ЧИСЛОВОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ АРОК

Вячеслав Шебанин, Владимир Богза, Сергей Богданов, Иван Хилько
Николаевский национальный аграрный университет
54020, г. Николаев, ул. Парижской коммуны, 9
Viacheslav Shebanin, Vladimir Bogza, Sergei Bogdanov, Ivan Hilko
Nikolaev National Agrarian University
54020, Nikolaev, st. Paris Commune, 9

Аннотация. В работе предложен метод расчета критических нагрузок потери устойчивости арок. Основой метода является то, что произвольная конфигурация арки заменяется на упруго соединенные элементы для которых при заданных регулярных нагрузках с соответствующими предельными условиями на концах отыскиваются точные решения по компонентам напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: Конфигурация арочной конструкции, предельные условия, напряженно-деформированного состояния, сечение арки.

Основная идея предлагаемого метода заключается в том, что произвольная конфигурация арки заменяется упруго соединенными элементами, объединенными по типу коробовой кривой. Каждый элемент имеет свои механические и геометрические характеристики. Для указанных элементов, при заданных регулярных нагрузках с соответствующими предельными условиями на концах, находятся точные решения по компонентам напряженно-деформированного состояния (Н.Д.С.) Для исследования потери устойчивости и определения критических нагрузок арочных конструкций система уравнений нейтрального равновесия арочной конструкции сводится к одно-родному дифференциальному уравнению. Для интегрирования его привлекается приближенный метод Бубнова-Галеркина. В результате, определение Н.Д.С. всей арочной конструкции сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, а при исследовании устойчивости - к определению корней трансцендентных уравнений.

Уравнение равновесия элемента арки могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{dM_z}{d\theta} - RQ_z + Rm_z;$$

$$\frac{dT}{d\theta} + Q_z + Rq_z = 0; \qquad (1)$$

$$\frac{dQ_z}{d\theta} - T + Rq_n = 0;$$

$$\frac{dM_z}{d\theta} - M - RQ_x + Rm_x = 0;$$

$$\frac{dM_z}{d\theta} - M + Rm = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{dQ_x}{d\theta} + Rt = 0$$

Здесь q_z, q_n, t, m_z, m_x, m – приведены к серединной линии элемента внешние усилия и моменты; T, Q_z, M_z – нормальные усилия, пересекающая сила и изгибающий момент в текущем сечении элемента арки; Q_x, M – пересекающая сила и изгибающий момент плоскости элемента арки; M – крутящий момент.

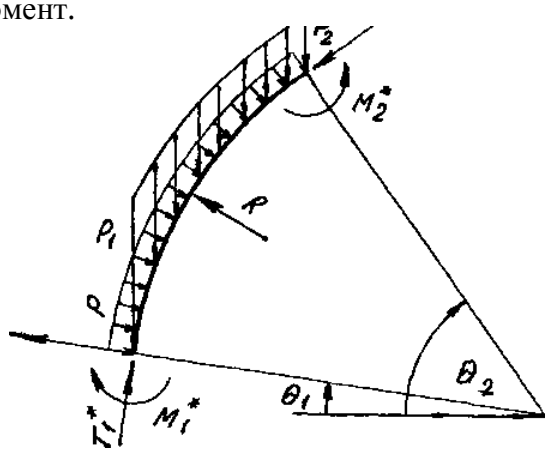

Рис. 1 Расчетная схема стержня арки
Fig. 1 Design scheme rod arch

Изменение кривизны срединной линии кругового элемента определяется формулами:

$$\gamma_{1x} = \frac{1}{R}\left(\frac{d\gamma_1}{d\theta} - \varphi\right); \qquad (3)$$

$$\gamma_{1z} = \frac{1}{R}\frac{d\varphi_2}{d\theta}, \qquad (4)$$

где: φ – угол закручивания поперечного сечения; φ_2, φ_1 – углы поворота сечения (Рис. 1) в плоскости и из плоскости сечения элемента и, причем

$$\varphi_1 = -\frac{1}{R}\frac{dU}{d\theta}, \varphi_2 = --\frac{1}{R}\left(\frac{dW}{d\theta} - V\right)$$

Кручение срединной линии элемента арки

$$\gamma_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{d\varphi}{d\theta} + \varphi_1\right) \qquad (5)$$

Продолжение срединной линии элемента, определенной через смещение записывается так:

$$\varepsilon = \frac{1}{R}\left(\frac{dV}{d\theta} + W\right) \qquad (6)$$

Усилие T, изгибающие моменты M_x M_z и крутящий M момент, приведенные к срединной линии элемента арки, можно показать через компоненты тангенциальной и изгибающей деформации формулами

$$T = EF\varepsilon; M_x = E\left(I_x\gamma_{1x}\right); M_z = E\left(I_z\gamma_{1z}\right); M = GI_k\gamma_1, \qquad (7)$$

где: E – модуль упругости материала; $F = \int dxdz$ – площадь поперечного сечения элемента арки; $I_x = \int x^2 dxdz$ – осевой момент инерции относительно оси x; I_z – тоже относительно оси z; G – модуль сдвига; I_k – момент инерции при кручении.

