорівнюватиме (m+n-1). Для приведення плану до невиродженого вигляду необхідно ввести одну, дві і т.д., тобто стільки фіктивних поставок (обсяг яких дорівнює нулю), скільки потрібно для того, щоб виконувалася вищезазначена умова. Слід враховувати, що після заповнення однієї клітинки повинна заповнюватись одна із клітинок, що прилягає до неї, або в тому ж рядку, або в тому ж стовпчику. Якщо ж ні до тієї, ні до іншої клітинки нічого поставити (тобто можливості рядка і стовпчика вже вичерпані), то в будь-якій з них проставляється нуль і від нього продовжується процес послідовного розподілу. Це гарантує одержання у вихідному плані (m+n-1) зайнятих клітинок. У ході обчислень клітинка з нульовою поставкою вважається ***зайнятою***.

У першій таблиці кількість заповнених клітинок дорівнює 6, тобто задовільняє вимогу (m+n-1) = (3+4-1) і в цьому разі план буде невироджений. Розрахуємо чому дорівнюють загальні витрати на перевезення, тобто значення цільової функції:

$$Z_{min} = 120 * 2 + 50 * 3 + 150 * 4 + 50 * 3 + 180 * 9 + 30 * 0 = 2760.$$

Для перевірки отриманого плану перевезення на оптимальність і виявлення можливості його поліпшення у разі не оптимальності, використовують метод потенціалів. Суть цього методу полягає в тому, що для перевірки оптимальності плану використовується система чисел, визначення яких здійснюється за правилом, що сума потенціалів відповідного рядка і стовпчика для завантаження клітинки рівна ціні перевезення, яка стоїть в цій клітинці, тобто:

$$U_i + V_j = C_{ij},$$

де C_{ij} – оцінка завантаженої клітинки (відстань від i-того постачальника до j-того споживача);

U_i – потенціал i-того рядка;

V_j – потенціал j-того стовпчика.

Для розрахунку потенціалів, одному з них надається довільне значення, наприклад $U_1 = 0$. Виходячи з цього методом підстановки у формулу значень можна визначити й інші значення U_i і V_j.

У даному випадку маємо таку систему розрахунків:

$V_1 = C_{11} - U_1 = 2 - 0 = 2;$
$V_2 = C_{12} - U_1 = 3 - 0 = 3;$
$U_2 = C_{22} - V_2 = 4 - 3 = 1;$
$U_3 = C_{23} - V_2 = 3 - 3 = 0;$
$V_3 = C_{33} - U_3 = 9 - 0 = 9;$
$V_4 = C_{34} - U_3 = 0 - 0 = 0.$

Після цього для кожної незавантаженої клітинки знаходять величини (характеристики) за формулою:

$$d_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

Якщо для вільних клітинок виконується умова $d_{ij} \geq 0$, одержаний план буде ***оптимальним***. Наявність від'ємних різниць (характеристик) свідчить про те, що план не оптимальний і його треба поліпшити.

Для перерозподілу вантажів з метою поліпшення плану знаходять потенціальну клітинку, яка має найбільшу за абсолютним значенням характеристику серед від'ємних. Розрахуємо характеристики для вільних клітинок:

$d_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 2 - (0 + 9) = -7;$
$d_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 0 - (0 + 0) = 0;$
$d_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 5 - (1 + 2) = 2;$
$d_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 7 - (1 + 9) = -3;$
$d_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 0 - (1 + 0) = -1;$
$d_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 7 - (0 + 2) = 5.$

Характеристика d_{13} має найбільше за абсолютною величиною серед від'ємних величин значень. Таким чином, клітинка 1.3 буде ***потенціальною***, тобто вихідною для побудови замкнутого ланцюжка.

У разі, коли буде декілька однакових від'ємних характеристик найбільших за абсолютною величиною, вибирають ту клітинку, в якій менша ціна C_{ij}, якщо й таких клітинок декілька, тоді вибирають ту, в яку можна записати більший обсяг поставки. Для здійснення перерозподілу вантажів побудуємо маршрут (ланцюжок).

При цьому слід пам'ятати:

1. Ланцюжок завжди має форму замкнутої ламаної лінії з прямими кутами в заповнених клітинках. Кінець його збігається з початком у потенціальній клітинці.
2. Переміщення від однієї заповненої клітинки до іншої здійснюється або по вертикалі, або по горизонталі.
3. У вершинах ланцюжка, які завжди перебувають в заповнених клітинках, повинен стояти знак «+» або «-». Початком проставлення знаків є потенціальна клітинка. В ній ставиться «+» і потім почергово «-», «+». Проставляють знаки по всіх вершинах багатокутника (на поворотах ланцюжка).
4. Для кожної вільної клітинки можна побудувати ланцюжок перерозподілу вантажів тільки однієї конфігурації.
5. Після побудови ланцюжка перерозподілу серед обсягів вантажів, що стоять у вершинах зі знаком «-», вибирають мінімальний вантаж. Цю величину додають до обсягів вантажів у вершинах зі знаком «+» і віднімають від обсягів вантажів у вершинах, де стоїть знак «-».

Перерозподіливши таким чином вантажі, переходять до нового плану. При цьому слід пам'ятати, що обсяги вантажів, що не перерозподіляються у ланцюжку, розподіляємо за методом «північно-західного кутка». Після перерозподілу перевіряють баланс вантажів, план на виродженість, розраховують значення цільової функції, перевіряють план на оптимальність. Так роблять до тих пір, поки план не буде оптимальним, тобто поки всі характеристики будуть додатними або рівними нулю.

Повертаємось до першої таблиці і будуємо ланцюжок перерозподілу вантажів.

Таблиця 6.2.1 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2 120	- 3 50	+ 2	0	170	0
II	5	4 150	7	0	150	1
III	7	+ 3 50	- 9 180	0 30	260	0
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	2	3	9	0	x	$Z_{min} = 2760$

Перерозподіляємо вантаж, перевіряємо план на вродженість, визначаємо потенціали та цільову функцію.

Таблиця 6.3 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2 120	3	2 50	0	170	0
II	5	4 150	7	0	150	8
III	7	3 100	9 130	0 30	260	7
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	2	-4	2	-7	x	$Z_{min} = 2410$

Перевіряємо план на виродженість. Кількість заповнених клітинок дорівнює 6, тобто задовільняє вимогу (m+n-1) = (3+4-1) і в цьому разі план буде невироджений.

$$Z_{min} = 120 * 2 + 150 * 4 + 100 * 3 + 50 * 2 + 130 * 9 + 30 * 0 = 2410.$$

Розрахуємо характеристики для вільних клітинок:

$$d_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 - 4) = 7;$$
$$d_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 0 - (0 - 7) = 7;$$
$$d_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 5 - (8 + 2) = -5;$$
$$d_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 7 - (8 + 2) = -3;$$
$$d_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 0 - (8 - 7) = -1;$$
$$d_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 7 - (7 + 2) = -2.$$

Так як є від’ємні значення характеристик вільних клітинок, відповідно план не є оптимальним і потребує подальшого поліпшення. Характеристика d_{21} має найбільше за абсолютною величиною серед від’ємних величин значень. Таким чином, клітинка 2.1 буде ***потенціальною***, тобто вихідною для побудови замкнутого ланцюжка.

Таблиця 6.3.1 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	- 2 120	3	+ 2 50	0	170	0
II	+ 5	- 4 150	7	0	150	8
III	7	+ 3 100	- 9 130	0 30	260	7
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	2	-4	2	-7	x	$Z_{min} = 2410$

Перерозподіляємо вантаж, перевіряємо план на вродженість, визначаємо потенціали та цільову функцію.

Таблиця 6.4 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2	3	2 170	0	170	0
II	5 120	4 30	7	0	150	8
III	7	3 220	9 10	0 30	260	7
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	-3	-4	2	-7	x	$Z_{min} = 1810$

Перевіряємо план на виродженість. Кількість заповнених клітинок дорівнює 6, тобто задовільняє вимогу (m+n-1) = (3+4-1) і в цьому разі план буде невироджений.

$$Z_{min} = 170 * 2 + 120 * 5 + 30 * 4 + 220 * 3 + 10 * 9 + 30 * 0 = 1810.$$

Розрахуємо характеристики для вільних клітинок:

$$d_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 2 - (0 - 3) = 5;$$
$$d_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 - 4) = 7;$$
$$d_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 0 - (0 - 7) = 7;$$
$$d_{23} = C_{23} - (U_2 + V_3) = 7 - (8 + 2) = -3;$$
$$d_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 0 - (8 - 7) = -1;$$
$$d_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 7 - (7 - 3) = 3.$$

Так як є від'ємні значення характеристик вільних клітинок, відповідно план не є оптимальним і потребує подальшого поліпшення. Характеристика d_{23} має найбільше за абсолютною величиною серед від'ємних величин значень. Таким чином, клітинка 2.3 буде ***потенціальною***, тобто вихідною для побудови замкнутого ланцюжка.

Таблиця 6.4.1 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2	3	2 170	0	170	0
II	5 120	- 4 30	+ 7	0	150	8
III	7	+ 3 220	- 9 10	0 30	260	7
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	-3	-4	2	-7	x	$Z_{min} = 1810$

Перерозподіляємо вантаж, перевіряємо план на вродженість, визначаємо потенціали та цільову функцію.

Таблиця 6.5 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2	3	2 170	0	170	0
II	5 120	4 20	7 10	0	150	5
III	7	3 230	9	0 30	260	4
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	0	-1	2	-4	x	$Z_{min} = 1780$

Перевіряємо план на виродженість. Кількість заповнених клітинок дорівнює 6, тобто задовільняє вимогу (m+n-1) = (3+4-1) і в цьому разі план буде невироджений.

$$Z_{min} = 170 * 2 + 120 * 5 + 20 * 4 + 10 * 7 + 230 * 3 + 30 * 0 = 1780.$$

Розрахуємо характеристики для вільних клітинок:

$$d_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 2 - (0 + 0) = 2;$$
$$d_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 - 1) = 4;$$
$$d_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 0 - (0 - 4) = 4;$$
$$d_{24} = C_{24} - (U_2 + V_4) = 0 - (5 - 4) = -1;$$
$$d_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 7 - (4 + 0) = 3;$$
$$d_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 9 - (4 + 2) = 3.$$

Так як є від'ємні значення характеристик вільних клітинок, відповідно план не є оптимальним і потребує подальшого поліпшення. Характеристика d_{24} є єдиною від'ємною величиною. Таким чином, клітинка 2.4 буде ***потенціальною***, тобто вихідною для побудови замкнутого ланцюжка.

