МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Методичні рекомендації
до виконання тестових завдань і самостійної роботи для
здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальності
072 «Фінанси, банківська справа та страхування»
денної форми навчання

МИКОЛАЇВ
2020

УДК 330.45:519.863
О-60

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 28 квітня 2020 року, протокол № 9.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

А. М. Могильницька – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

© Миколаївський національний аграрний університет, 2020

ЗМІСТ

Вступ……..……..4
1. Порядок виконання та правила оформлення розрахунково-графічної роботи..……...……....5
2. Теоретичні питання курсу……....7
3. Практичні завдання для самостійної роботи……...9
4. Методичні рекомендації до виконання практичних завдань……..……16
5. Тестові завдання для самоперевірки знань.……..82
Список рекомендованої літератури……...….....106

ВСТУП

Дослідження та оптимізація соціально-економічних систем, вивчення методів економіко-математичного моделювання економічних процесів та кількісного обґрунтування управлінських рішень є невід'ємним атрибутом системи управління на всіх її рівнях – від невеликої фірми до національної економіки в цілому. Оволодіння багатим арсеналом методів оптимізації з використанням сучасних комп'ютерних технологій є важливою складовою фахової підготовки сучасного фахівця.

Саме цій меті підпорядковано навчальну дисципліну «Оптимізаційні методи та моделі», яка є логічним продовженням основних теоретичних положень, ідей і практичних задач, що вивчаються в навчальних дисциплінах вища математика, економічна інформатика, мікроекономіка, макроекономіка, математичне програмування та ін.

Методичні рекомендації складено відповідно до навчальної програми курсу «Оптимізаційні методи та моделі» для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» денної форми навчання.

Вони включають в собі: порядок виконання та правила оформлення розрахунково-графічної роботи, теоретичні питання курсу, практичні завдання для самостійної роботи, методичні рекомендації до виконання практичних завдань в табличному редакторі *Microsoft Excel*, тестові завдання для перевірки знань та список рекомендованої літератури.

Особливістю методичних рекомендацій є те, що в них детально описано методику побудови оптимізаційних моделей та розв’язання оптимізаційних задач з використанням сучасних комп’ютерних технологій.

Методичні рекомендації розроблено для активізації самостійної роботи здобувачів вищої освіти III-IV рівня акредитації. Вони також будуть корисними для магістрів, викладачів економічних дисциплін, а також усіх хто має намір оволодіти сучасними методами економіко-математичного моделювання.

1. ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ ТА ПРАВИЛА ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

1.1. Порядок виконання роботи

Самостійна робота здобувачів вищої освіти є однією з форм організації освітнього процесу, основною формою оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов'язкових навчальних занять за розкладом.

Виконання та захист розрахунково-графічної роботи є важливим етапом вивчення курсу «Оптимізаційні методи та моделі». Робота виконуються згідно з навчальним планом і є формою проміжного контролю знань здобувачів вищої освіти та оцінки ефективності їх самостійної роботи.

Перед виконанням розрахунково-графічної роботи здобувачу вищої освіти необхідно вивчити теоретичний матеріал та ознайомитися з прикладами виконання практичних завдань, використовуючи відповідну літературу та матеріали, розміщені на сайті дистанційної форми навчання Миколаївського національного аграрного університету **http://moodle.mnau.edu.ua/.**

Робота складається з двох теоретичних питань, що вибираються згідно номера варіанта N за таблицею 1.1:

Таблиця 1.1

Варіанти теоретичних питань

Передостання цифра варіанта		**Остання цифра варіанта**									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
		19	27	7	4	30	29	3	7	6	28
	0	41	57	36	53	41	43	44	53	55	43
		7	10	26	10	2	15	9	10	27	11
	1	35	32	44	53	46	41	47	53	43	39
		21	29	9	16	23	9	18	4	16	14
	2	53	60	59	47	40	34	55	32	47	47

Практичні завдання для самостійної роботи залежить від чисел N та $A = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ – ціла частина числа. N – персональний номер варіанта, який здобувач вищої освіти отримує **індивідуально** у

викладача. Наприклад, якщо $N = 24$, то значення $A = \lfloor \sqrt{N} \rfloor = \lfloor \sqrt{24} \rfloor = [4{,}899] = 4$.

1.2. Правила оформлення роботи

Розрахунково-графічна робота повинна мати адресну частину, тобто титульний лист, на якому приводяться відповідні відомості про здобувача вищої освіти та бланк для рецензії. Робота повинна бути написана акуратно, розбірливим та чітким почерком (або надрукована), з нумерацією сторінок, таблиць і рисунків. Графіки та таблиці повинні виконуватися з урахуванням вимог до їх побудови та оформлення.

Роботи, в яких відсутні пояснення, а також роботи не свого варіанту не перевіряються. В кінці роботи необхідно привести список літератури, якою користувався здобувач вищої освіти при виконанні роботи, поставити дату та особистий підпис і прізвище її виконавця. Виконану роботу здобувач вищої освіти повинен здати на рецензування в установлений термін. Після рецензування здобувач вищої освіти повинен виправити в роботі всі вказані рецензентом недоліки. Якщо робота направлена на доопрацювання, то після виконання усіх вимог рецензента, її слід подати на повторне рецензування, додаючи при цьому попередню роботу.

Розрахунково-графічна робота повинна виконуватися **самостійно**. Якщо буде встановлено протилежне, вона не зараховується, навіть якщо в цій роботі всі завдання виконані вірно.

У період залікової сесії здобувач вищої освіти повинен представити прорецензовану та допущену до захисту роботу. За вимогою викладача, він пояснює розв’язання практичного завдання та відповідає на поставленні теоретичні запитання. Після успішного захисту роботи здобувач вищої освіти допускається до здачі заліку у вигляді підсумкового тестування.

Якщо в процесі вивчення матеріалу чи при розв’язанні практичного завдання у здобувача вищої освіти виникають запитання, на які він не може відповісти самостійно, то він може звернутися до викладача для одержання від нього консультації.

2. ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ КУРСУ

1. Предмет та задачі дисципліни. Поняття економіко-математичної моделі.
2. Сутність, мета і задачі моделювання.
3. Класифікація економіко-математичних моделей.
4. Методика і технологічні етапи побудови економіко-математичних моделей.
5. Системний підхід у моделюванні.
6. Основні принципи системного підходу.
7. Загальна постановка оптимізаційної задачі. Алгоритм розв'язання задачі на комп'ютері.
8. Задача планування виробництва (використання ресурсів).
9. Задача структурної оптимізації (складання раціону).
10. Задача раціонального використання виробничих потужностей.
11. Задача оптимального розкрою матеріалів.
12. Транспортна задача та методи її розв'язання.
13. Задачі цілочислового програмування та методи їх розв'язання.
14. Постановка задачі оптимального призначення.
15. Алгоритм розв'язання задачі оптимального призначення на комп'ютері. Поняття про редукцію у задачі на призначення.
16. Угорський метод розв'язання задачі про призначення.
17. Постановка задачі комівояжера.
18. Алгоритм розв'язання задачі комівояжера на комп'ютері. Задачі, що зводяться до задачі комівояжера.
19. Розв'язання задачі комівояжера методом редукції.
20. Розв'язання задачі комівояжера методом Монте-Карло.
21. Розв'язання задачі комівояжера методом усереднених коефіцієнтів.
22. Предмет теорії ігор та види невизначеності.
23. Основні понятті теорії ігор.
24. Чисті стратегії. Основні поняття.
25. Пошук оптимальних рішень за допомогою чистих стратегій.
26. Змішані стратегії.
27. Оптимальні змішані стратегії.
28. Дослідження ігор, заданих платіжними матрицями.
29. Аналітичний метод розв'язання ігор 2×2.

30. Графічний метод розв'язання ігор 2×2.
31. Графічний метод розв'язання ігор $2 \times n$ і $m \times 2$.
32. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування.
33. Елементи теорії статистичних рішень.
34. Основні поняття теорії статистичних ігор.
35. Критерій Вальда (критерій крайнього песимізму).
36. Критерій крайнього оптимізму (кращий із кращих).
37. Мінімаксний критерій Севіджа (критерій крайнього песимізму).
38. Критерій узагальненого максиміна Гурвіца (критерій песимізму-оптимізму).
39. Принцип недостатнього обґрунтування Лапласа.
40. Характеристика критеріїв прийняття рішень в умовах повної невизначеності.
41. Задачі динамічного програмування.
42. Принцип оптимальності Беллмана. Мінімальна відстань (витрати) засобами динамічного програмування.
43. Призначення та сфера використання мереж. Основні поняття теорії графів.
44. Побудова правильної нумерації вершин графу.
45. Алгоритм пошуку найкоротшого шляху мережі (графу).
46. Поняття сіткової моделі та основні її елементи.
47. Правила побудови сіткової моделі.
48. Основні часові параметри сіткової моделі
49. Оптимізація сіткової моделі. Коефіцієнт напруженості.
50. Сіткове планування в умовах невизначеності.
51. Поняття марківського випадкового процесу.
52. Потоки подій.
53. Рівняння Колмогорова. Граничні ймовірності станів.
54. Процеси обслуговування. Системи масового обслуговування.
55. СМО процесу загибелі та розмноження.
56. Основні показники СМО з відмовленнями. Одноканальна СМО з відмовленнями.
57. Багатоканальна СМО з відмовленнями.
58. Загальна постановка багатокритеріальної оптимізації.
59. Жорстко формалізовані методи багатокритеріальної оптимізації.
60. Метод «суперцілі». Метод «послідовних поступок».

3. ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Задача планування виробництва (використання ресурсів)

Використовуючи **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»,** визначити максимальний прибуток цеху від реалізації продукції P_1, P_2, P_3. Ресурси (листи металу, пластмаса, деревина, гроші), норми витрат і прибуток від одиниці продукції задано в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

№ п/п	Показники	Норми витрат на одиницю продукції			Запаси ресурсів
		P_1	P_2	P_3	
1.	Листи металу, куб. м	$0{,}08 - 0{,}003A$	$0{,}08A$	$0{,}03A$	$4N$
2.	Пластмаса, кг	$0{,}9 - 0{,}03A$	$0{,}8 - 0{,}02A$	$0{,}7 - 0{,}01A$	$7N$
3.	Деревина, куб. м	$0{,}05$	$0{,}08$	$0{,}06$	$2{,}5N$
4.	Гроші, грн	$0{,}42 + 0{,}01A$	$0{,}2 + 0{,}01A$	$0{,}4 + 0{,}01A$	$8N$
	Кількість продукції, шт.	X_1	X_2	X_3	
	Прибуток, грн/шт.	$1{,}2A$	$1{,}4A$	$1{,}6A$	

2. Задача структурної оптимізації (складання раціону)

Використовуючи **«ПОИСК РЕШЕНИЯ», р**озрахувати, скільки сім'ї потрібно для споживання продуктів P_1 та P_2, якщо відомо щодо кожного з продуктів: скільки в одному кілограмі міститься білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C та вартість одного кілограму продуктів (таблиця 3.2). Отримати мінімальну загальну вагу та кількість продуктів P_1 та P_2 у суміші, при умові, що у сукупності всі продукти повинні містити не менше заданої потрібної кількості компонентів (білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C).

Таблиця 3.2

Поживні речовини, у.о.	Види продуктів		Щоденна потреба, у.о.
	P_1	P_2	
Білок	$16 + A$	$1 - 0{,}1A$	$10N$
A	$0{,}09$	12	$4N$
B	$4 + 0{,}1A$	A	N
C	-	$7 + 0{,}1A$	N
Кількість продуктів, кг	X_1	X_2	
Вартість 1 кг продукту, грн/кг	$2{,}5N$	$1{,}6N$	

3. Транспортна задача

Використовуючи **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»,** визначити оптимальний план транспортної задачі (таблиця 3.3).

Таблиця 3.3

Споживачі / Постачальники		B_1	B_2	B_3	B_4
		$4N$	$9N$	$7N$	$10N$
A_1	$2N$	$7 + A$	3	$2 + A$	4
A_2	$15N$	4	$3 + A$	5	$2 + A$
A_3	$10N$	$1 + A$	5	$6 + A$	3
A_4	$3N$	3	$6 + A$	8	$5 + A$

4. Задача про призначення

Для матриці призначень визначити максимум цільової функції за допомогою надбудови **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»**.

$$C = \begin{pmatrix} 2+N & 3A & 3+N & 5A & 4+N \\ 4A & 2+N & 4A & 6+N & 2A \\ 2+N & 2A & 2+N & 4A & 3+N \\ 4A & 3+N & 4A & 3+N & 5A \\ N & A & N & 2A & N \end{pmatrix}.$$

5. Задача комівояжера

Розв'язати задачу комівояжера за допомогою надбудови **«ПОИСК РЕШЕНИЯ».**

Таблиця 3.4

n	1	2	3	4	5
1	–	17+N	15-A	7+N	19-A
2	11+N	–	7+N	9+A	13+N
3	9+A	5+N	–	11+N	3+A
4	1+N	13-A	3+N	–	15+N
5	3+A	7+N	9+A	5+N	–

6. Стратегічні ігри

Для матриці гри ***P*** (таблиця 3.5) визначити сідлову точку гри та оптимальні чисті стратегії гравців. Якщо гра не має сідлової точки, то звести її до задачі лінійного програмування та визначити оптимальні змішані стратегії гравців за допомогою надбудови **«ПОИСК РЕШЕНИЯ».**

Таблиця 3.5

Варіант	**Матриця гри *P***	
	№ 1	**№ 2**
1.	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & -6 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

5.	$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -4 & -2 & -5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -3 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 6 & 1 \\ 9 & 3 & 3 & 6 \\ 3 & 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & 1 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} -7 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 5 \\ 7 & 6 & 3 & 5 \\ 11 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 6 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} -6 & 5 & -7 \\ 2 & 5 & 5 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} -5 & -7 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

14.	$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 5 & -4 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 7 & 0 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -2 & -4 & -3 \\ -3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 25 & 10 \\ 21 & 15 \\ 7 & 20 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 & 7 \\ -1 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
18.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -5 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
19.	$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 4 \\ 5 & -4 & 5 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
20.	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -5 & -7 & 10 \\ -5 & 8 & 10 & -13 \\ -7 & 10 & 12 & -15 \\ 10 & -13 & -15 & 18 \end{pmatrix}$
22.	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -1 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 6 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

23.	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -1 & -6 & 2 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
24.	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & -7 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
26.	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
27.	$\begin{pmatrix} -6 & -3 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \\ -5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
28.	$\begin{pmatrix} -6 & -3 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \\ -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
29.	$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 5 \\ -4 & 5 & -2 \\ -7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
30.	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -1 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
31.	$\begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

32.	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 & 8 \\ -2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
33.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 & 9 \\ -5 & 8 & 10 & -11 \\ -7 & 9 & 12 & -15 \\ 10 & -12 & -14 & 17 \end{pmatrix}$
34.	$\begin{pmatrix} -6 & -4 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
35.	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

7. Статистичні ігри

Проводиться порівняння п’яти інвестиційних проектів (таблиця 3.6). Для реалізації кожного з проектів відома собівартість шести видів продукції, які планується виробляти – $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Величини P_j на початкових етапах виконання проекту точно визначити неможливо, тому вони вважаються неконтрольованими факторами. Кожній парі (A_i, P_j) відповідає значення річних затрат. Використовуючи матрицю річних затрат, обрати оптимальні капітальні вкладення. Для цього побудувати матрицю ризиків та визначити оптимальну стратегію учасника гри за критеріями: Лапласа, Вальда, Севіджа, Гурвіца (з параметром $\alpha = 0{,}6$).

Таблиця 3.6

A_i \ P_j	Витрати a_{ij}, тис. у. о.			
	P_1	P_2	P_3	P_4
A_1	6+A	12+N	20-A	24+N
A_2	9+N	7+A	9+N	28-A
A_3	23-A	18+N	15+A	19+N
A_4	27+N	24-A	21+N	15+A

4. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ

ЗАДАЧА 1. Задача планування виробництва (використання ресурсів)

Побудувати економіко-математичну модель задачі та використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»,** визначити максимальний прибуток від реалізації продукції P_1, P_2, P_3. Ресурси (листи металу, пластмаса, деревина, гроші), норми витрат і прибуток від одиниці продукції задано в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

№ п/п	Показники	Норми витрат на одиницю продукції			Запаси ресурсів
		P_1	P_2	P_3	
1.	Листи металу, куб. м	0,038	1,12	0,42	800
2.	Пластмаса, кг	0,48	0,52	0,56	1400
3.	Деревина, куб. м	0,05	0,08	0,06	500
4.	Гроші, грн	0,56	0,34	0,54	1600
	Кількість продукції, шт.	X_1	X_2	X_3	
	Прибуток, грн/шт.	16,8	19,6	22,4	

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель виробництва.