Уравнение (1) записанное в проекциях на оси связанных с недеформированной системой координат элемента. Это позволяет достаточно просто сформулировать задачу о Н.Д.С. арок, состоящих из соединенных между собой стержней.

Рассмотрим стержень арки (рис. 1), что находится под действием статической нагрузки и вертикально направленных, распределенных нагрузок, которые изменяются по линейному закону.

С учетом соотношений (3), (5), (6) и уравнения равновесия (1) систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение любого стержня арки, можно представить как систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dX}{d\theta} = L\left(X, \theta\right) + b\left(\theta\right) \qquad (8)$$

где: $X = F\left(T, Q_z, M_z V, W, \varphi_2\right)$ – вектор внутренних обобщенных силовых факторов и перемещений, приведенных к оси элемента арки.

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (8) находим все компоненты Н.Д.С. элемента арки.

$$\begin{aligned}
&T = \beta_1\left(\gamma_1 A_1 + \gamma_2 + \bar{T}\right), Q = -\beta_1\left(\gamma_2 A_1 - \gamma_1 - A_2 + \bar{Q}\right),\\
&M_z = -\beta_2\left(\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + A_3 + \bar{M}\right),\\
&V = -\beta_2\left(\gamma_6 A_1 + \gamma_7 A_2 + 2\theta A_3 - 2A_4 + \gamma_1 A_5 + A_6\gamma - \bar{U}\right),\\
&W = -\beta_4\left(\gamma_8 A_1 + \gamma_9 A_2 - 2A_3 - \gamma_2 A_5 + \gamma_1 A_6 - \bar{W}\right),\\
&\varphi_2 = \beta_3\left(\gamma_2 A_1 - \gamma_1 A_2 - \theta A_3 + A_4\bar{\varphi}\right).
\end{aligned} \qquad (9)$$

Подчинив найденные соотношения (9) известным предельным условиям на концах стержня при $\theta = \theta_1$ і $\theta = \theta_2$, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных в форме:

$$\left[L\right]A = U \qquad (10)$$

где: A – вектор неизвестных постоянных интегрирования A_i; $\left[L\right]$ – квадратная матрица, которая имеет порядок системы уравнений; U – вектор свободных членов.

Решение системы (8) позволяет определить все неизвестные, а значит по формулам (9) могут быть определены все компоненты Н.Д.С. стержня.

Рассмотрим арку произвольного очертания, которая состоит из N элементов, соединенных по типу коробовой кривой (Рис.2). Каждый i-й элемент арки имеет свой радиус Ri, характеристики жесткости EIi и EFi. Дифференциальные уравнения, которые описывают поведение каждого i-го элемента, сводятся так же к шести обыкновенным дифференциальным уравнениям вида (8) относительно неизвестных:

$$T^{(j)}, Q_z^j, M_z^j, V^{(j)}, W^{(j)}, \varphi^{(j)}\left(j = 1, \bar{N}\right) \qquad (11)$$

Решение этих систем дифференциальных уравнений по форме будет таким же, что и (10), а постоянных интегрирования будет уже $6 \times N$, то есть $A_i^{(j)}\left(i = \overline{1,6}; j = \overline{1,N}\right)$.