Таблиця 6.5.1 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2	3	2 170	0	170	0
II	5 120	- 4 20	7 10	+ 0	150	5
III	7	+ 3 230	9	- 0 30	260	4
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	0	-1	2	-4	x	$Z_{min} = 1780$

Перерозподіляємо вантаж, перевіряємо план на вродженість, визначаємо потенціали та цільову функцію.

Таблиця 6.6 – Транспортна задача

Райони	Елеватори				Наявність вантажів у постачальників	U_i
	I	II	III	IV		
I	2	3	2 170	0	170	0
II	5 120	4	7 10	0 20	150	5
III	7	3 250	9	0 10	260	5
Потреби споживачів	120	250	180	30	580	x
V_j	0	-2	2	-5	x	$Z_{min} = 1760$

Перевіряємо план на виродженість. Кількість заповнених клітинок дорівнює 6, тобто задовільняє вимогу (m+n-1) = (3+4-1) і в цьому разі план буде невироджений.

$$Z_{min} = 170 * 2 + 120 * 5 + 10 * 7 + 20 * 0 + 250 * 3 + 10 * 0 = 1760.$$

Розрахуємо характеристики для вільних клітинок:

$$d_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 2 - (0 + 0) = 2;$$
$$d_{12} = C_{12} - (U_1 + V_2) = 3 - (0 - 2) = 5;$$
$$d_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 0 - (0 - 5) = 5;$$
$$d_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 4 - (5 - 2) = 1;$$
$$d_{31} = C_{31} - (U_3 + V_1) = 7 - (5 + 0) = 2;$$
$$d_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 9 - (5 + 2) = 2.$$

Оскільки усі розраховані характеристики додатні й одна дорівнює нулю, то одержаний план ***оптимальний***. Цей план забезпечує досягнення найменших (мінімальних) транспортних витрат, які дорівнюють 1760 тис. т км. Забезпечення досягнення таких витрат здійсниться, коли з першого району буде вивезено зерна до третього елеватора 120 тис. т, з другого району буде вивезено до першого елеватора 120 тис. т і до третього – 10 тис. т, з третього району буде вивезено до другого елеватора 250 тис. т.

Примітки:

1. У разі, коли значення цільової функції збільшилось або лишилося на рівні значення попередньої таблиці, має місце за циклювання. При цьому необхідно перерозподілити вантажі таким чином, щоб це значення зменшилося, за умови, що не можна чіпати обсяги вантажів, які перейшли до даної таблиці з вершин ланцюжка попередньої.

2. У разі, коли кількість заповнених клітинок буде більшою ніж за умови (m+n-1), то необхідно перерозподілити вантажі згідно з методикою примітки 1 і при цьому перебачити зменшення кількості заповнених клітинок.

3. У разі, коли серед характеристик є такі, значення яких дорівнюють нулю, то це свідчить про наявність альтернативного плану. Для його знаходження необхідно перерозподілити вантажі, побудувавши ланцюжок з клітинки, в якій характеристика дорівнює нулю.

Завдання:

Розв'язати транспортну задачу.

1. $Z_{min} = 6x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + 6x_{24} + 8x_{31} + 10x_{32} + 20x_{33} + x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 75$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 80$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 95$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

2. $Z_{min} = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 11x_{14} + x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 5x_{31} + 8x_{32} + 12x_{33} + 7x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 130$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 100$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 130$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

3. $Z_{min} = 23x_{11} + 27x_{12} + 16x_{13} + 18x_{14} + 12x_{21} + 17x_{22} + 20x_{23} + 51x_{24} + 12x_{31} + 17x_{32} + 20x_{33} + 51x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 30$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 53$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 22$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 35$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 51$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

4. $Z_{min} = 5x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} + 8x_{31} + 5x_{32} + x_{33} + 6x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

5. $Z_{min} = 3x_{11} + 11x_{12} + 6x_{13} + 7x_{14} + 5x_{21} + 6x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 4x_{32} + 9x_{33} + x_{34} + 2x_{41} + 3x_{42} + 4x_{43} + 8x_{44}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 117$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 63$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 122$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 88$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 134$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 69$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 22$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 37$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$$

6. $Z_{min} = 4x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 3x_{15} + 2x_{21} + x_{22} + 8x_{23} + 3x_{24} + 5x_{25} + 4x_{31} + 8x_{32} + 7x_{33} + x_{34} + 2x_{35} + 6x_{41} + 2x_{42} + 5x_{43} + 7x_{44} + 4x_{45}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 100$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 150$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 50$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 150$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 100$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 100$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 60$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 90$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4,5)$$

7. $Z_{min} = 15x_{11} + 7x_{12} + 11x_{13} + 4x_{14} + 6x_{21} + 4x_{22} + 12x_{23} + 8x_{24} + 7x_{31} + 11x_{32} + 5x_{33} + 10x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1200$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 500$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 550$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 590$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 960$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

8. $Z_{min} = 4x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 5x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 8x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} + 2x_{34} + 14x_{41} + 10x_{42} + 10x_{43} + 21x_{44}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 127$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 315$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 45$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 133$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 120$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 24$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 96$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 115$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$$

9. $Z_{min} = 3x_{11} + 8x_{12} + 10x_{13} + 5x_{14} + x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 2x_{24} + 3x_{31} + x_{32} + 9x_{33} + 7x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 150$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 120$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 90$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

10. $Z_{min} = 24x_{11} + 19x_{12} + 21x_{13} + 15x_{14} + 14x_{21} + 21x_{22} + 15x_{23} + 16x_{24} + 10x_{31} + 9x_{32} + 6x_{33} + 11x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 51$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 20$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 30$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 7$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 14$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 62$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

11. $Z_{min} = 8x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 4x_{14} + 5x_{21} + 2x_{22} + 7x_{23} + 3x_{24} + 10x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 200$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 97$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 69$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 32$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 15$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

12. $Z_{min} = 4x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 5x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + x_{31} + 2x_{32} + 7x_{33} + 5x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 70$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 210$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

13. $Z_{min} = 21x_{11} + 14x_{12} + 27x_{13} + 15x_{14} + 7x_{21} + 20x_{22} + 13x_{23} + 11x_{24} + 10x_{31} + 11x_{32} + 14x_{33} + 12x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 125$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 145$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 25$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 115$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 75$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 45$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

14. $Z_{min} = 5x_{11} + 2x_{12} + x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 6x_{24} + 6x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 110$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 90$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 25$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 135$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 100$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

15. $Z_{min} = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} + 8x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 7x_{33} + 4x_{41} + 2x_{42} + 6x_{43}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 75$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 65$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 140$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 120$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 180$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 50$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3)$$

16. $Z_{min} = 7x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 4x_{23} + 6x_{31} + x_{32} + 2x_{33}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 115$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 112$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 122$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 100$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3)$$

17. $Z_{min} = x_{11} + 5x_{12} + 6x_{13} + 4x_{14} + 12x_{21} + 10x_{22} + x_{23} + 7x_{24} + 8x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 4x_{34}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 190$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 117$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 122$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 11$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 120$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3,4)$$

18. $Z_{min} = 4x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 6x_{21} + 7x_{22} + x_{23} + 4x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} + x_{41} + 2x_{42} + 3x_{43}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 27$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 42$$
$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 36$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 55$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 45$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 17$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3)$$

19. $Z_{min} = 12x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + x_{14} + 2x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + x_{24} + 15x_{31} + 12x_{32} + 9x_{33} + 16x_{34} + x_{41} + x_{42} + 5x_{43} + 6x_{44}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 120$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 170$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 250$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 165$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 100$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 250$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 150$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 263$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4; j = 1,2,3,4)$$

20. $Z_{min} = 10x_{11} + 20x_{12} + 18x_{13} + 2x_{21} + 12x_{22} + 10x_{23} + 8x_{31} + 7x_{32} + 12x_{33}$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 75$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 65$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 40$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 75$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 45$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3; j = 1,2,3)$$

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

Тема 7. Концептуальні аспекти математичного моделювання в економіці

Питання до розгляду:

7.1. Особливості економіко-математичного моделювання.
7.2. Особливості економічних спостережень і вимірів.
7.3. Етапи економіко-математичного моделювання.
7.4. Роль прикладних економіко-математичних досліджень.
7.5. Особливості економіко-математичних моделей оптимізації.

Тестові завдання:

1. Під економіко-математичною моделлю розуміють …

1) концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв’язків досліджуваних об’єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь;

2) об’єкт, котрий створюється системним аналітиком для отримання нових знань про об’єкт-оригінал і відбиває лише суттєві (з погляду системного аналітика) властивості об’єкта-оригіналу;

3) механізм функціонування певної соціально-економічної системи;

4) сукупність математичних співвідношень, рівнянь, нерівностей, що описують основні закономірності, властиві досліджуваному процесу, об'єкту або системи.

2. У загальних рисах можна виокремити … основні етапи процесу математичного моделювання економічних систем.

1) три;
2) чотири;
3) п’ять;
4) шість.

3. Головне на цьому етапі – чітко сформулювати сутність проблеми (цілі дослідження), припущення, що приймаються, і ті питання, на які необхідно одержати відповіді. З урахуванням цілей дослідження проводиться якісний аналіз об’єкта; виокремлюються, абстрагуючись від другорядних, найважливіші риси і властивості об’єкта, що моделюється. З позиції системного підходу вивчаються структура об’єкта й головні взаємозв’язки між його елементами (підсистемами). Обираються та обґрунтовуються основні показники й система гіпотез, що пояснюють поведінку та розвиток об’єкта і на основі яких буде відбуватись подальша формалізація.

1) розроблення математичних моделей;

2) реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм та проведення розрахунків;;

3) постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі;

4) перевірка адекватності моделі.

4. На цьому етапі – початковий варіант моделі попередньо перевіряється за такими основними аспектами: чи всі суттєві параметри включені в модель; чи містить модель несуттєві параметри; чи правильно відображені функціональні зв'язки між параметрами; чи правильно визначені обмеження на значення параметрів тощо.

1) розроблення математичних моделей;

2) реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм та проведення розрахунків;

3) постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі;

4) перевірка адекватності моделі.

5. Цей етап включає розробку алгоритмів для числового розв'язування задачі, складання програм на ЕОМ і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу зумовлені передусім великою розмірністю економічних задач, необхідністю опрацювання значних масивів інформації. Завдяки високій швидкодії сучасних ЕОМ вдається проводити числові «модельні» експерименти, вивчаючи «поведінку» моделі за різних значень деяких умов.

1) розроблення математичних моделей;

2) реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм та проведення розрахунків;

3) постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі;

4) перевірка адекватності моделі.

6. Це етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо). На цьому етапі проводиться теоретичне (аналітичне) дослідження моделі, обираються методи дослідження й розв'язку.