Нехай x_1 – кількість продукції виду P_1, x_2 – кількість продукції виду P_2, x_3 – кількість продукції виду P_3, тоді загальний прибуток від реалізації всієї продукції P_1, P_2 і P_3 буде дорівнювати

$$Z = 16{,}8x_1 + 19{,}6x_2 + 22{,}4x_3.$$

За умовою задачі необхідно отримати максимальний прибуток від реалізації продукції P_1, P_2, P_3, тому цільова функція матиме вигляд

$$Z = 16{,}8x_1 + 19{,}6x_2 + 22{,}4x_3 \to max.$$

Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів. Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, запишемо сумарні витрати ресурсів 1 виду: $0{,}038x_1 + 1{,}12x_2 + 0{,}42x_3$. За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто 800. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$0{,}038x_1 + 1{,}12x_2 + 0{,}42x_3 \le 800.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання інших видів ресурсів:

$$0{,}48x_1 + 0{,}52x_2 + 0{,}56x_3 \le 1400,$$
$$0{,}05x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 \le 500,$$
$$0{,}56x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}54x_3 \le 1600.$$

Оскільки кількість виготовленої продукції задана поштучно, то маємо задачу цілочислового програмування, тому $x_1, x_2, x_3 -$ цілі. Крім цього за умовою задачі вони повинні бути невід'ємними, тобто $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Отже, **економіко-математична модель задачі** має вигляд:

$$Z = 16{,}8x_1 + 19{,}6x_2 + 22{,}4x_3 \to max$$
$$\begin{cases} 0{,}038x_1 + 1{,}12x_2 + 0{,}42x_3 \le 800, \\ 0{,}48x_1 + 0{,}52x_2 + 0{,}56x_3 \le 1400, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 \le 500, \\ 0{,}56x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}54x_3 \le 1600, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 - \text{цілі}.$$

Використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»** визначимо оптимальний план побудованої задачі та максимальний прибуток від реалізації всієї продукції.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ "ПОИСК РЕШЕНИЯ"

1. Вводимо вихідні дані задачі, формули лівої частини кожного обмеження та формулу цільової функції (рис. 4.1):

F29 | f_x =СУММПРОИЗВ(C21:E21;C29:E29)

	A	B	C	D	E	F	G	H
18								
19			Виріб P1	Виріб P2	Виріб P3			
20		Змінні	x1	x2	x3			
21		Розв'язок						
22						Формули обмежень		
23		Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
24		1 ресурс	0,038	1,12	0,42	=СУММПРОИЗВ($C$21:$E$21;C24:E24)	<=	800
25		2 ресурс	0,48	0,52	0,56	=СУММПРОИЗВ($C$21:$E$21;C25:E25)	<=	1400
26		3 ресурс	0,05	0,08	0,06	=СУММПРОИЗВ($C$21:$E$21;C26:E26)	<=	500
27		4 ресурс	0,56	0,34	0,54	=СУММПРОИЗВ($C$21:$E$21;C27:E27)	<=	1600
28						ЦФ	Напрям	
29		Цільова функція	16,8	19,6	22,4	=СУММПРОИЗВ(C21:E21;C29:E29)	max	

Рис. 4.1. Початкові дані для розв’язання задачі

2. Відкриваємо діалогове вікно ***Сервис - Поиск решения*** і вводимо необхідні дані, обмеження (рис. 4.2) та параметри розрахунку (рис. 4.3):

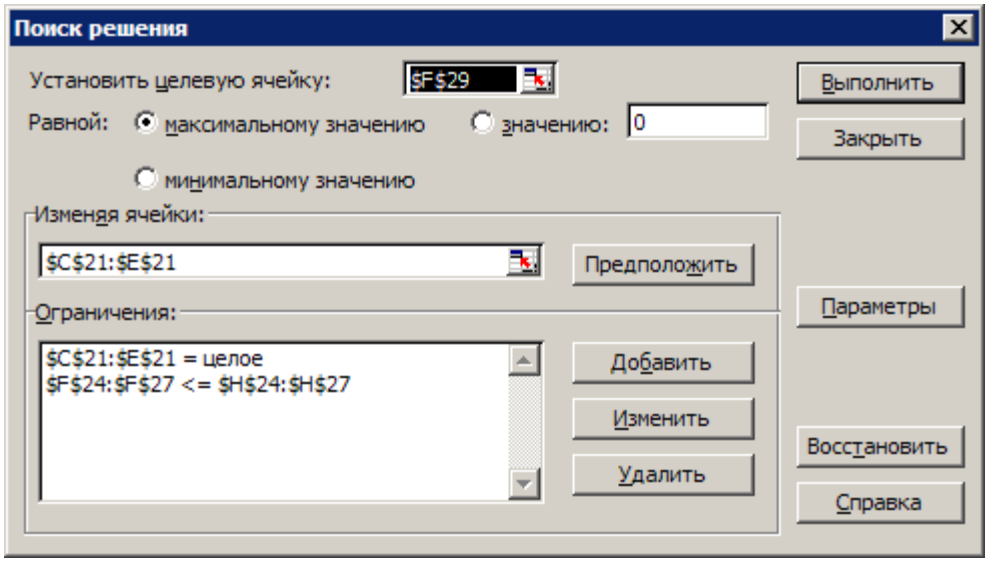

Рис. 4.2. Діалогове вікно «Поиск решения»

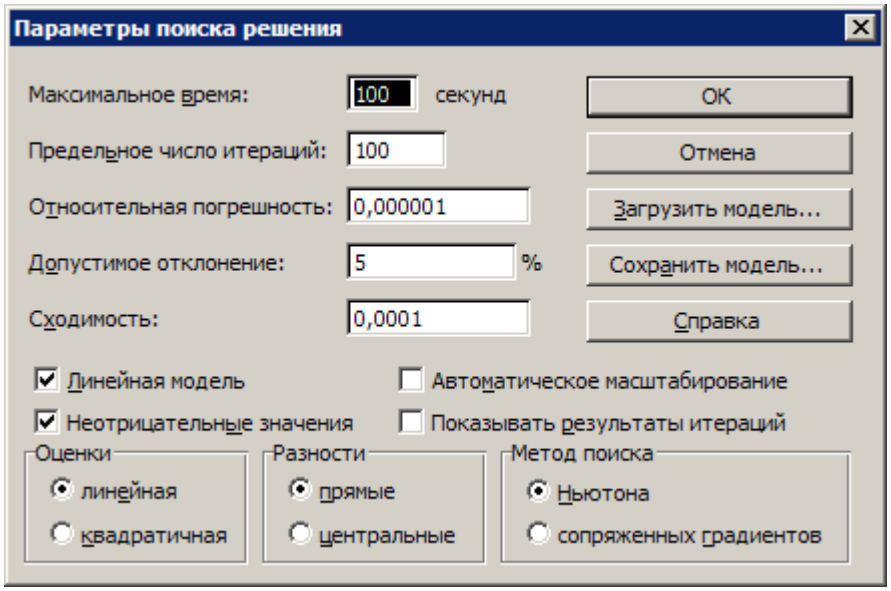

Рис. 4.3. Діалогове вікно «Параметры поиска решения»

3. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **C21:E21** значення оптимального розв'язку, а в клітинці **F29** оптимальне значення цільової функції (рис. 4.4):

	A	B	C	D	E	F	G	H
18		**Розв'язок цілочислової задачі лінійного програмування**						
19			**Виріб P1**	**Виріб P2**	**Виріб P3**			
20		**Змінні**	**x1**	**x2**	**x3**			
21		**Розв'язок**	**776**	**0**	**1835**			
22						**Формули обмежень**		
23		**Обмеження**	**Матриця коефіцієнтів системи обмежень**			**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
24		**1 ресурс**	**0,038**	**1,12**	**0,42**	**800**	**<=**	**800**
25		**2 ресурс**	**0,48**	**0,52**	**0,56**	**1400**	**<=**	**1400**
26		**3 ресурс**	**0,05**	**0,08**	**0,06**	**148,89086**	**<=**	**500**
27		**4 ресурс**	**0,56**	**0,34**	**0,54**	**1425,4215**	**<=**	**1600**
28						**ЦФ**	**Напрям**	
29		**Цільова функція**	**16,8**	**19,6**	**22,4**	**54136,65**	**max**	

Рис. 4.4. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Відповідь. Для отримання максимального прибутку 54136,65 грн підприємству необхідно виготовляти продукції P_1– 776 одиниць, продукції P_3–1835 одиниць, а продукцію P_2 виготовляти не вигідно.

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 1. Задача планування виробництва (використання ресурсів)

Побудувати економіко-математичну модель задачі та використовуючи **«ПОИСК РЕШЕНИЙ»**, визначити максимальний прибуток цеху від реалізації продукції P_1, P_2, P_3. Ресурси (листи металу, пластмаса, деревина, гроші), норми витрат і прибуток від одиниці продукції задано в таблиці 1.

Таблиця 1

№ п/п	Показники	Норма витрат на одиницю продукції P1	P2	P3	Запаси ресурсів
1	Листи металу, куб.м	0,038	1,12	0,42	800
2	Пластмаса, кг	0,48	0,52	0,56	1400
3	Деревина, куб.м	0,05	0,08	0,06	500
4	Гроші, грн	0,56	0,34	0,54	1600
	Кількість продукції, шт.	X1	X2	X3	
	Прибуток, грн/шт.	16,8	19,6	22,4	

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 16{,}8x_1 + 19{,}6x_2 + 22{,}4x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 0{,}038x_1 + 1{,}12x_2 + 0{,}42x_3 \le 800, \\ 0{,}48x_1 + 0{,}52x_2 + 0{,}56x_3 \le 1400, \\ 0{,}05x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 \le 500, \\ 0{,}56x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}54x_3 \le 1600, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0,$$

$$x_1, x_2, x_3 - \text{цілі.}$$

Розв'язок цілочислової задачі лінійного програмування

	Виріб P1	Виріб P2	Виріб P3
Змінні	x1	x2	x3
Розв'язок	776	0	1835

Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Формули обмежень: Ліва частина	Знак	Права частина
1 ресурс	0,038	1,12	0,42	800	<=	800
2 ресурс	0,48	0,52	0,56	1400	<=	1400
3 ресурс	0,05	0,08	0,06	148,89086	<=	500
4 ресурс	0,56	0,34	0,54	1425,4215	<=	1600
				ЦФ	Напрям	
Цільова функція	16,8	19,6	22,4	54136,65	max	

Відповідь	Для отримання максимального прибутку	54136,65	грн
	необхідно виготовляти продукцію: P1 =	776	штук
	P2 =	0	штук
	P3 =	1835	штук

Рис. 4.5. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 2. Задача структурної оптимізації (складання раціону)

Побудувати економіко-математичну модель задачі та використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»,** розрахувати, скільки сім'ї потрібно для споживання продуктів P_1 та P_2, якщо відомо щодо кожного з продуктів: скільки в одному кілограмі міститься білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C та вартість одного кілограму продуктів (таблиця 4.2).

Отримати мінімальну загальну вагу та кількість продуктів P_1 та P_2 у суміші, при умові, що у сукупності всі продукти повинні містити не менше заданої потрібної кількості компонентів (білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C.

Таблиця 4.2

Поживні речовини, у.о.	Види продуктів		Щоденна потреба, у.о.
	P_1	P_2	
Білок	21	0,5	310
A	0,09	12	124
B	4,5	5	4
C	0	7,5	31
Кількість продуктів, кг	X_1	X_2	
Вартість 1 кг продукту, грн/кг	77,5	49,6	

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

Нехай x_1 – кількість продуктів P_1, x_2 – кількість продуктів P_2, тоді загальна вага всіх продуктів P_1 і P_2 буде дорівнювати

$$Z = 77{,}5x_1 + 49{,}6x_2.$$

За умовою задачі необхідно отримати мінімальну загальну вагу, тому цільова функція матиме вигляд

$$Z = 77{,}5x_1 + 49{,}6x_2 \to min.$$

Виразимо математично умови, що забезпечують необхідну кількість поживних речовин у раціоні. Виходячи з кількості поживних речовин в одиниці продуктів P_1 і P_2, запишемо сумарну кількість білка: $21x_1 + 0{,}5x_2$.

За умовою задачі ця величина повинна бути не менше заданої щоденної потреби білка, тобто 310. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$21x_1 + 0{,}5x_2 \geq 310 .$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання інших поживних речовин:

$$0{,}09x_1 + 12x_2 \geq 124 ,$$

$$4{,}5x_1 + 5x_2 \geq 4 .$$

$$0x_1 + 7{,}5x_2 \geq 31 .$$

Оскільки змінні x_1, x_2– шукана кількість продуктів, то вони повинні бути невід'ємними, тобто $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Отже, **економіко-математична модель задачі** має вигляд:

$$Z = 77{,}5x_1 + 49{,}6x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 21x_1 + 0{,}5x_2 \geq 310, \\ 0{,}09x_1 + 12x_2 \geq 124, \\ 4{,}5x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ 0x_1 + 7{,}5x_2 \geq 31, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 ,$$

Використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»** визначимо оптимальний план побудованої задачі та мінімальну загальну вагу всіх продуктів для щоденного раціону.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ "ПОИСК РЕШЕНИЯ"

1. Вводимо вихідні дані задачі, формули лівої частини кожного обмеження та формулу цільової функції (рис. 4.6):

E33 =СУММПРОИЗВ(C25:D25;C33:D33)

	A	B	C	D	E	F	G
22							
23			Продукт P1	Продукт P2			
24		Змінні	x1	x2			
25		Розв'язок					
26					Формули обмежень		
27		Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
28		Білок	21	0,5	=СУММПРОИЗВ($C$25:$D$25;C28:D28)	>=	310
29		A	0,09	12	=СУММПРОИЗВ($C$25:$D$25;C29:D29)	>=	124
30		B	4,5	5	=СУММПРОИЗВ($C$25:$D$25;C30:D30)	>=	4
31		C	0	7,5	=СУММПРОИЗВ($C$25:$D$25;C31:D31)	>=	31
32					ЦФ	Напрям	
33		Цільова функція	77,5	49,6	=СУММПРОИЗВ(C25:D25;C33:D33)	min	

Рис. 4.6. Початкові дані для розв’язання задачі

2. Відкриваємо діалогове вікно ***Сервис - Поиск решения*** і вводимо необхідні дані, обмеження (рис. 4.7) та параметри розрахунку (рис. 4.8):

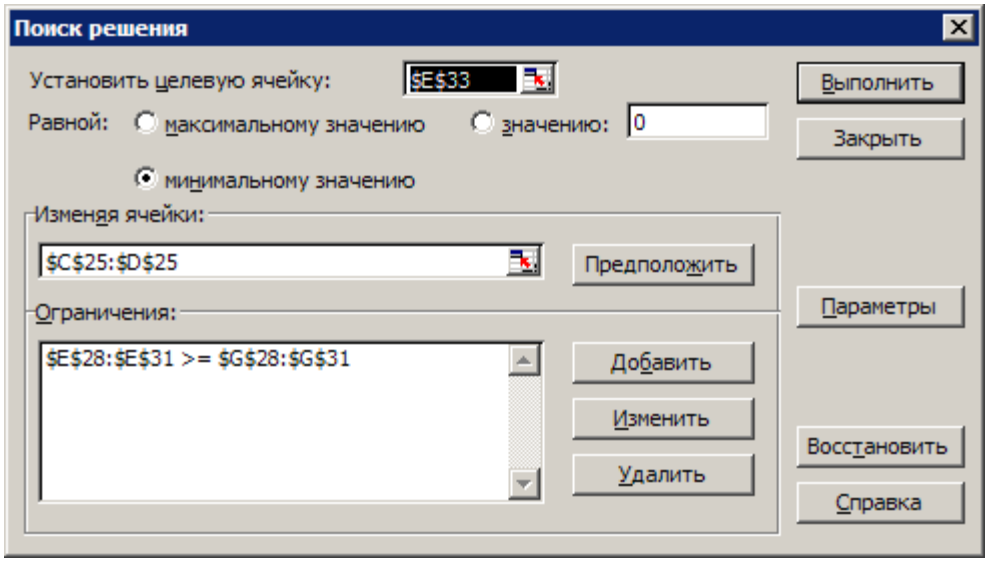

Рис. 4.7. Діалогове вікно «Поиск решения»

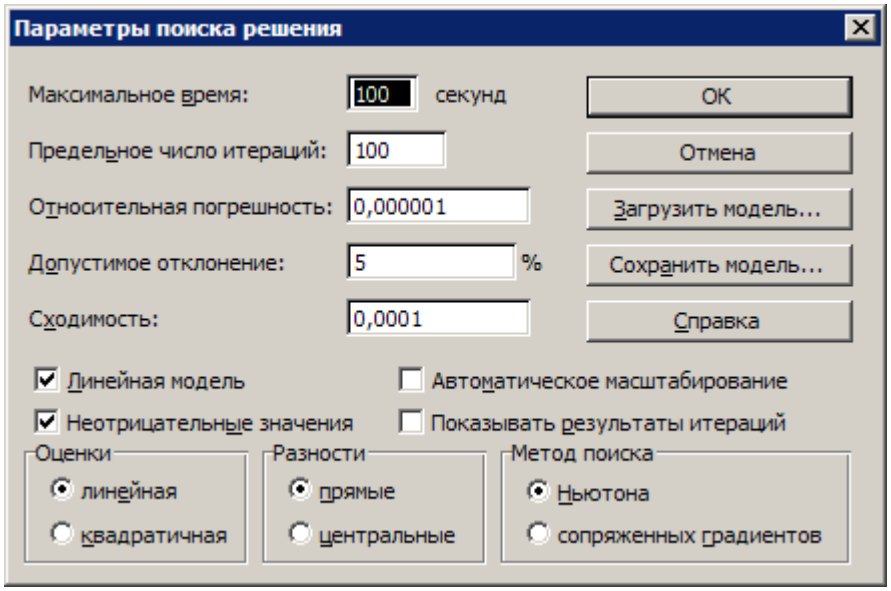

Рис. 4.8. Діалогове вікно «Параметры поиска решения»

3. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **C25:D25** значення оптимального розв'язку, а в клітинці **E33** оптимальне значення цільової функції (рис. 4.9):

	A	B	C	D	E	F	G
21							
22		**Розв'язок задачі лінійного програмування**					
23			**Продукт P1**	**Продукт P2**			
24		**Змінні**	**x1**	**x2**			
25		**Розв'язок**	**14,52**	**10,22**			
26					**Формули обмежень**		
27		**Обмеження**	**Матриця коефіцієнтів системи обмежень**		**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
28		**Білок**	**30**	**-0,4**	**431,46419**	**>=**	**2000**
29		**A**	**0,09**	**12**	**124**	**>=**	**800**
30		**B**	**5,4**	**14**	**221,541942**	**>=**	**4**
31		**C**	**0**	**8,4**	**85,8853367**	**>=**	**200**
32					**ЦФ**	**Напрям**	
33		**Цільова функція**	**500**	**320**	**10531,06**	**min**	

Рис. 4.9. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Відповідь. Для отримання мінімальної загальної ваги щоденного раціону потрібно для споживання продуктів P_1 – 14,52 кг, P_2 –10,22 кг.

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 2. Задача структурної оптимізації (складання раціону)

Побудувати економіко-математичну модель задачі та використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЙ»**, розрахувати, скільки сім'ї потрібно для споживання продуктів P_1 та P_2, якщо відомо щодо кожного з продуктів: скільки в одному кілограмі міститься білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C та вартість одного кілограму продуктів (табл. 2).

Отримати мінімальну загальну вагу та кількість продуктів P_1 та P_2 у суміші, при умові, що у сукупності всі продукти повинні містити не менше заданої потрібної кількості компонентів (білка, вітаміну A, вітаміну B, вітаміну C.

Таблиця 2

№ п/п	Поживні речовини, у.о.	Види продуктів P1	Види продуктів P2	Щоденна потреба,
1	Білок	30	-0,4	2000
2	A	0,09	12	800
3	B	5,4	14	4
4	C	0	8,4	200
	Кількість продуктів, кг	X1	X2	
	Вартість 1 кг продукту, грн/кг	500	320	

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 77{,}5x_1 + 49{,}6x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 21x_1 + 0{,}5x_2 \geq 310, \\ 0{,}09x_1 + 12x_2 \geq 124, \\ 4{,}5x_1 + 5x_2 \geq 4, \\ 0x_1 + 7{,}5x_2 \geq 31, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

Розв'язок задачі лінійного програмування

	Продукт P1	Продукт P2
Змінні	x1	x2
Розв'язок	14,52	10,22

Формули обмежень

Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
Білок	30	-0,4	431,46419	>=	2000
A	0,09	12	124	>=	800
B	5,4	14	221,541942	>=	4
C	0	8,4	85,8853367	>=	200
			ЦФ	Напрям	
Цільова функція	500	320	10531,06	min	

Відповідь	Для отримання мінімальної загальної ваги раці	10531,06	кг
	потрібно для споживання продуктів P1 =	14,52	кг
	P2 =	10,22	кг

Рис. 4.10. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 3. Транспортна задача

Побудувати економіко-математичну модель транспортної задачі (таблиця 4.3) та використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»** визначити її оптимальний план.

