МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ЕКОНОМІЧНОЇ КІБЕРНЕТИКИ І МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Методичні рекомендації до виконання практичних завдань і самостійної роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий курс) спеціальності 242 «Туризм» денної форми навчання

Миколаїв - 2021

УДК 510.6
М33

Друкується за рішенням науково-методичною комісією факультету менеджменту Миколаївського національного університету від 18.05.2021 року протокол № 9.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

А. М. Могильницька – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

Стройко Т.В. - д-р. екон. наук, професор, завідувач кафедри економіки та менеджменту, Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського

Кравчук Л.С. - канд. екон. наук, доцент кафедри менеджменту та маркетингу, Миколаївський національний аграрний університет

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисципліна «**Математична логіка**» є базовою нормативною дисципліною спеціальності 242 "Туризм", що читається у першому семестрі у обсязі 4 кредитів, у тому числі 44 години аудиторних занять, з них 14 годин лекцій, 30 годин практичних занять і 76 годин самостійної роботи. Закінчується курс іспитом у 1 семестрі.

Метою і завданням навчальної дисципліни "Математична логіка" є засвоєння базових знань з основ математичної логіки. У загально світоглядному аспекті, поняття і методи математичної логіки необхідні для обґрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання. В прикладному аспекті, апарат математичної логіки необхідний для адекватного моделювання різноманітних предметних областей, створення сучасних програмних та інформаційних систем.

Предмет навчальної дисципліни "Математична логіка" включає в себе вивчення базових понять математичної логіки, розгляд семантичних моделей логіки та формально-аксіоматичних логічних систем.

Вимоги до знань та вмінь. Для засвоєння курсу необхідні знання основ елементарної математики, дискретної математики та алгебри. Здобувачі вищої освіти повинен знати основи теорії множин, булеві функції, основи загальної алгебри.

Місце в структурно-логічній схемі спеціальності. Нормативна навчальна дисципліна "Математична логіка" є складовою циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня "Молодший бакалавр". Курс математичної логіки потрібен для подальшого вивчення нормативних дисциплін "Бази даних та інформаційні системи", "Інтелектуальні системи", "Теорія програмування", "Теорія обчислень", "Штучний інтелект, "Інформаційні технології", низки спецкурсів відповідного напряму.

ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ **З ДИСЦИПЛІНИ**

№	Назва теми	Обсяг (год.)
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1. Алгебра та числення висловлень (14 год.)		
1.1	Таблиці істинності. Логічні операції над висловленнями.	2
1.2	Досконалі диз'юнктивні та досконалі кон’юнктиві нормальні форми.	2
1.3	Розв’язування задач за правилами виведення числення висловлень.	2
1.4	Нормальні форми формул числення висловлень.	2
1.5	Тотожна істинність вивідних секвенцій. Функціональна повнота числення висловлень.	2
1.6	Адекватність числення висловлювань до логіки висловлювань.	2
1.7	Несуперечливість, повнота та незалежність аксіом числення висловлювань.	2
	Усього за модулем 1	**14**
ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2. Логіка предикатів. Теорія алгоритмів (16 год.)		
2.1	Операції над предикатами. Основні рівносильності з кванторами.	2
2.2	Числення предикатів. Мова числення предикатів.	2
2.3	Використання мови логіки предикатів у математиці.	2
2.4	Приклади. Несуперечливість та повнота числення предикатів.	2
2.5	Примітивно рекурсивні функції.	2
2.6	Рекурсивні функції.	2
2.7	Обчислюваність рекурсивних функцій на машинах Тюрінга.	2
2.8	Арифметичність рекурсивних функцій та множин.	2
	Усього за модулем 2	**16**
Разом		**30**

Практичне заняття 1.1. Таблиці істинності. Логічні операції над висловленнями.

Мета. Засвоїти основні поняття логіки висловлень, основні операції над висловленнями. Навчитись складати та використовувати таблиці істинності

Завдання.

1. Користуючись таблицями істинності довести тотожну істинність формули логіки висловлень під № n (Варіант формули, згідно з порядковим номером N студента в журналі див. у Додатку 1).
2. Записати формулу під № m із Додатку 1, користуючись тільки логічними операціями ($\neg$, $\wedge$), де .m = 33- n.
3. Користуючись формулами логіки висловлень під № 1-14 із Додатку 1,перетворити складне висловлення із завдання № 2 (яке містить тільки логічні операції ($\neg$, $\wedge$)) так, щоб рівносильне йому висловлення містило заперечення лише простих висловлень.
4. За методом Куайна довести тотожну істинність формули логіки висловлень із завдання № 3.

Приклад виконання завдання

1 Користуючись таблицями істинності доведемо тотожну істинність формули логіки висловлень :

1) $(A\to B) \vee (B\to A)$

A	$\to$	B	$\vee$	B	$\to$	A
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0

2 Запишемо формулу логіки висловлень, користуючись тільки логічними операціями ($\neg$, $\wedge$).

$$(A\to B) \quad \sim \quad (\overline{B}\to \overline{A})\equiv$$

$$\equiv\left(\left(\overline{A\to B}\right)\vee\left(\overline{B}\to \overline{A}\right)\right)\wedge\left(\left(\overline{\overline{B}\to \overline{A}}\right)\vee\left(A\to B\right)\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\overline{\left(\overline{A}\vee B\right)}\vee\left(\overline{\overline{B}}\vee\overline{A}\right)\right)\wedge\left(\overline{\left(\overline{\overline{B}}\vee\overline{A}\right)}\vee\left(\overline{A}\vee B\right)\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\left(\overline{\overline{A}}\wedge\overline{B}\right)\vee\left(B\vee\overline{A}\right)\right)\wedge\left(\left(\overline{B}\wedge A\right)\vee\left(\overline{A}\vee B\right)\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\left(A\wedge\overline{B}\right)\vee\left(B\vee\overline{A}\right)\right)\wedge\left(\left(\overline{B}\wedge A\right)\vee\left(\overline{A}\vee B\right)\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\overline{\overline{\left(A\wedge\overline{B}\right)\vee\left(B\vee\overline{A}\right)}}\right)\wedge\left(\overline{\overline{\left(\overline{B}\wedge A\right)\vee\left(\overline{A}\vee B\right)}}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\overline{\overline{\left(A\wedge\overline{B}\right)}\wedge\overline{\left(B\vee\overline{A}\right)}}\right)\wedge\left(\overline{\overline{\overline{B}\wedge A}\wedge\overline{\left(\overline{A}\vee B\right)}}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\overline{\overline{\left(A\wedge\overline{B}\right)}\wedge\left(\overline{B}\wedge A\right)}\right)\wedge\left(\overline{\overline{\overline{B}\wedge A}\wedge\left(A\wedge\overline{B}\right)}\right)$$

3 Користуючись формулами логіки висловлень під № 1-14 із Додатку 1,перетворимо складне висловлення із завдання № 2 (яке містить тільки логічні операції ($\neg$, $\wedge$)) так, щоб рівносильне йому висловлення містило заперечення лише простих висловлень.

$$\left(\overline{\left(\overline{A\wedge\overline{B}}\right)\wedge\left(\overline{B}\wedge A\right)}\right)\wedge\overline{\overline{\left(\overline{B}\wedge A\right)}\wedge\left(A\wedge\overline{B}\right)}\equiv$$

$$\equiv\left(\overline{\overline{A\wedge\overline{B}}}\vee\overline{\overline{B}\wedge A}\right)\wedge\left(\overline{\overline{\overline{B}\wedge A}}\vee\overline{A\wedge\overline{B}}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(A\wedge\overline{B}\vee\left(B\vee\overline{A}\right)\right)\wedge\left(\left(\overline{B}\wedge A\right)\vee\left(\overline{A}\vee B\right)\right)$$

4 За методом Куайна довести тотожну істинність формули логіки висловлень із завдання № 3. Скористаємося тим, що $M\vee\neg M\equiv 1$, а формула $M\wedge\neg M$ є суперечністю, тобто $M\wedge\neg M\equiv 0$

$$F(A,B)=\left(A\wedge\overline{B}\vee\left(B\vee\overline{A}\right)\right)\wedge\left(\left(\overline{B}\wedge A\right)\vee\left(\overline{A}\vee B\right)\right)$$

$$A=1$$

$$F(1,B)=\left(1\wedge\overline{B}\vee\left(B\vee 0\right)\right)\wedge\left(\left(\overline{B}\wedge 1\right)\vee\left(0\vee B\right)\right)\equiv$$

$$\left(\overline{B}\vee B\right)\wedge\left(\overline{B}\vee B\right)\equiv 1\wedge 1\equiv 1$$

$$A=0$$

$$F(0,B)=\left(0\wedge\overline{B}\vee\left(B\vee 1\right)\right)\wedge\left(\left(\overline{B}\wedge 0\right)\vee\left(1\vee B\right)\right)\equiv$$

$$\equiv\left(0\vee 1\right)\wedge\left(0\vee 1\right)\equiv 1\wedge 1=1$$

Додаток 1.

Тотожно істинні формули логіки висловлень

1 A ~ A закон тотожності

2 $\neg(A \wedge \neg A)$

$\overline{A \wedge \overline{A}}$ закон суперечності- протиріччя (невірно, що А і не А)

3 закон $A \vee \overline{A}$ виключеного третього. Або А –істинне, або не А, третього не дано.

4 $\left(A \wedge \overline{A}\right) \sim A$

5 $\left(A \vee \overline{A}\right) \sim A$

Закони тавтології

6 $\overline{\overline{A}} \sim A$ Закон подвійного заперечення

7 $(A \vee B) \sim (B \vee A)$

8 $(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$

Комутативні закони

9 $(A \vee (B \wedge C)) \sim ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

10 $(A \wedge (B \vee C)) \sim ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Дистрибутивні закони

11 $((A \vee B) \vee C) \sim (A \vee (B \vee C))$

12 $((A \wedge B) \wedge C) \sim (A \wedge (B \wedge C))$

Асоціативні закони

13 $\overline{A \vee B} \sim \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right)$

14 $\overline{A \wedge B} \sim \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right)$

15 $A \wedge B \sim \left(\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}\right)$

16 $A \vee B \sim \left(\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}\right)$

17 $A \to B \sim \left(\overline{A} \vee B\right)$

18 $(A \wedge (A \vee B)) \sim A$

19 $(A \vee (A \wedge B)) \sim A$

20 $(A \to B) \sim \left(\overline{B} \to \overline{A}\right)$

21. $((A \wedge B) \to C) \quad ((A \wedge \overline{C}) \to \overline{B})$

22 $((A \wedge B) \to C) \sim ((B \wedge \overline{C}) \to \overline{A})$

23 $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$

24 $((A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B)) \sim B$

25 $((A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)) \sim B$

26 $(A \sim B) \sim ((A \to B) \wedge (B \to A))$

27 $(A \to B) \vee (B \to A)$

28 $(A \to (B \to A))$

29 $(A \to B) \vee (A \to \overline{B})$

30 $(A \to (B \to (A \wedge B)))$

31 $A \to (A \vee B)$

32 $(A \wedge B) \to A$

33 $(A \to B) \sim (\overline{A} \vee B)$

34 $(A \to B) \sim (\overline{B} \to \overline{A})$

Контрольні питання

1. Що називається простим висловленням або атомом?
2. Як будувати правильно побудовані формули (ППФ). Приклад
3. Яка формула називається тавтологією, суперечністю. Приклади.
4. Рівносильні формули.
5. Повні системи логічних зв'язок. Приклад.
6. Відновлення формул за таблицями істинності.
7. Визначення числення висловлювань як аксіоматичної теорії.
8. Приклад виведення теореми із посилок (гіпотез) в численні висловлювань .
9. Методи перевірки тавтологічності формул числення висловлювань (метод Куайна).
10. Теорема дедукції.
11. Зв'язок між тавтологіями та теоремами числення висловлень.
12. Несуперечність числення висловлень.

Практичне заняття 1.2. Досконалі диз'юнктивні та досконалі кон’юнктивні нормальні форми.

Мета. Навчитись здійснювати перетворення алгебри висловлен у вигляді диз’юнктивних та кон’юнктивних нормальних форм та досконалих диз’юнктивних та кон’юнктивних нормальних форм.

Завдання 1. Привести до диз’юнктивної нормальної форми (ДНФ):

1) $x \to (y \to z)$
2) $\overline{xy} \vee (x \to y)$
3) $(x \vee y \vee z)(x \to y)$
4) $(x \vee y)(y \vee z) \to (x \vee z)$
5) $x \sim y$
6) $x \vee \vee y$
7) $x \sim y \sim z$
8) $(x \to y) \sim (\overline{x \to (y \to z)})$

Завдання 2. Привести до кон’юнктивної нормальної форми (КНФ):

1) $x \vee yz$
2) $xy \vee yz \vee \bar{z}$
3) $x \vee yz \vee \overline{xyz}$
4) $x \to yz$
5) $x \to yzv$
6) $x \sim yz$
7) $xy \sim \overline{xy}$
8) $x \sim y \sim z$

Завдання 3. Привести до досконалої **ДНФ (ДДНФ)** наступні формули:

1) $\bar{x} \vee \bar{y}$
2) $(\bar{x} \to y) \to x$

3) $x \to (y \to x)$

4) $x \to (y \to z)$

5) $(x \to y)(y \to z) \to (x \to z)$

6) $(x \to y)(y \to z)(z \to x)$

7) $(x \vee y)(y \vee z)(z \sim x)$

8) $(x \to y)(y \to z)(z \to v)$

Завдання 4. Привести до досконалої **КНФ (ДКНФ)** наступні формули:

1) $(x \to y) \to x \vee \overline{y}$

2) $\overline{xy}$

3) $x\overline{y}(x \to y)$

4) $x \to yz$

5) xyz

6) $(x \vee y)(y \to z)(z \sim x)$

7) $x \vee y \to (x \to z)$

8) $((x \to y) \sim (y \to \overline{x}))z$

9) $x \vee y \vee z \to (x \vee y)z$

10) $xy \to zv$

Завдання 5. Знайти **ДНФ, ДДНФ, КНФ, ДКНФ** для наступних формул:

Таблиця 1.2.1.