1) розроблення математичних моделей;

2) реалізація моделі у вигляді пакету прикладних програм та проведення розрахунків;

3) постановка економічної проблеми та розроблення концептуальної моделі;

4) перевірка адекватності моделі.

7. Задача оптимізації полягає у знаходженні …

1) максимального значення цільової функції на допустимій множині D.

2) мінімального значення цільової функції на допустимій множині D.

3) конкретного значення цільової функції на допустимій множині D.

4) оптимального значення цільової функції на допустимій множині D.

8. Якщо кількість змінних $\boldsymbol{x}$ (наприклад, видів продукції) більше кількості незалежних обмежень і задача має одне рішення, то в оптимальному плані кількість $\boldsymbol{x}$ (видів продукції) буде …

1) не менше кількості обмежень, решта змінних $\boldsymbol{x}$ буде дорівнювати 0;

2) менше кількості обмежень;

3) більше кількості обмежень;

4) дорівнювати кількості обмежень, решта змінних $\boldsymbol{x}$ буде дорівнювати 1.

9. Обмеження у вигляді нерівностей при формуванні економіко-математичної моделі називаються …

1) спеціальними обмеженнями;
2) загальними обмеженнями;
3) закритими обмеженнями;
4) відкритими обмеженнями.

10. Невід'ємність змінних у вигляді нерівностей при формуванні економіко-математичної моделі називаються …

1) спеціальними обмеженнями;
2) загальними обмеженнями;
3) закритими обмеженнями;
4) відкритими обмеженнями.

Тема 8. Нелінійні оптимізаційні моделі в економічних системах

Питання до розгляду:

8.1. Особливості та види нелінійного програмування.
8.2. Нелінійне програмування: множники Лагранжа.

Тестові завдання:

1. Коли цільова функція виражена добутком двох невідомих величин (наприклад ціни та кількості реалізованої продукції) маємо задачу …

1) статистичного програмування;
2) математичного програмування;
3) нелінійного програмування;
4) лінійного програмування.

2. Будь-яка задача стає …, якщо в математичній моделі необхідно враховувати умови невизначеності і ризик.

1) статичною;
2) соціально-економічною;
3) нелінійною;
4) лінійною.

3. Задача математичного програмування, змінні якої мають набувати цілих значень, називається задачею …

1) частково цілочисельного програмування;
2) нелінійного програмування;
3) лінійного програмування;
4) цілочисельного програмування.

4. Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) прямі та непрямі методи;
2) графічні та геометричні методи;

3) точні та наближені методи;
4) статичні та динамічні методи.

5. Основою цих методів … є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисельності змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисельність змінних, багатогранник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

1) методи відтинання;
2) комбінаторні методи;
3) статичні методи;
4) наближені методи.

6. Ці методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв’язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв’язків.

1) методи відтинання;
2) комбінаторні методи;
3) статичні методи;
4) наближені методи.

7. Даний метод має особливе значення для теоретичних досліджень властивостей нелінійних задач математичного програмування і тісно пов'язаний з теорією подвійності:

1) метод потенціалів;
2) метод множників Лагранжа;
3) метод Гауса;
4) метод Жордана-Гауса.

8. Метод класичного аналізу знаходження потрібного екстремуму функції багатьох змінних, коли жодних обмежень на ці змінні не накладено вимагає такої умови, що для

1) відшукання екстремальних точок функції вона повинна бути неперервною та диференційованою і мати неперервні похідні хоча б до другого порядку включно;
2) відшукання екстремальних точок функції вона повинна бути неперервною і мати похідні хоча б до другого порядку включно;
3) відшукання екстремальних точок функції вона повинна бути перервною і мати похідні хоча б до п’ятого порядку включно;
4) відшукання екстремальних точок функції вона повинна бути статичною і мати неперервні похідні хоча б до другого порядку включно.

9. Метод множників Лагранжа можна застосовувати для знаходження умовного (відносного, локального) екстремуму, тобто:

1) максимуму заданої функції, $Z= f(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n)$, на множині точок, які є розв'язками заданої системи *m* деяких, зокрема, нелінійних рівнянь такого виду $g_i(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, в яких функції можуть містити вільні коефіцієнти, перенесені з правих частин;

2) мінімуму заданої функції, $Z= f(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n)$, на множині точок, які є розв'язками заданої системи *m* деяких, зокрема, нелінійних рівнянь такого виду $g_i(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, в яких функції можуть містити вільні коефіцієнти, перенесені з правих частин;

3) фіксованого значення заданої функції, $Z= f(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n)$, на множині точок, які є розв'язками заданої системи *m* деяких, зокрема, нелінійних рівнянь такого виду $g_i(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, в яких функції можуть містити вільні коефіцієнти, перенесені з правих частин;

4) екстремуму заданої функції, $Z= f(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n)$, на множині точок, які є розв'язками заданої системи *m* деяких, зокрема, нелінійних рівнянь такого виду $g_i(X_1 ,X_2 ,X_3, ... X_n) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, в яких функції можуть містити вільні коефіцієнти, перенесені з правих частин.

10. Ідея методу множників Лагранжа також полягає в заміні …

1) задачі $Z= f(X1 ,X2 ,X3, ... Xn), gi (X1 ,X2 ,X3, ... Xn) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, простішою задачею знаходження відповідного екстремального значення хоч і складнішої функції, проте без обмежень;

2) задачі $Z= f(X1 ,X2 ,X3, ... Xn), gi (X1 ,X2 ,X3, ... Xn) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, задачею знаходження відповідного максимального значення без обмежень;

3) задачі $Z= f(X1 ,X2 ,X3, ... Xn), gi (X1 ,X2 ,X3, ... Xn) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, задачею знаходження відповідного мінімального значення без обмежень;

4) задачі $Z= f(X1 ,X2 ,X3, ... Xn), gi (X1 ,X2 ,X3, ... Xn) = 0, (i=1,2,3, ...m)$, простішою задачею знаходження відповідного екстремального значення.

ПРИКЛАД

Сільськогосподарське підприємство випускає два види продукції. Прибуток від реалізації кожного виду продукції поданий такими залежностями: $2X_1^2$ та X_2^2. Витрати праці на 1-й вид продукції становить – $2X_1$ год., а на 2-й вид продукції – $3X_2$ год. Всього на підприємстві 5 тис. год. можливого використання праці для виробництва 1-го та 2-го виду продукції.

Визначити яка структура виробництва продукції дасть даному підприємству максимум прибутку.

Нехай X_1 – кількість виробленої продукції 1-го виду, шт.;
X_2 – кількість виробленої продукції 2-го виду, шт..

Запишемо економіко-математичну модель задачі.

Критерій оптимальності – максимізація прибутку агрофірми.

$$Z = 2X_1^2 + X_2^2 \rightarrow max$$

при умові

$$2X_1 + 3X_2 = 5000$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = (X_1, X_2, \lambda\ \ ) = 2X_1^2 + X_2^2 + \lambda\ \ (5000 - 2X_1 - 3X_2) = 0\,.$$

Прирівняємо частинні похідні даної функції до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial X_1} = 4X_1 - 2\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial X_2} = 2X_2 - 3\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 5000 - 2X_1 - 3X_2 = 0. \end{cases}$$

Розв’язавши дану систему рівнянь отримаємо такі числові значення невідомих:

$X_1 \approx 455$ шт.
$X_2 \approx 1364$ шт.

Отже, щоб сільськогосподарське підприємство отримувало максимум прибутку від виробництва власної продукції необхідно, щоб воно випускало 1-го виду продукції – 455 шт., а 2-гої – 1364 шт. При цьому прибуток буде становити:

$$Z = 2X_1^2 + X_2^2 = 2 * 455^2 + 1364^2 = 2274546{,}00 \text{ ум. од.}$$

Завдання:
За методом Лагранжа знайти точку умовного екстремуму.
1. $Z = 2x_1^2 + x_2^2,$

$$2x_1 + 3x_2 = 5.$$

2. $Z = x_1^2 - x_2^2,$

$$3x_1 + 4x_2 = 12.$$

3. $Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2,$

$$2x_1 - x_2 = 5.$$

4. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2,$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$$

5. $Z = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2,$

$$x_1 + 3x_2 = 6.$$

6. $Z = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2,$

$$x_1 + 5x_2 = 12.$$

7. $Z = 4x_1 + 2x_1^2 + x_2 + 2x_2^2,$

$$3x_1 + 4x_2 = 12.$$

8. $Z = 2x_1x_2 + x_2^2,$

$$2x_1 + 4x_2 = 8.$$

9. $Z = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1\ ,$

$$x_1^2 + x_2^2 = 4.$$

10. $Z = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2,$

$$x_1 + x_2 = 5.$$

11. $Z = x_1^2 - x_2^2,$

$$x_1 - x_2 = 4.$$

12. $Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 5)^2,$

$$-x_1 + 2x_2 = -5.$$

13. $Z = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2,$

$$x_1 + x_2 + \ x_3 = 8.$$

14. $Z = x_1x_2\ x_3,$

$$x_1 + x_2 + \ x_3 = 6.$$

15. $Z = 3x_1^2 + 5x_2 + 12x_3^2,$

$$3x_1 + 8x_2 + \ 4x_3 = 18.$$

16. $Z = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 15x_3^2,$

$$4x_1 + 7x_2 + \ x_3 = 14.$$

17. $Z = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2,$

$$x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 16.$$

18. $Z = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_3,$

$$2x_1 + 2x_2 + \ x_3 = 4.$$

19. $Z = 5x_1^2 + 9x_2^2,$

$$9x_1 + 9x_2 = 18.$$

20. $Z = 4x_1^2 - 3x_2^2,$

$$x_1 + 4x_2 = 22.$$

Тема 9. Аналіз та управління ризиком в економіці

Питання до розгляду:

9.1. Поняття, сутність і зміст невизначеності й ризику.
9.2. Аналіз управління ризиком в економіці.
9.3. Напрями кількісного оцінювання ступеня ризику.
9.4. Оцінка ризику в абсолютному та відносному вираженні.
9.5. Допустимий і критичний ризик.

Тестові завдання:

1. Ризик – це …

1) діяльність, пов'язана з подоланням невизначеності в ситуації неминучого вибору, в процесі якої є можливість кількісно і якісно оцінити вірогідність досягнення передбачуваного результату невдачі й відхилення від мети;

2) об’єктивна неможливість здобуття абсолютного знання про об’єктивні та суб’єктивні фактори функціонування системи, неоднозначність її параметрів;

3) будь-яке явище, щодо якого можна говорити про незбіжність інтересів його учасників, про їх дії, про наслідки явища, до яких ці дії призводять, про сторони, так чи інакше зацікавлені у цих наслідках, про сутність цієї зацікавленості за нетотожності інтересів;

4) складна ймовірнісна динамічна система, що охоплює процеси виробництва, обміну, розподілу й споживання матеріальних та інших благ.