Таблиця 4.3

Постачальники, A_i	**Споживачі, B_j**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	**Запаси, a_i**
A_1	12	3	7	4	62
A_2	4	8	5	7	465
A_3	6	5	11	3	310
A_4	3	11	8	10	93
Попит, b_j	124	279	217	310	

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель транспортної задачі. Нехай x_{ij} – кількість продукції, що перевозиться від $i-$го постачальника до $j-$го споживача $(i=\overline{1,4}; j=\overline{1,4})$; c_{ij} – вартість (тарифи) перевезення одиниці продукції від $i-$го постачальника до $j-$го споживача задані у таблиці 3; a_i – запаси продукції $i-$го постачальника; b_j – попит на продукцію $j-$го споживача.

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 62 + 465 + 310 + 93 = 930,$$

а

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 124 + 279 + 217 + 310 = 930,$$

то транспортна задача є збалансованою.

Якщо задача незбалансована, то необхідно ввести додатково фіктивного споживача B_5 (постачальника A_5) з відповідним попитом b_5 (запасом a_5). Вартість перевезення 1 ум. од. продукції до фіктивного споживача (постачальника) беремо рівну нулю.

Таким чином, транспортна таблиця матиме вигляд:

Транспортна таблиця

Постачальники	Споживачі				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	12 x_{11}	3 x_{12}	7 x_{13}	4 x_{14}	62
A_2	4 x_{21}	8 x_{22}	5 x_{23}	7 x_{24}	465
A_3	6 x_{31}	5 x_{32}	11 x_{33}	3 x_{34}	310
A_4	3 x_{41}	11 x_{42}	8 x_{43}	10 x_{44}	93
Попит	**124**	**279**	**217**	**310**	

Тоді, **економіко-*математична модель транспортної задачі*** запишеться таким чином:

$$Z = 12x_{11} + 3x_{12} + 7x_{13} + 4x_{14} + 4x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 7x_{24} +$$
$$+ 6x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 3x_{34} + 3x_{41} + 11x_{42} + 8x_{43} + 10x_{44} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 62, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 465, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 310, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 93, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 124, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 279, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 217, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 310, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,4}.$$

Використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»** визначимо оптимальний план побудованої транспортної задачі та мінімальні затрати на перевезення продукції.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ "ПОИСК РЕШЕНИЯ"

1. Вводимо вихідні дані задачі, формули лівої частини кожного обмеження та формулу цільової функції (рис. 4.11):

H24 =СУММПРОИЗВ(C21:F24;C28:F31)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	12	3	7	4				
22		X2j	4	8	5	7				
23		X3j	6	5	11	3		ЦФ	Напрям	
24		X4j	3	11	8	10		=СУММПРОИЗВ(C21:F24;C28:F31)	min	
25								Формули		
26			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
27		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
28		X1j						=СУММ(C28:F28)	=	62
29		X2j						=СУММ(C28:F29)	=	465
30		X3j						=СУММ(C30:F30)	=	310
31		X4j						=СУММ(C31:F31)	=	93
32										
33	Формули обмежень	Ліва частина	=СУММ(C28:C31)	=СУММ(D28:D31)	=СУММ(E28:E31)	=СУММ(F28:F31)				
34		Знак	=	=	=	=				=СУММ(J28:J31)
35	Попит	Права частина	124	279	217	310			=СУММ(C35:F35)	Баланс

Рис. 4.11. Введення вихідних даних та розрахункових формул

В результаті отримаємо початкові дані для розв’язання транспортної задачі (рис. 4.12)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
18										
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	12	3	7	4				
22		X2j	4	8	5	7				
23		X3j	6	5	11	3		ЦФ	Напрям	
24		X4j	3	11	8	10		0	min	
25								Формули		
26			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
27		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
28		X1j						0	=	62
29		X2j						0	=	465
30		X3j						0	=	310
31		X4j						0	=	93
32										
33	Формули обмежень	Ліва частина	0	0	0	0				
34		Знак	=	=	=	=				930
35	Попит	Права частина	124	279	217	310			930	Баланс

Рис. 4.12. Початкові дані для розв’язання транспортної задачі

2. Відкриваємо діалогове вікно ***Сервис - Поиск решения*** і вводимо необхідні дані, обмеження (рис. 4.13) та параметри розрахунку (рис. 4.14):

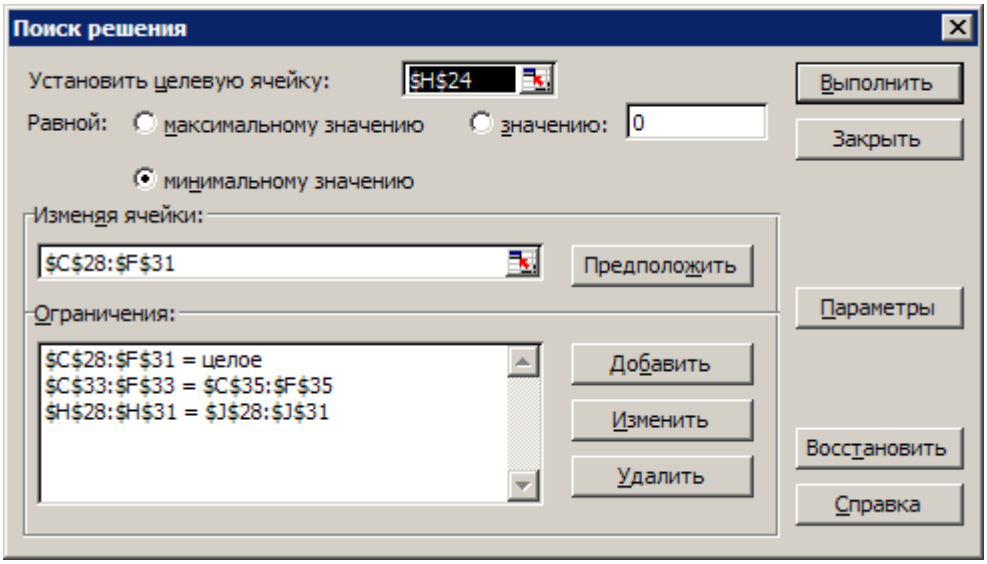

Рис. 4.13. Діалогове вікно «Поиск решения»

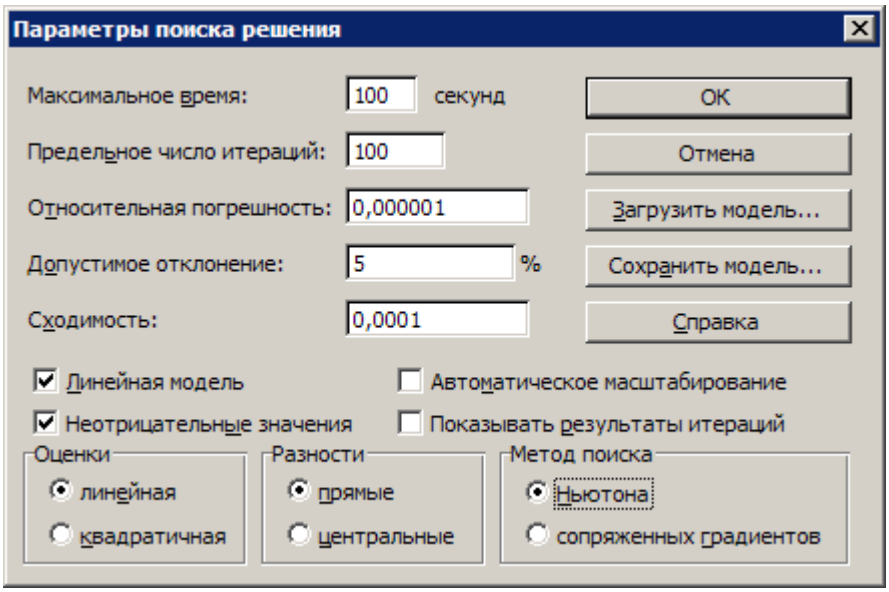

Рис. 4.14. Діалогове вікно «Параметры поиска решения»

3. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **C28:F31** значення оптимального розв'язку, а в клітинці **H24** оптимальне значення цільової функції (рис. 4.15):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
17										
18		**Розв'язок транспортної задачі**								
19			**МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ**							
20		**Тарифи**	**Xi1**	**Xi2**	**Xi3**	**Xi4**				
21		**X1j**	**12**	**3**	**7**	**4**				
22		**X2j**	**4**	**8**	**5**	**7**				
23		**X3j**	**6**	**5**	**11**	**3**		**ЦФ**	**Напрям**	
24		**X4j**	**3**	**11**	**8**	**10**		**4340**	**min**	
25								**Формули**		
26			**МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ**					**обмежень**		**Запаси**
27		**Змінні**	**Xi1**	**Xi2**	**Xi3**	**Xi4**		**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
28		**X1j**	**0**	**62**	**0**	**0**		**62**	**=**	**62**
29		**X2j**	**31**	**217**	**217**	**0**		**465**	**=**	**465**
30		**X3j**	**0**	**0**	**0**	**310**		**310**	**=**	**310**
31		**X4j**	**93**	**0**	**0**	**0**		**93**	**=**	**93**
32										
33	**Формули обмежень**	**Ліва частина**	**124**	**279**	**217**	**310**				
34		**Знак**	**=**	**=**	**=**	**=**				**930**
35	**Попит**	**Права частина**	**124**	**279**	**217**	**310**			**930**	**Баланс**

Рис. 4.15. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Відповідь. Оптимальний план транспортної задачі має вигляд

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 62 & 0 & 0 \\ 31 & 217 & 217 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 310 \\ 93 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому транспортні затрати будуть мінімальними і складуть $Z_{min} = 4340$.

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 3. Транспортна задача

Побудувати економіко-математичну модель транспортної задачі та використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЙ»**, визначити її оптимальний план.

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 12x_{11} + 3x_{12} + 7x_{13} + 4x_{14} + 4x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 7x_{24} +$$
$$+ 6x_{31} + 5x_{32} + 11x_{33} + 3x_{34} + 3x_{41} + 11x_{42} + 8x_{43} + 10x_{44} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 62, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 465, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 310, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 93, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 124, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 279, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 217, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 310, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,4}.$$

Таблиця 3

Постачальники (Ai)	Споживачі Bj B1	B2	B3	B4		Запаси
A1	12	3	7	4		62
A2	4	8	5	7		465
A3	6	5	11	3		310
A4	3	11	8	10		93
Попит	124	279	217	310		

Розв'язок транспортної задачі

МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ

Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		ЦФ	Напрям
X1j	12	3	7	4			
X2j	4	8	5	7			
X3j	6	5	11	3			
X4j	3	11	8	10		4340	min

МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ

	Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Формули обмежень: Ліва частина	Знак	Запаси: Права частина
	X1j	0	62	0	0		62	=	62
	X2j	31	217	217	0		465	=	465
	X3j	0	0	0	310		310	=	310
	X4j	93	0	0	0		93	=	93
Формули обмежень	Ліва частина	124	279	217	310				
	Знак	=	=	=	=				930
Попит	Права частина	124	279	217	310			930	Баланс

Відповідь

Визначений оптимальний план має мінімальні транспортні затрати $Z_{min} = 4340$

Рис. 4.16. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 4. Задача про призначення

Для матриці призначень визначити максимум цільової функції. Розв'язати задачу про призначення за допомогою надбудови «**ПОИСК РЕШЕНИЯ**»:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 8 \\ 14 & 2 & 12 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Нехай n робітників можуть виконувати n різних робіт, причому кожний робітник може виконувати тільки одну роботу.

Відома ефективність c_{ij} виконання $i-$м робітником $j-$ї роботи. Необхідно розподілити робітників за роботами, щоб загальна ефективність була максимальною.

Для математичної постановки задачі введемо бінарну змінну $x_{ij}-$призначення особи A_i на роботу B_j:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } i-\text{й робітник призначений на } j-\text{у роботу} \\ 0, \text{у протилежному разі}. \end{cases}$$

Тоді економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min(max);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} = \{0;1\}, \quad i, j = \overline{1,n}.$$

Перше обмеження означає, що $i-$робітник призначений на одну роботу, друге – на кожну $j-$ю роботу призначений один робітник.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ "ПОИСК РЕШЕНИЯ"

1. Вводимо вихідні дані задачі, розрахункові формули та формулу цільової функції (рис. 4.17):

H25 =СУММПРОИЗВ(C21:G25;C29:G33)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19			**Матриця ефективності робіт**						
20			**Робота 1**	**Робота 2**	**Робота 3**	**Робота 4**	**Робота 5**		
21		**Робітник 1**	3	2	4	12	0		
22		**Робітник 2**	2	1	6	4	0		
23		**Робітник 3**	2	6	1	0	8		
24		**Робітник 4**	14	2	12	4	0	**ЦФ**	**Напрям**
25		**Робітник 5**	6	2	0	4	1	=СУММПРОИЗВ(C21:G25;C29:G33)	**max**
26									
27			**Матриця оптимальних признак**						
28		**Змінні**	**Xi1**	**Xi2**	**Xi3**	**Xi4**	**Xi5**	**Формула**	
29		**X1j**						=СУММ(C29:G29)	
30		**X2j**						=СУММ(C30:G30)	
31		**X3j**						=СУММ(C31:G31)	
32		**X4j**						=СУММ(C32:G32)	
33		**X5j**						=СУММ(C33:G33)	
34		**Формула**	=СУММ(C29:C33)	=СУММ(D29:D33)	=СУММ(E29:E33)	=СУММ(F29:F33)	=СУММ(G29:G33)		

Рис. 4.17. Введення вихідних даних та розрахункових формул

В результаті отримаємо початкові дані для розв’язання задачі про призначення (рис. 4.18):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19			**Матриця ефективності робіт**						
20			**Робота 1**	**Робота 2**	**Робота 3**	**Робота 4**	**Робота 5**		
21		**Робітник 1**	**3**	**2**	**4**	**12**	**0**		
22		**Робітник 2**	**2**	**1**	**6**	**4**	**0**		
23		**Робітник 3**	**2**	**6**	**1**	**0**	**8**		
24		**Робітник 4**	**14**	**2**	**12**	**4**	**0**	**ЦФ**	**Напрям**
25		**Робітник 5**	**6**	**2**	**0**	**4**	**1**	**0**	**max**
26									
27			**Матриця оптимальних призначень**						
28		**Змінні**	**Xi1**	**Xi2**	**Xi3**	**Xi4**	**Xi5**	**Формула**	
29		**X1j**						**0**	
30		**X2j**						**0**	
31		**X3j**						**0**	
32		**X4j**						**0**	
33		**X5j**						**0**	
34		**Формула**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**		

Рис. 4.18. Початкові дані для розв’язання задачі про призначення

2. Відкриваємо діалогове вікно ***Сервис - Поиск решения*** і вводимо необхідні дані, обмеження (рис. 4.19) та параметри розрахунку (рис. 4.20):

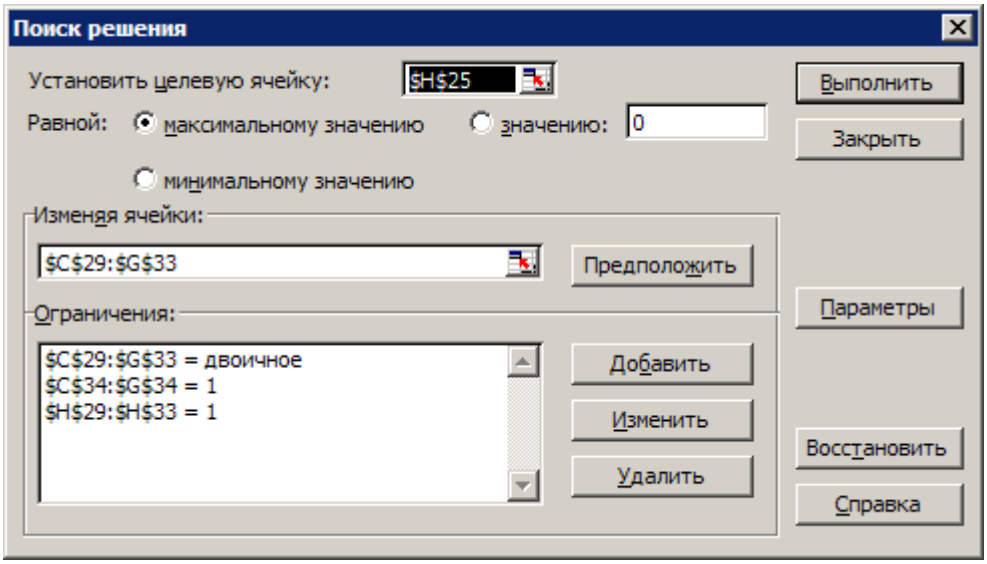

Рис. 4.19. Діалогове вікно «Поиск решения»

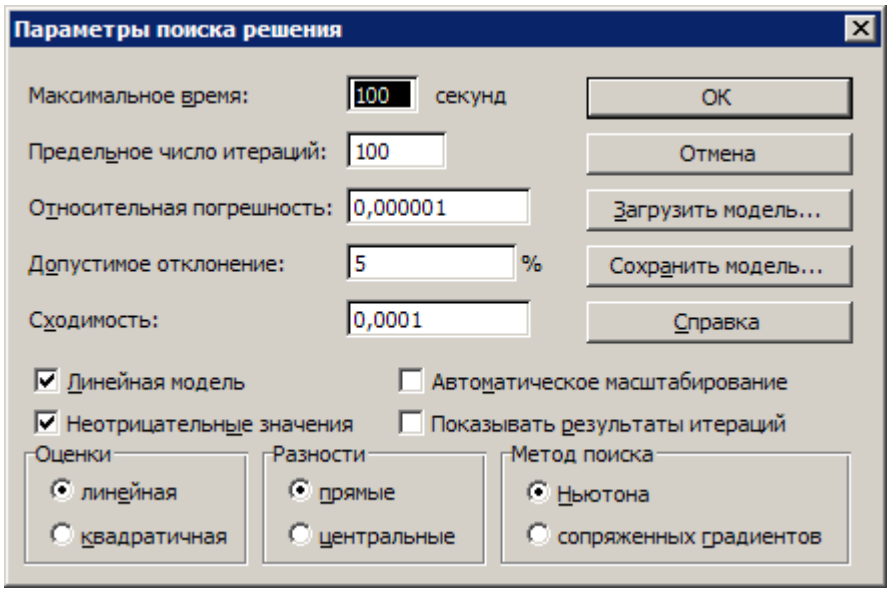

Рис. 4.20. Діалогове вікно «Параметры поиска решения»

3. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **C29:G33** значення оптимального розв'язку, а в клітинці **H25** значення цільової функції (рис. 4.21):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19			**Матриця ефективності робіт**						
20			**Робота 1**	**Робота 2**	**Робота 3**	**Робота 4**	**Робота 5**		
21		**Робітник 1**	**3**	**2**	**4**	**12**	**0**		
22		**Робітник 2**	**2**	**1**	**6**	**4**	**0**		
23		**Робітник 3**	**2**	**6**	**1**	**0**	**8**		
24		**Робітник 4**	**14**	**2**	**12**	**4**	**0**	**ЦФ**	**Напрям**
25		**Робітник 5**	**6**	**2**	**0**	**4**	**1**	**42**	**max**
26									
27			**Матриця оптимальних призначень**						
28		**Змінні**	**Xi1**	**Xi2**	**Xi3**	**Xi4**	**Xi5**	**Формула**	
29		**X1j**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	
30		**X2j**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	
31		**X3j**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	
32		**X4j**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	
33		**X5j**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	
34		**Формула**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**		

Рис. 4.21. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Відповідь. Оптимальний план задачі про призначення має вигляд

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Робітник 1 призначений на роботу 4, робітник 2 – на роботу 3, робітник 3 – на роботу 5, робітник 4 – на роботу 1, робітник 5 – на роботу 2. При цьому продуктивність робіт буде максимальною і складе 42 од.