№	Завдання
1)	$((a \mid c) \mid (d \sim c)) \to ((c \vee b)(a \to d))$.
2)	$(a \to d) \mid ((\overline{c} \to b) \vee (d \downarrow b))$.
3)	$(c \sim d) \mid ((\overline{a} \downarrow \overline{b}) \to (\overline{a}b))$.
4)	$((ab) \mid (a \downarrow b)) \vee (\overline{c \to d})$.
5)	$((a \mid c) \to \overline{a}d) \vee ((bc) \downarrow (\overline{b}d))$.
6)	$((a \vee b)(d \to b)) \to (cd \vee (a\overline{c}))$.

7)	$(a\bar{d} \vee (a \sim d))(b\bar{c} \downarrow (\bar{c} \vee b))$.
8)	$(a \vee \bar{d})(b \vee \bar{c})(a \to d)(b \mid c)$.
9)	$((c \vee d) \mid (a \to c)) \vee b\bar{d} \vee ab$.
10)	$(\overline{a \mid b}) \vee (\bar{b} \to c) \vee (c \sim d)$.
11)	$((\bar{c} \to b)(d \downarrow c))(\bar{a}b \vee ad)$.
12)	$(\bar{a}c \downarrow (a \sim c))(\overline{b \downarrow \bar{d}})$.
13)	$(a \vee b) \downarrow ((\bar{a} \mid c) \downarrow (\bar{b} \vee d))$.
14)	$\overline{ab \to a} \vee (d(b \vee c))$.
15)	$\overline{a(b \vee c)} \to (ad \vee c)$.
16)	$(c \to ad) \to ((\overline{b \vee c}) \downarrow a)$.
17)	$(\bar{a} \to \bar{d}) \mid (bc \to (a \vee c))$.
18)	$((a \vee d) \mid (c \to \bar{a})) \to (\bar{b} \vee \bar{c})$.
19)	$(a \to b) \to (\bar{a}(b \vee cd))$.
20)	$(a \vee \bar{d}b)(\bar{a}(b \to d) \vee c) \vee (c \to a))$.
21)	$(\bar{d}b \vee ab \vee \bar{d}\bar{c} \vee a\bar{c})(\bar{b} \to a)$.
22)	$(c \to a)(a \mid \bar{b})(b \to c)(b \vee c)$.
23)	$ac \vee ((d \mid \bar{a})(\bar{d} \to b)) \vee a\bar{c}$.
24)	$((\bar{b} \vee c)(a \vee b)) \vee (\bar{d}c) \vee ((\bar{b}\bar{a}) \to c)$.
25)	$(a \vee (\bar{c} \to b))(\overline{c \wedge d} \wedge c\bar{d})(\bar{d}\bar{c} \mid d)$.
26)	$((\bar{b} \vee \bar{d})(a \vee \bar{c})(\bar{c} \vee d)) \vee ((b \to c)(\bar{a} \to d))$.
27)	$(c \to a)(\bar{a}d \vee bd \vee \bar{a}\bar{d})(a \vee c)$.
28)	$(d \wedge \bar{c} \vee \bar{d}\bar{b} \vee c\bar{b})(\bar{d}b \vee cb)(\bar{a} \vee d)$.
29)	$(\bar{c}\bar{d} \vee bc)(\bar{a} \vee \bar{d})((c \to \bar{b})d \vee cb)$.
30)	$(a \to b) \wedge \bar{b}cd \vee \bar{a}\bar{b}cd \vee \bar{b} \vee \bar{c} \vee d$.

Практичне заняття 1.3. Розв’язування задач за правилами виведення числення висловлень.

Мета: Навчитись розв’язувати задачі за правилами виведення числення висловлень.

Завдання 1. Встановити еквівалентність формул за допомогою таблиць істинності та за допомогою формул перетворень (табл. 1.).

Таблиця 1.3.1.

№	Завдання
1.	$(a \vee \overline{d})(b \vee \overline{c})(a \oplus d) = ((c \vee d) \mid (a \to c)) \vee b\overline{d}$.
2.	$\overline{a\overline{d} \vee (a \sim d)}(b\overline{c} \downarrow (\overline{c} \oplus b)) = ((a \vee b)(d \to b)) \to (cd \vee (a\overline{c}))$.
3.	$(\overline{a \mid c}) \wedge ((bc) \downarrow (\overline{b}d)) = ((ab) \mid (a \oplus b)) \vee (\overline{c \to d})$.
4.	$((a \to d) \mid (a \to c)) \downarrow (\overline{c} \to b) = ((c \vee d) \mid (b \sim d)) \mid (\overline{a} \oplus \overline{b})$.
5.	$(b \downarrow a)(\overline{c \to d})(\overline{b}d) = (b \sim c) \to ((a \oplus d)(a \to d))$.
6.	$(\overline{a}c \downarrow (a \sim c))(\overline{b \downarrow \overline{d}}) = ((\overline{c} \to b)(d \to a)) \vee ad$.
7.	$ad \mid ((\overline{a}c) \downarrow (\overline{b}c)) = (\overline{a \oplus \overline{b}) \to ab} \downarrow (\overline{c} \sim \overline{d})$.
8.	$(\overline{a \downarrow b})((\overline{c}d) \downarrow (c \sim d)) = ((a \vee d)(b \mid d)) \to (c \to a)$.
9.	$(a \downarrow b) \downarrow (\overline{d \to a) \to cd} = (a \oplus \overline{c}) \vee ((b\overline{d}) \downarrow (b \sim d))$.
10.	$(a \sim \overline{b}) \mid ((\overline{c} \oplus \overline{d}) \to (c\overline{d})) = (a \to \overline{d}) \downarrow ((\overline{b} \mid \overline{c}) \mid (\overline{c} \to a))$.
11.	$\overline{(c \downarrow \overline{b}) \vee (c \oplus \overline{b})} \downarrow (\overline{d} \sim \overline{a}) = ((d \vee \overline{b})(d \vee c)) \to (\overline{b} \downarrow \overline{a})$.
12.	$((bd) \downarrow (bc))(\overline{d \to a}) = ((\overline{c} \sim \overline{d})) \to ((a \oplus b) \wedge (b \to a))$.
13.	$(a \to \overline{c}) \downarrow ((b \to d) \mid (b \to \overline{c})) = ((c \to d) \mid (c \oplus d)) \mid (a \sim b)$.
14.	$((a \downarrow b) \downarrow (c \downarrow b))(\overline{d \to a}) = (a \oplus c) \vee ((\overline{b}d) \downarrow (b \sim d))$.
15.	$(\overline{\overline{a}d \vee (a \sim d)) \downarrow (b \sim c}) = (a \mid b) \to ((c \vee d) \mid (a \to c))$.
16.	$(b \oplus c)(b \downarrow c)) \downarrow ((\overline{a} \sim \overline{d}) = ((b \downarrow d) \downarrow (c \downarrow d)) \mid (\overline{a}b)$.
17.	$(a\overline{c})((b\overline{d}) \downarrow (b \sim d)) = (c \to b) \to (a\overline{d} \vee cd)$.
18.	$((\overline{a \mid b})(\overline{a} \oplus \overline{b})) \vee (c\overline{d}) = (b \downarrow d) \wedge ((\overline{a \to c})(\overline{b}c))$.
19.	$((a \to b) \to (\overline{c} \to b)) \downarrow (c \vee d) = ((\overline{c} \mid a) \mid (c \oplus a)) \mid (d \sim b)$.
20.	$(\overline{a \vee b} \wedge (a \oplus b)) \vee ((\overline{c}d) \downarrow (c \sim d)) = ((a\overline{c}) \downarrow (b\overline{c}))(b \downarrow d)$.

Продовження табл. 1.3.1.

21.	$\overline{(a\oplus b)\to((\bar{d}c)\downarrow(d\sim c))}=((a\to c)(b\to c))\to(b\mid d)$.
22.	$(a\oplus b)\downarrow((c\sim d)\downarrow(\bar{c}d))=((a\bar{c})\downarrow(b\bar{c}))\mid(a\downarrow d)$.
23.	$(\overline{a\downarrow b})(\overline{c\to d})\downarrow(c\sim d))=((c\to a)(c\oplus b))\vee(b\downarrow d)$.
24.	$(a\bar{c})\downarrow((\overline{a\mid d)\to bd})=(a\mid b)\mid\to((c\oplus d)(d\to c))$.
25.	$((a\downarrow b)\to(c\vee\bar{b}))\vee(c\sim d)=d\to(b\vee c)\mid\bar{a}$.
26.	$((a\mid b)\to(c\downarrow b))\vee(c\sim d)=d\to(b\vee\bar{c})\vee(\overline{\bar{d}a})$.
27.	$(a\vee b\vee d)\sim(abc)=(c\to a)(b\downarrow d)(a\to b)$.
28.	$\big(a\mid(b\mid c)\big)\oplus(d\mid(a\downarrow c))=(a\to(b\vee c))(c\to(a\vee d))$.
29.	$((a\vee d)\mid(\bar{a}\sim b))=((\bar{a}\downarrow\bar{b})\to(\bar{a}d))$.
30.	$\big((a\sim c)\downarrow(d\mid b)\big)=(\bar{a}\oplus b)\to\overline{\bar{c}d\vee a\bar{b}}$.

Завдання 2. Знайти поліном Жегалкіна за допомогою трикутника Паскаля та методом невизначених коефіцієнтів (табл. 1.3.2.).

Таблиця 1.3.2.

№	Завдання	№	Завдання	№	Завдання
1.	$x\downarrow y\sim\bar{x}z$.	**11.**	$x\bar{z}\downarrow y\mid x$.	**21.**	$\bar{y}\vee xz\downarrow y$.
2.	$x\downarrow\bar{y}\sim\bar{x}z$.	**12.**	$x\sim y\mid y\bar{z}$.	**22.**	$\bar{y}x\to y\mid\bar{z}$.
3.	$x\sim z\mid\bar{y}x$.	**13.**	$yz\to x\sim\bar{y}$.	**23.**	$z\downarrow(\bar{x}\vee\bar{y}\bar{z})$.
4.	$x\mid y\sim\bar{y}z$.	**14.**	$\bar{x}y\to\bar{z}\mid\bar{y}$.	**24.**	$(x\sim\bar{y})z\downarrow y$.
5.	$\overline{x\vee y}\to z$.	**15.**	$x\to y\mid\bar{y}\bar{z}$.	**25.**	$x\mid\bar{z}\bar{y}\vee z$.
6.	$x\sim y\to\bar{y}z$.	**16.**	$x\to y\downarrow x\bar{z}$.	**26.**	$(x\sim\bar{y})z\mid y$.
7.	$x\downarrow y\to\bar{x}z$.	**17.**	$x\sim y\downarrow\bar{x}\bar{z}$.	**27.**	$x\downarrow(\bar{y}z)\sim y$.
8.	$\bar{x}y\sim z\mid\bar{y}$.	**18.**	$\bar{z}\bar{y}\vee x\downarrow y$.	**28.**	$x\mid\bar{y}\bar{z}\to y$.
9.	$x\mid y\to y\bar{z}$.	**19.**	$x\vee y\bar{x}\to\bar{z}$.	**29.**	$z\mid(\bar{x}\vee\bar{y})\downarrow y$.
10.	$x\mid\bar{y}\sim\bar{x}\mid z$.	**20.**	$z\mid(\bar{x}\vee\bar{y})\downarrow z$.	**30.**	$z(x\sim y)\vee z$.

Практичне заняття 1.4. Нормальні форми формул числення висловлень.

Мета: Навчитись розв'язувати задачі на складання нормальних форм числення висловлень.

Завдання 1. Зведенням до досконалих нормальних форм довести нерівносильність наступних формул:

1) $x \vee y$ **та** $x \to y$

2) $x \to y$ **та** $x \sim y$

3) $x \vee y$ та $x \vee \vee y$

4) $x \to (y \to z)$ та $(x \to y) \to z$

5) $xy \vee z$ та $x(y \vee z)$

6) $(x \to y) \vee z$ та $(x \vee y) \to z$

7) $(x \to y)z$ та $xy \to z$

8) $(x \to y) \sim z$ та $(x \sim y) \to z$

9) $(x \vee y) \sim z$ та $(x \sim y) \vee z$

10) $xy \sim z$ та $(x \sim y)z$

Завдання 2. З'ясувати, чи є перша формула логічним наслідком наступних:

1) y; $x \to y, x$

2) x; $x \to y, y$

3) $\bar{x}$; $x \to y, \bar{y}$

4) $\bar{y}$ $x \to y, \bar{x}$

5) y; $x \vee y, \bar{x}$

6) $\bar{y}$; $x \vee \vee y, x$

7) $x \to z$; $x \to y, y \to z$

8) $(x \vee y) \to z$; $x \to z, y \to z$

9) $z \to x$; $x \to y, \bar{y} \to \bar{z}$

10) $x \vee y$; $x \to y, \bar{x} \to \bar{y}, \bar{x} \vee \bar{y}$

11) $\bar{x}$; $x \sim y, y \vee \bar{z}, z$

12) z; $x \to y, \bar{y} \vee z, x$

13) $\bar{y} \vee \bar{z}$; $x \vee \bar{z}, y \to xz, x$

Мінімізація ДДНФ за допомогою карт Карно.

Завдання 3. Зведіть формулу до попередньої форми і складіть для неї таблицю істинності : $B(A \Leftrightarrow C) \vee A(\overline{B \Leftrightarrow C})$

Будь-яку формулу, для компактності запису, можна звести до мінімальної форми(вигляд формули, спростити який неможливо), знайшовши спочатку ДДНФ і скориставшись методом склеювання – методом спрощення двох і більше диз'юнкцій елементарних кон'юнкцій, які відрізняються лише однією змінною, наприклад $AB \vee \bar{A}B \equiv B$ або $A\bar{B}\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} \vee ABC \equiv A$).