2. Управління ризиками – це специфічна область менеджменту, що вимагає знань в області:

1) страхової діяльності;
2) аналізу господарської діяльності;
3) математичних засобів оптимізації економічних розрахунків;
4) всі варіанти вірні.

3. Управління ризиком включає декілька блоків У першому блоці …

1) порівняльна характеристика ризику. Суть його полягає в розрахунку кількісних показників, в якому показники ризику порівнюються із стандартними величинами ризику, інформацією нормативних документів або порівнянними показниками ризиків.

2) визначається, наскільки значний наявний ризик.

3) відбуваються моніторинг ризику й здійснення управлінських дій щодо його зниження.

4) здійснюється контроль за ризиком і розповсюдження інформації про його рівень.

4. Управління ризиком включає декілька блоків У третьому блоці …

1) порівняльна характеристика ризику. Суть його полягає в розрахунку кількісних показників, в якому показники ризику порівнюються із стандартними величинами ризику, інформацією нормативних документів або порівнянними показниками ризиків.

2) визначається, наскільки значний наявний ризик.

3) відбуваються моніторинг ризику й здійснення управлінських дій щодо його зниження.

4) здійснюється контроль за ризиком і розповсюдження інформації про

5. Для аналізу економічних ризиків використовують методи:

1) якісні і кількісні;

2) індивідуальні й колективні;

3) обґрунтовані і авантюрні;

4) внутрішні й зовнішні.

6. Головна мета якісного аналізу економічного ризику – це …

1) визначити чинники і зони ризику, після чого ідентифікувати всі можливі ризики;

2) виявлення впливу рішень, які приймаються в умовах невизначеності та конфліктності, на інтереси суб'єктів господарювання;

3) визначити математичні співвідношення між змінними (параметрами), які стосуються прогнозування (планування) майбутнього з врахуванням ризиків виробництва;

4) ідентифікувати найважливіші змінні в моделі (можливі чинники ризику), пов'язані з оцінкою об'єкта (проекту).

7. При статистичному методі оцінки ризику абсолютною кількісною мірою ризику виступає…

1) середній очікуваний доход;

2) середньоквадратичне відхилення від очікуваного доходу;

3) коефіцієнт варіації;

4) помилка розрахунків.

8. При статистичному методі оцінки ризику відносною кількісною мірою ризику виступає…

1) середній очікуваний доход;

2) середньоквадратичне відхилення від очікуваного доходу;

3) коефіцієнт варіації;

4) помилка розрахунків.

9. Математичне сподівання дискреційної величини представляє собою …

1) $\mathrm{M(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX$;

2) $\sigma^2 = M\ (X - M\ (X))^2$;

3) $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - M\ (X))^2 * P_i$;

4) $\mathrm{M(x)} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_i * P_i$.

10. Для дискретної величини формула дисперсії має вигляд …

1) $\mathrm{M(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX$;

2) $\sigma^2 = M\ (X - M\ (X))^2$;

3) $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - M\ (X))^2 * P_i$;

4) $\mathrm{M(x)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{n} X_i * P_i$.

11. Під зоною допустимого ризику розуміють …

1) область, у межах якої відповідний вид підприємницької діяльності зберігає свою економічну доцільність, тобто випадкові збитки не перевищують очікуваного підприємницького ризику від проекту;

2) область, що характеризує найбільш ймовірні збитки по проекту і сподівану або середню віддачу цього проекту;

3) область можливих втрат, які перевищують величину розрахованої виручки і можуть сягати вартості майна підприємця;

4) область випадкових збитків, розміри яких перевищують величину очікуваного підприємницького збитку і сягають величини розрахованої виручки.

12. Під зоною критичного ризику розуміють …

1) область, у межах якої відповідний вид підприємницької діяльності зберігає свою економічну доцільність, тобто випадкові збитки не перевищують очікуваного підприємницького ризику від проекту;

2) область, що характеризує найбільш ймовірні збитки по проекту і сподівану або середню віддачу цього проекту;

3) область можливих втрат, які перевищують величину розрахованої виручки і можуть сягати вартості майна підприємця;

4) область випадкових збитків, розміри яких перевищують величину очікуваного підприємницького збитку і сягають величини розрахованої виручки.

13. Під зоною катастрофічного ризику розуміють …

1) область, у межах якої відповідний вид підприємницької діяльності зберігає свою економічну доцільність, тобто випадкові збитки не перевищують очікуваного підприємницького ризику від проекту;

2) область, що характеризує найбільш ймовірні збитки по проекту і сподівану або середню віддачу цього проекту;

3) область можливих втрат, які перевищують величину розрахованої виручки і можуть сягати вартості майна підприємця;

4) область випадкових збитків, розміри яких перевищують величину очікуваного підприємницького збитку і сягають величини розрахованої виручки.

14. Функція розподілу ймовірностей перевищення певного рівня випадкових збитків має вигляд:

1) *W(x) = 1 – F(x)*;

2) $\Pi_{\text{л}} = \frac{\mathrm{B}_m}{\mathrm{B}}$;

3) $\mathrm{K}_{\text{рл}} = \frac{\mathrm{B}_m + B_{\text{в}}}{\mathrm{B}_{\text{с}} + \mathrm{B}_{\text{н}}}$;

4) $\mathrm{M(x)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{n} X_i * P_i$.

15. Показник ризику ліквідності має вигляд:

1) *W(x) = 1 – F(x)*;

2) $П_л = \frac{В_m}{В}$;

3) $К_{рл} = \frac{В_m + В_в}{В_с + В_н}$;

4) $М(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i * P_i$.

Завдання:

Задача 1

Аналізується можливість придбання одного з двох об'єктів. Для кожного з них ймовірність надходження прибутків оцінюється як:

Таблиця – Вихідні дані

Показники	Варіанти настання події				
	1	2	3	4	5
Загальна сума можливого прибутку, млн. грн.:					
І варіант	100	80	60	40	20
ІІ варіант	160	140	120	20	10
Ймовірність настання події	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Придбання якого з об'єктів має більший ризик?

Задача 2

Підприємство порівнює чотири варіанти вкладання інвестицій в різні проекти терміном на 1 рік. Через рік підприємство має намір повернути суму інвестицій, отримавши при цьому деяку суму прибутку, що залежить від стану економіки. Експертним способом встановлена норма прибутку з інвестицій для кожного з проектів з урахуванням стану економіки.

Визначити ступінь ризику кожного з проектів, якщо сума інвестування однакова – 100 тис. умовних грошових одиниць.

Таблиця – Вихідні дані

Стан економіки	Ймовірність	Норма прибутку з інвестицій, %			
		І проект	ІІ проект	ІІІ проект	IV проект
Глибокий спад	0,05	8,0	12,0	- 3,0	- 2,0
Невеликий спад	0,20	8,0	10,0	6,0	9,0
Середнє зростання	0,50	8,0	9,0	11,0	12,0
Невеликий підйом	0,20	8,0	8,5	14,0	15,0
Потужний підйом	0,05	8,0	8,0	19,0	26,0

Задача 3

ПрАТ «Злагода» і ПрАТ «Золотий лан» планують вкласти капітал у цінні папери. В ПрАТ «Золотий лан» власні засоби складають 5000 тис. грн., а сума можливих збитків – 3500 тис. грн. В ПрАТ «Злагода» власні засоби складають 30000 тис. грн., а можливий збиток – 12000 тис. грн.

Яке з підприємств здійснює менш ризиковане вкладення капіталу?

Задача 4

Маємо два види акцій (акції двох компаній). Ефективність їх (норма прибутку) є випадковою величиною і залежить від стану економічного середовища (випадкових обставин). Сподівана ефективність цих акцій однакова.

Припустимо, що на ринку можуть виникнути лише дві ситуації Q_1 та Q_2: Q_1 – з ймовірністю P_1=0,3; Q_2 – з ймовірністю P_2=0,7.

Різні акції реагують на ці ситуації по-різному: курс акцій першого виду в ситуації Q_1 зростає на 15%, в ситуації Q_2 – на 7%; курс акцій другого виду в ситуації Q_1 падає на 3%, а в ситуації Q_2 зростає на 12%.

Припустимо також, що інвестор взяв гроші в борг під відсоток, що дорівнює 15%. Які акції слід придбати?

Задача 5

Планова ціна одиниці продукції складає 25,00 грн., змінні витрати на одиницю продукції 15,00 грн., а постійні витрати – 437900 грн. Фактичний обсяг виробництва 50000шт.

Необхідно визначити:

1) точку беззбитковості проекту;
2) індекс безпечності проекту з обсягу виробництва;
3) індекс безпечності проекту з ціни, постійних і змінних витрат.

Зробити висновки.

Тема 10. Принципи побудови економетричних моделей

Питання до розгляду:

10.1. Принципи побудови економетричних моделей. Парна лінійна регресія

10.2. Лінійні моделі множинної регресії.

Тестові завдання:

1. В регресійному аналізі побудова F-статистики здійснюється шляхом відношення дисперсії залежної змінної на «пояснювальні» й «непояснювальні» складові:

1) $y = \alpha + \beta x + U$ $y = \alpha + \beta x + U$ $y = \alpha + \beta x + U$;
2) $r_{x,e} = 1 – (6\ \Sigma D^2_i/n(n^2 - 1))$;
3) $t = \sqrt{n-2/1-r^2}$;
4) $F = (ESS / k) / RSS / (n-k-1)$.

2. Іншим важливим статистичним параметром для перевірки адекватності економетричної моделі є t-розподіл Стьюдента, що використовується для оцінки надійності коефіцієнта кореляції ...

1) $y = \alpha + \beta x + U$ $y = \alpha + \beta x + U$ $y = \alpha + \beta x + U$;
2) $r_{x,e} = 1 – (6\ \Sigma D^2_i/n(n^2 - 1))$;
3) $t = \sqrt{n-2/1-r^2}$;
4) $F = (ESS / k) / RSS / (n-k-1)$.

3. Гомоскедастичність – це …

1) однаковий розподіл фактичних значень вибірки змінних, тобто фактичні значення спостережень іноді будуть позитивними, іноді негативними, іноді – відносно близькими до нуля, проте в апріорі відсутні причини появи великих відхилень між спостереженнями;

2) коли значення змінних, які включаються в рівняння регресії, значно відрізняються в різних спостереженнях. Якщо залежність може буде описана рівнянням, в якому економічні показники змінюють свій масштаб одночасно, то зміна значень невключених змінних і помилок виміру, впливаючи разом на випадковий член, роблять його порівняно незначними при незначних у і x і порівняно великими – при великих y і x;

3) поняття, що використовується для опису проблеми, коли нестрога лінійна залежність між пояснювальними змінними призводить до отримання ненадійних оцінок регресії;

4) особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об’єкта пізнання вибирає чи створює схожий із ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення.