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 4

Для матриці призначень визначити максимум цільової функції. Розв'язати задачу про призначення за допомогою надбудови ***ПОИСК РЕШЕНИЙ***.

Варіант № 0

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 8 \\ 14 & 2 & 12 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язок задачі про призначення

Матриця ефективності робіт

	Робота 1	Робота 2	Робота 3	Робота 4	Робота 5		
Робітник 1	3	2	4	12	0		
Робітник 2	2	1	6	4	0		
Робітник 3	2	6	1	0	8		
Робітник 4	14	2	12	4	0	ЦФ	Напрям
Робітник 5	6	2	0	4	1	42	max

Матриця оптимальних призначень

Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Формула
X1j	0	0	0	1	0	1
X2j	0	0	1	0	0	1
X3j	0	0	0	0	1	1
X4j	1	0	0	0	0	1
X5j	0	1	0	0	0	1
Формула	1	1	1	1	1	

Відповідь **Для одержанної матриці призначень оптимальне значення функції мети** $Z_{opt} =$ **42**

Рис. 4.22. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 5. Задача комівояжера.

Розв'язати задачу комівояжера за допомогою надбудови ***ПОИСК РЕШЕНИЙ***:

Таблиця 4.4

–	17	15	7	19
11	–	7	9	13
9	5	–	11	3
1	13	3	–	15
3	7	9	5	–

Розв'язання

Відомо n міст, відстані між якими задаються матрицею $C = (c_{ij})_{n \times n}$. Комівояжер (бродячий торговець) повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися у вихідний пункт маршруту, здійснюючи шлях мінімальної довжини.

Для математичної постановки задачі введемо бінарні змінні

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо маршрут включає переїзд з } i-\text{го міста в } j-\text{те}, \\ 0, \text{у протилежному разі}. \end{cases}$$

Тоді **економіко-математична модель задачі** має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min, \quad i \neq j;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \quad i \neq j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad i \neq j;$$

$$x_{ij} = \{0;1\}; \quad i, j = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1,n};$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad i, j = \overline{2,n}, \quad i \neq j.$$

Перше обмеження означає умову одноразового в'їзду у кожне місто, а друге – одноразового виїзду з міста.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ "ПОИСК РЕШЕНИЯ"

1. Вводимо вихідні дані задачі комівояжера. Діагональним елементам присвоюємо значення або нескінченність (достатньо великі числа, наприклад 100). Потім вводимо розрахункові формули **C34:G34**, **H29:H33** та формулу цільової функції **H25** (рис. 4.23):

H25 | =СУММПРОИЗВ(C21:G25;C29:G33)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
18									
19			Матриця вартості поїздок						
20			Місто 1	Місто 2	Місто 3	Місто 4	Місто 5		
21		Місто 1	100	17	15	7	19		
22		Місто 2	11	100	7	9	13		
23		Місто 3	9	5	100	11	3		
24		Місто 4	1	13	3	100	15	ЦФ	Напрям
25		Місто 5	3	7	9	5	100	=СУММПРОИЗВ(C21:G25;C29:G33)	min
26									
27			Оптимальний маршрут						
28		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Формула	
29		X1j						=СУММ(C29:G29)	
30		X2j						=СУММ(C30:G30)	
31		X3j						=СУММ(C31:G31)	
32		X4j						=СУММ(C32:G32)	
33		X5j						=СУММ(C33:G33)	
34		Формула	=СУММ(C29:C33)	=СУММ(D29:D33)	=СУММ(E29:E33)	=СУММ(F29:F33)	=СУММ(G29:G33)		

Рис. 4.23. Введення вихідних даних та розрахункових формул

В результаті отримаємо початкові дані для розв’язання задачі комівояжера (рис. 4.24):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19			**Матриця вартості поїздок**						
20			**Місто 1**	**Місто 2**	**Місто 3**	**Місто 4**	**Місто 5**		
21		**Місто 1**	**100**	**17**	**15**	**7**	**19**		
22		**Місто 2**	**11**	**100**	**7**	**9**	**13**		
23		**Місто 3**	**9**	**5**	**100**	**11**	**3**		
24		**Місто 4**	**1**	**13**	**3**	**100**	**15**	**ЦФ**	**Напрям**
25		**Місто 5**	**3**	**7**	**9**	**5**	**100**	**0**	**min**
26									
27			**Оптимальний маршрут**						
28		**Змінні**	**Xi1**	**Xi2**	**Xi3**	**Xi4**	**Xi5**	**Формула**	
29		**X1j**						**0**	
30		**X2j**						**0**	
31		**X3j**						**0**	
32		**X4j**						**0**	
33		**X5j**						**0**	
34		**Формула**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**		

Рис. 4.24. Початкові дані для розв’язання задачі про призначення

2. Відкриваємо діалогове вікно ***Сервис - Поиск решения*** і вводимо необхідні дані, обмеження (рис. 4.25) та параметри розрахунку (рис. 4.26):

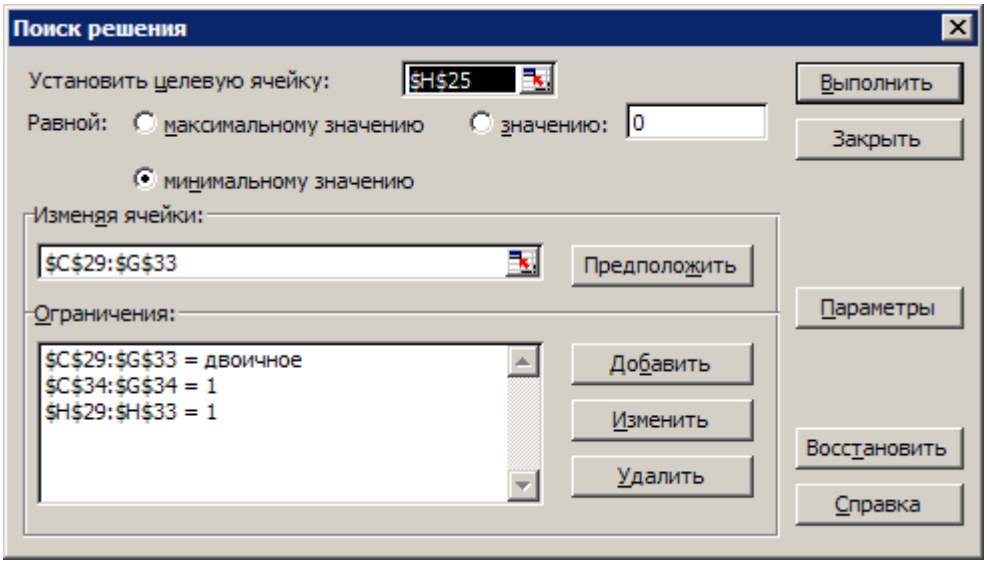

Рис. 4.25. Діалогове вікно «Поиск решения»

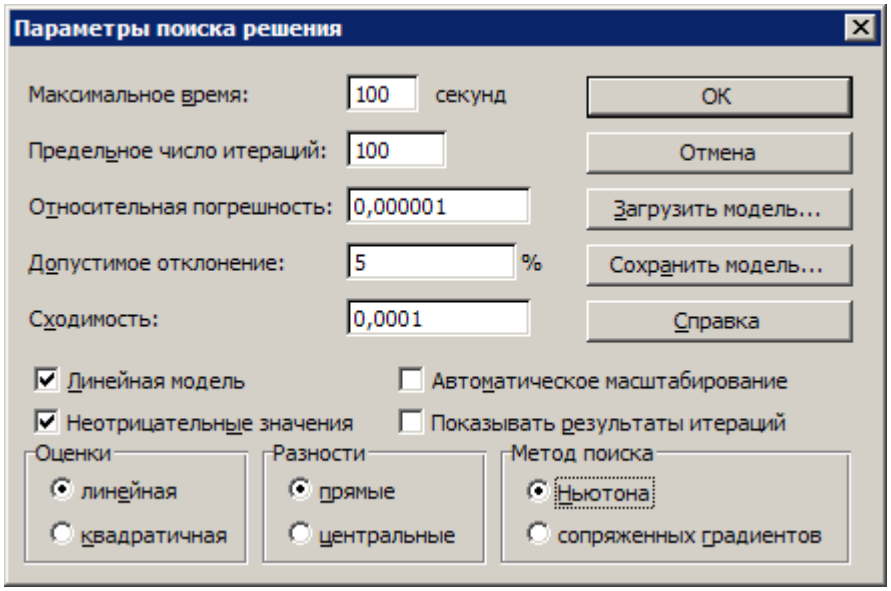

Рис. 4.26. Діалогове вікно «Параметры поиска решения»

3. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **C29:G33** значення оптимального розв'язку (його вказують одиниці на перетинах відповідних міст), а в клітинці **H25** значення цільової функції (рис. 4.27):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19			Матриця вартості поїздок						
20			Місто 1	Місто 2	Місто 3	Місто 4	Місто 5		
21		Місто 1	100	17	15	7	19		
22		Місто 2	11	100	7	9	13		
23		Місто 3	9	5	100	11	3		
24		Місто 4	1	13	3	100	15	ЦФ	Напрям
25		Місто 5	3	7	9	5	100	25	min
26									
27			Оптимальний маршрут						
28		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Формула	
29		X1j	0	0	0	1	0	1	
30		X2j	0	0	1	0	0	1	
31		X3j	0	0	0	0	1	1	
32		X4j	1	0	0	0	0	1	
33		X5j	0	1	0	0	0	1	
34		Формула	1	1	1	1	1		

Рис. 4.27. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

4. Перевіримо вимогу, що комівояжер повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися у вихідний пункт маршруту, здійснюючи шлях мінімальної довжини. Оскільки значення $x_{41} = x_{14} = 1$, то дана вимога не виконується, тому одне із цих значень прирівняємо до нуля, наприклад, $a_{41} = 0$ і доповнимо в систему обмежень (рис. 4.28):

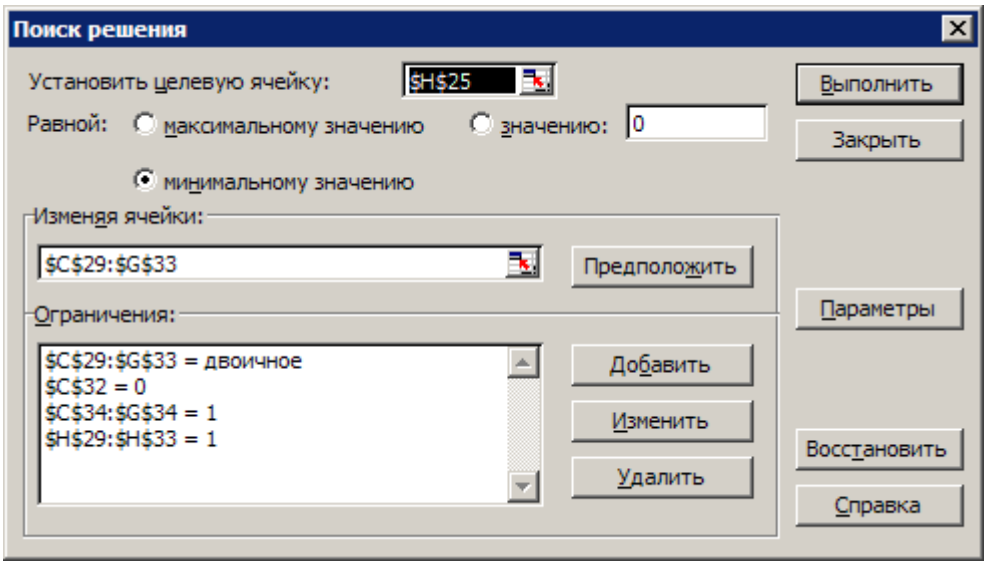

Рис. 4.28. Діалогове вікно «Поиск решения»

5. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **C29:G33** значення оптимального розв'язку, а в клітинці **H25** значення цільової функції (рис. 4.29):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
19			Матриця вартості поїздок						
20			Місто 1	Місто 2	Місто 3	Місто 4	Місто 5		
21		Місто 1	100	17	15	7	19		
22		Місто 2	11	100	7	9	13		
23		Місто 3	9	5	100	11	3		
24		Місто 4	1	13	3	100	15	ЦФ	Напрям
25		Місто 5	3	7	9	5	100	31	min
26									
27			Оптимальний маршрут						
28		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Формула	
29		X1j	0	0	0	1	0	1	
30		X2j	0	0	0	0	1	1	
31		X3j	0	1	0	0	0	1	
32		X4j	0	0	1	0	0	1	
33		X5j	1	0	0	0	0	1	
34		Формула	1	1	1	1	1		

Рис. 4.29. Результати повторної роботи надбудови «Поиск решения»

Оскільки вимога, що комівояжер повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися у вихідний пункт маршруту, здійснюючи шлях мінімальної довжини виконується, то отриманий маршрут комівояжера є оптимальним

$$(1,4) \to (4,3) \to (3,2) \to (2,5) \to (5,1)$$

і функція мети $F_{opt} = 31$.

Відповідь. $(1,4) \to (4,3) \to (3,5) \to (5,2) \to (2,1)$, $F_{opt} = 31$.

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 5

Розв'язати задачу комівояжера за допомогою надбудови ***ПОИСК РЕШЕНИЙ***.

100	17	15	7	19
11	100	7	9	13
9	5	100	11	3
1	13	3	100	15
3	7	9	5	100

Розв'язок задачі комівояжера

Матриця вартості поїздок

	Місто 1	Місто 2	Місто 3	Місто 4	Місто 5		
Місто 1	100	17	15	7	19		
Місто 2	11	100	7	9	13		
Місто 3	9	5	100	11	3		
Місто 4	1	13	3	100	15	ЦФ	Напрям
Місто 5	3	7	9	5	100	31	min

Оптимальний маршрут

Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Xi5	Формула
X1j	0	0	0	1	0	1
X2j	0	0	0	0	1	1
X3j	0	1	0	0	0	1
X4j	0	0	1	0	0	1
X5j	1	0	0	0	0	1
Формула	1	1	1	1	1	

Відповідь **Оптимальне значення функції мети** **31**

Рис. 4.30. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 6. Стратегічні ігри.

Визначити сідлову точку гри та оптимальні чисті стратегії гравців. Якщо гра не має сідлової точки, то звести її до задачі лінійного програмування та визначити оптимальні змішані стратегії гравців за допомогою надбудови **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»**

Задача 1.1

Для заданої платіжної матриці P знайти сідлову точку та оптимальні чисті стратегії гравців, якщо

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Оскільки окремі елементи платіжної матриці від'ємні числа, то перед розв'язанням гри до кожного елемента платіжної матриці додамо число $C = 4$ і отримаємо наступну платіжну матрицю з невід'ємними елементами: $P_1 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 6 \\ 4 & 5 & 9 & 3 \\ 5 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Розглянемо гру, платіжною матрицею якої є відповідні невід'ємні елементи матриці P_1, що має розмірність 4×4 (таблиця 4.5).

Таблиця 4.5

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
A_1	3	8	3	7	**3**
A_2	1	4	7	6	**1**
A_3	4	5	9	3	**3**
A_4	**5**	8	5	7	**5**
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	**5**	**8**	**9**	**7**	$\alpha = 5$ / $\beta = 5$

Визначимо нижню і верхню ціни гри матриці P_1;

Знайдемо мінімальні елементи в рядках:

$$\alpha_1 = min(3;8;3;7) = 3,\ \alpha_2 = min(1;4;7;6) = 1,$$

$$\alpha_3 = min(4;5;9;3) = 3,\ \alpha_4 = min(5;8;5;7) = 5,$$

тоді $\alpha = max(3;1;3;5) = 5 -$ нижня ціна гри.

Знайдемо максимальні елементи в стовпцях:

$$\beta_1 = max(3;1;4;5) = 5,\ \beta_2 = max(8;4;5;8) = 8,$$

$$\beta_3 = max(3;7;9;5) = 9,\ \beta_4 = max(7;6;3;7) = 7,$$

тоді $\beta = min(5;8;9;7) = 5 -$ верхня ціна гри.

Оскільки $\alpha = \beta = 5$, то це гра із сідловою точкою, її оптимальним розв'язком будуть чисті стратегії A_4 і B_1.

Величина $v = 5 -$ ціна гри матриці P_1, тоді ціна початкової гри матриці P буде $v_0 = v - C = 5 - 4 = 1$.

Рішення полягає в тому, що гравець A повинен вибрати стратегію A_4, при цьому його виграш не менше 1. Гравець B повинен вибрати стратегію B_1, при цьому його програш не більше 1. Легко помітити, що відхилення одного із гравців від оптимальної стратегії приводить до зменшення виграшу (для гравця A) і збільшенню програшу (для гравця B).