Завдання 4. Знайдіть мінімальну форму для формули $B(A \Leftrightarrow C) \vee A(\overline{B \Leftrightarrow C})$.

Таблиця істинності останньої формули на три змінних займає чимале місце, легко бачити, що таблиця істинності формули на чотири змінних буде в два рази більшою. Існує інший – більш компактний запис таблиці істинності, який називається "карта Карно" або "діаграма Карно-Вейча". За допомогою карт Карно можна легко спрощувати формули до їх мінімальної форми.

Вигляд карти Карно на три змінних:

	A	0	1	1	0
	B	0	0	1	1
C	0				
	1				

Якщо придивитися, то можна побачити, що два верхні рядки схожі на таблицю істинності від двох змінних, тільки переставлені місцями два рядки.

B	**A**
0	0
0	1
1	1
1	0

A	0	1	1	0
B	0	0	1	1

У карті Карно перший рядок відповідає значенням змінної А, другий рядок – значенням змінної В, другий стовпчик – значенням змінної С.

Отже, для того, щоб скласти карту Карно будь-якої логічної формули потрібно: звести формулу до ДНФ або ДДНФ і заповнити таблицю згідно елементарних кон'юнкцій, які отримані. Після зведення останньої формули до ДДНФ отримуємо: $ABC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C}$.

Отримана ДДНФ – це диз'юнкція чотирьох констатуент одиниці. Кожна з них запишеться у карті Карно як одиниця у відповідному місці. Розглянемо перший доданок ABC – він буде істинним, якщо одночасно істинні всі три змінні А, В, С, тобто коли всі вони приймають значення одиниці. Знаходимо у таблиці клітинку яка знаходиться на перетині трьох одиниць і ставимо там одиницю.

	A	0	1	1	0
	B	0	0	1	1
C	0				
	1			1	

	A	0	1	1	0
	B	0	0	1	1
C	0				
	1		1	1	

Розглянемо другу констатуенту одиниці $A\overline{B}C$. Вона істинна тоді і тільки тоді, коли змінні А і С – істинні, а В – хибна. Отже, знаходимо у першому рядку одиниці(їх дві) у другому нулі(їх теж два), але стовпчик, у якому у першому рядку одиниця, а у другому нуль лише один, тому саме четвертий стовпчик той, який нам потрібний. А рядок беремо той, у якому змінна С приймає значення один, тобто останній.

Аналогічно заносимо у таблицю і одиниці відповідні $AB\overline{C}$ і $\overline{A}B\overline{C}$; у таблиці буде чотири одиниці, а на порожні клітинки поставимо нулі і таблиця матиме вигляд:

	A	0	1	1	0
	B	0	0	1	1
C	0	0	0	1	1
	1	0	1	1	0

Як зазначалося вище, ДДНФ можна спростити за допомогою склеювання. Але це інколи є досить складно – не завжди вдається помітити всі можливості склеювання – наприклад, для ДДНФ на чотири змінних з десяти-дванадцяти констатуент одиниці, вибрати всі доданки, які можна склеїти вже не так просто. Тому для мінімізації використовують карти Карно, які дозволяють максимально мінімізувати будь-яку ДДНФ. Для цього в таблиці потрібно виділити всі пари одиниць, що знаходяться поруч(зазначимо, що пару у п’ятому стовпчику можна не виділяти, бо всі одиниці вже задіяні, але одну і ту ж одиницю можна включати до різних пар).

	A	0	1	1	0
	B	0	0	1	1
C	0	0	0	1	1
	1	0	1	1	0

Розглянемо пару одиниць у першому рядку. Їй відповідає для змінної C – нуль, для B – одиниця(бо у другому рядку цієї змінної нашій парі відповідають саме одиниці), а от у змінної A виділеній парі відповідають і одиниця і нуль, тобто змінні B і C – фіксовані, а змінна A – ні. Це означає, що даній парі відповідає елементарна кон’юнкція $B\overline{C}$,. Так дві констатуенти одиниці $AB\overline{C}\vee\overline{A}B\overline{C}$ можна замінити однією кон’юнкцією $B\overline{C}$. Аналогічно діємо з другою парою – їй відповідає для змінної C – одиниця, для A – теж одиниця, а для B і одиниця і нуль – знову фіксованими є лише дві змінні A і C – тому замість $A\overline{B}C\vee ABC$ можна написати AC. Отже $B(A\Leftrightarrow C)\vee A(\overline{B\Leftrightarrow C})\equiv B\overline{C}\vee AC$ – ліва частина тотожності є мінімальною формою.

Завдання 5. Карта Карно на чотири змінних

Знайти ДДНФ для формули $\overline{D}(B(A\Leftrightarrow C)\vee\overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D})\vee AC((B\Leftrightarrow D)\vee\overline{B}D)$.

Як звести формулу на три змінних до мінімальної форми вже всім відомо, а як бути з формулою на чотири змінних? Для таких формул користуються картою Карно на чотири змінних, яка має вигляд:

	A	0	1	1	0
C	D B	0	0	1	1
0	0				
0	1				
1	1				
1	0				

	A	0	1	1	0
C	D B	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0

Заповнимо карту Карно на чотири змінних згідно ДДНФ формули останнього завдання. Тепер аналогічно карті Карно на три змінних потрібно знайти і виділити всі пари одиниць у таблиці, але одиниці у третьому рядку мають сусідами лише нулі, а одиниці у п’ятому і шостому рядках навпаки, мають поруч себе аж по дві одиниці. В таких випадках, коли чотири одиниці утворюють квадрат, можна виділяти весь квадрат, а коли одиниці розташовані в одному рядку(стовпчику) на протилежних сторонах карти Карно(неважливо на скільки змінних карта Карно), їх теж можна об’єднати у пару. Після виділення одиниць отримаємо:

	A	0	1	1	0
C	D B	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0

Тепер об’єднуємо у один доданок виділену пару і у другий квадрат. У пари змінні A ,C і D є фіксованими і мають значення нуль, а B не є фіксованою, тому цій парі відповідає доданок $\overline{ACD}$. У квадрата змінні A і C дорівнюють одиниці, тобто вони фіксовані, а B і D приймають різні значення і не є фіксованими, тому квадрату відповідає елементарна кон’юнкція AC. Отже $\overline{D}(B(A \Leftrightarrow C) \vee \overline{A}\,\overline{C}\,\overline{D}) \vee AC((B \Leftrightarrow D) \vee \overline{B}D) \equiv \overline{ACD} \vee AC$.

Практичне заняття 1.5. Тотожна істинність вивідних секвенцій. Функціональна повнота числення висловлень

Мета: Розглянути будову числення висловлень та алгебри висловлень як її моделі: алфавіт числення висловлень, основні означення, аксіоми числення висловлень та правила виведення. Навчитись користуватись правила виводу та правила побудови числення висловлень.

Завдання 1. Доведіть справедливість висловлень:

1) $a \to b$

$\dfrac{a}{b}$

2) $a \to b$

$\dfrac{\bar{b}}{\bar{a}}$

3) $a \vee b$

$\dfrac{\bar{a}}{b}$

4) $a \vee \vee b$

$\dfrac{a}{\bar{b}}$

5) $a \vee \vee b$

$\dfrac{\bar{a}}{b}$

6) $a \to b$

$\dfrac{b \to c}{a \to c}$

7) $a \to b$

$b \to c$

$\dfrac{a}{c}$

8) $a \to b$

$b \to c$

$\dfrac{\bar{c}}{\bar{a}}$

9) $a \vee b$

$\dfrac{a \to b}{b}$

10) $a \vee \vee b$

$\dfrac{a \to b}{b}$

11) $a \vee \vee b$

$\dfrac{b \vee \vee c}{a \to c}$

12) $a \to b$

$b \to c$

$\dfrac{c \to a}{a \to bc}$

Завдання 2. Обчислити, чи є правдивими наступні виведення:

1) $a \to b$

$$\frac{b}{a}$$

2) $a \to b$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

3) $a \to b$

$$\frac{\bar{a} \to b}{a \sim b}$$

4) $a \to b$

$$\frac{\bar{b} \to \bar{a}}{a \sim b}$$

5) $a \to b$

$$\frac{a \vee b}{a}$$

6) $a \to b$

$b \to a$

$$\frac{a \vee b}{ab}$$

7) $a \to (b \to c)$

$$\frac{(a \to b) \to c}{b \to c}$$

8) $a \to (b \to c)$

$$\frac{(a \to b) \to c}{a \to c}$$

9) $a \to bc$

$b \to ca$

$c \to ab$

$$\frac{a \vee b \vee c}{abc}$$

10) $a \vee b \to c$

$b \vee c \to a$

$c \vee a \to b$

$$\frac{a \vee b \vee c}{abc}$$

Приклад. „Якщо фірма з продажу комп’ютерної техніки запрошує на роботу провідного фахівця в галузі інформаційних технологій, то вона планує розширення спектру послуг з задоволення потреб населення з SOFT і HARDWARE. Фірма з продажу комп’ютерної техніки запросила на роботу провідного фахівця в галузі інформаційних технологій. Отже, фірма планує розширення спектру послуг з задоволення потреб населення з SOFT і HARDWARE.” Встановити правильність даного умовиводу.

Позначимо елементарні висловлення:

a – „Фірма з продажу комп’ютерної техніки запрошує на роботу провідного фахівця в галузі інформаційних технологій”,

b – „Фірма планує розширення спектру послуг з задоволення потреб населення з SOFT і HARDWARE”.

З урахуванням позначень умовивід приймає вигляд:

$$\frac{a \to b, a}{b}.$$

Практичне заняття 1.6. Адекватність числення висловлювань до логіки висловлень

Мета: Засвоїти поняття вивідності формул, розглянути метатеорему дедукції та її наслідок, навчитись використовувати правило силогізму та перестановки посилок при доведенні вивідності.

Приклад. Записати логічною формулою наступний умовивід:

«Якщо фірма запрошує на роботу провідного фахівця в області новітньої технології, то вона вважає її привабливої й развертає роботи зі зміни технології виробництва свого традиційного продукту або починає розробку нового продукту. Фірма запросила на роботу провідного фахівця в області новітньої технології. Отже, вона розпочинає роботи зі зміни технології виробництва продукту, що випускає, або розробці нового продукту».

Встановити правильність даного умовиводу.

Позначимо елементарні висловлення:

A – „Фірма запрошує на роботу провідного фахівця в області новітньої технології”.

B – „Фірма вважає дану новітню технологію привабливою”.

С – „Фірма розвертає роботу зі зміни технології виробництва свого традиційного продукту”.

D – „Фірма починає розробку нового продукту”.

З урахуванням прийнятих позначень умовивід прийме вигляд: „Якщо *A,* то B й (С або D). A. Отже, C або D”.

Використовуючи логічні зв’язування, одержимо остаточно:

$$((A \to (B \wedge (C \vee D))) \wedge A) \to (C \vee D).$$

Для перевірки правильності умовиводу відновимо схему умовиводу:

$$\frac{A \to (B \wedge (C \vee D)), A}{C \vee D},$$

й зрівняємо її зі схемою правила 1

Таким чином, даний умовивід вірний при істинності *B.*

Завдання.

1. Приведіть приклади, що ілюструють кожну з дванадцяти схем правильних умовиводів.

2. Приведіть приклади, що ілюструють схеми неправильних умовиводів.

3. До якої схеми умовиводів належать наступні умовиводи:

1) «В 1950-1970 роки характерними рисами економіки Західної Германії були високі темпи зростання і великими прибутками, тому німецькі підприємства не мали досвіду подолання ситуацій, пов’язаних з загрозою їх існування. В останні десятиріччя XX сторіччя темпи зростання зупинилися і прибутки значно зменшилися. Отже, виникла необхідність поліпшення інструментарію планування і управління.»

2) «Поведінка ринку цінних паперів виявляє наступну тенденцію: умови, у яких ціни зростають, змінюються умовами, у яких ціни спадають. Зараз ціни не спадають. Отже, в наступному періоді ціни зростатимуть.»

3) «Стратегічний контролінг має допомагати підприємству ефективного використовувати його переваги і створювати нові потенціали успішної діяльності в перспективі. Служба стратегічного контролінгу є внутрішнім консультантом менеджерів і власників підприємства при побудові, стратегії, стратегічних цілей і завдань. Підприємство створило службу стратегічного маркетингу. Отже, підприємство має велику перспективу.».

4. Довести, що правила імпортації (об’єднання посилок), правило експортації (роз’єднання посилок) і правило дилем є правильними схемами умовиводів.

Підготувати відповіді на наступні питання:

1. Що називається висловленням?
2. Наведіть приклади елементарних і складних висловлень.
3. Що називається інверсією висловлення A?
4. Що називається кон’юнкцією двох висловлень A і B?
5. Що називається імплікацією двох висловлень A і B?
6. Що називається еквівалентністю двох висловлень A і B?

7. Що називається нерівнозначністю двох висловлень A і B?
8. Дайте визначення алфавіту.
9. Що називається словом у деякому алфавіті?
10. Дайте визначення формули логіки висловлень.
11. Перелічите основні задачі алгебри висловлень.
12. Як можна перевірити істинність формули алгебри висловлень?
13. Що називається аксіоматичною теорією? Як вона будується?
14. Яка формула називається тавтологією? Приведіть приклади.
15. Яка формула називається протиріччям? Приведіть приклади.
16. Яка формула називається здійсненою? Приведіть приклади.
17. Наведіть приклади аксіом числення висловлень.
18. Як формулюється modus ponens?
19. Як формулюється modus tollens?
20. Як формулюється modus ponendo-tollens?
21. Як формулюється modus tollen-ponens?
22. Як формулюється спрощене правило силогізму?
23. Як формулюється закон протиріччя?
24. Як формулюється закон контрапозиції?
25. Як формулюється закон складної контрапозиції?
26. Як формулюється правило перерізу?
27. Як формулюється правило імпортації?
28. Як формулюється правило ектрапортації?
29. Навести приклади правильних і неправильних умовиводів.