4. Гетероскедастичність – це …

1) однаковий розподіл фактичних значень вибірки змінних, тобто фактичні значення спостережень іноді будуть позитивними, іноді негативними, іноді – відносно близькими до нуля, проте в апріорі відсутні причини появи великих відхилень між спостереженнями;

2) коли значення змінних, які включаються в рівняння регресії, значно відрізняються в різних спостереженнях. Якщо залежність може буде описана рівнянням, в якому економічні показники змінюють свій масштаб одночасно, то зміна значень невключених змінних і помилок виміру, впливаючи разом на випадковий член, роблять його порівняно незначними при незначних у і x і порівняно великими – при великих y і x;

3) поняття, що використовується для опису проблеми, коли нестрога лінійна залежність між пояснювальними змінними призводить до отримання ненадійних оцінок регресії;

4) особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об’єкта пізнання вибирає чи створює схожий із ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення.

5. Мультиколлінеарність – це …

1) однаковий розподіл фактичних значень вибірки змінних, тобто фактичні значення спостережень іноді будуть позитивними, іноді негативними, іноді – відносно близькими до нуля, проте в апріорі відсутні причини появи великих відхилень між спостереженнями;

2) коли значення змінних, які включаються в рівняння регресії, значно відрізняються в різних спостереженнях. Якщо залежність може буде описана рівнянням, в якому економічні показники змінюють свій масштаб одночасно, то

зміна значень невключених змінних і помилок виміру, впливаючи разом на випадковий член, роблять його порівняно незначними при незначних у і *x* і порівняно великими – при великих *y* і *x*;

3) поняття, що використовується для опису проблеми, коли нестрога лінійна залежність між пояснювальними змінними призводить до отримання ненадійних оцінок регресії;

4) особливий пізнавальний процес, метод теоретичного та практичного опосередкованого пізнання, коли суб'єкт замість безпосереднього об’єкта пізнання вибирає чи створює схожий із ним допоміжний об'єкт-замісник (модель), досліджує його, а здобуту інформацію переносить на реальний предмет вивчення.

6. Регресійний аналіз полягає у …

1) побудові та аналізі економіко-математичної моделі у вигляді рівняння регресії, що виражає залежність результативної ознаки від однієї або кількох ознак-факторів і дає оцінку міри щільності зв’язку;

2) встановленні зв’язку однієї випадкової величини від іншої;

3) встановленні зв’язку однієї випадкової величини від декількох випадкових змінних;

4) визначенні загального вигляду рівняння прямої або параболи другого порядку, розрахунку оцінки середніх показників динамічного ряду.

7. Парний регресійний аналіз полягає у …

1) побудові та аналізі економіко-математичної моделі у вигляді рівняння регресії, що виражає залежність результативної ознаки від однієї або кількох ознак-факторів і дає оцінку міри щільності зв’язку;

2) встановленні зв’язку однієї випадкової величини від іншої;

3) встановленні зв’язку однієї випадкової величини від декількох випадкових змінних;

4) визначенні загального вигляду рівняння прямої або параболи другого порядку, розрахунку оцінки середніх показників динамічного ряду.

8. Множинний регресійний аналіз полягає у …

1) побудові та аналізі економіко-математичної моделі у вигляді рівняння регресії, що виражає залежність результативної ознаки від однієї або кількох ознак-факторів і дає оцінку міри щільності зв’язку;

2) встановленні зв’язку однієї випадкової величини від іншої;

3) встановленні зв’язку однієї випадкової величини від декількох випадкових змінних;

4) визначенні загального вигляду рівняння прямої або параболи другого порядку, розрахунку оцінки середніх показників динамічного ряду.

9. В економетричному аналізі модель парної лінійної регресії може мати вигляд:

1) $y = \alpha + \beta x + cy + u$;

2) $y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 p + u$;

3) $y = \beta x + cy + u$;

4) $y = \alpha + \beta x + u$.

10. В економетричному аналізі модель множинної лінійної регресії може мати вигляд:

1) $y = \alpha + \beta x + cy + u$;
2) $y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 p + u$;
3) $y = \beta x + cy + u$;
4) $y = \alpha + \beta x + u$.

11. На етапі математико-статистичного аналізу для побудови багатофакторної моделі перевіряють …

1) основні припущення класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюють найважливішу процедуру багатофакторного аналізу – перевірку факторів на мультиколінеарність;

2) фактори по черзі включають в модель доти, поки вона не стане задовільною. Порядок включення вибирається за допомогою коефіцієнта кореляції як міри важливості факторів (незалежних змінних), які ще не включені в модель. Цей метод передбачає розрахунок часткових F-критеріїв для факторів, що здійснювали значний вплив на результативний показник;

3) адекватність моделі за допомогою використанням F-критерію Фішера і t-критерію Стьюдента. При перевірці на адекватність економетричної моделі також використовують тест Дарбіна-Уотсона, що допомагає перевірити модель на гомо- або гетероскедастичність

4) отриману модель аналізують і інтерпретують.

12. На етапі побудови багатофакторної регресійної моделі визначають …

1) основні припущення класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюють найважливішу процедуру багатофакторного аналізу – перевірку факторів на мультиколінеарність;

2) фактори, які по черзі включають в модель доти, поки вона не стане задовільною. Порядок включення вибирається за допомогою коефіцієнта кореляції як міри важливості факторів (незалежних змінних), які ще не включені в модель. Цей метод передбачає розрахунок часткових F-критеріїв для факторів, що здійснювали значний вплив на результативний показник;

3) адекватність моделі за допомогою використанням F-критерію Фішера і t-критерію Стьюдента. При перевірці на адекватність економетричної моделі також використовують тест Дарбіна-Уотсона, що допомагає перевірити модель на гомо- або гетероскедастичність

4) отриману модель аналізують і інтерпретують.

13. На етапі перевірки побудованої моделі на адекватність визначають …

1) основні припущення класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюють найважливішу процедуру багатофакторного аналізу – перевірку факторів на мультиколінеарність;

2) фактори, які по черзі включають в модель доти, поки вона не стане задовільною. Порядок включення вибирається за допомогою коефіцієнта кореляції

як міри важливості факторів (незалежних змінних), які ще не включені в модель. Цей метод передбачає розрахунок часткових F-критеріїв для факторів, що здійснювали значний вплив на результативний показник;

3) адекватність моделі за допомогою використанням F-критерію Фішера і t-критерію Стьюдента. При перевірці на адекватність економетричної моделі також використовують тест Дарбіна-Уотсона, що допомагає перевірити модель на гомо- або гетероскедастичність

4) отриману модель аналізують і інтерпретують.

14. На етапі аналізу отриманих результатів визначають …

1) основні припущення класичного регресійного аналізу, крім того, здійснюють найважливішу процедуру багатофакторного аналізу – перевірку факторів на мультиколінеарність;

2) фактори, які по черзі включають в модель доти, поки вона не стане задовільною. Порядок включення вибирається за допомогою коефіцієнта кореляції як міри важливості факторів (незалежних змінних), які ще не включені в модель. Цей метод передбачає розрахунок часткових F-критеріїв для факторів, що здійснювали значний вплив на результативний показник;

3) адекватність моделі за допомогою використанням F-критерію Фішера і t-критерію Стьюдента. При перевірці на адекватність економетричної моделі також використовують тест Дарбіна-Уотсона, що допомагає перевірити модель на гомо- або гетероскедастичність

4) отриману модель аналізують і інтерпретують.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД

За 20 підприємствами регіону вивчається залежність вироблення продукції на одного працівника y (тис. грн.) від введення в дію нових основних фондів x_1 (% від вартості фондів на кінець року) та від питомої ваги працівників високої кваліфікації у загальній чисельності працівників x_2 (%) (таблиця 10.1).

Визначити:

1. Побудувати лінійну модель множинної регресії. Записати стандартизоване рівняння множинної регресії. На основі стандартизованих коефіцієнтів регресії та середніх коефіцієнтів еластичності ранжувати фактори за ступенем їх впливу на результат.

2. Знайти коефіцієнти парної, частинної та множинної кореляції. Проаналізувати їх.

3. Знайти скорегований коефіцієнт множинної детермінації. Порівняти його з нескорегованим (загальним) коефіцієнтом детермінації.

4. За допомогою F-критерію Фішера оцінити статистичну надійність рівняння регресії та коефіцієнту детермінації $R^2_{yx_1x_2}$.

5. За допомогою частинних F-критеріїв Фішера оцінити доцільність включення до рівняння множинної регресії фактора x_1 після x_2 та фактора x_2 після x_1.

6. Скласти рівняння парної лінійної регресії, залишивши лише один значущий фактор.

Таблиця 10.1 – Вихідні дані

Номер підприємства	Вироблення продукції на одного працівника, тис. грн., y	Введення в дію нових основних фондів (% від вартості фондів на кінець року), x_1	Питома вага працівників високої кваліфікації у загальній чисельності працівників, %, x_2
1	7,0	3,9	10,0
2	7,0	3,9	14,0
3	7,0	3,7	15,0
4	7,0	4,0	16,0
5	7,0	3,8	17,0
6	7,0	4,8	19,0
7	8,0	5,4	19,0
8	8,0	4,4	20,0
9	8,0	5,3	20,0
10	10,0	6,8	20,0
11	9,0	6,0	21,0
12	11,0	6,4	22,0
13	9,0	6,8	22,0
14	11,0	7,2	25,0
15	12,0	8,0	28,0
16	12,0	8,2	29,0
17	12,0	8,1	30,0
18	12,0	8,5	31,0
19	14,0	9,6	32,0
20	14,0	9,0	36,0

Розв'язок

Результати проміжних розрахунків занесемо до таблиці 10.2.