Відповідь. Оптимальними стратегіями платіжної матриці P є пара чистих стратегій гравців $(A_4; B_1)$, ціна вихідної гри $v_0 == 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ "ПОИСК РЕШЕНИЯ"

1. Вводимо елементи початкової платіжної матриці гри ***P*** (рис. 4.31):

	A	B	C	D	E
8	**Задача 1.1**				
9	**Початкова матриця гри P**				
10	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
11	**A1**	**-1**	**4**	**-1**	**3**
12	**A2**	**-3**	**0**	**3**	**2**
13	**A3**	**0**	**1**	**5**	**-1**
14	**A4**	**1**	**4**	**1**	**3**
15					

Рис. 4.31. Платіжна матриця гри ***P***

2. Оскільки окремі елементи платіжної матриці ***P*** від'ємні числа, то перед розв'язанням гри до кожного елемента платіжної матриці додамо число $C = 4$ і отримаємо наступну платіжну матрицю P_1 з невід'ємними елементами (рис. 4.32):

	A	B	C	D	E
17				**C =**	**4**
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
19	**A1**	**=B11+$E$17**	**=C11+$E$17**	**=D11+$E$17**	**=E11+$E$17**
20	**A2**	**=B12+$E$17**	**=C12+$E$17**	**=D12+$E$17**	**=E12+$E$17**
21	**A3**	**=B13+$E$17**	**=C13+$E$17**	**=D13+$E$17**	**=E13+$E$17**
22	**A4**	**=B14+$E$17**	**=C14+$E$17**	**=D14+$E$17**	**=E14+$E$17**

	A	B	C	D	E
17				**C =**	**4**
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
19	**A1**	**3**	**8**	**3**	**7**
20	**A2**	**1**	**4**	**7**	**6**
21	**A3**	**4**	**5**	**9**	**3**
22	**A4**	**5**	**8**	**5**	**7**

Рис. 4.32. Платіжна матриця гри P_1

3. Вводимо розрахункові формули та визначимо нижню та верхню ціну гри, а потім сідлову точку гри платіжної матриці P_1 (рис. 4.33):

	A	B	C	D	E	F	G
16	**Визначення сідлової точки гри з платіжною матрицею P1**						
17				**C =**	**4**		
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**min(aij)**
19	**A1**	**3**	**8**	**3**	**7**		**=МИН(B19:E19)**
20	**A2**	**1**	**4**	**7**	**6**		**=МИН(B20:E20)**
21	**A3**	**4**	**5**	**9**	**3**		**=МИН(B21:E21)**
22	**A4**	**5**	**8**	**5**	**7**		**=МИН(B22:E22)**
23							**=МАКС(G19:G22)**
24	**max(aij)**	**=МАКС(B19:B22)**	**=МАКС(C19:C22)**	**=МАКС(D19:D22)**	**=МАКС(E19:E22)**	**=МИН(B24:E24)**	
25		**=ЕСЛИ(G23=F24;"Сідлова точка гри існує";"Сідлова точка гри відсутня")**					
26					**Ціна гри v =**		**=G23**

	A	B	C	D	E	F	G
17				**C =**	**4**		
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**min(aij)**
19	**A1**	**3**	**8**	**3**	**7**		**3**
20	**A2**	**1**	**4**	**7**	**6**		**1**
21	**A3**	**4**	**5**	**9**	**3**		**3**
22	**A4**	**5**	**8**	**5**	**7**		**5**
23							**5**
24	**max(aij)**	**5**	**8**	**9**	**7**	**5**	
25		**Сідлова точка гри існує**					
26					**Ціна гри v =**		**5**

Рис. 4.33. Визначення сідлової точки гри

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
3	**ЗАДАЧА 6**								
4–7	Визначити сідлову точку гри та оптимальні чисті стратегії гравців. Якщо гра не має сідлової точки, то звести її до задачі лінійного програмування та визначити оптимальні змішані стратегії гравців за допомогою надбудови *«ПОИСК РЕШЕНИЯ»*								
8	**Задача 1.1**								
9	**Початкова матриця гри P**							**Варіант № 0**	
10	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**				
11	**A1**	**-1**	**4**	**-1**	**3**				
12	**A2**	**-3**	**0**	**3**	**2**				
13	**A3**	**0**	**1**	**5**	**-1**				
14	**A4**	**1**	**4**	**1**	**3**				
15									
16	**Визначення сідлової точки гри з платіжною матрицею P1**								
17				**C =**	**4**				
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**min(aij)**		
19	**A1**	**3**	**8**	**3**	**7**		**3**		
20	**A2**	**1**	**4**	**7**	**6**		**1**		
21	**A3**	**4**	**5**	**9**	**3**		**3**		
22	**A4**	**5**	**8**	**5**	**7**		**5**		
23							**5**		
24	**max(aij)**	**5**	**8**	**9**	**7**	**5**			
25		**Сідлова точка гри існує**							
26					**Ціна гри v =**		**5**		
27									
28	**Відповідь;**	**Ціна гри початкової задачі**			**v0 = v - C =**		**1**		
29		**Оптимальна стратегія**			**гравця A**		**A4**		
30					**гравця B**		**B1**		

Рис. 4.34. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

Задача 1.2

Дві інвестиційні компанії здійснюють капітальні вкладення в чотири підприємства. Стратегії інвестиційних компаній полягають в фінансуванні $i-$го підприємства $i = 1,2,3,4$. Враховуючи особливості інвестицій та місцеві умови, доходи першої інвестиційної компанії виражаються наступною матрицею $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Необхідно вибрати найкращий варіант інвестування або комбінацію із інвестиційних планів. В цій ситуації величина доходу першої інвестиційної компанії вважається такою ж, як і величина збитків для другої компанії.

Розв'язання

Оскільки окремі елементи платіжної матриці від'ємні числа, то перед розв'язанням гри до кожного елемента платіжної матриці додамо число $C = 2$ і отримаємо наступну платіжну матрицю з невід'ємними елементами $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Розглянемо гру, платіжною матрицею якої є відповідні елементи матриці P_1, що має розмірність 4×4.

1. Визначення сідлової точки гри

Таблиця 4.6

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
A_1	2	3	1	4	**1**
A_2	1	2	5	4	**1**
A_3	2	3	4	1	**1**
A_4	4	2	2	2	**2**
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	**4**	**3**	**5**	**4**	$\alpha = 2$ $\beta = 3$

Визначимо нижню і верхню ціни гри матриці P_1;

Знайдемо мінімальні елементи в рядках:

$$\alpha_1 = min(2;3;1;4) = 1,\ \alpha_2 = min(1;2;5;4) = 1,$$
$$\alpha_3 = min(2;3;4;1) = 1, \alpha_4 = min(4;2;2;2) = 2,$$

тоді $\alpha = max(1;1;1;2) = 2$ – нижня ціна гри.

Знайдемо максимальні елементи в стовпцях:

$$\beta_1 = max(2;1;2;4) = 4,\ \beta_2 = max(3;2;3;2) = 3,$$
$$\beta_3 = max(1;5;4;2) = 5,\ \beta_4 = max(4;4;1;2) = 4,$$

тоді $\beta = min(4;2;3;4) = 2$ – верхня ціна гри.

Оскільки $\alpha \neq \beta \quad (2 \neq 3)$, то гра не має сідлової точки і її розв'язком буде змішана стратегія.

2. Зведення гри до задачі лінійного програмування

Оскільки гра не має сідлової точки, то зведемо її до задачі лінійного програмування та визначимо оптимальні змішані стратегії гравців за допомогою надбудови **«ПОИСК РЕШЕНИЯ».**

Розв’яжемо задачу для першої інвестиційної компанії.

Для побудови економіко-математичної моделі використовуємо елементи матриці транспонованої до матриці P_1.

При оптимальній стратегії гравця A (перша інвестиційна компанія) економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \to min$$
$$\begin{cases} 2t_1 + 1t_2 + 2t_3 + 4t_4 \geq 1, \\ 3t_1 + 2t_2 + 3t_3 + 2t_4 \geq 1, \\ 1t_1 + 5t_2 + 4t_3 + 2t_4 \geq 1, \\ 4t_1 + 4t_2 + 1t_3 + 2t_4 \geq 1, \end{cases}$$
$$t_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,4})$$

Розв’язуючи цю задачу за допомогою надбудови **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»**, отримуємо оптимальний план задачі лінійного програмування (рис. 4.41):

$$t_1 = \frac{8}{69}; t_2 = \frac{3}{69}; t_3 = \frac{7}{69}; t_4 = \frac{9}{69}.$$

Оскільки

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{1}{\upsilon},$$

то ціна гри

$$v = \frac{1}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} = \frac{1}{\frac{8}{69} + \frac{3}{69} + \frac{7}{69} + \frac{9}{69}} = \frac{69}{27} = \frac{23}{9}.$$

Звідси отримуємо оптимальний розв'язок для початкової задачі на мінімум:

$$x_1^* = v \cdot t_1 = \frac{23}{9} \cdot \frac{8}{69} = \frac{8}{27};$$

$$x_2^* = v \cdot t_2 = \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{69} = \frac{3}{27};$$

$$x_3^* = v \cdot t_3 = \frac{23}{9} \cdot \frac{7}{69} = \frac{7}{27};$$

$$x_4^* = v \cdot t_4 = \frac{23}{9} \cdot \frac{9}{69} = \frac{9}{27}.$$

Розв'яжемо задачу для другої інвестиційної компанії.

Для побудови економіко-математичної моделі використовуємо елементи матриці P_1.

При оптимальній стратегії гравця B (друга інвестиційна компанія) економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$F = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 + 1z_3 + 4z_4 \le 1, \\ 1z_1 + 2z_2 + 5z_3 + 4z_4 \le 1, \\ 2z_1 + 3z_2 + 4z_3 + 1z_4 \le 1, \\ 4z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 \le 1, \end{cases}$$

$$z_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right)$$

Розв'язуючи цю задачу за допомогою надбудови **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»**, отримуємо оптимальний розв'язок задачі (рис. 4.45):

$$z_1 = \frac{5}{46}; z_2 = \frac{7}{46}; z_3 = \frac{3}{46}; z_4 = \frac{3}{46}.$$

Оскільки

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = \frac{1}{v},$$

то ціна гри

$$v = \frac{1}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4} = \frac{1}{\frac{5}{46} + \frac{7}{46} + \frac{3}{46} + \frac{3}{46}} = \frac{46}{18} = \frac{23}{9}.$$

Звідси отримуємо оптимальний розв'язок для початкової задачі на максимум:

$$y_1^* = v \cdot z_1 = \frac{23}{9} \cdot \frac{5}{46} = \frac{5}{18};$$

$$y_2^* = v \cdot z_2 = \frac{23}{9} \cdot \frac{7}{46} = \frac{7}{18};$$

$$y_3^* = v \cdot z_3 = \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{46} = \frac{3}{18};$$

$$y_4^* = v \cdot z_4 = \frac{23}{9} \cdot \frac{3}{46} = \frac{3}{18}.$$

Відповідь. Оптимальними стратегіями інвестиційних компаній є відповідні змішані стратегії гравців:

$$X^* = \left(\frac{8}{27}; \frac{3}{27}; \frac{7}{27}; \frac{9}{27}\right) \text{ і } Y^* = \left(\frac{5}{18}; \frac{7}{18}; \frac{3}{18}; \frac{3}{18}\right),$$

а ціна вихідної гри

$$v_0 == \frac{23}{9} - 2 = \frac{5}{9}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ "ПОИСК РЕШЕНИЯ"

1. Вводимо елементи початкової платіжної матриці гри ***P*** (рис. 4.35):

	A	B	C	D	E
8	**Задача 1.2**				
9	**Початкова матриця гри P**				
10	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
11	**A1**	**0**	**1**	**-1**	**2**
12	**A2**	**-1**	**0**	**3**	**2**
13	**A3**	**0**	**1**	**2**	**-1**
14	**A4**	**2**	**0**	**0**	**0**

Рис. 4.35. Платіжна матриця гри ***P***

2. Оскільки окремі елементи платіжної матриці ***P*** від'ємні числа, то перед розв'язанням гри до кожного елемента платіжної матриці додамо число $C = 2$ і отримаємо наступну платіжну матрицю P_1 з невід'ємними елементами (рис. 4.36):

	A	B	C	D	E
17				**C =**	**2**
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
19	**A1**	**=B11+$E$17**	**=C11+$E$17**	**=D11+$E$17**	**=E11+$E$17**
20	**A2**	**=B12+$E$17**	**=C12+$E$17**	**=D12+$E$17**	**=E12+$E$17**
21	**A3**	**=B13+$E$17**	**=C13+$E$17**	**=D13+$E$17**	**=E13+$E$17**
22	**A4**	**=B14+$E$17**	**=C14+$E$17**	**=D14+$E$17**	**=E14+$E$17**

	A	B	C	D	E
17				**C =**	**2**
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**
19	**A1**	**2**	**3**	**1**	**4**
20	**A2**	**1**	**2**	**5**	**4**
21	**A3**	**2**	**3**	**4**	**1**
22	**A4**	**4**	**2**	**2**	**2**

Рис. 4.36. Платіжна матриця гри P_1

3. Вводимо розрахункові формули та визначимо нижню та верхню ціну гри, а потім сідлову точку гри платіжної матриці P_1 (рис. 4.37):

	A	B	C	D	E	F	G
16	**Визначення сідлової точки гри з платіжною матрицею P1**						
17				**C =**	**2**		
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**min(aij)**
19	**A1**	**2**	**3**	**1**	**4**		**=МИН(B19:E19)**
20	**A2**	**1**	**2**	**5**	**4**		**=МИН(B20:E20)**
21	**A3**	**2**	**3**	**4**	**1**		**=МИН(B21:E21)**
22	**A4**	**4**	**2**	**2**	**2**		**=МИН(B22:E22)**
23							**=МАКС(G19:G22)**
24	**max(aij)**	**=МАКС(B19:B22)**	**=МАКС(C19:C22)**	**=МАКС(D19:D22)**	**=МАКС(E19:E22)**	**=МИН(B24:E24)**	
25		**=ЕСЛИ(G23=F24;"Сідлова точка гри існує";"Сідлова точка гри відсутня"**					

	A	B	C	D	E	F	G
16	**Визначення сідлової точки гри з платіжною матрицею P1**						
17				**C =**	**2**		
18	**Гравці**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**min(aij)**
19	**A1**	**2**	**3**	**1**	**4**		**1**
20	**A2**	**1**	**2**	**5**	**4**		**1**
21	**A3**	**2**	**3**	**4**	**1**		**1**
22	**A4**	**4**	**2**	**2**	**2**		**2**
23							**2**
24	**max(aij)**	**4**	**3**	**5**	**4**	**3**	
25		**Сідлова точка гри відсутня**					

Рис. 4.37. Визначення сідлової точки гри

4. Вводимо вихідні дані задачі, формули лівої частини кожного обмеження та формулу цільової функції для розв'язання задачі лінійного програмування на ***min*** (рис. 4.38):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
27	**Розв'язання задачі лінійного програмування на min**								
28	**Змінні**	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**				
29	**Значення**								
30									
31	**Обмеження**	**Матриця**					**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
32	**1**	**2**	**1**	**2**	**4**		**=СУММПРОИЗВ($B$29:$E$29;B32:E32)**	**>=**	**1**
33	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**		**=СУММПРОИЗВ($B$29:$E$29;B33:E33)**	**>=**	**1**
34	**3**	**1**	**5**	**4**	**2**		**=СУММПРОИЗВ($B$29:$E$29;B34:E34)**	**>=**	**1**
35	**4**	**4**	**4**	**1**	**2**		**=СУММПРОИЗВ($B$29:$E$29;B35:E35)**	**>=**	**1**
36							**ЦФ**	**Напрям**	
37	**Цільова функція**	**1**	**1**	**1**	**1**		**=СУММПРОИЗВ($B$29:$E$29;B37:E37)**	**min**	
38									
39	**Змінні**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**				
40	**Опт. розвязок**	**=B29*$H$40**	**=C29*$H$40**	**=D29*$H$40**	**=E29*$H$40**	**Ціна гри v=**		**=1/СУММ(B29:E29)**	

Рис. 4.38. Вихідні дані для розв'язання задачі на ***min***

5. Відкриваємо діалогове вікно ***Сервис - Поиск решения*** і вводимо необхідні дані, обмеження (рис. 4.39) та параметри розрахунку (рис. 4.40):

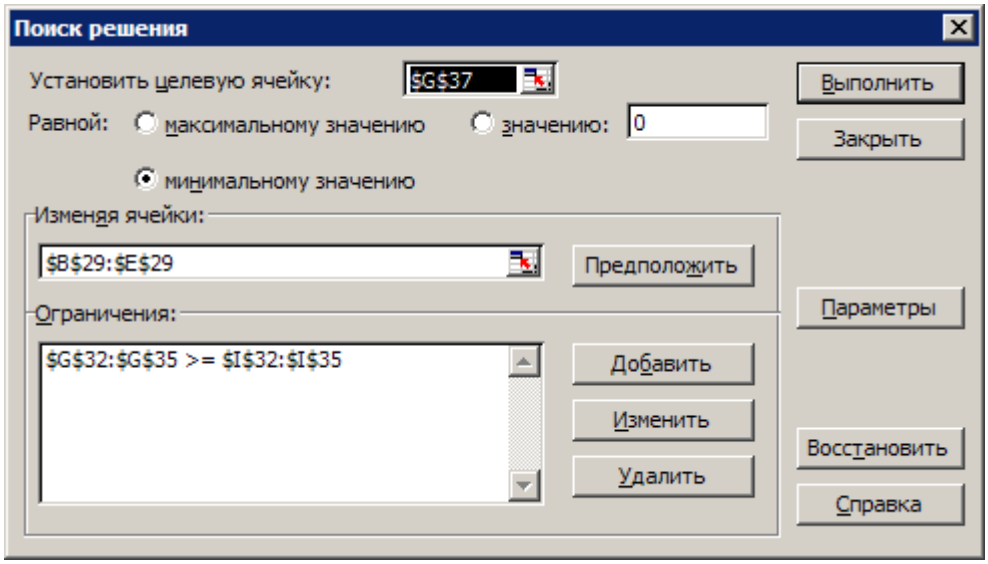

Рис. 4.39. Діалогове вікно «Поиск решения»

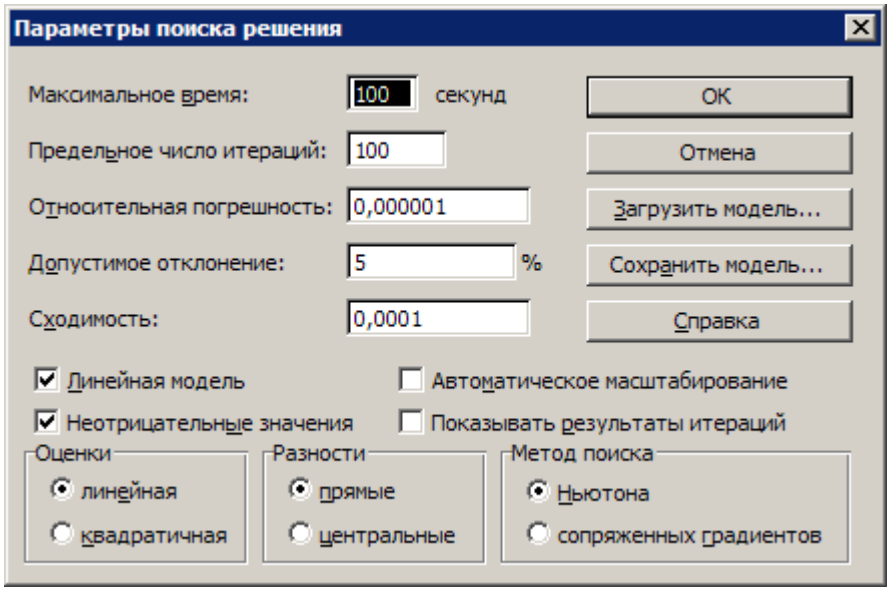

Рис. 4.40. Діалогове вікно «Параметры поиска решения»

6. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **B29:E29** значення оптимального плану, а в клітинці **G37** оптимальне значення цільової функції задачі лінійного програмування. У клітинках **B40:E40** оптимальний розв'язок задачі на ***min***, а в клітинці **H40** ціну гри (рис. 4.41):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
27	**Розв'язання задачі лінійного програмування на min**								
28	**Змінні**	**t1**	**t2**	**t3**	**t4**				
29	**Значення**	**8/69**	**1/23**	**7/69**	**3/23**				
30									
31	**Обмеження**	**Матриця коефіцієнтів системи**					**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
32	**1**	**2**	**1**	**2**	**4**		**1**	>=	**1**
33	**2**	**3**	**2**	**3**	**2**		**1**	>=	**1**
34	**3**	**1**	**5**	**4**	**2**		**1**	>=	**1**
35	**4**	**4**	**4**	**1**	**2**		**1**	>=	**1**
36							**ЦФ**	**Напрям**	
37	**Цільова функція**	**1**	**1**	**1**	**1**		**2/5**	**min**	
38									
39	**Змінні**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**				
40	**Опт. розвязок**	**8/27**	**1/9**	**7/27**	**1/3**	**Ціна гри v=**		**2 5/9**	

Рис. 4.41. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

7. Вводимо вихідні дані задачі, формули лівої частини кожного обмеження та формулу цільової функції для розв’язання задачі лінійного програмування на ***max*** (рис. 4.42):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
42	**Розв'язання задачі лінійного програмування на max**								
43	**Змінні**	**z1**	**z2**	**z3**	**z4**				
44	**Значення**								
45									
46	**Обмеження**	**Матриця**					**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
47	**1**	**2**	**3**	**1**	**4**		**=СУММПРОИЗВ($B$44:$E$44;B47:E47)**	**<=**	**1**
48	**2**	**1**	**2**	**5**	**4**		**=СУММПРОИЗВ($B$44:$E$44;B48:E48)**	**<=**	**1**
49	**3**	**2**	**3**	**4**	**1**		**=СУММПРОИЗВ($B$44:$E$44;B49:E49)**	**<=**	**1**
50	**4**	**4**	**2**	**2**	**2**		**=СУММПРОИЗВ($B$44:$E$44;B50:E50)**	**<=**	**1**
51							**ЦФ**	**Напрям**	
52	**Цільова функція**	**1**	**1**	**1**	**1**		**=СУММПРОИЗВ($B$44:$E$44;B52:E52)**	**max**	
53									
54	**Змінні**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**				
55	**Опт. розвязок**	**=B44*$H$55**	**=C44*$H$55**	**=D44*$H$55**	**=E44*$H$55**	**Ціна гри v=**		**=1/СУММ(B44:E44)**	
56									
57	**Ціна гри початкової задачі**			**v0 = v - C =**				**=H55-E17**	

Рис. 4.42. Вихідні дані для розв’язання задачі на ***max***

8. Відкриваємо діалогове вікно ***Сервис - Поиск решения*** і вводимо необхідні дані, обмеження (рис. 4.43) та параметри розрахунку (рис. 4.44):

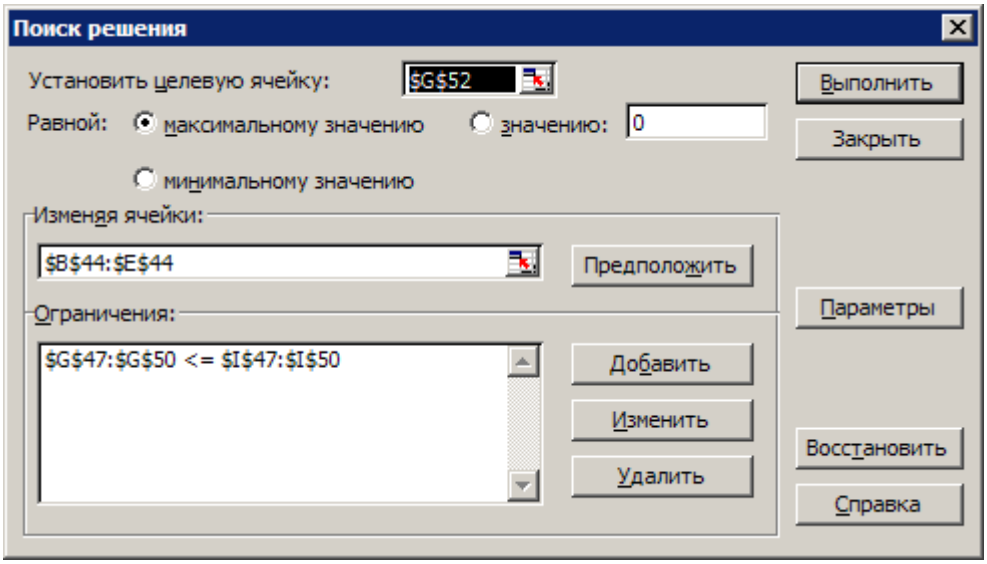

Рис. 4.43. Діалогове вікно «Поиск решения»

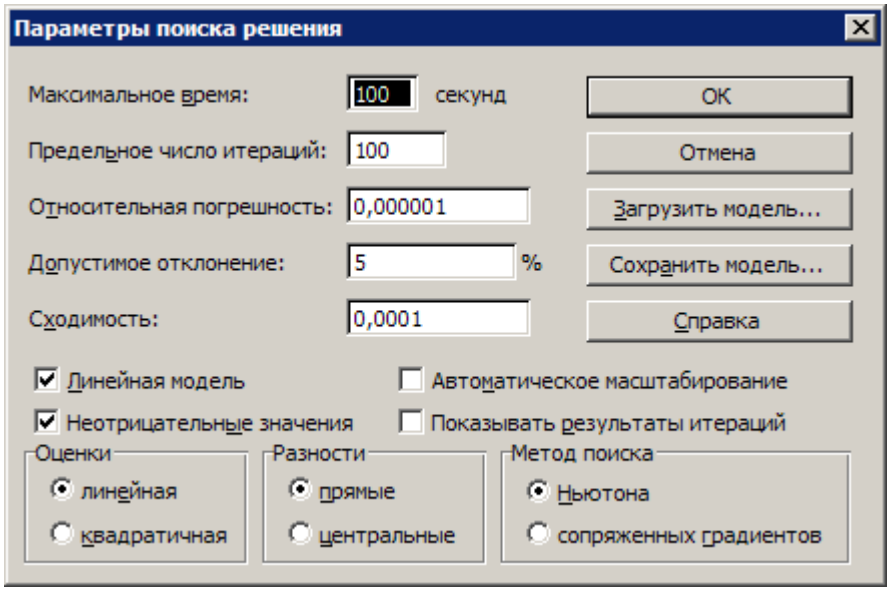

Рис. 4.44. Діалогове вікно «Параметры поиска решения»

9. Нажимаємо ***Ок*** та ***Выполнить*** і отримаємо в клітинках **B44:E44** значення оптимального плану, а в клітинці **G52** оптимальне значення цільової функції задачі лінійного програмування. У клітинках **B55:E55** оптимальний розв'язок задачі на ***max***, в клітинці **H55** ціну гри, в клітинці **G57** ціну гри початкової задачі (рис. 4.45):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
42	**Розв'язання задачі лінійного програмування на max**								
43	**Змінні**	**z1**	**z2**	**z3**	**z4**				
44	**Значення**	**5/46**	**7/46**	**3/46**	**3/46**				
45									
46	**Обмеження**	**Матриця коефіцієнтів системи**					**Ліва частина**	**Знак**	**Права частина**
47	**1**	**2**	**3**	**1**	**4**		**1**	**<=**	**1**
48	**2**	**1**	**2**	**5**	**4**		**1**	**<=**	**1**
49	**3**	**2**	**3**	**4**	**1**		**1**	**<=**	**1**
50	**4**	**4**	**2**	**2**	**2**		**1**	**<=**	**1**
51							**ЦФ**	**Напрям**	
52	**Цільова функція**	**1**	**1**	**1**	**1**		**2/5**	**max**	
53									
54	**Змінні**	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**				
55	**Опт. розвязок**	**5/18**	**7/18**	**1/6**	**1/6**	**Ціна гри v=**		**2 5/9**	
56									
57	**Ціна гри початкової задачі**			**v0 = v - C =**				**5/9**	

Рис. 4.45. Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 6

Визначити сідлову точку гри та оптимальні чисті стратегії гравців. Якщо гра не має сідлової точки, то звести її до задачі лінійного програмування та визначити оптимальні змішані стратегії гравців за допомогою надбудови *«ПОИСК РЕШЕНИЯ»*

Задача 1.2

Початкова матриця гри P Варіант № 0

Гравці	B1	B2	B3	B4
A1	0	1	-1	2
A2	-1	0	3	2
A3	0	1	2	-1
A4	2	0	0	0

Визначення сідлової точки гри з платіжною матрицею P1

C = 2

Гравці	B1	B2	B3	B4		min(aij)
A1	2	3	1	4		1
A2	1	2	5	4		1
A3	2	3	4	1		1
A4	4	2	2	2		2
						2
max(aij)	4	3	5	4	3	

Сідлова точка гри відсутня

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
26									
27	Розв'язання задачі лінійного програмування на min								
28	Змінні	t1	t2	t3	t4				
29	Значення	8/69	1/23	7/69	3/23				
30									
31	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи					Ліва частина	Знак	Права частина
32	1	2	1	2	4		1	>=	1
33	2	3	2	3	2		1	>=	1
34	3	1	5	4	2		1	>=	1
35	4	4	4	1	2		1	>=	1
36							ЦФ	Напрям	
37	Цільова функція	1	1	1	1		2/5	min	
38									
39	Змінні	x1	x2	x3	x4				
40	Опт. розвязок	8/27	1/9	7/27	1/3	Ціна гри v=		2 5/9	
41									
42	Розв'язання задачі лінійного програмування на max								
43	Змінні	z1	z2	z3	z4				
44	Значення	5/46	7/46	3/46	3/46				
45									
46	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи					Ліва частина	Знак	Права частина
47	1	2	3	1	4		1	<=	1
48	2	1	2	5	4		1	<=	1
49	3	2	3	4	1		1	<=	1
50	4	4	2	2	2		1	<=	1
51							ЦФ	Напрям	
52	Цільова функція	1	1	1	1		2/5	max	
53									
54	Змінні	x1	x2	x3	x4				
55	Опт. розвязок	5/18	7/18	1/6	1/6	Ціна гри v=		2 5/9	
56									
57	Ціна гри початкової задачі			v0 = v - C =				5/9	

Рис. 4.46. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 7. Статистичні ігри

Проводиться порівняння п'яти інвестиційних проектів. Для реалізації кожного з проектів відома собівартість шести видів продукції, які планується виробляти – $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Величини P_j на початкових етапах виконання проекту точно визначити неможливо, тому вони вважаються неконтрольованими факторами. Кожній парі (A_i, P_j) відповідає значення річних затрат. Використовуючи матрицю річних затрат (таблиця 4.7), обрати оптимальні капітальні вкладення за критеріями Вальда, Севіджа, Гурвіца (з параметром $\alpha = 0{,}6$), Лапласа, крайнього оптимізму.

Таблиця 4.7

Проекти, A_i	Собівартість продукції, P_j					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A_1	6	12	20	24	15	10
A_2	9	7	9	28	10	11
A_3	23	18	15	19	18	16
A_4	27	24	21	15	16	17
A_5	17	10	11	15	8	26

Розв'язання

Відповідно до умови задачі потрібно порівняти п'ять інвестиційних проектів A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Для реалізації кожного з них відома собівартість шести видів продукції, які планується виробляти, що рівнозначно наявності шести станів «Природи» $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Кожній парі (A_i, P_j) відповідає значення річних затрат, що задані платіжною матрицею затрат (табл. 1).

Для визначення оптимальної стратегії (проекту) скористаємося критеріями Вальда, Севіджа, Гурвіца, Лапласа, крайнього оптимізму.

1. Критерій Вальда

Для ***матриці витрат*** гравця A використовується ***критерій мінімакса***: найкращим рішенням буде те, для якого витрати

виявляться мінімальними із усіх максимальних, при різних варіантах умов:

$$H_W = \min_i \max_j a_{ij}, \text{ або } H_W = \min_i \beta_i, \text{ де } \beta_i = \max_j a_{ij}.$$

Заповнимо вихідні дані та виконаємо відповідні розрахунки (таблиця 4.8):

Таблиця 4.8

Проекти, A_i	Собівартість продукції, P_j						$\beta_i = \max_j a_{ij}$
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
A_1	6	12	20	24	15	10	**24**
A_2	9	7	9	28	10	11	**28**
A_3	23	18	15	19	18	16	**23**
A_4	27	24	21	15	16	17	**27**
A_5	17	10	11	15	8	26	**26**
$H_W = \min_i \beta_i$							**23**

Знайдемо максимальні затрати в кожному рядку: $\beta_i = (24;28;23;27;26)$, а потім серед них мінімальне значення: $H_W = \min_i(24;28;23;27;26) = 23$, яке відповідає стратегії A_3.

У цьому випадку, незалежно від станів «Природи» P, одержимо затрати не більше 23. При будь-якому іншому рішенні, у випадку несприятливих умов, можуть бути отримані затрати більше 23

Таким чином, найкращою стратегією інвестування відповідно до мінімаксного критерію Вальда є стратегія A_3.

2. Критерій Севіджа (критерій крайнього песимізму)

Критерій мінімального ризику Севіджа рекомендує вибирати стратегію, при якій величина ризику набирає найменше значення у найнесприятливішій ситуації:

$$H_S = \min_i \max_j r_{ij},$$

$$\text{або } H_S = \min_i \beta_i, \text{ де } \beta_i = \max_j r_{ij}.$$

Знайдемо мінімальні елементи в кожному стовпці матриці (таблиця 4.9):

Таблиця 4.9

Проекти, A_i	Собівартість продукції, P_j					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A_1	6	12	20	24	15	10
A_2	9	7	9	28	10	11
A_3	23	18	15	19	18	16
A_4	27	24	21	15	16	17
A_5	17	10	11	15	8	26
$\min_i a_{ij}$	**6**	**7**	**9**	**15**	**8**	**10**

Побудуємо матрицю ризиків $R = (r_{ij})$, де $r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij}$ (таблиці 4.10, 4.11):

Таблиця 4.10. Матриця ризиків

Проекти, A_i	Величина ризику r_{ij}					
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A_1	6-6	12-7	20-9	24-15	15-8	10-10
A_2	9-6	7-7	9-9	28-15	10-8	11-10
A_3	23-6	18-7	15-9	19-15	16-8	16-10
A_4	27-6	24-7	21-9	15-15	16-8	17-10
A_5	17-6	10-7	11-9	15-15	8-8	26-10

Таблиця 4.11. Матриця ризиків

Проекти, A_i	Величина ризику r_{ij}						$\beta_i = \max_j r_{ij}$
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
A_1	0	5	11	9	7	0	**11**
A_2	3	0	0	13	2	1	**13**
A_3	17	11	6	4	10	6	**17**
A_4	21	17	12	0	8	7	**21**
A_5	11	3	2	0	0	16	**16**
$H_S = \min_i \beta_i$							**11**

За критерієм мінімального ризику Севіджа потрібно вибрати стратегію, при якій величина ризику набирає найменше значення

в найбільш несприятливій ситуації, тобто $H_S = \min_i(11;13;17;21;16) = 11$, що відповідає стратегії A_1.

Таким чином, найкращою стратегією інвестування відповідно до критерію Севіджа є стратегія A_1.

3. Критерій Гурвіца

Для ***матриці витрат***: перевага надається варіанту рішень, для якого виявиться мінімальним показник G:

$$H_G = \min_i G_i = \min_i \left\{ x \max_j a_{ij} + (1-x) \min_j a_{ij} \right\},$$

або

$$H_G = \min_i G_i,$$

де $G_i = x\alpha_i + (1-x)\beta_i$, $\alpha_i = \max_j a_{ij}$, $\beta_i = \min_j a_{ij}$,

$0 \le x \le 1$ показник песимізму.

Таблиця 4.12

Проекти, A_i	Собівартість продукції, P_j						$\alpha_i = \max_j a_{ij}$	$\beta_i = \min_j a_{ij}$	G_i
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6			
A_1	6	12	20	24	15	10	**24**	**6**	**16,8**
A_2	9	7	9	28	10	11	**28**	**7**	**19,6**
A_3	23	18	15	19	18	16	**23**	**15**	**19,8**
A_4	27	24	21	15	16	17	**27**	**15**	**22,2**
A_5	17	10	11	15	8	26	**26**	**8**	**18,8**
$H_G = \min_i G_i$									**16,8**

В кожному рядку вихідної матриці знайдемо максимальне значення α_i, мінімальне значення β_i та значення критерію G_i для показника песимізму, наприклад $x = 0,6$ (таблиця 4.12):

$$G_1 = 0,6 \cdot 24 + (1-0,6) \cdot 6 = 16,8,$$
$$G_2 = 0,6 \cdot 28 + (1-0,6) \cdot 7 = 19,6,$$
$$G_3 = 0,6 \cdot 23 + (1-0,6) \cdot 15 = 22,2,$$
$$G_4 = 0,6 \cdot 27 + (1-0,6) \cdot 15 = 22,2,$$

$$G_5 = 0{,}6 \cdot 26 + (1 - 0{,}6) \cdot 8 = 18{,}8 .$$

За критерієм Гурвіца для матриці витрат вибирається рішення, для якого значення критерію найменше, тобто $H_G = \min_i G_i = 16{,}8$, що відповідає стратегії A_1.

Таким чином, найкращою стратегією розвитку кредитування відповідно до критерію Гурвіца є стратегія A_1.

4. Критерій Лапласа

За принципом Лапласа усі стани «Природи» $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ – рівноймовірні, оскільки $p_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$ і вибір стратегії можна робити по мінімуму середньозваженого показника ризику:

$$\overline{R_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = \overline{1,m},$$

де n – кількість розглянутих варіантів станів.

Таблиця 4.13

Проекти, A_i	Собівартість продукції, P_j						$\overline{R_i} == \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
A_1	6	12	20	24	15	10	**14,50**
A_2	9	7	9	28	10	11	**12,33**
A_3	23	18	15	19	18	16	**18,17**
A_4	27	24	21	15	16	17	**20,00**
A_5	17	10	11	15	8	26	**14,50**
$H_L = \min_i \overline{R_i}$							**12,33**

Обчислимо очікувані витрати для різних стратегій (таблиця 4.13):

$$\overline{R_1} = \frac{1}{6}(6 + 12 + 20 + 24 + 15 + 10) = 14{,}50;$$

$$\overline{R_2} = \frac{1}{6}(9 + 7 + 9 + 28 + 10 + 11) = 12{,}33;$$

$$\overline{R_3} = \frac{1}{6} \cdot (23 + 18 + 15 + 19 + 18 + 16) = 18{,}17;$$

$$\overline{R_4} = \frac{1}{6} \cdot (27 + 24 + 21 + 15 + 16 + 17) = 20{,}00;$$

$$\overline{R_5} = \frac{1}{6} \cdot (17 + 10 + 11 + 15 + 8 + 26) = 12{,}33.$$

Для матриці витрат критерій Лапласа надає перевагу рішенню з мінімальним значенням

$$H_L = \min_i \overline{R_i} = \min_i (14{,}5; 12{,}33; 18{,}17; 20; 14{,}5) = 12{,}33,$$

що відповідає стратегії A_2.