Практичне заняття 1.7. Несуперечливість, повнота та незалежність аксіом числення висловлень

Мета: Засвоїти поняття несуперечності, повноти та незалежності аксіом числення висловлень, навчитись використовувати властивості несуперечності, повноти та незалежності аксіом числення висловлень.

Основні теоретичні відомості.

Перелічимо найбільш важливі **тавтології:**

1. $A \vee \overline{A}$ (tertium nondatur), або закон виключного третього;
2. $A \to A$;
3. $A \to (B \to A)$;
4. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ (ланцюгове міркування);
5. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
6. $(A \wedge B) \to A$;
7. $(A \wedge B) \to B$;
8. $A \to (B \to (A \wedge B))$;
9. $A \to (A \vee B)$;
10. $B \to (A \vee B)$;
11. $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$;
12. $((A \to B) \to A) \to A$ (Закон Пірса).

Кожна з цих тавтологій є **аксіомою логіки висловлень**.

Наведемо приклади найбільше використовуваних ***схем логічно правильних*** умовиводів:

1. Правило висновку – стверджуючий модус (modus ponens)

„Якщо істинне, що з висловлення A випливає висловлення B і висловлення A істинно, то істинно й висловлення B”. Позначається:

$$\frac{A \to B, A}{B}.$$

Доведемо modus ponens. Задля цього доведемо тотожну істинність формули $((A \to B) \wedge A) \to B$ за допомогою таблиці істинності:

AB	$A \to B$	$(A \to B) \wedge A)$	$((A \to B) \wedge A) \to B$
00	1	0	1
01	1	0	1
10	0	0	1
11	1	1	1

Правило modus ponens доведено.

Приклад 1. Нехай є такі висловлення:

А – „Йде дощ”;

В – „На вулиці асфальт мокрий”.

Правило modus ponens для цих висловлень має такий вигляд: „Якщо йде дощ, то на вулиці асфальт мокрий. Йде дощ. Отже, на вулиці асфальт мокрий”.

2. Правило заперечення – негативний модус (modus tollens): «Якщо з A треба B істинно, але висловлення B хибне (істинне $\overline{B}$), то хибне A (істинне $\overline{A}$)»:

$$\frac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}.$$

Доведемо modus tollens. Задля цього доведемо тотожну істинність формули $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$ за допомогою таблиці істинності:

AB	$A \to B$	$\overline{B}$	$(A \to B) \wedge \overline{B}$	$\overline{A}$	$((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$
00	1	1	1	1	1
01	1	0	0	1	1
10	0	1	0	0	1
11	1	0	0	0	1

Правило modus tollens доведено.

Приклад 2. Для тих самих висловлень з прикладу 4.8. правило modus tollens

$$\frac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}.$$

має таку інтерпретацію: „Якщо йде дощ, то на вулиці асфальт мокрий. На вулиці асфальт не мокрий (сухий). Отже, не йде дощ (дощу нема)”.

3. Правила ствердження-заперечення (modus ponendo-tollens): „Якщо справедливо або висловлення A, або висловлення B (у розділовому змісті) і істинно одне з них, то інше хибне”:

$$\frac{A\oplus B, A}{\overline{B}};\frac{A\oplus B, B}{\overline{A}}.$$

Доведемо одне з правил modus ponendo-tollens $((A\oplus B)\wedge A)\to\overline{B}$ (друге доводиться за аналогією) за допомогою таблиці істиності:

AB	$A\oplus B$	$(A\oplus B)\wedge A$	$\overline{B}$	$((A\oplus B)\wedge A)\to\overline{B}$
00	0	0	1	1
01	1	0	0	1
10	1	1	1	1
11	0	0	0	1

Правило modus ponendo-tollens доведено.

Приклад 3. Нехай є такі висловлення:

А – „зараз літо”,

В – „зараз осінь”.

Тоді правило ствердження-заперечення (modus ponendo-tollens), але цієї інтерпретації має вигляд:

1) „Зараз або літо, або осінь. Зараз літо. Отже, зараз не осінь”.

2) „Зараз або літо, або осінь. Зараз осінь. Отже, зараз не літо”.

4. Правила заперечення-твердження(modus tollen-ponens):

а) „Якщо істинно або A, або B (у розділовому змісті) і хибне одне з них, то істинне інше”:

$$\frac{A\oplus B,\overline{A}}{B};\frac{A\oplus B,\overline{B}}{A};$$

б) „Якщо істинно A або B (у нерозділовому змісті) і хибне одне з них, то істинне інше":

$$\frac{A \vee B, \overline{A}}{B}; \frac{A \vee B, \overline{B}}{A}.$$

Доведемо два з чотирьох правил modus tollen-ponens $\frac{A \oplus B, \overline{A}}{B}$ і $\frac{A \cup B, \overline{A}}{B}$ за допомогою таблиць істиності:

AB	$A \oplus B$	$\overline{A}$	$(A \oplus B) \wedge \overline{A}$	$((A \oplus B) \wedge \overline{A}) \to B$
00	0	1	0	1
01	1	1	1	1
10	1	0	0	1
11	0	0	0	1

AB	$A \vee B$	$\overline{A}$	$(A \vee B) \wedge \overline{A}$	$((A \vee B) \wedge \overline{A}) \to B$
00	0	1	0	1
01	1	1	1	1
10	1	0	0	1
11	1	0	0	1

Правило modus ponendo-tollens доведено.

Приклад 4. Для тих самих висловлень з прикладу 2. правило а) заперечення-ствердження (modus tollen-ponens)

$$1)\ \frac{A \oplus B, \overline{A}}{B},\ 2)\ \frac{A \oplus B, \overline{B}}{A}$$

має вигляд:

1) „Зараз або літо, або осінь. Зараз не літо. Отже, зараз осінь”, або

2) „Зараз або літо, або осінь. Зараз не осінь. Отже, зараз літо”.

Приклад 5. Позначимо елементарні висловлення:

А – „Йде сніг”,

В – „Йде дощ”.

Тоді правило modus tollen-ponens в нерозділовому змісті:

$$\frac{A \vee B, \overline{A}}{B}; \frac{A \vee B, \overline{B}}{A}.$$

має вигляд:

1) „Йде дощ або сніг. Дощу нема. Отже, йде сніг”, або

2) „Йде дощ або сніг. Снігу нема. Отже, йде дощ”.

5. Правило транзитивності (спрощене правило силогізму): „Якщо з A випливає B, а з B випливає C, то з A випливає C”:

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}.$$

Доведемо правило силогізму за допомогою таблиці істинності

ABC	$A \to B$	$B \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$A \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
000	1	1	1	1	1
001	1	1	1	1	1
010	1	0	0	1	1
011	1	1	1	1	1
100	0	1	0	0	1
101	0	1	0	1	1
110	1	0	0	0	1
111	1	1	1	1	1

Приклад 6. Позначимо елементарні висловлення:

A − „Наступає кінець фінансового року”;

B − „Треба готувати фінансовий звіт”;

C − „Головний бухгалтер має заповнити форми фінансового звіту”.

Тоді правило транзитивності $\dfrac{A \to B, B \to C}{A \to C}$ має вигляд:

„Якщо наступає кінець фінансового року, то треба готувати фінансовий звіт. Якщо треба готувати фінансовий звіт, то головний бухгалтер фірми має заповнити форми фінансового звіту. Отже, якщо наступає кінець фінансового року, то головний бухгалтер має заповнити форми фінансового звіту.”

6. Закон протиріччя:

„Якщо з A впливає B і $\overline{B}$, то хибне A (істинне $\overline{A}$)”:

$$\frac{A \to B, A \to \overline{B}}{\overline{A}}.$$

Доведемо закон протиріччя за допомогою таблиці істинності:

AB	$A \to B$	$\overline{B}$	$A \to \overline{B}$	$(A \to B) \wedge (A \to \overline{B})$	$\overline{A}$	$((A \to B) \wedge (A \to \overline{B})) \to \overline{A}$
00	1	1	1	1	1	1
01	1	0	1	1	1	1
10	0	1	1	0	0	1
11	1	0	0	0	0	1

7. Правило контрапозиції:

„Якщо істинне, що з A випливає B, то істинне, що з $\overline{B}$ випливає $\overline{A}$”;

$$\frac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}$$

Доведемо правило контрапозиції за допомогою таблиці істинності:

AB	$A \to B$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \to \overline{A}$	$(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$
00	1	1	1	1	1
01	1	0	1	1	1
10	0	1	0	0	1
11	1	0	0	1	1

Приклад 7. Використаємо елементарні висловлення A і B з прикладу 6. Тоді правило контрапозиції $\frac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}$ має вигляд:

„Якщо наступає кінець фінансового року, то треба готувати фінансовий звіт. Отже, якщо не треба готувати фінансовий звіт, то кінець фінансового року не наступає”.

8. Правило складної контрапозиції:

„Якщо істинне, що з A і B впливає C, то з A и $\overline{C}$ випливає $\overline{B}$”:

$$\frac{(A \wedge B) \to C}{(A \wedge \overline{C}) \to \overline{B}}$$

Доведемо правило складної контрапозиції за допомогою таблиці істинності:

ABC	$A \wedge B$	$A \wedge B \to C$	$\overline{C}$	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{C}$	$(A \wedge \overline{C}) \to \overline{B}$	$((A \wedge B) \to C) \to ((A \wedge \overline{C}) \to \overline{B})$
000	0	1	1	1	0	1	1
001	0	1	0	1	0	1	1
010	0	1	1	0	0	1	1
011	0	1	0	0	0	1	1
100	0	1	1	1	1	1	1
101	0	1	0	1	0	1	1
110	1	0	1	0	1	0	1
111	1	1	0	0	0	1	1

9. Правило перерізу:

„Якщо істинне, що з A випливає B, а з B і C треба D, то з A і C випливає D”:

$$\frac{A \to B, (B \wedge C) \to D}{(A \wedge C) \to D}$$

A	B	C	AB	$\to C$	$A\overline{C}$	$\to \overline{B}$	$\to$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1	1

Наведемо без доведення ще декілька правильних умовиводів.

10. Правило імпортації (об’єднання посилок):

$$\frac{A \to (B \to C)}{(A \vee B) \to C}.$$

11. **Правило експортації** (роз’єднання посилок):

$$\frac{(A \vee B) \to C}{A \to (B \to C)}.$$

12. **Правила дилем:**

а) $\dfrac{A \to C, B \to C, A \vee B}{C}$;	б) $\dfrac{A \to B, A \to C, \overline{B} \vee \overline{C}}{\overline{A}}$;
в) $\dfrac{A \to B, C \to D, A \vee C}{B \vee D}$;	г) $\dfrac{A \to B, C \to D, \overline{B} \vee \overline{D}}{\neg A \vee \neg C}$.

Прикладами умовиводів, що не є правильними, можуть служити:

а) $\dfrac{A \to B, B}{A}$;	б) $\dfrac{A \to B, \neg A}{\neg B}$;	в) $\dfrac{A \vee B, A}{\neg B}$; і ін.

Практичне заняття 2.1. Операції над предикатами. Основні рівносильності з кванторами

Мета: Розглянути основні відомості логіки предикатів та навчитись виконувати логічні операції над предикатами.

1. Операції над предикатами.

Приклад 1. Зобразити у вигляді предикатів такі речення:

1) «Студенти складають сесію».

2) «Число $x + 1$ більше числа x».

3) «Брат Марини».

Розв'язок. 1) Речення «Студенти складають сесію» може приймати значення «Істина» або «Хибність», тому його можна зобразити у вигляді предиката. У внутрішній структурі цього речення можна виділити присудок «складають», підмет «студенти» і доповнення «сесію». Останні можна розглядати як предметні константи. Таким чином, одержуємо нуль-місний предикат СКЛАДАТИ(студенти, сесію).

2) Присудком у цьому реченні є слово «більше». Зобразимо підмет «$x + 1$» і доповнення «x» у вигляді термів. Причому терм «$x + 1$» має внутрішню структуру, оскільки його можна зобразити за допомогою функціонального символу плюс(x, 1). Тоді вихідне речення прийме вигляд двомісного предиката: БІЛЬШЕ(плюс(x, 1), x). Тут x— предметна змінна, а 1 — константа.

3) Речення «брат Марини» не можна зобразити у вигляді предиката, оскільки його значенням є не «Істина» або «Хибність», а деякий елемент предметної області, яка відповідає множині людей.

Приклад 2. Перекласти на природну мову такі висловлення логіки предикатів:

1) *ДОРІВНЮВАТИ*(x, *5*).

2) *ЗНАТИ*(*папа* (*Вася*), *математика*).

Розв'язок. 1) Предикат ДОРІВНЮВАТИ(x, 5) відповідає твердженню «x дорівнює 5» природної мови. Тут 5— константа, x — предметна змінна.

2) У висловленні ЗНАТИ(папа(Вася), математика) функціональний символ «папа(x)» приймає значення з множини людей, що відповідає відношенню «бути батьком x». Тому вираз папа(Вася) слід інтерпретувати як «Васін папа». Таким чином, предикат ЗНАТИ(папа(Вася), математика) відповідає реченню «папа у Васі знає математику» природної мови. Тут «Вася» і «математика» є константами, а x — предметна змінна.

Завдання

1. З наведених нижче речень випишіть окремо висловлення, окремо — предикати:

а) $x > 0$;

б) 2 + 3 = 6;

в) про нього щось говорять;

г) x брат y;

д) протилежні боки A і B паралелограма рівні;

е) кожне явище x має свою причину y.

2. В наведених одномісних предикатах зробіть можливі підстановки змінної x так, щоб одержати істинні висловлення. Які з них припускають одну, а які — багато підстановок?

а) x — найвища горна вершина у світі;

б) **x** — представник діалектичної логіки;

в) $x + 7 = 15$;

г) x— логічна зв'язка;

д) x — видатний античний логік.