Знайдемо середні квадратичні відхилення факторів:

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2} = \sqrt{97,9 - 9,6^2} = 2,396;$$

$$\sigma_{x_1} = \sqrt{\overline{x_1^2} - \overline{x}_1^2} = \sqrt{41,887 - 6,19^2} = 1,890;$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{\overline{x_2^2} - \overline{x}_2^2} = \sqrt{541,4 - 22,3^2} = 6,642.$$

Для знаходження параметрів лінійного рівняння множинної регресії:

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

Таблиця 10.2 – Розрахункові дані

№	y	x_1	x_2	yx_1	yx_2	x_1x_2	x_1^2	x_2^2	y^2
1	7,0	3,9	10,0	27,3	70,0	39,0	15,21	100,0	49,0
2	7,0	3,9	14,0	27,3	98,0	54,6	15,21	196,0	49,0
3	7,0	3,7	15,0	25,9	105,0	55,5	13,69	225,0	49,0
4	7,0	4,0	16,0	28,0	112,0	64,0	16,0	256,0	49,0
5	7,0	3,8	17,0	26,6	119,0	64,6	14,44	289,0	49,0
6	7,0	4,8	19,0	33,6	133,0	91,2	23,04	361,0	49,0
7	8,0	5,4	19,0	43,2	152,0	102,6	29,16	361,0	64,0
8	8,0	4,4	20,0	35,2	160,0	88,0	19,36	400,0	64,0
9	8,0	5,3	20,0	42,4	160,0	106,0	28,09	400,0	64,0
10	10,0	6,8	20,0	68,0	200,0	136,0	46,24	400,0	100,0
11	9,0	6,0	21,0	54,0	189,0	126,0	36,0	441,0	81,0
12	11,0	6,4	22,0	70,4	242,0	140,8	40,96	484,0	121,0
13	9,0	6,8	22,0	61,2	198,0	149,6	46,24	484,0	81,0
14	11,0	7,2	25,0	79,2	275,0	180,0	51,84	625,0	121,0
15	12,0	8,0	28,0	96,0	336,0	224,0	64,0	784,0	144,0
16	12,0	8,2	29,0	98,4	348,0	237,8	67,24	841,0	144,0
17	12,0	8,1	30,0	97,2	360,0	243,0	65,61	900,0	144,0
18	12,0	8,5	31,0	102,0	372,0	263,5	72,25	961,0	144,0
19	14,0	9,6	32,0	134,4	448,0	307,2	92,16	1024,0	196,0
20	14,0	9,0	36,0	126,0	504,0	324,0	81,0	1296,0	196,0
Сума	192	123,8	446	1276,3	4581	2997,4	837,74	10828,0	1958,0
Ср. знач.	9,6	6,19	22,3	63,815	229,05	149,87	41,887	541,4	97,9

Необхідно розв’язати наступну систему лінійних рівнянь відносно невідомих параметрів a, b_1, b_2:

1. Розрахунок параметрів лінійного рівняння множинної регресії.

$$\begin{cases} na + b_1\sum x_1 + b_2\sum x_2 = \sum y; \\ a\sum x_1 + b_1\sum x_1^2 + b_2\sum x_1x_2 = \sum yx_1; \\ a\sum x_2 + b_1\sum x_1x_2 + b_2\sum x_2^2 = \sum yx_2 \end{cases}$$

або скористатися готовими формулами:

$$b_1 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} \cdot \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}; \qquad b_2 = \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} \cdot \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1}r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2};$$

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 - b_2\bar{x}_2.$$

Розрахуємо спочатку парні коефіцієнти кореляції:

$$r_{yx_1} = \frac{\operatorname{cov}(y,\, x_1)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_1}} = \frac{63{,}815 - 6{,}19 \cdot 9{,}6}{1{,}890 \cdot 2{,}396} = 0{,}970;$$

$$r_{yx_2} = \frac{\operatorname{cov}(y,\, x_2)}{\sigma_y \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{229{,}05 - 22{,}3 \cdot 9{,}6}{6{,}642 \cdot 2{,}396} = 0{,}941;$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\operatorname{cov}(x_1,\, x_2)}{\sigma_{x_1} \cdot \sigma_{x_2}} = \frac{149{,}87 - 6{,}19 \cdot 22{,}3}{1{,}890 \cdot 6{,}642} = 0{,}943.$$

знайдемо

$$b_1 = \frac{2{,}396}{1{,}890} \cdot \frac{0{,}970 - 0{,}941 \cdot 0{,}943}{1 - 0{,}943^2} = 0{,}946;$$

$$b_2 = \frac{2{,}396}{6{,}642} \cdot \frac{0{,}941 - 0{,}970 \cdot 0{,}943}{1 - 0{,}943^2} = 0{,}0856;$$

$$a = 9{,}6 - 0{,}946 \cdot 6{,}19 - 0{,}0856 \cdot 22{,}3 = 1{,}835.$$

Таким чином, отримали наступне рівняння множинної регресії:

$$y = 1{,}835 + 0{,}946 \cdot x_1 + 0{,}0856 \cdot x_2.$$

Коефіцієнти β_1 и β_2 стандартизованого рівняння регресії $t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + \varepsilon,$ знаходяться за формулами:

$$\beta_1 = b_1 \frac{\sigma_{x_1}}{\sigma_y} = 0{,}946 \cdot \frac{1{,}890}{2{,}396} = 0{,}746;$$

$$\beta_2 = b_2 \frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_y} = 0{,}0856 \cdot \frac{6{,}642}{2{,}396} = 0{,}237.$$

Тобто, рівняння матиме вигляд:

$$\hat{t}_y = 0{,}746 \cdot t_{x_1} + 0{,}237 \cdot t_{x_2}.$$

Так як стандартизовані коефіцієнти регресії можна порівнювати між собою, то можна зробити висновок про те, що введення в дію нових основних фондів оказує більший вплив на вироблення продукції, ніж питома вага працівників високої кваліфікації.

Порівнювати вплив факторів на результат можна також за допомогою середніх коефіцієнтів еластичності:

$$\bar{Э}_i = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}.$$

Розрахуємо:

$$\bar{Э}_1 = 0,946 \cdot \frac{6,19}{9,6} = 0,61; \qquad \bar{Э}_2 = 0,0856 \cdot \frac{22,3}{9,6} = 0,20.$$

З розрахунків можна зробити висновок про те, що збільшення тільки основних фондів (від свого середнього значення) або тільки питомої ваги працівників високої кваліфікації на 1% збільшує в середньому виробітку продукції на 0,61% або 0,20% відповідно. Таким чином, підтверджується більший вплив на результат y фактора x_1, ніж фактора x_2.

2. Коефіцієнти парної кореляції ми вже знайшли:

$$r_{yx_1} = 0,970; \qquad r_{yx_2} = 0,941; \qquad r_{x_1x_2} = 0,943.$$

Вони свідчать про досить сильний зв'язок кожного фактору з результатом, а також про високу міжфакторну залежність (фактори x_1 и x_2 явно колінеарні, так як $r_{x_1x_2} = 0,943 > 0,7$). При такій сильній міжфакторній залежності рекомендується один з факторів вилучити з розгляду.

Частинні коефіцієнти кореляції характеризують тісноту зв’язку між результатом і відповідним фактором при елімінуванні (усунення впливу) інших факторів, включених до рівняння регресії.

При двох факторах частинні коефіцієнти кореляції розраховуються наступним чином:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_2}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,970 - 0,941 \cdot 0,943}{\sqrt{\left(1 - 0,941^2\right) \cdot \left(1 - 0,943^2\right)}} = 0,734;$$

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0,941 - 0,970 \cdot 0,943}{\sqrt{\left(1 - 0,970^2\right) \cdot \left(1 - 0,943^2\right)}} = 0,325.$$

Якщо порівняти коефіцієнти парної та частинної кореляції, то можна побачити, що з-за високої міжфакторної залежності коефіцієнти парної кореляції дають завишенні оцінки тісноти зв’язку. Саме по цій причині, рекомендується, при наявності сильної колінеарності (взаємозв’язку) факторів, виключати з дослідження той фактор, у якого тіснота парної залежності менше, ніж тіснота міжфакторного зв’язку.

Коефіцієнт множинної кореляції визначимо через матрицю парних коефіцієнтів кореляції:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_r}{\Delta_{r_{11}}}}, \quad \text{де} \quad \Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}$$ – визначник матриці парних коефіцієнтів кореляції, а $\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_2x_1} & 1 \end{vmatrix}$ – визначник матриці міжфакторної кореляції.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & 0,970 & 0,941 \\ 0,970 & 1 & 0,943 \\ 0,941 & 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0,8607 + 0,8607 -$$;

$$-0,8855 - 0,8892 - 0,9409 = 0,0058$$

$$\Delta_{r_{11}} = \begin{vmatrix} 1 & 0,943 \\ 0,943 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0,8892 = 0,1108.$$

Коефіцієнт множинної кореляції: $R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{0,0058}{0,1108}} = 0,973.$

Аналогічний результат отримаємо при використанні інших формул:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{\text{î ñò}}}{\sigma^2_y}} = \sqrt{1 - \frac{0,305}{5,74}} = 0,973;$$

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{\sum \beta_i \cdot r_{yx_i}} = \sqrt{0,746 \cdot 0,970 + 0,237 \cdot 0,941} = 0,973;$$

$$R_{yx_1x_2 \ldots x_m} = \sqrt{1 - \left(1 - r^2_{yx_1}\right) \cdot \left(1 - r^2_{yx_2 \cdot x_1}\right)} =$$

$$= \sqrt{1 - \left(1 - 0,970^2\right) \cdot \left(1 - 0,325^2\right)} = 0,973.$$

Коефіцієнт множинної кореляції показує на достатньо сильний зв'язок усього набору факторів з результатом.

3. Нескорегований коефіцієнт множинної детермінації $R^2_{yx_1x_2} = 0,947$ оцінює долю варіації результату за рахунок представлених у рівнянні факторів у загальній варіації результату. У нашому прикладі ця доля складає $94,7\%$ та вказує на достатньо високий ступень обумовленості варіації результату варіацією факторів, іншими словами – на достатньо тісний зв'язок факторів з результатом.

Скорегований коефіцієнт множинної детермінації:

$$\overline{R}^2_{yx_1x_2} = 1-\left(1-R^2_{yx_1x_2}\right)\frac{(n-1)}{(n-m-1)} = 1-(1-0{,}947)\frac{20-1}{20-2-1} = 0{,}941$$

визначає тісноту зв'язку з урахуванням ступеню свободи загальної та залишкової дисперсій. Він дає таку оцінку тісноти зв'язку, яка на залежить від кількості факторів і тому може порівнюватися по різним моделям з різним числом факторів. Обидва коефіцієнти вказують на достатньо високу (більш 94%) детермінованість результату y в моделі факторами x_1 и x_2.

4. Оцінку надійності рівняння регресії в цілому та показника тісноти зв'язку $R_{yx_1x_2}$ визначає F - критерій Фішера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2_{yx_1x_2}}{1-R^2_{yx_1x_2}} \cdot \frac{n-m-1}{m}$$

В нашому випадку фактичне значення F - критерію Фішера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{0{,}973^2}{1-0{,}973^2} \cdot \frac{20-2-1}{2} = 151{,}88.$$

Таким чином $F_{\text{факт}} > F_{\text{табл}} = 3{,}49$ (при $n = 20$), тобто ймовірність випадково отримати таке значення F - критерію не перевищує допустимий рівень значущості 5%. Отже, отримане значення не випадкове, воно сформувалося під впливом істотних факторів, тобто підтверджується статистична значимість усього рівняння та показнику тісноти зв'язку $R^2_{yx_1x_2}$.