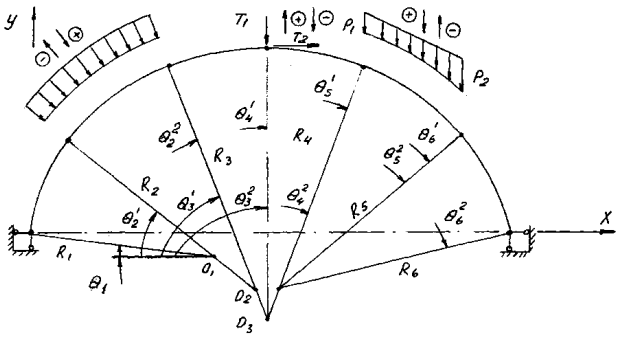

Рис.2 Арка произвольного очертания
Fig. 2 Arch of arbitrary shape

Для определения неизвестных A_i^j используем $(N-1)$ условий упруго сжимания круговых элементов при предельных условиях $\theta=\theta_1^{(1)}$ и $\theta=\theta_2^{(2)}$ для арочной конструкции. Условия упругого соединения записываются так

$$\begin{cases} U_{i-1}=U_i;\ W_{i-1}=W_i;\ \varphi_{2(i-1)}=\varphi_2 i \\ T_{i-1}=T_i;\ Q_{z(i-1)}=Q_{zi};\ M_{z(i-1)}=M_{zi}\ \text{ïðè}\ \theta=\theta_i^{(1)} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} U_i=U_{i+1};\ W_i=W_{i+1};\ \varphi_2 i=\varphi_{2(i+1)} \\ T_i^*+T_i=T_{i+1};\ Q_{zi}^*+Q_{zi}=Q_{z(i+1)};\ M_{zi}=M_{z(i+1)} \end{cases} \quad (13)$$

Здесь T_i^*, Q_{zi}^* – тангенциальные и нормальные сосредоточенные силы, которые приложены в точках соединения элементов арки.

В результате совместного рассмотрения соотношений (7) для каждого элемента арки и условий упругого соединения (12) и (13) получим систему уравнений (8), но уже относительно A_i^j. Решение этой системы позволяет определить значение A_i^j и компоненты Н.Д.С. для всей арки. Решенную систему при необходимости можно подчинить дополнительным условиям.

Допустим, что конец $\left(\theta=\theta_i^{(2)}\right)$ i-го элемента имеет шарнир, то есть

$$\begin{aligned} &U_i=U_{i+1};\ W_i=W_{i+1};\ M_{zi}=0; \\ &M_{z(i+1)}=0;\ T_i=T_{i+1};\ Q_{zi}=Q_{z(i+1)} \end{aligned} \quad (14)$$

В этом случае матрицу $[L]$ и вектор U, не меняя их размерности, необходимо преобразовать. Решение переобразованой системы уравнений позволяет определить A_i^j с учетом введенного ключевого шарнира.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Bakiev M. 1978. K voprosu o nagruzkah, dejstvujushhih na konstrukcii pokrytija. / M. Bakiev, I. Kuznecezov, R. Safin. – Mezhvuzovskij sbornik. Vyp. 2, Kazan. — 28-31.
2. Baranenko V. 2002. Genetichni algoritmi v optimalnomu proektuvanni konstrukcij. Ogljad. / V.O. Baranenko. // Pridniprovska DABIA Visnik akademii, – №10. – 4-9.
3. Bogza V. 1998. Principy sozdanija konstruktivnyh form stalnyh karkasov oblegchennogo tipa iz universalnyh elementov. /V. G. Bogza // Metallicheskie konstrukcii,– №1. – 61-64
4. Bogza V. 2005. Novi tipi silskogospodarskih sporud / V. Bogza, S. Bogdanov Sovremennye stroitelnye konstrukcii iz metalla i drevesiny: Sbornik nauch. tr. – Odessa, OOO «Vneshreklamaservis». – 4.2. — 4-8.
5. Vinogradov A. 1973. Problema optimalnogo proektirovanija v stroitelnoj mehanike. /A. I. Vinogradov. Harkov,– 167.
6. Gemmerling A. 1974. Optimalnoe proektirovanie metalo konstrukcij. / A. Gemmerling // Stroitelnaja mehanika i raschet sooruzhenij,– №4. – 10-13.
7. Gnitko O. 1976. Rozrahunok nadijnosti stalevih statichno neviznachenih konstrukcij. Zbirnik naukovih prac (galuzeve mashinobuduvannja, budivnictvo) / O. Gnitko; Vip. 1 Polt. derzh.tehn. un-t im. Jurija Kondratjuka; – Poltava. : PDTU im. Jurija Kondratjuka, 1998.
8. Goldenshtejn Ju. B. Racionalnoe ochertanie arochnyh konstrukcij pri podvizhnoj nagruzke. / J. Goldenshtejn, M. Solomeshh // Izvestie vuzov,– №6. – 44-50.
9. Zaripov I. 2005. Legkie metallicheskie konstrukcii angarov iz gnutyh profilej prokata. / I. Zaripov Sovremennye problemy sovershenstvovanija i razvitija metalicheskih, derevjannyh, plastmassovyh konstrukcij v stroitelstve i na transporte: Sbornik nauchnyh trudov. – Samara.: OOO «SamLJuKS»,– 370.
10. Klimanov V. 1982. Ustojchivost dvuhsharnirnyh arok s nadarochnym stroeniem. / V. Klimanov // Stroitelnaja mehanika i raschet sooruzhenij,– №2. – 24-30.
11. Kuznecov I. 1979. Stalnye arochnye konstrukcii zdanija mnogocelevogo naznachenija. /