3. Змінні функції «$x > y$» приймають значення на множині {1,2,3}; B_1, B_2 — предикати, що задаються цією функцією відповідно при алфавітному і зворотному йому порядках. Встановіть:

а) область визначення предикатів B_1 і B_2;

б) значення істинності $B_1(2, 3)$ і $B_2(2, 3)$.

4. Скільки різних предикатів визначає висловлення «$x + y = z$», якщо M_x, M_y і M_z — множини значень змінних x, y, z:

а) $M_x = M_y = M_z = \{1, 2\}$;

б) $M_x = \{1\}$, $M_y = \{1, 2\}$, $M_z = \{2, 3\}$?

5. Визначте, чи еквівалентні такі предикати:

а) $x^2 = 1$ і $x = 1$;

б) $x^2 = x$ і $x = 1$.

Дайте відповіді на питання:

1. Дайте визначення поняттю предикат.
2. Що називається порядком предиката?
3. Наведіть приклади n-місних предикатів.
4. Назвіть способи визначення предикатів.
5. Наведіть приклади функціональних символів.
6. Який функціональний символ називають n-місним?
7. Дайте визначення терма.
8. Що розуміють під предметною областю?
9. Дайте визначення понять предметна змінна і предметна константа. Наведіть приклади.

2. **Основні рівносильності з кванторами**

Функціональна природа предиката потребує введення ще одного поняття – *кванторa*. Його роль спробуємо з'ясувати на наступних прикладах:

а) “Всі люди мають здатність мислити. Я людина. Отже, я маю здатність мислити”;

б) “Деякі люди зробили геніальні відкриття. Я людина. Отже, я зробив геніальне відкриття”.

Якщо перше висловлення не викликає у нас питань із приводу істинності, то в другому прикладі ми почуваємо хибність висновку, тому що потрапити в число геніальних людей малоймовірно.

Ключовими словами в наших прикладах є “всі” і “деякі”.

Визначення 2.1. Термін “всі x” позначається $\forall x$ і називається *квантором загальності або спільності* (символ $\forall$ - перевернена буква А англійського слова All – “всі”). Висловлення “для всіх x з M, що $P(x)$ істинно” позначається як $\forall x P(x)$.

Визначення 2.24**.** Термін “деякі x” або “існує хоча б одне значення x” позначається $\exists x$ і називається *квантором існування* (символ $\exists$ - перевернена буква Е англійського слова Exist - “існувати”). Висловлення “існує такий x з M, що $P(x)$ істинно” позначається як $\exists x P(x)$.

Визначення 2.3. Перехід від $P(x)$ до $\forall x P(x)$ або $\exists x P(x)$ називається *зв'язуванням* змінної x, або *навішуванням квантора* на змінну x (або на предикат $P(x)$).

Визначення 2.4. Змінна, на яку навісили квантор, називається *зв'язаною змінної*, незв'язана квантором змінна називається *вільною*.

Навішувати квантори можна не тільки на предметні змінні, але і на багатовимірні предикати, і на будь-які логічні висловлення.

Визначення 2.5. Висловлення, на яке навішується квантор існування або спільності, називається *областю дії квантора*.

Приклад 2.1. Нехай змінна x визначена на великій кількості людей M, а $P_1(x)$ - предикат “x - має маму”, $P_2(x)$ - предикат “x - має дочку”. Дати словесне формулювання предикатних формул $\forall x P_1(x)$, $\exists x P_2(x)$.

Рішення: $\forall x P_1(x)$ - “у кожної людини є мама”;

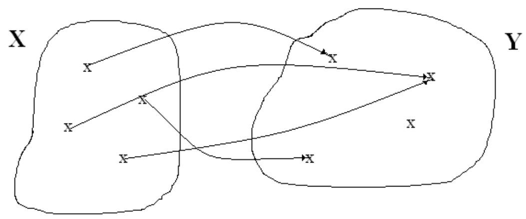
$\exists x P_2(x)$ - “у деяких людей є дочка”.

Приклад 2.2. Нехай змінні x, y визначені на деякій великій кількості людей M, а $P(x,y)$ - предикат “x кохає y”. Розглянути всі варіанти навішування кванторів на обидві змінні і дати словесну інтерпретацію отриманих висловлень.

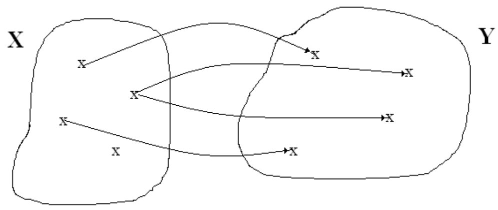
Рішення: Позначимо предикат “x кохає y” як КОХАЄ (x,y). Проілюструємо всі можливі варіанти навішення кванторів на предметні змінні

Для наочності змінні x і y показані на різних множинах, хоча очевидно, що в дійсності вони повинні збігатися.

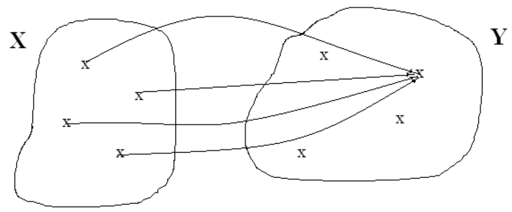
а) $\forall x \exists y$ КОХАЄ(x, y) - “для будь-якої людини x існує така людина y, яку він кохає”:



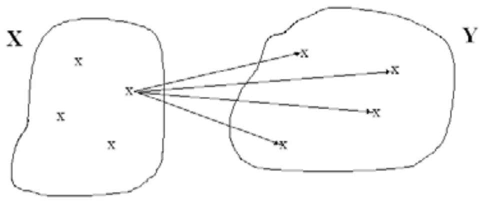
б) $\forall y \exists x$ КОХАЄ (x, y) - “для будь-якої людини y існує така людина x, що її кохає”:



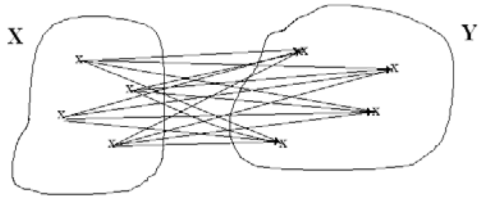
в) $\exists y \forall x$ КОХАЄ (x, y) - “існує така людина y, яку кохають всі x”:



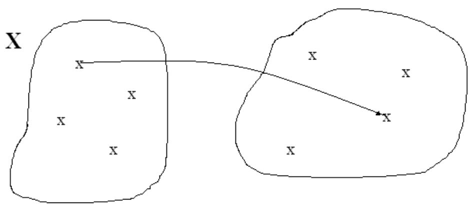
г) $\exists x \forall y$ КОХАЄ (x, y) - “існує така людина x, яка кохає всіх людей y”;



д) $\forall x \forall y$ КОХАЄ (x, y) - “всі люди x кохають всіх людей y”;



е) $\exists x \exists y$ КОХАЄ (x, y) - “існує така людина x, що кохає якусь людину y”.



Приклад 2.3. Нехай $P(x, y)$ - предикат "x - валюта (грошова одиниця) країни y", де $x \in$ множині грошових одиниць, а $y \in$ множині країн. Розглянути всі варіанти навішування кванторів на обидві змінні, дати словесну інтерпретацію отриманих висловлень і визначити їхню істинність.

Рішення:

$\forall x P(x, y)$ - однозмінний предикат (змінне висловлення) "будь-яка грошова одиниця є валютою країни y". Дане змінне висловлення хибне.

$\forall y P(x, y)$- однозмінний предикат " будь-якої країни y грошова одиниця x є валютою ". Дане змінне висловлення хибне.

$\exists x P(x, y)$- однозмінний предикат "існує така грошова одиниця x, що є валютою країни y". Дане змінне висловлення істинно для будь-якого значення вільної змінної y.

$\exists y P(x, y)$- однозмінний предикат "існує така країна y, валютою якої є грошова одиниця x". Дане змінне висловлення істинно для будь-якого значення вільної змінної x.

Далі йдуть предикати нульової розмірності: $\forall x \forall y P(x, y)$, $\forall y \forall x P(x, y)$ - "валютою будь-якої країни є будь-яка грошова одиниця". Дане висловлення є хибним.

$\exists x \forall y P(x, y)$ - висловлення "існує така грошова одиниця x, що є валютою будь-якої країни". Дане висловлення є хибним.

$\forall y \exists x P(x, y)$ - висловлення "у будь-якої країни існує своя грошова одиниця". Дане висловлення істинно.

$\forall x \exists y P(x, y)$ - висловлення "для будь-якої грошової одиниці існує така країна, де вона є її валюта". Дане висловлення істинно.

$\exists y \forall x P(x,y)$ - висловлення “існує така країна, валютою якої є всі існуючі грошові одиниці”. Дане висловлення хибне.

$\exists x \exists y P(x,y)$, $\exists y \exists x P(x,y)$ - висловлення “існує така грошова одиниця x і існує така країна y, що x є валютою країни y”. Дані висловлення істинні.

Приклад 2.5. Нехай $P(x,y)$ заданий на множині $M=\{a,b,c\}$ таблицею.

x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
$P(x,y)$	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Визначити істинність наступних формул: $\forall x P(x,a)$, $\exists y P(b,y)$, $\exists x \forall y P(x,y)$.

Рішення: Формула $\forall x P(x,a)$ - істинна, тому що для кожного x із множини $M=\{a,b,c\}$ прямує наступне:

$P(a,a)=P(b,a)=P(c,a)=1$.

Формула $\exists y P(b,y)$ - істинна, тому що існує такий набір змінних, при якому змінне висловлення $P(b,a)=1$.

Формула $\exists x \forall y P(x,y)$ - хибна, тому що не існує такого значення x, щоб для всіх y прямувало $P(x,y)=1$.

Приклад 2.6. Визначити, чи є дані висловлення формулами логіки предикатів. Якщо так, то визначити вільні і зв'язані змінні:

а) $\forall x \exists y \exists z P(x,y,z,u)$;

б) $\forall x \forall y P_1(x,y,z) \leftrightarrow \exists x P_2(x,y,z)$;

г) $\exists x \forall z (P_1(x,y,z) \rightarrow (P_2(x,z,y) \vee P_1(y,z,x)))$.

Рішення:

а) дане висловлення є формулою логіки предикатів. Змінні x,y,z - зв'язані, а змінна u - вільна.;

б) дане висловлення не є формулою логіки предикатів, тому що змінна y в першій частині формули $\forall x \forall y P_1(x, y, z)$ є зв'язаною, а в другій − $\exists x P_2(x, y, z)$ є вільною;

в) дане висловлення є формулою логіки предикатів, тому що змінні x, z зв'язані, а змінна y - вільна.

Практичне заняття 2.2. Числення предикатів.
Мова числення предикатів

Мета. Засвоїти основні поняття (Поняття n-арного предикату. Квантори загальності та існування. Вільні та зв'язані змінні. Алфавіт та формули логіки предикатів. Інтерпретація формул логіки предикатів. Загально-значимі формули логіки предикатів. Рівносильні перетворення формул з кванторами. Нормальні форми формул логіки предикатів 1-го порядку).

Завдання.

1. Нехай $(\forall x)\ A_1^2(f_1^1(x), n) \wedge (\exists x)\ A_2^2(f_2^1(x), n)$ формула логіки предикатів 1-го порядку(де n порядковий номер студента в журналі). Розглянути 2 інтерпретації формули. В 1-й інтерпретації значення формули повинно бути "істина", а в 2-й інтерпретації - "хибність"
2. Розглянути формулу, яка є запереченням формули із 1-го завдання, та її інтерпретацію із значенням "хибність"
3. Формулу із 2-го завдання перетворити у таку рівносильну їй формулу в заданій інтерпретації, яка не містила б операцій заперечення.
4. Побудувати попередню нормальну форму для формули із 1-го завдання.

Приклад виконання завдання

1. Нехай $(\forall x)\ A_1^2(f_1^1(x),\ a_1) \wedge (\exists x)\ A_2^2(f_2^1(x),\ a_1)$ формула логіки предикатів 1-го порядку . Розглянемо 2 інтерпретації формули. В 1-й інтерпретації значення формули повинно бути "істина", а в 2-й інтерпретації - "хибність"

Перша інтерпретація $D = R$; $a_1=37$, $f_1^1(x)=|\,x\,|+37$,

$$A_1^2(f^1(x), a_1) = \text{"}\ f_1^1(x) \geq a_1\text{"}.$$

$$f_2^1(x)=x^2,\ A_2^2(f_2^1(x), a_1) = \text{"}\ f_2^1(x)= a_1\text{"}$$

Отримане висловлення $(\forall x)\ (\,|\,x\,|+37 \geq 37) \wedge (\exists x)\ (x^2 =37)$ є істинним.

Друга інтерпретація $D = N$; $a_1=37$, $f_1^1(x)=\sin x$,

$$A_1^2(f_1^1(x), a_1) = \text{" } f_1^1(x) > a_1\text{".}$$

$$f_2^1(x)=\sqrt{x}\,,\ A_2^2(f_2^1(x), a_1) =\text{" } f_2^1(x)= a_1\text{"}$$

Отримане висловлення $(\forall x)$ ($\sin x > 37$) $\wedge$ $(\exists x)$ ($\sqrt{x} = 37$) є хибним.

2. Розглянемо формулу, яка є запереченням формули із 1-го завдання, та її інтерпретацію із значенням "хибність"

$$\neg((\forall x)\, A_1^2(f_1^1(x), a_1) \wedge (\exists x)\, A_2^2(f_2^1(x), a_1)) \equiv$$

$$(\exists x)\, \neg A_1^2(f_1^1(x), a_1) \vee (\forall x)\, \neg A_2^2(f_2^1(x), a_1)$$

Інтерпретація $D = R$; $a_1=37$, $f_1^1(x)=\cos x$,

$$A_1^2(f^1(x), a_1) = \text{" } f_1^1(x) > a_1\text{".}$$

$$f_2^1(x)=x,\ A_2^2(f_2^1(x), a_1) =\text{" } f_2^1(x)= a_1\text{"}$$

Отримане висловлення (існує x, для якого не виконується нерівність $\cos x < 37$, або для будь-якого x не виконується рівність $x=37$) є хибним.