5. За допомогою частинних F - критеріїв Фішера оцінимо доцільність включення до рівняння множинної регресії фактора x_1 після x_2 и фактора x_2 після x_1 за допомогою формул:

$$F_{\text{част},\, x_1} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_2}}{1-R^2_{yx_1}} \cdot \frac{n-m-1}{m};$$

$$F_{\text{част},\, x_2} = \frac{R^2_{yx_1x_2} - R^2_{yx_1}}{1-R^2_{yx_2}} \cdot \frac{n-m-1}{m}.$$

Знайдемо $R^2_{yx_1}$ и $R^2_{yx_2}$: $R^2_{yx_1} = r^2_{yx_1} = 0{,}970^2 = 0{,}941;$

$$R^2_{yx_2} = r^2_{yx_2} = 0{,}941^2 = 0{,}885.$$

Маємо:

$$F_{\text{част}, x_1} = \frac{0,947 - 0,885}{1 - 0,941} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 8,9322;$$

$$F_{\text{част}, x_2} = \frac{0,947 - 0,941}{1 - 0,885} \cdot \frac{20 - 2 - 1}{2} = 0,4435.$$

Таким чином $F_{\text{част}, x_2} < F_{\text{табл}} = 3,49$. Отже, включення в модель фактора x_2 після того, як в модель включений фактор x_1 статистично недоцільно: приріст факторної дисперсії за рахунок додаткового признака x_2 виявляється незначним, несуттєвим; фактор x_2 включать в рівняння після фактора x_1 не слід.

Якщо поміняти початковий порядок включення факторів в модель та розглянути варіант включення x_1 після x_2, то результат розрахунку частинного F-критерія для x_1 буде іншим. $F_{\text{част}, x_1} > F_{\text{табл}} = 3,49$, тобто ймовірність його випадкового формування менше, ніж прийнятий стандарт $\alpha = 0,05\ (5\%)$. Отже, значення частинного F-критерія для додаткового включеного фактора x_1 не випадкове, являється статистично значимим, надійним, достовірним: приріст факторної дисперсії за рахунок додаткового фактора x_1 являється істотним. Фактор x_1 повинен бути присутнім в рівнянні, в тому числі в варіанті, коли він додатково включається після фактора x_2.

6. Загальний висновок полягає в тому, що множинна модель з факторами x_1 и x_2 с $R^2_{yx_1x_2} = 0,947$ містить неінформативний фактор x_2. Якщо виключити фактор x_2, то можна обмежитися рівнянням парної регресії:

$$\hat{y}_x = a_0 + a_1 \cdot x = 1,99 + 1,23 \cdot x, \text{ при } r^2_{yx} = 0,941.$$

Завдання:

1. На основі представлених нижче даних:

Визначити:

1. Побудувати лінійну модель множинної регресії. Записати стандартизоване рівняння множинної регресії. На основі стандартизованих коефіцієнтів регресії та середніх коефіцієнтів еластичності ранжувати фактори за ступенем їх впливу на результат.

2. Знайти коефіцієнти парної, частинної та множинної кореляції. Проаналізувати їх.

3. Знайти скорегований коефіцієнт множинної детермінації. Порівняти його з нескорегованим (загальним) коефіцієнтом детермінації.

4. За допомогою F-критерію Фішера оцінити статистичну надійність рівняння регресії та коефіцієнту детермінації $R^2_{yx_1x_2}$.

5. За допомогою частинних F-критеріїв Фішера оцінити доцільність включення до рівняння множинної регресії фактора x_1 після x_2 та фактора x_2 після x_1.

6. Скласти рівняння парної лінійної регресії, залишивши лише один значущий фактор.

Варіант 1

Підприємства	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Поточні витрати на 1 га посіву зернових культур, грн.	1518,6	1663,8	1675,8	1731,3	1794,6	2044,8	1885,0	1617,3	1775,0	1624,8
Забезпеченість зерновими комбайнами, %	98,6	89,5	100,0	101,3	98,5	99,7	96,5	98,4	100,5	102,0
Урожайність зернових культур, ц з 1 га	20,8	21,7	20,3	20,8	15,7	30,7	23,7	12,5	18,7	10,6

Варіант 2

Підприємства	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Поточні витрати на 1 га посіву зернових культур, грн.	2278,61	2263,88	2475,83	2331,39	2494,67	2544,85	2385,04	2317,34	2475,00	2424,80
Питома вага оборотних засобів у загальній сумі засобів, %	41,4	57,7	39,0	47,1	56,0	38,5	43,3	48,2	55,3	57,1
Урожайність зерно-вих культур, ц з 1 га	30,5	34,0	28,9	31,0	27,6	25,4	25,4	28,6	29,0	30,1

Варіант 3

Підприємства	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Дози внесення мінеральних добрив на 1 га, ц	0,8	2,7	1,1	3,0	0,7	3,6	1,0	3,1	3,0	2,5
Урожайність гороху, ц з 1 га	25,1	18,3	25,2	31,8	26,9	38,8	30,6	34,0	28,9	20,6
Дози внесення органічних добрив на 1 га, т	1,8	0,9	1,5	1,9	1,3	4,0	3,1	3,7	2,2	2,1

Варіант 4

Підприємства	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Надій молока на 1 корову, ц	20,5	19,2	35,0	25,1	21,2	24,0	24,2	27,2	36,1	35,1
Витрати корму на 1 корову, ц к.од.	31,0	27,0	41,0	34,0	31,0	35,0	31,0	34,0	42,0	40,0
Яловість корів, %	18,0	19,0	10,0	15,0	17,0	20,0	12,0	9,0	13,0	8,0

Варіант 5

Підприємства	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Урожайність гречки, ц	16,8	36,4	32,5	25,4	24,2	30,3	27,9	35,5	45,4	33,5
Якість ґрунтів, балів	40,0	50,0	90,0	75,0	70,0	75,0	65,0	80,0	95,0	95,0
Витрати на 1 га зернових культур, грн.	1402,7	1381,8	1459,7	1386,9	1495,9	1501,2	1299,9	1475,3	1358,8	1324,8

Варіант 6

Підприємства	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Виробництво валової продукції тваринництва на 1 працівника, тис. грн.	259,6	288,1	218,7	321,2	317,8	425,8	578,3	234,7	369,9	499,7
Енергозабезпе-ченість, к.с.	171,5	120,9	208,5	207,3	207,0	298,8	301,3	342,0	209,5	244,3
Питома вага виручки від реалізації продукції тварин-ництва в загальної виручки від реалізації продукції с.г., %	25,3	19,8	11,5	19,8	20,5	34,8	42,1	12,5	16,8	29,8

Варіант 7

Підприємства	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Надій молока на 1 корову, ц	38,0	41,3	37,5	36,7	54,5	43,2	37,8	32,6	34,1	49,7
Витрати корму на 1 корову, ц к.од.	31,0	39,0	28,0	32,0	41,0	35,0	32,0	28,0	36,0	27,0
Питома вага чистопородних корів в стаді,%	34,0	55,0	28,0	25,0	45,0	46,0	42,0	30,0	28,0	32,0

Тема 11. Математичне моделювання виробничих процесів в рослинництві

Питання до розгляду:

11.1. Економіко-математичні моделі оптимізації економічних процесів у рослинництві.

11.2. Особливості функціонування виробничих систем у рослинництві.

11.3. Економіко-математичні моделі (оптимізація структури посівних площ, оптимізація розміщення посівів по полях різної родючості, оптимізація процесу використання мінеральних добрив).

11.4. Роль прикладних економіко-математичних досліджень в рослинництві.

Тема 12. Математичне моделювання виробничих процесів в тваринництві

Питання до розгляду:

12.1. Економіко-математичні моделі оптимізації економічних процесів у тваринництві.

12.2. Особливості моделювання тваринницького підкомплексу України

12.3. Необхідність моделювання економічних процесів тваринництва.

12.4. Роль прикладних економіко-математичних досліджень.

12.5. Особливості економіко-математичних моделей оптимізації в тваринництві.

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ПРИКЛАД

Необхідно знайти оптимальний добовий раціон годівлі корови з удоєм 8 кг і живою вагою 450 кг, яка утримується у фермерському господарстві «Нива». Для годівлі корів у даному господарстві використовуються такі корми: дерть ячмінна, макуха соняшникова, висівки пшеничні, сіно суданки, солома пшенична, солома вівсяна, буряк кормовий, силос кукурудзяний. Загальна вага раціону повинна коливатися в межах 60-70 кг. Таким чином, необхідно визначити оптимальний варіант годівлі даної корови, задовольнивши її потреби в поживних речовинах і при цьому досягти мінімальної вартості (собівартості) даного раціону (цей показник і буде критерієм оптимальності).

Далі необхідно визначитися щодо невідомих величин. Шуканими змінними в даній задачі будуть обсяги кормів у фізичній вазі, які необхідно давати даній корові на добу, тобто:

x_1 – шуканий обсяг дерті ячмінної в раціоні, кг;

x_2 – шуканий обсяг макухи соняшникової в раціоні, кг;

x_3 – шуканий обсяг висівок пшеничних в раціоні, кг;

x_4 – шуканий обсяг сіна суданки в раціоні, кг;

x_5 – шуканий обсяг соломи пшеничної в раціоні, кг;

x_6 – шуканий обсяг соломи вівсяної в раціоні, кг;

x_7 – шуканий обсяг буряку кормового в раціоні, кг;

x_8 – шуканий обсяг силосу кукурудзяного в раціоні, кг.