I. Kuznecov. – Stroitelnaja fizika. Vyp. 7. – M., — 23-25.
12. Kuznecov I. 1980. Opredelenie massy metallicheskih arok na stadii proektirovanija. / I. Kuznecov. – Mezhvuzovskij sbornik. – Kazan.
13. Kunickij L. 1965. Zakonomernosti vesa i optimalnaja komponovka sploshnyh izgibaemyh metallicheskih jelementov. / L. Kunickij // Izvestija vuzov. Stroitelstvo i arhitektura,– №5. – 33-45.
14. Legkie metallicheskie konstrukcii odnojetazhnyh proizvodstvennyh zdanij. – Sprav. posobie pod. red. I. I. Ishhenko. – M.: Stroizdat, 1979. – 200.
15. Lukjanenko // Sovremennye problemy stroitelstva. – Doneck: OOO «Lebed», 2002 – 80-86.
16. Nabokov I. 2002. Raschet i osobennosti kon-struirovanija stvolov dvutavrovyh balok sostavnogo sechenija s maksimalnymi gabaritami / I. Nabokov, E. Lukjanenko // Sovremennye problemy stroitelstva. – Doneck: OOO «Lebed», – 80-86.
17. Panovko J. 1984. K voprosu o vybore podema svodov. / J. Panovko. – Sbornik trudov MADI,– 129 - 133.
18. Patent Rossijskoj federacii № 20676 96 ot 10.10.96. 6A 16 B 7/20. Razyemnoe soedinenie. / Bogza V.
19. Perelmuter A. 1995. Ob ocenke zhivuchesti nesushhih konstrukcij. Metallicheskie konstrukcii. Raboty shkoly professora N. Streleckogo / A. Perelmuter. – M.: MGSU.
20. Permjakov V. 2004. Stijkist ram iz vikoristannjam dvotavriv zi zminnim pererizom / V. Permjakov, S. Bilik Sb. dokl. VIII Ukr. Nauchno-tehn. konf. – 41. K. : «Stal», - 498-503.
21. Permjakov V. 2005. Sovershenstvovanie rascheta na ustojchivost i prochnost dvutavrov s peremennoj vysotoj stenki kak jelementov stalnyh karkasov zdanij universalnogo naznachenija / V. Permjakov, S. Bilyk. Sovremennye problemy sovershen-stvovanija i razvitija metallicheskih, derevjannyh, plastmassovyh konstrukcij v stroitelstve i na transporte: Sbornik nauchnyh trudov. – Samara: OOO « SamLJuKS»,– 370.
22. Pichugin S. 1997. Ocinka nadijnosti statichno neviznachenih konstrukcij/ S. Pichugin, O. Gnitko // Problemi teorii i praktiki zalizobetonu. – Poltava.
23. Pichugin S. 1994. Metod rascheta nadezhnosti metallicheskih konstrukcij. XL Konferecia Naukova Komitetu Inzynierii Ladoweh I Wodneh Pan I Komitetu Nauki PZITB. – Warszawa: Rzeszow Krynica.
24. Rudnev V. 1990. O racionalnoj forme sploshnoj uprugoj arki v svjazi s sovremennymi metodami vozvedenija. / V. Rudnev. – Trudy MIITa Vyp. 15. – M.
25. Filin A. 1973. Ob otyskanii optimalnoj osi trehsharnirnoj sistemy pri rabote ee na neskolkih variantah nagruzki. / A. P. Filin, E. S. Filalaeva. – Kazan. : Izd. KGU,– 210-219.

ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS DEFINITION STRESS-STRAIN STATE AND CRITICAL LOADS LOSS OF STABILITY OF ARCHES

Summary. The method of calculating the critical loss of stability loads of arches. The method is that arbitrary configuration arch replaced by the elastically connected elements for which at the given regular loads with appropriate boundary conditions at the ends of exact solutions are found for components of the stress-strain state.

Key words: Configuration arched structure, boundary conditions, the stress-strain state.