3. Формулу із 2-го завдання перетворимо у таку рівносильну їй формулу в заданій інтерпретації, яка не містила б операцій заперечення.

Отримане висловлення (існує x, для якого виконується нерівність $\cos x \geq 37$, або для будь-якого x виконується нерівність $x \neq 37$) є хибним.

4. Побудуємо попередню нормальну форму для формули із 1-го завдання.

$$(\forall x)\, A_1^2(f_1^1(x), a_1) \wedge (\exists x)\, A_2^2(f_2^1(x), a_1) \equiv$$

$$(\forall x)\, A_1^2(f_1^1(x), a_1) \wedge (\exists y)\, A_2^2(f_2^1(y), a_1) \equiv$$

$$(\forall x)\, (\exists y)(A_1^2(f_1^1(x), a_1) \wedge\ A_2^2(f_2^1(y), a_1)).$$

Дайте відповіді на контрольні питання:

1. Логіка предикатів .
2 Поняття n-арного предикату.
3 Квантори загальності та існування. Вільні та зв'язані змінні.
4 Алфавіт логіки предикатів .
5 Формули логіки предикатів .
6 Інтерпретація формул логіки предикатів .

7 Загально-значимі формули логіки предикатів .

8 Рівносильні перетворення формул з кванторами.

9 Правило побудови заперечення формул з кванторами.

10 Нормальні форми формул логіки предикатів 1-го порядку.

11 Аксіоми та правила виведення числення (логіки) предикатів 1-го порядку.

12 Виведення формул в численні предикатів 1-го порядку на прикладі.

13 Основні властивості числення предикатів 1-го порядку.

14 Несуперечність числення предикатів 1-го порядку.

15 Теорема дедукції для числення предикатів 1-го порядку.

16 Зв'язок між тавтологіями числення висловлювань та загально-значимими формулами числення предикатів 1-го порядку.

Практичне заняття 2.3. Використання мови логіки предикатів у математиці

Мета: Розглянути використання мови логіки предикатів у математиці та навчитись розв’язувати задачі на використання мови логіки предикатів.

Приклад 2.3.1. Нехай $P(x)$ - предикат “x - парне число”, визначений на множині натуральних чисел. Виконати заперечення кванторів існування і спільності, дати словами інтерпретацію отриманих висловлень.

Рішення:

Тому що $x = \{1,2,3,4,5,6,7,8,...\}$, то предикатна функція приймає як істинні, так і хибні значення: $P(1)=0$, $P(2)=1$, $P(3)=0$, $P(4)=1$, $P(5)=0$ …

Переконаємося в справедливості формули для заперечення квантора спільності: $\overline{\forall x P(x)=1}$ “не всі x - парні числа” = “існують такі x, які є непарними числами” $= \exists x\overline{P}(x)=1$.

Обидва висловлення істинні.

Переконаємося в справедливості формули для заперечення квантора існування: $\overline{\exists x P(x)=0}$“немає жодного x, котре було б парним числом”= “усі x є непарними числами”$= \forall x\overline{P}(x)=0$.

Обидва висловлення хибні.

Кон’юнктивна природа квантора спільності і диз'юнктивна природа квантора існування з погляду *відношення еквівалентності* накладають певні обмеження на використання їх разом з диз'юнкцією і кон’юнкцією як логічними операціями.

Легко переконатися в справедливості тотожностей:

$\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$;

$\exists x(A(x) \vee B(x)) = \exists xA(x) \vee \exists xB(x)$.

Приклад 2.3.2. Довести тотожність $\forall x(A(x) \wedge B(x)) = \forall xA(x) \wedge \forall xB(x)$.

Рішення: Нехай для визначеності предметна область предикатів складається із двох елементів a і b (у загальному випадку для областей, що містять n елементів, представлені докази будуть такими ж, але більш громіздкими). Тоді: $\forall x(A(x)\wedge B(x))=(A(a)\wedge B(a))\wedge(A(b)\wedge B(b))=$

$$=(A(a)\wedge A(b))\wedge(B(a)\wedge B(b))=\forall xA(x)\wedge\forall xB(x).$$

Друга тотожність доводиться аналогічно (перевірити самостійно).

Якщо кожний із предикатів замінити висловленням, то справедливими виявляються наступні співвідношення:

$$\forall x(A\vee B(x))=A\vee\forall xB(x);\qquad \exists x(A\wedge B(x))=A\wedge\exists xB(x).$$

Приклад 2.3.3. Довести тотожність $\exists x(A\wedge B(x))=A\wedge\exists xB(x)$.

Рішення: Доведемо другу тотожність, надавши доведення першої читачеві: $\exists x(A\wedge B(x))=(A\wedge B(a))\vee(A\wedge B(b))=$

$$=A\wedge(A\vee B(a))\wedge(A\vee B(b))\wedge(B(a)\vee B(b))=A\wedge(B(a)\vee B(b))=A\wedge\exists xB(x).$$

Тому що імплікація може бути подана через диз'юнкцію, то вірне співвідношення: $\exists x(A(x)\to B(x))=\forall xA(x)\to\exists xB(x)$.

Доведемо його:

$$\exists x(A(x)\to B(x))=\exists x(\overline{A}(x)\vee B(x))=(\overline{A}(a)\vee B(a))\vee(\overline{A}(b)\vee B(b))=$$

$$=(\overline{A}(a)\vee\overline{A}(b))\vee(B(a)\vee B(b))=\exists x\overline{A}(x)\vee\exists xB(x)=\overline{\forall}xA(x)\vee\exists xB(x)=$$

$$=\forall xA(x)\to\exists xB(x).$$

Щоб зберегти відношення еквівалентності (при винесенні за дужки квантора існування при кон'юнкції і квантора спільності при диз'юнкції), коли дані два різних предикати, уводять додаткову змінну:

$$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)=\exists xA(x)\wedge\exists yB(y)=\exists x\exists y(A(x)\wedge B(y))=$$

$$=(A(a)\vee A(b))\wedge(B(a)\vee B(b)).$$

Аналогічно діють і у випадках:

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x)=\forall x\forall y(A(x)\vee B(y));$$

$$\exists xA(x)\to\forall xB(x)=\forall x\forall y(A(x)\to B(y));$$

$$\exists xA(x)\vee\forall xB(x)=\exists x\forall y(A(x)\vee B(y))=\forall x\exists y(A(y)\vee B(x)).$$

В останньому з наведених співвідношень відзначимо наступне: квантори $\forall$ і $\exists$ можна переставляти місцями, тільки якщо вони незалежні, тобто ставляться до незалежних однозмінних предикатів!

Що до двозмінних предикатів, то за допомогою законів комутативності і асоціативності для кон'юнкції і диз'юнкції, можна довести справедливість наступних тотожностей:

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y); \qquad \exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y).$$

Приклад 2.3.4. Довести тотожність $\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y)$.

Рішення:

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall x (P(x, a) \wedge P(x, b)) = (P(a, a) \wedge P(b, a)) \wedge (P(a, b) \wedge P(b, b)) =$$
$$= (P(a, a) \wedge P(a, b)) \wedge (P(b, a) \wedge P(b, b)) = \forall y (P(a, y) \wedge P(b, y)) = \forall y \forall x P(x, y)$$

Завдання:

1. Записати (використовуючи прийняті позначення S, Π, E для предикатів суми, добутку і рівності відповідно) предикатною формулою пропозицію, що надає для довільних $a, b, c \in N$ наступні властивості арифметики натуральних чисел:

а) комутативність додавання;

б) комутативність множення;

в) асоціативність додавання;

г) асоціативність множення;

д) дистрибутивність додавання щодо множення;

е) дистрибутивність множення щодо додавання;

ж) транзитивність рівності.

2. Записати предикатною формулою наступні пропозиції:

а) "для всякого потенційного поля ротор дорівнює нулю";

б) "сума довжин двох сторін трикутника завжди менше довжини його третьої сторони";

в) "всі сторони ромба рівні";

3. Нехай $S(x,y,z)$ і $\Pi(x,y,z)$ - предикати суми і добутку відповідно, певні:

- на множині натуральних чисел з нулем N_0;

- на множині всіх цілих чисел Z.

З'ясувати, який зміст мають наступні формули, і на якої (з перерахованих) множині вони істинні:

а) $\exists y \forall x S(x,y,z)$;

б) $\exists y \forall x \Pi(x,y,z)$;

в) $\forall x \forall z \exists y S(x,y,z)$;

г) $\forall x \forall z \exists y \Pi(x,y,z)$.

4. Визначити, чи є дані вираження формулами логіки предикатів. Якщо так, то визначити вільні і зв'язані змінні:

а) $\forall x \exists u \exists z P(x,y,z,u,v)$;

б) $\exists y P_1(x,y,z) \wedge \forall y P_2(x,y,z)$;

в) $\exists x \forall z P_3(x,y,z) \rightarrow \exists z P_1(x,y,z)$;

г) $\forall x \forall u (P_5(x,y) \vee P_6(z,u))$;

д) $\exists y P_2(x,y,z) \leftrightarrow \forall x \forall y P_6(x,y)$;

е) $\forall x \forall y P_1(x,y,z) \vee \exists x \exists z P_1(x,y,z)$;

ж) $\exists y \forall x \forall z P(x,y,z)$.

6. Нехай предикат $P(x,y)$ задано на множині $M=\{a,b,c\}$ таблицею 2.3.1. (по варіантах):

Таблиця 2.3.1.

а)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x,y)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1
б)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x,y)$	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Продовження таблиці 2.3.1.

в)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x,y)$	1	1	1	0	0	0	1	1	1
г)	x	a	a	a	b	b	b	c	c	c
	y	a	b	c	a	b	c	a	b	c
	$P(x,y)$	0	1	0	0	1	1	1	0	0

Визначити істинність наступних формул:

$\forall xP(x,a)$, $\exists xP(x,a)$, $\forall xP(x,b)$, $\exists xP(x,b)$, $\forall yP(a,y)$, $\exists yP(a,y)$, $\forall yP(b,y)$, $\exists yP(b,y)$, $\forall x\forall yP(x,y)$, $\exists x\exists yP(x,y)$, $\forall x\exists yP(x,y)$, $\exists x\forall yP(x,y)$, $\forall y\exists xP(x,y)$, $\exists y\forall xP(x,y)$.

7. Довести тотожності:

а) $\exists x(A(x)\vee B(x)) = \exists xA(x)\vee \exists xB(x)$;

б) $\forall x(A\vee B(x)) = A\vee \forall xB(x)$;

в) $\exists x\exists yP(x,y) = \exists y\exists xP(x,y)$.

Практичне заняття 2.4. Приклади. Несуперечливість та повнота числення предикатів

Мета: Розглянути приклади застосування логіки предикатів, засвоїти властивості повноти тат несуперечності числення предикатів.

Приклад 2.4.1. Визначити істинність, хибність або здійсненність на моделі $\text{м} = \{N, S, \Pi, E\}$ наступних формул:

а) $\exists x S(x, x, y)$; б) $\exists y S(x, x, y)$; в) $(S(x, y, z) \wedge S(y, x, u)) \to E(z, u)$.

Рішення:

а) формула $\exists x S(x, x, y)$ - здійсненна на моделі м, тому що виявляє існування натурального значення $x = y/2$. Очевидно, що дана формула істинна тільки при підстановках парних натуральних чисел замість вільної змінної y, і хибна при підстановці непарних чисел. Наприклад, формула $\exists x S(x, x, 6)$ - істинна (у цьому випадку $x = 3$), а формула $\exists x S(x, x, 9)$ - хибна (тому що $x + x = 2x$ і не може в області натуральних чисел бути непарним числом);

б) формула $\exists y S(x, x, y)$ - ТІ на моделі м, тому що виявляє існування суми двох натуральних чисел. При підстановці будь-якого числа $\in N$ замість вільної змінної x формула $\exists y S(x, x, y)$ істинна: $\exists y S(5,5, y)$ (тут $y = 10$), $\exists y S(2,2, y)$ (тут $y = 4$);

в) формула $(S(x, y, z) \wedge S(y, x, u)) \to E(z, u)$ ТІ на моделі м, тому що виявляє тільки одне значення суми двох чисел. Дійсно, якщо $x + y = z$ і $y + x = u$, то $z = u$. Для підтвердження цього твердження розглянемо різні варіанти наборів чисел, значення предикатів і формули в цілому на цих наборах (x, y, z, u):

$(2,3,5,5)$ $S(2,3,5) \wedge S(3,2,5) \to E(5,5) = 1 \wedge 1 \to 1 = 1 \to 1 = 1$ - істинна;

$(2,3,5,6)$ $S(2,3,5) \wedge S(3,2,6) \to E(5,6) = 1 \wedge 0 \to 0 = 0 \to 1 = 1$ - істинна;

$(2,3,7,6)$ $S(2,3,7) \wedge S(3,2,6) \to E(7,6) = 0 \wedge 0 \to 0 = 0 \to 0 = 1$ - істинна;

$(2,3,7,5)$ $S(2,3,7) \wedge S(3,2,5) \to E(7,5) = 0 \wedge 1 \to 0 = 0 \to 0 = 1$ - істинна.

Приклад 2.4.2. Визначити істинність, хибність або здійсненність наступних формул: а) $\exists y P(x,x,y)$; б) $\forall x\left(P(x)\vee \overline{P}(x)\right)$; в) $\exists x\left(P(x)\wedge \overline{P}(x)\right)$.