Таким чином, найкращою стратегією інвестування відповідно до критерію Лапласа є стратегія A_2.

5. Критерій крайнього оптимізму

Для ***матриці витрат:*** найкращим рішенням буде те, для якого витрати виявляться мінімальним із усіх мінімальних, при різних варіантах умов:

$$H_O = \min_i \min_j a_{ij}, \text{ або } H_O = \min_i \beta_j, \text{ де } \beta_j = \min_j a_{ij}.$$

Виконаємо відповідні розрахунки згідно критерію (таблиця 4.14):

Таблиця 4.14

Проекти, A_i	Собівартість продукції, P_j						$\beta_j = \min_j a_{ij}$
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
A_1	6	12	20	24	15	10	**6**
A_2	9	7	9	28	10	11	**7**
A_3	23	18	15	19	18	16	**15**
A_4	27	24	21	15	16	17	**15**
A_5	17	10	11	15	8	26	**8**
$H_O = \min_i \beta_j$							**6**

Знайдемо мінімальні затрати в кожному рядку: $\beta_j = (6;7;15;15;8)$, а потім серед них мінімальне значення: $H_O = \min_i(6;7;15;15;8) = 6$, яке відповідає стратегії A_1.

Таким чином, найкращою стратегією інвестування відповідно до критерію крайнього оптимізму є стратегія A_1.

Висновки

Таким чином, оптимальною стратегією інвестування є:

– за критерієм Вальда – стратегія A_3;
– за критерієм Севіджа – стратегія A_1;
– за критерієм Гурвіца – стратегія A_1.
– за критерієм Лапласа – стратегія A_2,
– за критерієм крайнього оптимізму – стратегія A_1.

Але остаточне рішення про використання тієї чи іншої оптимальної стратегії з врахуванням отриманих результатів повинна приймати людина (ОПР).

РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАТИСТИЧНОЇ ГРИ ЗА ДОПОМОГОЮ ТАБЛИЧНОГО РЕДАКТОРА MS EXCEL

1. Вводимо вихідні дані та розрахункові формули згідно критерію Вальда (рис. 4.47):

	A	B	C	D	E	F	G	H
16	**1. Критерій Вальда**							$\beta_i = \max_j a_{ij}$
17		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	
18	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**	**=МАКС(B18:G18)**
19	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**	**=МАКС(B19:G19)**
20	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**	**=МАКС(B20:G20)**
21	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**	**=МАКС(B21:G21)**
22	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**	**=МАКС(B22:G22)**
23	$H_W = \min_i \beta_i$							**=МИН(H18:H22)**
24								

	A	B	C	D	E	F	G	H
16	**1. Критерій Вальда**							
17		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	$\beta_i = \max_j a_{ij}$
18	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**	**24**
19	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**	**28**
20	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**	**23**
21	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**	**27**
22	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**	**26**
23	$H_W = \min_i \beta_i$							**23**
24								

Рис. 4.47. Оптимальна стратегія за критерієм Вальда

2. Будуємо допоміжну матрицю для критерію Севіджа (рис. 4.48):

	A	B	C	D	E	F	G
25	**2. Критерій Севіджа**						
26		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
27	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**
28	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**
29	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**
30	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**
31	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**
32	$\min_i a_{ij}$	**=МИН(B27:B31)**	**=МИН(C27:C31)**	**=МИН(D27:D31)**	**=МИН(E27:E31)**	**=МИН(F27:F31)**	**=МИН(G27:G31)**
33							

	A	B	C	D	E	F	G
25	**2. Критерій Севіджа**						
26		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
27	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**
28	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**
29	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**
30	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**
31	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**
32	$\min_i a_{ij}$	**6**	**7**	**9**	**15**	**8**	**10**
33							

Рис. 4.48. Допоміжна матриця для критерію Севіджа

3. Будуємо матрицю ризику та розрахункові формули згідно критерію Севіджа (рис. 4.49):

	A	B	C	D	E	F	G	H
34		**Матриця ризмку**						$\beta_i = \max_j r_{ij}$
35		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	
36	**A1**	**=B27-B$32**	**=C27-C$32**	**=D27-D$32**	**=E27-E$32**	**=F27-F$32**	**=G27-G$32**	**=МАКС(B36:G36)**
37	**A2**	**=B28-B$32**	**=C28-C$32**	**=D28-D$32**	**=E28-E$32**	**=F28-F$32**	**=G28-G$32**	**=МАКС(B37:G37)**
38	**A3**	**=B29-B$32**	**=C29-C$32**	**=D29-D$32**	**=E29-E$32**	**=F29-F$32**	**=G29-G$32**	**=МАКС(B38:G38)**
39	**A4**	**=B30-B$32**	**=C30-C$32**	**=D30-D$32**	**=E30-E$32**	**=F30-F$32**	**=G30-G$32**	**=МАКС(B39:G39)**
40	**A5**	**=B31-B$32**	**=C31-C$32**	**=D31-D$32**	**=E31-E$32**	**=F31-F$32**	**=G31-G$32**	**=МАКС(B40:G40)**
41	$H_S = \min_i \beta_i$							**=МИН(H36:H40)**
42								

	A	B	C	D	E	F	G	H
34		**Матриця ризмку**						
35		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	$\beta_i = \max_j r_{ij}$
36	**A1**	**0**	**5**	**11**	**9**	**7**	**0**	**11**
37	**A2**	**3**	**0**	**0**	**13**	**2**	**1**	**13**
38	**A3**	**17**	**11**	**6**	**4**	**10**	**6**	**17**
39	**A4**	**21**	**17**	**12**	**0**	**8**	**7**	**21**
40	**A5**	**11**	**3**	**2**	**0**	**0**	**16**	**16**
41	$H_S = \min_i \beta_i$							**11**
42								

Рис. 4.49. Оптимальна стратегія за критерієм Севіджа

4. Вводимо розрахункові формули згідно критерію Гурвіца (рис. 4.50):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
42										
43	**3. Критерій Гурвіца**				$x =$	0,6		$\alpha_i =$	$\beta_i =$	$G_i =$
44										
45		P1	P2	P3	P4	P5	P6	$\max_j a_{ij}$	$\min_j a_{ij}$	$x\alpha_i + (1-x)\beta_i$
46	A1	6	12	20	24	15	10	=МАКС(B46:G46)	=МИН(B46:G46)	=$F$43*H46+(1-$F$43)*I46
47	A2	9	7	9	28	10	11	=МАКС(B47:G47)	=МИН(B47:G47)	=$F$43*H47+(1-$F$43)*I47
48	A3	23	18	15	19	18	16	=МАКС(B48:G48)	=МИН(B48:G48)	=$F$43*H48+(1-$F$43)*I48
49	A4	27	24	21	15	16	17	=МАКС(B49:G49)	=МИН(B49:G49)	=$F$43*H49+(1-$F$43)*I49
50	A5	17	10	11	15	8	26	=МАКС(B50:G50)	=МИН(B50:G50)	=$F$43*H50+(1-$F$43)*I50
51	$H_G = \min_i G_i$									=МИН(J46:J50)
52										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
43	**3. Критерій Гурвіца**				$x =$	0,6		$\alpha_i =$	$\beta_i =$	$G_i =$
44										
45		P1	P2	P3	P4	P5	P6	$\max_j a_{ij}$	$\min_j a_{ij}$	$x\alpha_i + (1-x)\beta_i$
46	A1	6	12	20	24	15	10	24	6	16,8
47	A2	9	7	9	28	10	11	28	7	19,6
48	A3	23	18	15	19	18	16	23	15	19,8
49	A4	27	24	21	15	16	17	27	15	22,2
50	A5	17	10	11	15	8	26	26	8	18,8
51	$H_G = \min_i G_i$									16,8
52										

Рис. 4.50. Оптимальна стратегія за критерієм Гурвіца

5. Вводимо розрахункові формули згідно критерію Лапласа (рис. 4.51):

	A	B	C	D	E	F	G	H
52								
53	**4. Критерій Лапласа**							$\overline{R}_i == \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
54		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	
55	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**	**=СРЗНАЧ(B55:G55)**
56	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**	**=СРЗНАЧ(B56:G56)**
57	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**	**=СРЗНАЧ(B57:G57)**
58	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**	**=СРЗНАЧ(B58:G58)**
59	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**	**=СРЗНАЧ(B59:G59)**
60	$H_L = \min_i R_i$							**=МИН(H55:H59)**
61								

	A	B	C	D	E	F	G	H
52		i						
53	**4. Критерій Лапласа**							$\overline{R}_i == \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
54		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	
55	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**	**14,50**
56	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**	**12,33**
57	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**	**18,17**
58	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**	**20,00**
59	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**	**14,50**
60	$H_L = \min_i \overline{R}_i$							**12,33**
61								

Рис. 4.51. Оптимальна стратегія за критерієм Лапласа

6. Вводимо розрахункові формули згідно критерію крайнього оптимізму (рис. 4.52):

	A	B	C	D	E	F	G	H
61								
62	**5. Критерій крайнього оптимізму**							$\beta_j = \min_j a_{ij}$
63		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	
64	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**	**=МИН(B64:G64)**
65	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**	**=МИН(B65:G65)**
66	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**	**=МИН(B66:G66)**
67	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**	**=МИН(B67:G67)**
68	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**	**=МИН(B68:G68)**
69	$H_o = \min_i \beta_j$							**=МИН(H64:H68)**
70								

	A	B	C	D	E	F	G	H
62	**5. Критерій крайнього оптимізму**							$\beta_j = \min_j a_{ij}$
63		**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	
64	**A1**	**6**	**12**	**20**	**24**	**15**	**10**	**6**
65	**A2**	**9**	**7**	**9**	**28**	**10**	**11**	**7**
66	**A3**	**23**	**18**	**15**	**19**	**18**	**16**	**15**
67	**A4**	**27**	**24**	**21**	**15**	**16**	**17**	**15**
68	**A5**	**17**	**10**	**11**	**15**	**8**	**26**	**8**
69	$H_o = \min_i \beta_j$							**6**
70								

Рис. 4.52. Оптимальна стратегія за критерієм крайнього оптимізму

Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

ЗАДАЧА 7

Проводиться порівняння п'яти інвестиційних проектів. Для реалізації кожного з проектів відома собівартість шести видів продукції, які планується виробляти – $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$. Величини P_j на початкових етапах виконання проекту точно визначити неможливо, тому вони вважаються неконтрольованими факторами. Кожній парі (A_i, P_j) відповідає значення річних затрат. Використовуючи матрицю річних затрат, обрати оптимальні капітальні вкладення за критеріями Вальда, Севіджа, Гурвіца (з параметром $\alpha = 0{,}6$), Лапласа, крайнього оптимізму

Розв'язання **Варіант № 0**

1. Критерій Вальда

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	$\beta_i = \max_j a_{ij}$
A1	6	12	20	24	15	10	24
A2	9	7	9	28	10	11	28
A3	23	18	15	19	18	16	23
A4	27	24	21	15	16	17	27
A5	17	10	11	15	8	26	26
$H_W = \min_i \beta_i$							23

2. Критерій Севіджа

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
A1	6	12	20	24	15	10
A2	9	7	9	28	10	11
A3	23	18	15	19	18	16
A4	27	24	21	15	16	17
A5	17	10	11	15	8	26
$\min_i a_{ij}$	6	7	9	15	8	10

Матриця ризмку

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	$\beta_i = \max_j r_{ij}$
A1	0	5	11	9	7	0	11
A2	3	0	0	13	2	1	13
A3	17	11	6	4	10	6	17
A4	21	17	12	0	8	7	21
A5	11	3	2	0	0	16	16
$H_S = \min_i \beta_i$							11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
43	**3. Критерій Гурвіца**				$x =$	0,6		$\alpha_i =$	$\beta_i =$	$G_i =$
44										
45		P1	P2	P3	P4	P5	P6	$\max_j a_{ij}$	$\min_j a_{ij}$	$x\alpha_i + (1-x)\beta_i$
46	A1	6	12	20	24	15	10	24	6	16,8
47	A2	9	7	9	28	10	11	28	7	19,6
48	A3	23	18	15	19	18	16	23	15	19,8
49	A4	27	24	21	15	16	17	27	15	22,2
50	A5	17	10	11	15	8	26	26	8	18,8
51	$H_G = \min_i G_i$									16,8
52										
53	**4. Критерій Лапласа**							$\overline{R}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$		
54		P1	P2	P3	P4	P5	P6			
55	A1	6	12	20	24	15	10	14,50		
56	A2	9	7	9	28	10	11	12,33		
57	A3	23	18	15	19	18	16	18,17		
58	A4	27	24	21	15	16	17	20,00		
59	A5	17	10	11	15	8	26	14,50		
60	$H_L = \min_i \overline{R}_i$							12,33		
61										
62	**5. Критерій крайнього оптимізму**							$\beta_j = \min_j a_{ij}$		
63		P1	P2	P3	P4	P5	P6			
64	A1	6	12	20	24	15	10	6		
65	A2	9	7	9	28	10	11	7		
66	A3	23	18	15	19	18	16	15		
67	A4	27	24	21	15	16	17	15		
68	A5	17	10	11	15	8	26	8		
69	$H_O = \min_i \beta_j$							6		
70										
71	**Відповідь**		**Таким чином, оптимальною стратегією є:**							
72				**за критерієм Вальда -**					**стратегія**	**A3**
73				**за критерієм Севіджа -**					**стратегія**	**A1**
74				**за критерієм Гурвіца -**					**стратегія**	**A1**
75				**за критерієм Лапласа -**					**стратегія**	**A2**
76				**за критерієм крайнього оптимізму -**					**стратегія**	**A1**

Рис. 4.53. Приклад оформлення завдання в MS EXCEL

5. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Самостійний напрям в науці, який об'єднує в єдине ціле окремі аспекти математики, економіки і кібернетики, є комплексним методом дослідження, синтезом економічних та математичних знань:

економіко-математичне моделювання
статистичне моделювання
економічне моделювання
математичне моделювання
моделювання

2. Науковий метод, що базується на розробці й дослідженні моделей, явищ різної природи, в даний час широко використовується для розв'язання багатьох науково-технічних та економічних задач:

моделювання
планування
екстраполяція
інтерполяція
прогнозування

3. Об'єкт, що заміщує оригінал і відображає найважливіші ознаки і властивості оригіналу для даного дослідження, даної мети дослідження за обраної системи гіпотез називається:

модель
образ
математична модель
система
економіко-математична модель

4. Образ, зображення або прообраз будь-якого об'єкта або системи об'єктів, що використовується за певних умов як „замінник" називається:

модель
образ
математична модель
система

економіко-математична модель

5. Концентроване вираження найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь називається:

економіко-математична модель
модель
образ
математична модель
система

6. Об'єктом моделювання в економіці є:

економічна система
фінансова установа
зовнішнє середовище
поведінка споживачів
система

7. Модель вважається адекватною об'єкту-оригіналу, якщо вона:

з достатнім ступенем наближення відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому щодо об'єкта дослідження середовищі.

з достатнім ступенем наближення досліджує економічну систему у зовнішньому щодо об'єкта дослідження середовищі

з достатнім ступенем наближення відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у внутрішньому щодо об'єкта дослідження середовищі.

з недостатнім ступенем наближення відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому щодо об'єкта дослідження середовищі.

8. Абстракція реальної дійсності (світу), в якій відношення між реальними елементами, а саме ті, що цікавлять дослідника, замінені відношенням між математичними категоріями називається:

математична модель
економіко-математична модель
модель

образ
комп’ютерна модель

9. Сукупність елементів, що становлять одне ціле, спрямоване на досягнення однієї мети називається:
система
модель
образ
економічна система
прообраз

10. Одним із головних напрямків методології спеціального наукового пізнання економічного розвитку та соціальної практики, мета і завдання якого полягають у дослідженнях певних економічних об'єктів як складних систем є:
системний підхід
практичний підхід
дослідження моделей
творчих підхід
моделювання

11. Моделі, що призначені для вивчення загальних закономірностей і властивостей економічної системи, що розглядається називаються:
теоретико-аналітичні
динамічні
стохастичні
прикладні
статичні

12. Моделі, що дають можливість визначати й оцінювати параметри функціонування конкретних економічних об'єктів і формулювати рекомендації для прийняття практичних господарських рішень (моделі економічного аналізу, прогнозування, управління) називаються:
прикладні
теоретико-аналітичні
статичні
динамічні

стохастичні

13. Моделі в яких значення параметрів належать до одного (фіксованого) моменту часу називаються:
статичні
теоретико-аналітичні
прикладні
динамічні
стохастичні

14. Моделі в яких параметри змінюються в часі називаються:
динамічні
теоретико-аналітичні
прикладні
статичні
стохастичні

15. Моделі в яких час розглядається як неперервний фактор називаються:
неперервні
статичні
стохастичні
детерміновані
дискретні

16. Моделі в яких усі змінні набувають дискретного значення називаються:
дискретні
статичні
стохастичні
детерміновані
неперервні

17. Моделі, що не враховують елементів випадковості, наявні жорсткі функціональні зв'язки називаються:
детерміновані
теоретико-ігрові
стохастичні

статичні
неперервні

18. Моделі, що враховують випадкові процеси називаються:
стохастичні
теоретико-ігрові
детерміновані
статичні
неперервні

19. Моделі, які враховують вплив факторів, що мають більш високу ступінь невизначеності, ніж стохастичні називаються:
теоретико-ігрові
статичні
неперервні
детерміновані
стохастичні

20. Моделі, що абсолютно подібні об'єкту, який досліджується називаються:
ізоморфні
стохастичні
статичні
гомоморфні
детерміновані

21. Моделі, що частково подібні об'єкту, який досліджується називаються:
гомоморфні
стохастичні
ізоморфні
статичні
детерміновані

22. Моделі, що призначені для дослідження об'єктів шляхом встановлення кількісних співвідношень між їх

характеристиками або параметрами (криві зростання, регресійні моделі) називаються:

моделі без керування (дескриптивні моделі)
оптимізаційні
ігрові
імітаційні
комп’ютерні

23. Моделі, що передбачають вияв мети керування й побудову цільової функції, яка задає бажане значення певних параметрів (властивостей) об'єкта, що виражені в математичній формі називаються:

оптимізаційні
моделі без керування (дескриптивні моделі)
ігрові
імітаційні
комп’ютерні

24. Моделі, в яких досліджуються випадки, коли для об'єкта моделювання є характерним наявність сил, що протидіють, або невизначеності параметрів властивостей поведінки називаються:

ігрові
моделі без керування (дескриптивні моделі)
оптимізаційні
імітаційні
комп’ютерні

25. Моделі, що являють собою достатньо складні комп'ютерні програми, що описують поведінку компонентів економічного об'єкта і взаємодію між ними називаються:

імітаційні
моделі без керування (дескриптивні моделі)
оптимізаційні
ігрові
комп’ютерні

26. Визначення найбільшого (максимального) або найменшого (мінімального) значення (екстремуму) цільової функції

$$F(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

за умов

$$q_i(x_1; x_2; \ldots; x_n) \le b_i, \; i = \overline{1,m},$$

де F – задана функція цілі, екстремум якої необхідно знайти;

q_i – задані функції, що формують систему обмежень задачі;

b_i – деякі дійсні числа

називається:

загальна постановка оптимізаційної задачі

задача планування виробництва (використання ресурсів)

задача структурної оптимізації (складання раціону)

задача раціонального використання виробничих потужностей

задача оптимального розкрою матеріалів

27. Економіко-математична модель задачі, що має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$0 \le x_j \le d_j, \quad j = \overline{1,n}:$$

задача планування виробництва (використання ресурсів)

загальна постановка оптимізаційної задачі

задача структурної оптимізації (складання раціону)

задача раціонального використання виробничих потужностей

задача оптимального розкрою матеріалів

28. Економіко-математична модель задачі, що має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$d_j^{min} \leq x_j \leq d_j^{max}, \quad j = \overline{1,n}:$$

задача структурної оптимізації (складання раціону)

задача планування виробництва (використання ресурсів)

загальна постановка оптимізаційної задачі

задача раціонального використання виробничих потужностей

задача оптимального розкрою матеріалів

29. Економіко-математична модель задачі, що має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} x_{ij} \to min;$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_{ij} \leq T_i, \quad i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{ij} = n_j, \quad j = \overline{1,k};$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,k}:$$

задача раціонального використання виробничих потужностей

задача планування виробництва (використання ресурсів)

загальна постановка оптимізаційної задачі

задача структурної оптимізації (складання раціону)

задача оптимального розкрою матеріалів

30. Специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів (або мінімальна вартість перевезення всього товару, або ж мінімальний час його перевезення):

транспортна задача

задача раціонального використання виробничих потужностей

задача цілочислового програмування

задача структурної оптимізації (складання раціону)

31. Нехай *n* робітників можуть виконувати *n* різних робіт, причому кожний робітник може виконувати тільки одну роботу. Відомі затрати *Cij* виконання *i*-м робітником *j*-ї роботи. Розподілити робітників за роботами, щоб загальні затрати виконання робіт були мінімальними:

постановка задачі про призначення

постановка задачі комівояжера

постановка транспортної задачі

постановка задачі структурної оптимізації (складання раціону)

постановка задачі оптимального розкрою матеріалів

32. Відома ефективність *Cij* виконання *i*-м робітником *j*-ї роботи. Необхідно розподілити робітників за роботами, щоб загальна ефективність булла максимальною:

постановка задачі про призначення

постановка задачі комівояжера

постановка транспортної задачі

постановка задачі структурної оптимізації (складання раціону)

постановка задачі оптимального розкрою матеріалів

33. Економіко-математична модель

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min(max);$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i, j = \overline{1,n};$$

$$x_{ij} = \{0;1\}, \quad i, j = \overline{1,n}:$$

задачі про призначення

задачі комівояжера

транспортної задачі

задачі структурної оптимізації (складання раціону)

задачі оптимального розкрою матеріалів

34. Додавання (віднімання) постійної величини до (від) будь-якого рядка чи стовпчика матриці, називається:

редукція
дедукція
аналіз
синтез

35. Задачу про призначення розв'язують:

угорським методом
симплекс-методом
методом штучного базису
методом усереднених коефіцієнтів

36. Задача комівояжера є однією зі знаменитих задач теорії комбінаторики. Вона була поставлена у _____ році.

1934
1944
1954
1932
1933

37. Економіко-математична модель

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min, \quad i \neq j;$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,n}, \quad i \neq j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,n}, \quad i \neq j;$$

$$x_{ij} = \{0;1\}; \quad i, j = \overline{1,n}:$$

задачі комівояжера
задачі про призначення
транспортної задачі
задачі структурної оптимізації (складання раціону)
задачі оптимального розкрою матеріалів

38. Задачу комівояжера розв'язують:

методом усереднених коефіцієнтів
методом редукції
симплес-методом
угорським методом

39. При розв’язуванні задачі комівояжера методом усереднених коефіцієнтів у будь-якому рядку та у будь-якому стовпчику:
повинна існувати одна заборонена клітинка
повинні існувати дві заборонені клітинки
не повинно існувати жодної забороненої клітинки
повинні існувати не більше одної забороненої клітинки

40. Метод оптимізації, пристосований до операцій, в яких процес ухвалення розв'язання може бути розподілений на етапи (кроки):
динамічне програмування
математичне програмування
нелінійне програмування
лінійне програмування

41. Розвиток ДП почався у 50-ті роки XX ст. і зв'язаний з ім'ям:
Беллмана
Вальда
Гурвіца
Севіджа

42. У динамічному програмуванні вирази

$$S_k = \varphi(S_{k-1}, X_k), k = \overline{1,n},$$

називаються:
рівняння станів
цільова функція
припустимі обмеження

43. Хоч би який був стан S системи внаслідок якого-небудь числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно разом з оптимальним керуванням на всіх

подальших кроках призводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи поданий:

принцип оптимальності Беллмана
принцип оптимальності Байєса-Лапласа
принцип оптимальності Гурвіца
принцип оптимальності Севіджа

44. Оптимальна стратегія має таку властивість, що хоч би які були початкові розв'язання і стани, досягнуті в результаті цих рішень, подальші розв'язання мають бути _____ щодо досягнутих попередніх станів.

оптимальними
мінімальними
мінімальними
неоптимальними

45. Системи об'єктів дослідження разом зі зв'язками між ними називаються:

мережею
мереживом
структурою
моделлю

46. Сукупність двох скінченних множин: множини точок, які називаються вершинами, і множини пар вершин, які називаються ребрами, називається:

граф
шлях
дерево
мережа
робота
подія
гілки

47. Якщо пари вершин є впорядкованими, тобто на кожному ребрі задається напрям, то граф називається:

орієнтованим
неорієнтованим
зв'язним

незв'язним

48. Послідовність ребер графа, що не повторюються та веде від деякої вершини до іншої, утворює:

шлях
дерево
мережа
робота
подія
гілки

49. Якщо для будь-яких двох вершин графа існує шлях, що їх з'єднує, то граф називається:

зв'язним
неорієнтованим
незв'язним
орієнтованим

50. Граф вважається_____ , якщо він визначений разом з певною функцією на множині його ребер або дуг.

завантаженим
зв'язним
орієнтованим
неорієнтованим

51. _____ називається така послідовність ребер, коли кожна пара сусідніх ребер має одну загальну вершину.

Маршрутом
Графом
Шляхом
Мережею
Простим ланцюгом

52. _____ називається маршрут, в якому вершини не повторюються.

Простим ланцюгом
Графом
Шляхом
Мережею

53. _____ – це ланцюг, початкова вершина якого співпадає з кінцевою.

Цикл
Граф
Мережа
Шлях

54. _____ – це орієнтований ланцюг.

Шлях
Цикл
Граф
Мережа

55. Зв'язний граф без циклів, що має початкову вершину (корінь) і крайні вершини, називається:

дерево
шлях
мережа
робота
подія
гілки

56. Шляхи від початкової вершини до крайніх вершин дерева називаються:

гілки
графи
мережа
роботи
події

57. Орієнтований кінцевий зв'язний граф, що має початкову вершину (джерело) і кінцеву вершину (стік), називається

мережа
граф
робота
подія
гілки

шлях

58. За правильної нумерації вершин графу будь-який шлях від вершини з меншим номером до вершини з більшим номером:

буде проходити лише через вершини зі зростаючими номерами

буде проходити лише через вершини зі спадаючими номерами

буде проходити лише через вершини з непарними номерами

не буде проходити лише через вершини зі зростаючими номерами.

буде проходити лише через вершини з парними номерами

59. На кожному етапі алгоритму пошуку найкоротшого шляху мережі (графу) відбувається перехід:

від вершини більш високого рангу до вершини меншого рангу

від вершини високого рангу до вершини ще більш високого рангу

від вершини одного рангу до вершини такого ж рангу

від вершини більш низького рангу до вершини більшого рангу

60. У СПУ величина, що характеризує матеріальну дію, що вимагає використання ресурсів, або логічну дію, яка вимагає лише взаємозв'язку подій, називається:

робота

граф

мережа

гілка

шлях

61. Результати виконання однієї або декількох робіт називаються:

подія

граф

мережа

гілки

шлях

62. Послідовність робіт, які слідують одна за одною і сполучають початкову і кінцеву події називається:

шлях
граф
мережа
гілки

63. Шлях, що має максимальну довжину, називається:

критичним
максимальним
оптимальним
середнім

64. Роботи, що належать критичному шляху, називаються:

критичними
оптимальними
максимальними
середніми

65. Замкнуті шляхи, що сполучають подію з нею ж самою –

цикли
події
коло
фіктивні роботи
роботи

66. Термін, необхідний для виконання всіх робіт, що передують даній події, називається:

ранній термін настання події
повний резерв часу роботи
пізній термін настання події
резерв часу події
незалежний резерв часу роботи

67. Максимальний термін, який не порушує пізніх припустимих термінів настання наступних за нею подій, називається:

пізній термін настання події
повний резерв часу роботи
ранній термін настання події
резерв часу події
незалежний резерв часу роботи

68. Величина, що показує, на який гранично допустимий термін можна затримати настання цієї події, не викликаючи при цьому збільшення терміну виконання всього комплексу робіт, називається:
резерв часу події
повний резерв часу роботи
ранній термін настання події
пізній термін настання події
незалежний резерв часу роботи

69. Величина, що показує, на скільки можна збільшити час виконання конкретної роботи за умови, що термін виконання всього комплексу робіт не зміниться, називається:
повний резерв часу роботи
ранній термін настання події
пізній термін настання події
резерв часу події
незалежний резерв часу роботи

70. Частина повного резерву часу, яка одержана у випадку, коли всі попередні роботи закінчуються в пізні терміни, а всі подальші – починаються в ранні терміни, називається:
незалежний резерв часу роботи
повний резерв часу роботи
ранній термін настання події
пізній термін настання події
резерв часу події

71. Різниця між довжиною критичного шляху і шляху, який розглядається, називається:
резерв шляху
повний резерв часу роботи
ранній термін настання події

пізній термін настання події
резерв часу події
незалежний резерв часу роботи

72. Роботи, які лежать на критичному шляху, і сам критичний шлях мають:
нульовий резерв часу
незалежний резерв часу роботи
резерв шляху
повний резерв часу роботи
резерв часу

73. Величина, що показує, на скільки може збільшитися тривалість робіт, що становлять даний шлях, без зміни тривалості загального терміну виконання всіх робіт, називається:
резерв часу
незалежний резерв часу роботи
резерв шляху
нульовий резерв часу
повний резерв часу роботи

74. Перерозподіл ресурсів з ненапружених робіт на критичні для прискорення їх виконання називається:
оптимізація сіткової моделі
оптимізація транспортної моделі
мінімізація сіткової моделі

75. Для оптимізації сіткової моделі, що виражається в перерозподілі ресурсів з ненапружених робіт на критичні для прискорення їх виконання, необхідно якомога більш точно оцінити ступінь складності своєчасного виконання всіх робіт, а також «ланцюжків» шляху за допомогою:
коефіцієнт напруженості
коефіцієнт конкордації
коефіцієнт оптимізації
коефіцієнт кореляції
коефіцієнт детермінації

76. Процес роботи системи масового обслуговування (СМО) – це процес:

випадковий
неперервний
детермінований
дискретний
детермінований

77. Процес зміни в часі стану якої-небудь системи відповідно до ймовірних закономірностей, називається

випадковим процесом
процесом із дискретними станами
процесом із безперервним часом
марківським процесом

78. Процес називається _____ , якщо його можливі стани S1, S2, … можна заздалегідь перелічити, а перехід системи з одного стану в інший відбувається миттєво (стрибком).

процесом із дискретними станами
процесом із безперервним часом
марківським процесом
випадковим процесом без наслідку

79. Процес називається _____ , якщо моменти можливих переходів системи із одного стану в інший є випадковими, а не фіксованими заздалегідь.

процесом із безперервним часом
процесом із дискретними станами
марківським процесом
випадковим процесом без наслідку

80. Для математичного опису марківського випадкового процесу з дискретними станами і безперервним часом, що відбувається в СМО, використовується одне з важливих понять теорії ймовірностей:

поняття потоку подій
поняття частоти події
поняття математичного сподівання
поняття статистичної ймовірності

81. Послідовність однорідних подій, що надходять одна за одною в якісь випадкові моменти часу (наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік відмовлень ЕОМ, потік покупців тощо), називається:

потік подій
інтенсивність подій
потік одинарний
потік без наслідку

82. Під _____ подій розуміють послідовність однорідних подій, що надходять одна за одною в якісь випадкові моменти часу (наприклад, потік викликів на телефонній станції, потік відмовлень ЕОМ, потік покупців тощо).

потоком
частотою
ймовірністю
інтенсивністю

83. Частота появи подій або середнє число подій, що надходять у СМО за одиницю часу, називається:

інтенсивністю
ймовірністю
функцією часу
граничною ймовірностю

84. _____ називається потік подій, що надходять одна за одною через визначені рівні проміжки часу.

Регулярним
Стаціонарним
Потоком без наслідку
Одинарним

85. Потік подій називається_____ , якщо його ймовірнісні характеристики не залежать від часу.

стаціонарним
регулярним
потоком без наслідку
одинарним

86. Потік подій називається_____ , якщо для будь-яких двох непересічних ділянок часу Т1 і Т2 число подій, що припадають на один з них, не залежить від кількості подій, що припадають на інші.

потоком без наслідку
стаціонарним
регулярним
одинарним

87. Потік подій називається _____ , якщо ймовірність потрапляння на малий (елементарний) відтинок часу двох і більше подій нескінченно мала порівнянно з імовірністю влучення однієї події, тобто якщо події з'являються в ньому поодинці, а не групами.

одинарним
потоком без наслідку
стаціонарним
регулярним

88. Граф станів системи з проставленими біля стрілок інтенсивностями будемо називати:

розміченим
регулярним
граничним
нерозміченим
стаціонарним

89. Імовірності системи у граничному стаціонарному режимі називаються _____ ймовірностями станів.

граничними
найпростішими
стаціонарними
оптимальними

90. Системи, призначені для багаторазового використання в процесі розв'язування однотипних задач називаються:

системи масового обслуговування
предмет теорії масового обслуговування

канали масового обслуговування
процеси масового обслуговування

91. Багаторазове використання в процесі розв'язування однотипних задач називається:
процеси обслуговування
канали масового обслуговування
граничний час
системи масового обслуговування

92. Кожна СМО складається з певної кількості обслуговувальних одиниць (приладів, пристроїв, пунктів, станцій), які називаються:
каналами обслуговування
системами масового обслуговування
процесами масового обслуговування

93. Заявки надходять у СМО звичайно не регулярно, а випадково, що утворює так званий:
випадковий потік заявок
стаціонарний потік заявок
регулярний потік заявок

94. Предметом _____ є побудова математичних моделей, що зв'язують задані умови роботи СМО (кількість каналів, їхня продуктивність, характер потоку заявок тощо) з показниками ефективності СМО, що описують її здатність справлятися з потоком **заявок**.
теорії масового обслуговування
теорії графів
теорії ігор

95. Процес, назва якого походить із біологічних задач, де він є математичною моделлю зміни чисельності біологічних популяцій називається:
процес загибелі і розмноження
процес з відмовленнями
процес з чеканням
процес біологічний

96. Середній відносний час перебування одноканальної система з відмовленнями в стані S0 (коли канал вільний):

відносна пропускна спроможність системи

абсолютна пропускна спроможність системи

оптимальна пропускна спроможність системи

середня пропускна спроможність системи

97. Середній відносний час перебування одноканальної система з відмовленнями в стані S1 (коли канал зайнятий):

абсолютна пропускна спроможність системи

відносна пропускна спроможність системи

оптимальна пропускна спроможність системи

середня пропускна спроможність системи

98. Для багатоканальна система з відмовленнями формули

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}},$$

де

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot p_0, \ldots, \; p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0$$

називаються формулами:

Ерланга

Вальда

Гурвійа

Лапласа

99. Область значень показників, що відповідають ефективній множині називається

множиною Парето

множиною багатокритеріальної оптимізації

множиною компромісних планів

множиною ефективних розв’язків

100. Узагальнений критерій багатокритеріальної оптимізації може подаватись у вигляді дробу, де

в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно максимізувати, припустимо F1, F2, …, Fn, а в знаменнику — добуток тих, які потрібно мінімізувати Fn+1, …, Fn+1

в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно мінімізувати, припустимо F1, F2, …, Fn, а в знаменнику — добуток тих, які потрібно максимізувати Fn+1, …, Fn+1

в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно максимізувати, припустимо F1, F2, …, Fn, а в знаменнику — добуток тих, які потрібно максимізувати Fn+1, …, Fn+1

в чисельнику знаходиться добуток показників, які необхідно мінімізувати, припустимо F1, F2, …, Fn, а в знаменнику — добуток тих, які потрібно мінімізувати Fn+1, …, Fn+1

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Воронков О. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій з курсу. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 110 с.
2. Дослідження операцій в економіці : підручник / О. І. Черняк та ін. ; ред. О. І. Черняк. Миколаїв : МНАУ, 2020. 398 с.
3. Дослідження операцій : курс лекцій / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 248 с.
4. Економіко-математичне моделювання : навчальний посібник / В. В. Вітлінський та ін. ; за заг. ред. В. В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2008. 536 с.
5. Економіко-математичні методи та моделі : Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до практ. занять / С. В. Прокопович та ін. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. 52 с.
6. Єсіна В. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій з дисципліни для студентів всіх форм навчання. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 64 с.
7. Мазник Л. В., Гринюк Ю. М. Оптимізації методи та моделі : конспект лекцій для студентів всіх форм навчання. Київ : НУХТ, 2014. 56 с.
8. Математичне програмування : метод. реком. з вивч. дисципліни та виконання контрольних робіт здобувачами вищої освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 132 с.
9. Моделювання економіки : метод. реком. та завдання для практ. занять і самост. роботи здобувачів вищ. освіт / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2018. 59 с.
10. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навчальний посібник. Київ : Видавництво Ліра-К, 2015. 215 с.
11. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / Л. В. Забуранна та ін. Київ : ЦП "Компринт", 2014. 372 с.
12. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. з вивч. дисципліни та виконання контрол. робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2017. 107 с.
13. Скворчевський О. Є. Оптимізаційні методи і моделі в економіці і менеджменті : текст лекцій з курсу «Економіко-математичні методи та моделі». Харків : НТУ «ХПІ», 2014. 76 с.

Навчальне видання

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 6,7.
Наклад 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.