На другому етапі необхідно записати задачу в математичному вигляд, що визначить структуру економіко-математичної задачі.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Таким чином, необхідно знайти оптимальний раціон годівлі визначеного виду худоби, який забезпечить досягнення мінімуму критерію оптимальності:

$$Z_{min} = \sum c_j x_j, \qquad (j \in J).$$

За умови:

1. Щодо задоволення потреб сільськогосподарських тварин у поживних речовинах

$$\sum v_{ij} x_{ij} \leq = \geq b_i, \qquad (i \in I_1).$$
$$(j \in J_1).$$

2. Щодо вмісту в раціоні різних груп кормів у межах, що відповідатимуть зоотехнічним вимогам годівлі тварин

$$b_i^{`} \leq \sum x_j \leq b_i^{``} \qquad (i \in I_2).$$
$$(j \in H).$$

3. Щодо питомої ваги окремих видів кормів усередині відповідних груп

$$\sum x_j \leq = \geq w_{ij} \sum x_j, \qquad (i \in I_3).$$
$$(j \in J) \qquad (j \in H).$$

4. Щодо невід'ємності змінних

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J).$$

Умовні позначення:

i – індекс поживної речовини;

j – індекс виду кормів;

J – множина, яка містить номери змінних по видах кормів в раціоні;

H – множина, яка об'єднує змінні по групах кормів;

I_1 – множина, яка включає загальну кількість номерів обмежень по вмісту поживних речовин у раціоні;

I_2 – множина, яка включає номери обмежень по питомій вазі окремих груп кормів у раціоні;

I_3 – множина, яка включає номери обмежень по питомій вазі окремих видів кормів у раціоні;

x_j – шуканий обсяг j-того виду кормів в раціоні, кг;

c_j – вартість (собівартість) одиниці j-того виду кормів в раціоні, грн.;

v_{ij} – вміст i-ої поживної речовини в одиниці j-того виду корму;

b_i – допустима кількість i-ої поживної речовини в раціоні;

$b_i^{`}$, $b_i^{``}$ – мінімально і максимально допустима кількість кормів визначеної групи в раціоні;

w_{ij} – логічний коефіцієнт пропорційності.

ВХІДНА ІНФОРМАЦІЯ

Наступним етапом є визначення необхідної інформації та джерел її знаходження для побудови числової економіко-математичної моделі. Так, на підставі довідникових даних, що свідчать про зоотехнічні вимоги визначеного виду худоби до годівлі, необхідно знайти норми споживання кормів, оцінюючи їх через поживність. Ця потреба залежить від виду худоби, живої ваги, господарського призначення, фізичного стану, і, звичайно, від продуктивності худоби.

Так, корові живою вагою 450 кг і удоєм 8 кг необхідно давати на добу не менше 11,2 кг кормових одиниць, але не більше 11,5 кг. Відповідно перетравного протеїну потребується 1150,8 г і 1193,4 г. Рекомендована структура раціону передбачає вміст концентрованих кормів у розмірі 32%, грубих – 35%, в тому числі сіна – 20%, соковитих – 33%, в тому числі силосу – 28%. Для моделювання балансу потреби і споживання необхідно знати поживність кормів.

Таблиця 12.1 – Вміст поживних речовин у кормах

Види кормів	Вміст в 1 кг корму	
	кг кормових одиниць	г перетравного протеїну
Дерть ячмінна	1,16	91
Макуха соняшникова	1,05	338
Висівки пшеничні	0,71	114
Сіно суданки	0,55	60
Солома пшенична	0,30	5
Солома вівсяна	0,23	10
Буряк кормовий	0,14	10
Силос кукурудзяний	0,21	12

Моделювання вимог до вмісту в раціоні визначених груп кормів і окремих видів кормів можна здійснювати різними прийомами. У наведеній розробці відсотки вмісту груп і видів кормів беруться від загальної потреби корови в кормових одиницях. Можна ввести допоміжну змінну, наприклад x_9, яка визначатиме загальну фізичну вагу раціону і, використовуючи її, вміст груп і видів кормів задати в моделі через частку.

Для визначення вартості раціону необхідно знати ціну, або собівартість 1 кг корму, яка береться на підставі фактичних даних у господарстві, а саме:

1 кг дерті ячмінної коштує 3,50 грн;

1 кг макухи соняшникової – 6,00 грн;

1 кг висівок пшеничних – 4,20 грн.

Собівартість:

1 кг сіна суданки становить 0,72 грн;

1 кг соломи пшеничної – 0,65 грн;

1 кг соломи вівсяної – 0,85 грн;

1 кг кормового буряку – 1,20 грн;
1 кг силосу кукурудзяного – 1,90 грн.

Підготувавши вхідну інформацію, можна записати числову економіко-математичну модель задачі:

$$Z_{min} = 3{,}50x_1 + 6{,}00x_2 + 4{,}20x_3 + 0{,}72x_4 + 0{,}65x_5 + 0{,}85x_6 + 1{,}20x_7 + 1{,}90x_8$$

Умови задачі:

1. Щодо задоволення потреб корови в кормових одиницях (по мінімуму)

$$1{,}16x_1 + 1{,}05x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}55x_4 + 0{,}30x_5 + 0{,}23x_6 + 0{,}14x_7 + 0{,}21x_8 \geq 11{,}20$$

2. Щодо задоволення потреб корови в кормових одиницях (по максимуму)

$$1{,}16x_1 + 1{,}05x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}55x_4 + 0{,}30x_5 + 0{,}23x_6 + 0{,}14x_7 + 0{,}21x_8 \leq 11{,}50$$

3. Щодо задоволення потреб корови у перетравному протеїні (по мінімуму)

$$91x_1 + 338x_2 + 114x_3 + 60x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 10x_7 + 12x_8 \geq 1150{,}80$$

4. Щодо задоволення потреб корови у перетравному протеїні (по максимуму)

$$91x_1 + 338x_2 + 114x_3 + 60x_4 + 5x_5 + 10x_6 + 10x_7 + 12x_8 \leq 1193{,}40$$

5. Щодо вмісту в раціоні концентрованих кормів (по мінімуму)

$$1{,}16x_1 + 1{,}05x_2 + 0{,}71x_3 \geq 3{,}60$$

6. Щодо вмісту в раціоні концентрованих кормів (по максимуму)

$$1{,}16x_1 + 1{,}05x_2 + 0{,}71x_3 \leq 3{,}70$$

7. Щодо вмісту в раціоні грубих кормів (по мінімуму)

$$0{,}55x_4 + 0{,}30x_5 + 0{,}23x_6 \geq 3{,}90$$

8. Щодо вмісту в раціоні грубих кормів (по максимуму)

$$0{,}55x_4 + 0{,}30x_5 + 0{,}23x_6 \leq 4{,}03$$

9. Щодо вмісту в раціоні сіна (по мінімуму)

$$0{,}55x_4 \geq 2{,}20$$

10. Щодо вмісту в раціоні сіна (по максимуму)

$$0{,}55x_4 \leq 2{,}30$$

11. Щодо вмісту в раціоні соковитих кормів (по мінімуму)

$$0{,}14x_7 + 0{,}21x_8 \geq 3{,}70$$

12. Щодо вмісту в раціоні соковитих кормів (по максимуму)

$$0{,}14x_7 + 0{,}21x_8 \leq 3{,}80$$

13. Щодо вмісту в раціоні силосу (по мінімуму)

$$0{,}21x_8 \geq 3{,}10$$

14. Щодо вмісту в раціоні силосу (по максимуму)

$$0{,}21x_8 \leq 3{,}20$$

15. Щодо загальної ваги раціону (по мінімуму)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 60{,}00$$

16. Щодо загальної ваги раціону (по максимуму)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \leq 70{,}00$$

На підставі записаної економіко-математичної моделі складається розгорнута числова модель (матриця) задачі, вихідні дані якої вводяться в ПЕОМ для автоматизованого розрахунку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барвінський А.Ф., Олексін І.Я., Крупка З.І. Математичне програмування. Львів : «Інтелект – Захід», 2004. 446 с.
2. Вітлінський В.В. Моделювання економіки : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2003. 408 с.
3. Вітлінський В.В., Терещенко Т.О., Савіна С.С. Економіко-математичні методи та моделі : оптимізація : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.
4. Вовк В.М., Зомчак Л.М. Оптимізаційні методи і моделі : навчальний посібник. Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2014. 360 с.
5. Гатауллин А.М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. Москва : Агропромиздат, 1990. 365 с.
6. Глівенко С.В. Економічне прогнозування : навчальний посібник для економічних спеціальностей. Суми : Університетська книга, 2004. 257 с.
7. Грабовецький, Б.Є. Планування та економічне прогнозування : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2013. 66 с.
8. Егоршин О.О., Малярець Л.М. Математичне програмування. Харків : ВД «ІНЖЕК», 2006. 206 с.
9. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник / за заг. ред. В.В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2008. 360 с.
10. Єсіна В.О. Конспект лекцій з дисципліни «Оптимізаційні методи і моделі» (для студентів всіх форм навчання за напрямом підготовки 6.030504 – Економіка підприємства). Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 64 с.
11. Кадієвський В.А., Жадлун З.О. Математичне програмування та моделювання економічних процесів. Київ : НАУ, 1995. 125 с.
12. Касьяненко В.О. Моделювання та прогнозування економічних процесів : навчальний посібник. Суми : Університетська книга, 2006. 315 с.
13. Кузьмичов А.І. Оптимізаційні методи і моделі : практикум в Excel : навчальний посібник. Київ : ВПЦ АМУ, 2013. 438 с.
14. Малиш Н.А. Моделювання економічних процесів ринкової економіки. Київ : МАУП, 2004. 120 с.
15. Мамонов К.А. Економіко-математичне моделювання : конспект лекцій (для студентів 3 курсу заочної форми навчання за напрямом підготовки 0501 (6.030509) «Облік і аудит»). Харків : ХНАМГ, 2009. 86 с.
16. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / Зарубанна Л.В., Попрозман Н.В., Клименко Н.А., Попрозман О.І., Зарубанний С.В. Київ : НУБіП, 2014. 372 с.
17. Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник з курсу для спеціальностей «Облік і аудит», «Фінанси і кредит», «Маркетинг», «Економічна кібернетика» / Кривень В.А., Валяшек В.Б., Цимбалюк Л.І., Козбур Г.В. Тернопіль : видавництво ТНТУ, 2015. 83 с.
18. Скворчевський О.Є., Товажнянський В.Л. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : лаборатор. практикум з курсу «Економіко-математичне моделювання». Харків : НТУ «ХПІ», 2013. 96 с.
19. Скворчевський О.Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : текст лекцій з курсу «Економіко-математичні методи та моделі». Харків : НТУ «ХПІ», 2014. 76 с.
20. Ульянченко О.В. Дослідження операцій в економіці : підручник. Суми : Довкілля, 2010. – 594 с.
21. Христиановский В.В., Щербина В.П. Экономический риск и методы его измерения. Донецк : ДонНУ, 2000. 197 с.
22. Черняк О.І., Ставицький Г.О., Чорноус Г.О. Системи обробки економічної інформації : підручник. Київ : Знання, 2006. 221 с.
23. Ястремський О.І., Гриценко О.Г. Основи мікроекономіки : підручник. Київ : Знання, 1998. 784 с.

Начальне видання

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ В ЕКОНОМІЦІ

Методичні рекомендації

Укладачі:
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60*841/16. Ум.друк.арк. 5,75
Тираж 50 прим. Зам. №_____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №4490 від 20.02.2013 р.