Рішення:

а) формула $\exists y P(x,x,y)$ - здійсненна. Наприклад, на моделі арифметики натуральних чисел М $=\{N,S,\Pi,E\}$. Якщо трактувати предикат P як предикат суми S, то формула істинна при $x=y/2$ - натуральне число, і хибна – у протилежному випадку. Якщо трактувати предикат P як предикат добутку Π, то формула істинна при $x=\sqrt{y}$ - натуральне число, і хибно – у протилежному випадку.

б) формула $\forall x\left(P(x)\vee \overline{P}(x)\right)$ - ТІ формула, тому що вона істинна в будь-якій області M. Довести це легко, згадавши про кон'юнктивну природу квантора спільності. При підстановці будь-якої константи a з будь-якої області M у формулу предикат $P(a)$ може приймати або істинне - $P(a)=1$, або хибне - $P(a)=0$ значення. Тоді

$$\forall x\left(P(a)\vee \overline{P}(a)\right)=\left(1\vee \overline{1}\right)\wedge\left(0\vee \overline{0}\right)=(1\vee 0)\wedge(0\vee 1)=1\wedge 1=1.$$

в) формула $\exists x\left(P(x)\wedge \overline{P}(x)\right)$ -*ТП*-формула, тому що вона помилкова в будь-якій області M. Довести це легко, згадавши про диз'юнктивну природу квантора існування. При підстановці будь-якої константи a з будь-якої області M у формулу предикат $P(a)$ може приймати або істинне - $P(a)=1$, або хибне - $P(a)=0$ значення. Тоді

$$\exists x\left(P(a)\wedge \overline{P}(a)\right)=\left(1\wedge \overline{1}\right)\vee\left(0\wedge \overline{0}\right)=(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)=0\vee 0=0.$$

Приклад 2.4.3. Нехай M - множина чисел, що належать інтервалу $[1,7)$, а $Q(x,y)$ - предикат порядку “$x\le y$ ”. Визначити, при яких значеннях предметних змінних у заданій інтерпретації наступні формули є істинними:

а) $\forall y Q(x,y)$; б) $\exists y\forall x Q(x,y)$; в) $\forall x\exists y Q(x,y)$.

Рішення:

а) при $x=1$ формула приймає значення “1” – істинно, тому що для кожного y із зазначеного інтервалу виконується нерівність $1\le y$. При $x\ne 1$

формула приймає значення “0” – хибно, тому що, наприклад, для $y=1$ і $x>1$ нерівність $x \le y$ не виконується;

б) логічна інтерпретація заданої предикатної формули наступна “існує таке число y на інтервалі $[1,7)$, що більше будь-якого числа x із цього інтервалу”. На даному інтервалі формула приймає значення “0”, тому що на ньому немає найбільшого числа, адже $7 \notin [1,7)$;

в) логічна інтерпретація заданої предикатної формули наступна “для будь-якого числа x з інтервалу $[1,7)$ існує число y, для якого виконується нерівність $x \le y$”. Очевидно, що дана формула істинна.

При доведенні істинності формул логіки предикатів можна також використовувати метод доведення від зворотного, який докладно було розглянуто у логіки висловлень. Будемо припускати, що предикатна формула хибна, тобто не для всіх предметних змінних вона істинна. Тоді існує такий набір констант замість предметних змінних, підстановка яких у формулу робить її хибною. Якщо прийняте припущення щодо хибності формули призвело до протиріччя, то формула - істинна. Проілюструємо використання цього прийому на прикладі.

Приклад 2.4.4. Довести істинність формули методом від зворотного:

$$\forall x\left(\overline{P}(x) \to (P(x) \to Q(x))\right).$$

Рішення: Припустимо, що формула хибна. Тобто не для всіх x вона істинна. Тоді повинна існувати така константа a, підстановка якої у формулу робить її хибною, тобто $\overline{P}(a) \to (P(a) \to Q(a)) = 0$. З таблиці істинності для імплікації, таке можливо тільки якщо її ліва частина дорівнює 1, а права – 0, тобто $\overline{P}(a)=1$, а $P(a) \to Q(a)=0$. З першої рівності одержуємо $P(a)=0$, а виконання другої знову вимагає рівності одиниці лівої частини імплікації $P(a)=1$ і рівності нулю правої - $Q(a)=0$. Але $P(a)$ не може одночасно дорівнювати і нулю і одиниці. Прийшли до протиріччя. Отже, формула $\forall x\left(\overline{P}(x) \to (P(x) \to Q(x))\right)$ - істинна.

Завдання:

1. Визначити істинність, хибність або здійсненність на множині натуральних чисел з нулем N_0 наступних формул:

а) $\forall y S(x,y,y)$; б) $\forall y \Pi(x,y,y)$;

в) $\exists x S(x,y,y)$; г) $\exists z S(x,z,y)$;

д) $\exists z \Pi(x,z,y)$; е) $\forall y Q(x,y)$;

ж) $\exists y \forall x Q(x,y)$; з) $\forall x \exists y Q(x,y)$.

Тут прийняті позначення: $S(x,y,z)$ - предикат суми “$x+y=z$”; $\Pi(x,y,z)$ - предикат добутку “$x \cdot y = z$”; $E(x,y)$ - предикат рівності “$x=y$”; $D(x,y)$ - предикат подільності “x ділиться на y”; $Q(x,y)$ - предикат порядку “$x \le y$”.

2. Визначити істинність, хибність або здійсненність на множині натуральних чисел з нулем N_0 наступних формул:

а) $\forall x \forall y \forall z \forall u ((\Pi(x,y,z) \wedge \Pi(y,x,u)) \to E(z,u))$;

б) $\exists y (\Pi(x,x,y) \to S(x,x,y))$;

в) $\exists y ((S(x,y,z) \vee E(x,z)) \to Q(x,z))$;

г) $\forall x \forall y \forall z ((\Pi(x,y,z) \wedge \overline{E}(x,y)) \to S(x,y,z))$;

д) $\exists x \Pi(x,y,z) \to D(z,y)$;

е) $\exists x \Pi(x,y,x) \to \forall y \Pi(x,y,x)$;

ж) $\exists x S(x,y,y) \to \forall x S(x,y,y)$. Тут ті ж позначення.

3. У заданій інтерпретації визначити, при яких значеннях вільної змінної формули $\forall y P(x,y)$, $\forall y P(x,y)$ є істинними. Визначити значення формул $\forall x \exists y P(x,y)$, $\exists y \forall x P(x,y)$, $\forall y \exists x P(x,y)$, $\exists x \forall y P(x,y)$:

а) $M=(1,3)$, $P(x,y)$: “$x \le y$”;

б) $M=[1,3)$, $P(x,y)$: “$x < y$”;

в) $M=[1,4]$, $P(x,y)$: “$x > y$”;

г) $M=(1,4]$, $P(x,y)$: “$x \ge y$”;

д) $M=(2,5)$, $P(x,y)$: “$x = y$”;

е) $M=[2,5]$, $P(x,y)$: “ $x\neq y$ ”.

4. На множині $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ визначені предикати суми і добутку. При яких значеннях змінної x формули $F(x)$ істинні в M :

а) $\exists y S(y,y,x)$:

б) $\forall y \exists z \overline{\Pi}(x,y,z)$;

в) $\forall y \exists z \overline{S}(x,y,z)$;

г) $\forall y \overline{\Pi}(x,x,y)$;

д) $\overline{\exists} y S(y,y,x)$;

е) $\exists y \exists z \Pi(x,y,z)$;

ж) $\forall y \overline{S}(y,y,x)$;

з) $\exists y \forall z \Pi(x,y,z)$;

и) $\exists y \forall z \overline{S}(z,y,x)$;

к) $\exists y \Pi(y,y,x)$.

5. Для $F(x)$ із задачі 4 знайти значення формул: $\forall x F(x) \to \exists x F(x)$, $\exists x F(x) \leftrightarrow \forall x F(x)$. З'ясувати, значення яких з них можна було вказати без обчислень?

6. Довести істинність формул методом від зворотного:

а) $\forall x((P(x)\wedge Q(x)) \to P(x))$;

б) $\forall x((P(x)\to Q(x)) \vee (P(x)\to Q(x)))$;

в) $\forall x((P(x)\to Q(x)) \vee (Q(x)\to P(x)))$;

г) $\forall x(P(x)\to (Q(x)\to (P(x)\wedge Q(x))))$;

д) $\forall x((\overline{P}(x)\to \overline{Q}(x)) \to (P(x)\to Q(x)))$;

е) $\forall x((P(x)\to Q(x)) \to ((P(x)\to \overline{Q}(x)) \to \overline{P}(x)))$.

Практичне заняття 2.5. Примітивно рекурсивні функції.

Мета. Засвоїти основні поняття (Схема примітивної рекурсії, примітивно рекурсивні функції. Операція мінімізації. Частково рекурсивні функції.)

Завдання.

1 Встановлення примітивної рекурсивності функцій (побудова схем примітивної рекурсії):

а) $f(x) = n$;

в) $f(x) = nx$,

де n- порядковий номер студента в журналі.

2 Побудувати 2 функції із функції $g(x) = n$ взяттям обмеженої суми і обмеженого добутку і встановити примітивну рекурсивність побудованих функцій.

3 Для заданої примітивно рекурсивної функції $g(x) =(x + n)^2$, побудувати частково рекурсивну функцію за допомогою операції мінімізації.

Приклад виконання завдання

Варіант 37. Виконав студент групи Кн1/1 -***. Дата ***.

1. Нехай n=5

а) $f(x) = 5$;

Треба використати елементарні арифметичні функції: нуль функцію $O(x) = 0$;

функцію безпосереднього слідування $S(x) = x +1$ та операцію підстановки.

Тоді

$f(x) = S(S(S(S(S(O(x))))))=5$; тобто ця функція є ПРФ.

Позначимо її $const_5(x)=5$.

в) $f(x) = 5\bullet x$.

Покажемо, що ця функція є ПРФ.

Функцію $product(x,y)=x\bullet y$ можна одержати з функцій $O(x)$ та $h(x,y,z)=z+x$ операцією примітивної рекурсії. Справді,

$product(x,0)=0=O(x)$;

$product(x,y+1)=x\bullet(y+1)= x\bullet y+x=product(x,y)+x$.

Оскільки функція $sum(x,y)=x+y$ є ПРФ , а функція $h(x,y,z)=z+x$ як різновид функції $sum(x,y)$ з фіктивним аргументом y є теж ПРФ , тоді функцію $f(x) = 5\bullet x$ можна представити як $f(x) = product(x,const_5(x))$.

Отже ця функція –ПРФ.

2. Нехай $g(x) = 5$.

а) Побудуємо функцію із функції $g(x) = 5$ взяттям обмеженої суми і обмеженого добутку

$$f(y) = \sum_{i=0}^{y} g(i) = \sum_{i=0}^{y} 5 = 5(y+1) \qquad (1)$$

Ця функція є ПРФ як функція отримана із ПРФ взяттям обмеженої суми

в) Побудуємо функцію із функції $g(x) = 5$ взяттям обмеженого добутку

$$f(y) = \prod_{i=0}^{y} g(i) = \prod_{i=0}^{y} 5 = 5^{y+1} \qquad (1)$$

Ця функція є ПРФ як функція отримана із ПРФ взяттям обмеженого добутку

3. Нехай задана функція $g(x) = (x+1)^2$ - ПРФ

Допустимі значення аргументу x: 0, 1, 2,…

Введемо допоміжний аргумент y і розглянемо рівняння $g(y) = x$, тобто $(y+1)^2 = x$

Зафіксуємо допустимі значення основного аргументу x у таблиці 2.5.2.

Таблиця 2.5.2.

x	Рівняння	Корінь рівняння $\mu_y((y+1)^2 = x)$	f(x) побудована функція
0	$(y+1)^2 = 0$	нема	0 → не визначене
1	$(y+1)^2 = 1$	0	1→ 0
2	$(y+1)^2 = 2$	нема	2→ не визначене
3	$(y+1)^2 = 3$	нема	3 → не визначене
4	$(y+1)^2 = 4$	1	4→ 1
5	$(y+1)^2 = 5$	нема	5 → не виз-не
6	$(y+1)^2 = 6$	…	…
7	$(y+1)^2= 7$	нема	7 → не виз-не
8	$(y+1)^2= 8$	нема	8 → не виз-не
9	$(y+1)^2= 9$	2	9 → 2
…	…	…	…

Отримане значення кореня рівняння будемо приймати за значення функції, яку ми будуємо.
Це значення функції відповідає зафіксованому значенню x

Аналітичний вираз побудованої функції f(x)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1, \text{ для } x=k^2, \text{ де } k \in N_0, \; x \geq 1; \\ \text{не визначена, для інших допустимих значень } x. \end{cases}$$

Контрольні питання

1. Інтуїтивне поняття алгоритму.

2. Приклади алгоритмів.

3. Властивості алгоритмів.

4. Що таке рекурсія.

5. Елементарні арифметичні функції.

6. Операції:

- підстановки (суперпозиції);
- примітивної рекурсії;
- мінімізації.

7. Взяття обмеженої суми, обмеженого добутку.

8. Що таке примітивно рекурсивні функції

9. Що таке частково рекурсивні функції .

10. Теза Черча.

Практичне заняття 2.6. Рекурсивні функції.

Мета. Засвоїти основні поняття стосовно алгоритмічної системи нормальні алгоритми Маркова (НАМ).

Завдання.

1. Нехай n порядковий номер студента в журналі. Нехай m визначається так:

$$m=\begin{cases}10, & \text{якщо } n=1;\\ n & \text{якщо } 1\le n\le 10;\\ \text{остача від ділення } n \text{ на } 10, \text{ збільшена на одиницю.}\end{cases}$$

Створити нормальний алгоритм Маркова U_m для обчислення функції $S(x) = x + 1$, якщо x – число записане в m- значній системі числення.

2. Застосувати U_m для обчислення $S(n)$, (де n порядковий номер), попередньо перевівши цей порядковий номер у m-значну систему числення.

3. Побудувати нормальний алгоритм Маркова, який перетворює кожне натуральне число, записане в алфавіті $A= \{|\}$ в частку від ділення цього числа на n, записану в тому самому алфавіті.

4. Побудувати нормальний алгоритм Маркова U, який є композицією двох нормальних алгоритмів Маркова U_1 і U_2 , при чому:

U_1 - збільшує кожне натуральне число, записане в алфавіті $A= \{|\}$ на число t_1;

U_2 - збільшує кожне натуральне число, записане в алфавіті $A= \{|\}$ на число t_2;

де t_1 та t_2 – перша і друга цифра, відповідно, числа:

$n + 30$ (для ПУА1-**, МЕН1-***); при $n \neq 40$, $n \neq 50$, $n \neq 60$.

$n + 40$ (для Кн1/1-**, МЕН2-***); при $n \neq 50$, $n \neq 60$, $n \neq 70$.

$n + 50$ (для ПУА2-**, МЕН3-***); при $n \neq 60$, $n \neq 70$, $n \neq 80$.

$n + 60$ (для ПУА3-**, Ек1/1-***); при $n \neq 70$, $n \neq 80$, $n \neq 90$.

$t_1= 1$, $t_2 = 2$ при $n = 40$;

$t_1 = 2,\ t_2 = 3$ при $n = 50$;

$t_1 = 3,\ t_2 = 4$ при $n = 60$.

$t_1 = 4,\ t_2 = 5$ при $n = 70$.

$t_1 = 5,\ t_2 = 6$ при $n = 80$.

$t_1 = 6,\ t_2 = 7$ при $n = 90$.

Приклад виконання завдання

Варіант 37. Виконав студент групи Кн 1/1 -***. Дата ***.

1. Створимо НАМ U_5 для обчислення функції S(x) = x + 1, коли x записано в 5-значній системі числення. НАМ U_5 запишемо у вигляді 3-х стовпчиків формул підстановок

1) $*0 \to 0*$	6) $0* \to \bullet 1$	11) $0y \to \bullet 1$
2) $*1 \to 1*$	7) $1* \to \bullet 2$	12) $1y \to \bullet 2$
3) $*2 \to 2*$	8) $2* \to \bullet 3$	13) $2y \to \bullet 3$
4) $*3 \to 3*$	9) $3* \to \bullet 4$	14) $3y \to \bullet 4$
5) $*4 \to 4*$	10) $4* \to y0$	15) $4y \to y0$
		16) $y \to \bullet 1$
		17) $\to *$

2. Застосуємо U_5 для обчислення S(n), (де $n=24_{10}$), попередньо перевівши цей порядковий номер у 5-значну систему числення ($n=44_5$). Протокол застосування U_5 (в дужках вкажемо номер застосованої підстановки) :

44 (17)
*44 (5)
4*4 (5)
44* (10)
*4y4 (15)
y00 (16)
100 (17)

$U_m\,(44_5)=100_5=25_{10}$..

3. Побудуємо нормальний алгоритм Маркова, який перетворює кожне натуральне число, записане в алфавіті A= {|} в частку від ділення цього числа на 3, записану в тому самому алфавіті.

$$\begin{cases} 1)\ *III \to I* \\ 2)\ *I \to * \\ 3)\ * \to \bullet \\ 4)\ \to * \end{cases}$$

4. Побудуємо нормальний алгоритм Маркова U, який є композицією двох нормальних алгоритмів Маркова U_1 і U_2, при чому:

U_1 - збільшує кожне натуральне число, записане в алфавіті A= {|} на число 2;

U_2 - збільшує кожне натуральне число, записане в алфавіті A= {|} на число 1;

1) $* \to$ II

2) $\to \bullet$I

3) $\to *$

Контрольні питання

1. Алгоритмічна система нормальні алгоритми Маркова (НАМ).
2. Поняття функції обчислюваної за Марковим.
3. Побудова НАМ для нуль – функції, функції безпосереднього слідування, селекторної функції.
4. Поняття еквівалентних відносно алфавіту A нормальних алгоритмів Маркова
5. Композиція НАМ. Приклад.
6. Розгалуження двох НАМ під керуванням третього. Приклад.
7. З'єднання НА. Приклад.
8. Повторення одного НА під керування іншого. Приклад.
9. Принцип нормалізації.

Практичне заняття 2.7. Обчислюваність рекурсивних функцій на машинах Тюрінга

Мета. Засвоїти основні поняття алгоритмічної системи Машина Тюрінга.

Завдання.

1. Застосувати МТ, яка реалізує функцію S(x) = x +1 в алфавіті A = {|,0,1} для обчислення S(n), (де n порядковий номер студента в журналі), попередньо перевівши цей порядковий номер у 2-кову систему числення.
2. Створити МТ для обчислення функції $I_m^n(x_1, x_2, ..x_m,.. x_n) = x_m$, якщо $x_1, x_2, ..x_m,.. x_n$ – числа записані в алфавіті A = {|}, а між числами $x_1, x_2, ..x_m, ..x_n$ ставиться *, де m визначається так:

$$m = \begin{cases} 10, & \text{якщо } n = 1; \\ n & \text{якщо } 1 \le n \le 10; \\ \text{остача від ділення } n \text{ на } 10, \text{ збільшена на одиницю.} \end{cases}$$

3. Створити машину Тюрінга , яка переводить будь-яке натуральне число, записане в алфавіті A = {|}, в запис цього числа в m – значній системі числення.
4. Створити МТ, яка перетворювала б будь-яке натуральне число k, записане в алфавіті A = {|} в число k+m, де m – визначене в пункті 2.

Приклад виконання завдання

Варіант 37. Виконав студент групи ЗІТ-***. Дата ***.

1. Застосуємо МТ, яка реалізує функцію S(x) = x +1 в алфавіті A = {|,0,1} для обчислення S(n), (де n порядковий номер студента в журналі), попередньо перевівши цей порядковий номер у 2-кову систему числення. Нехай $n=2_{10} =10_2$. Тоді $S(10_2)=11_2$. Нижче наведемо програму МТ та протокол роботи МТ. Символ {!} означає зупинку МТ.

	Стан МТ		
Символ	q_0	q_1	q_2
#	#q_1L	1q_2L	
0	0q_0R	1q_2L	
1	1q_0R	0q_1L	!

Протокол МТ

1) # 1 0 #
q_0
2) # 1 0 #
q_0
3) # 1 0 #
q_0

4) # 1 0 #

q_1

5) # 1 1 #

q_2

2. Створимо МТ для обчислення функції $I_4^5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_4$, якщо x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – числа записані в алфавіті A = {|}, а між числами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ставиться *.

	Стан МТ					
Символ	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
|	$\|q_1L$	$\#q_1R$	$\#q_2R$	$\#q_2R$	$\|q_4R$	$\#q_5R$
*		$\#q_2R$	$\#q_3R$		$\#q_5R$	
#	$\#q_1R$					!

3. Створимо машину Тюрінга , яка переводить будь-яке натуральне число, записане в алфавіті A = {|} в запис цього числа в 4 – значній системі числення. Головка МТ нехай стоїть спочатку проти правого крайнього символу {|} в стані q_0.

	Q (Стан МТ)		
A Символ	q_0	q_1	q_2
|	$\#q_1 L$	$\|q_1L$	$\|q_2R$
#	!	$1q_2 S$	$\#q_0L$
0	!	$1q_2 S$	$0q_2R$
1	!	$2q_2 S$	$1q_2R$
2	!	$3q_2 S$	$2q_2R$
3	!	$0q_1 L$	$3q_2R$

4. Створимо МТ, яка перетворювала б будь-яке натуральне число k, записане в алфавіті A = {|} в число k+3. Головка МТ нехай стоїть спочатку проти лівого крайнього символу {|} в стані q_0.

	Стан МТ			
Символ	q_0	q_1	q_2	q_3
|	$\|q_0R$			
#	$\|q_1R$	$\|q_2R$	$\|q_3R$	!

Контрольні питання

1. Алгоритмічна система Машина Тюрінга (МТ).
2. Поняття функції обчислюваної за Тюрінгом.
3. Суперпозиція МТ.
4. Розгалуження МТ.
5. Теза Тюрінга .
6. Еквівалентність теорій (МТ, нормальних алгоритмів Маркова та ЧРФ).
7. Поняття про алгоритмічно розв'язувані проблеми та алгоритмічно нерозв'язувані проблеми.
8. Проблема зупинки МТ.
9. Проблема розпізнавання самозастосованості МТ.
10. Проблема еквівалентності слів для асоціативних числень.

Практичне заняття 2.8. Арифметичність рекурсивних функцій та множин.

Мета: Закріпити вміння використовувати основні поняття алгоритмічної системи машини Тюрінга для розв’язування задач.

Завдання:

1. З’ясувати, чи можна застосувати машину Т, заданої програмою *П*, до слова *P*:

1) $q_1 0 q_2 0R$ $a) P = 1^3 0^2 1^2$;
$q_1 1 q_1 1R$ $b) P = 1^3 0 1^3$;
$q_2 0 q_3 0R$ $c) P = 10[01]^2 1$.
$q_2 1 q_1 1L$
$q_3 0 q_0 0S$
$q_3 1 q_2 1R$

2) $q_1 0 q_1 1R$ $a)\ P = 101^2$;
$q_1 1 q_2 0R$ $b)\ P = 1^2 0^2 1$;
$q_2 0 q_1 1R$ $c)\ P = [10]^2 1$.
$q_2 1 q_3 1L$
$q_3 0 q_1 1L$

2. По заданій машині Тюрінга *T* та початковій конфігурації *K* знайти заключну конфігурацію

T

	q_1	q_2
0	$q_0 1S$	$q_1 0R$
1	$q_2 0R$	$q_2 1L$

а) $K = 1^2 q_1 1^3 01$;

б) $K = 1 q_1 1^4$.

3. Побудувати в алфавіті $\{0,1\}$ машину Тюрінга, перетворюючу конфігурацію K_1 в конфігурацію K_0 :

$$1) K_1 = q_1 1^n, K_0 = q_0 1^n 0 1^n (n \geq 1);$$
$$2) K_1 = q_1 0^n 1^n, K_0 = q_0 [01]^n (n \geq 1);$$
$$3) K_1 = 1^n q_1 0, K_0 = q_0 1^{2n} (n \geq 1).$$

4. Показати, що для кожної машини Тюрінга існує еквівалентна до неї машина, програма якої не містить символ *S*.

5. Побудувати машину Тюрінга, що обчислює функцію *f*:

1) $f(x) = sg\, x = \begin{cases} 0, x = 0, \\ 1, x > 1 \end{cases}$ 2) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x} \right] = \begin{cases} 1, x = 1 \\ 0, x \geq 2 \\ -, x = 0 \end{cases}$

6. Побудувати нормальний алгоритм та машину Тюрінга для додавання цілих від'ємних чисел, не більших 9.

7. Побудувати машину Тюрінга, що вірно обчислює функцію f:

1) $f(x) = x \dot{-} 1;$ 2) $f(x) = \overline{sg(x)} = 1 - sg(x);$

3) $f(x, y) = x + y;$ 4) $f(x, y) = x \dot{-} y.$

8. Застосувати операцію примітивної до функцій $g(x_1)$, $h(x_1,x_2,x_3)$ по змінним x_2,x_3. Функцію $f(x_1,x_2)=R(g,h)$ записати у «аналітичній» формі.

1) $g(x_1) = x_1,\ h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2;$

2) $g(x_1) = x_1,\ h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3;$

3) $g(x_1) = 2^{x_1},\ h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1}\ (0^0 = 1).$

9. Довести примітивну рекурсивність наступних функцій:

1) $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2;$

2) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2;$

3) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2^{\,2};$

4) $f(x_1) = 3^{x_1}.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1) Клини С. Математическая логика. – Москва: Наука, 1973.
2) Нікольський Ю.В. Дискретна математика: підручник. – Львів: Магнолія-2006, 2010.– 431 с.
3) Міхайленко В.М. Дискретна математика: підручник. – Київ: ЄУ, 2003.– 318 с.
4) Пильщиков В.Н. Машина Тьюринга и алгоритмы Маркова. Решение задач. (Учебно-методическое пособие) - Москва: МГУ, 2006. – 47 с.
5) Стрелковська І.В. Дискретна математика: навч. посіб. − Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2010. − 196 с.
6) Лісовик Л.П., Шкільняк С.С. Теорія алгоритмів. – ВПЦ Київський університет. – Київ, 2003.
7) Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – Москва: Наука, 1976.
8) Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. – Київ, 2008.
9) Шкільняк С.С. Математична логіка: приклади і задачі. – ВПЦ Київський університет. – Київ, 2007.

Додаткова

1. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А. та ін. Основи дискретної математики. – Київ, 2002.
2. Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. – Москва, 1983.
3. Лисовик Л.П., Редько В.Н. Алгоритмы и формальные системы. – Київ, 1981.
4. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – Москва: Наука, 1970.
5. Клини С. Введение в метаматематику. – Москва: ИЛ, 1957.

6. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Основи математичної логіки. – Київ, 2006.
7. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – Москва: Мир, 1972.
8. Семантика модальных и интенсиональных логик. – Москва: Прогресс, 1981. – 494 с.
9. Справочная книга по математической логике / Под ред. Дж. Барвайса: В 4 т. – Москва, 1982–1983.
10. Такеути Г. Теория доказательств. – Москва: Мир, 1978.
11. Фейс Р. Модальная логика. – Москва: Мир,, 1974.
12. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – Москва, 1983.
13. Шенфилд Дж. Математическая логика. – Москва: Наука, 1975.
14. Смирнова Е.А. Логика и философия. – Москва: РОССПЕН, 1996.
15. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Пробл. програмування. – 2010. – № 1.
16. Belnap N., Steel T. The logic of questions and answers. – New Haven and London: Yale Univ. Press, 1976.
17. Ішмуратов А.Т. Вступ до філософської логіки. – Київ, 1997.

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

Методичні рекомендації

Укладачі:

Шебаніна Олена В’ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 4,25.
Тираж 50 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.