МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Кафедра економічної кібернетики і математичного моделювання

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки та завдання для проведення практичних занять та самостійної роботи для здобувачів вищої освіти освітнього ступеня «Молодший бакалавр» початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» денної форми навчання

Миколаїв
2021

УДК 519.85
М34

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 30 серпня 2021 року, протокол № 1.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, професор кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. П. Клочан – канд. екон. наук, доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. В. Клочан – д-р екон. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

Н. С. Ручинська – канд. пед. наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

В. О. Крайній – канд. екон. наук, доцент кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет;

І. І. Хилько – старший викладач кафедри економічної кібернетики і математичного моделювання, Миколаївський національний аграрний університет.

Рецензенти:

І. П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, професор кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївський національний аграрний університет;

А. В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення, Чорноморський національний університет ім. Петра Могили.

М34 **Математичне програмування** : конспект лекцій / О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. – Миколаїв : МНАУ, 2021. – 136 с.

УДК 519.85

© Миколаївський національний аграрний університет, 2021

ЗМІСТ

Мета, завдання курсу, вимоги до основних знань здобувачів вищої освіти ……...…… 4

Змістовий модуль 1. Моделі лінійного програмування ……..……..... 6

Лабораторна робота № 1 «Визначення оптимального плану задачі лінійного програмування графічним методом та засобами оптимізації MS EXCEL» …….…… 6

Лабораторна робота № 2 «Визначення оптимального плану задачі лінійного програмування симплексним методом»…….. 25

Лабораторна робота № 3 «Побудова двоїстої задачі лінійного програмування та визначення її оптимального плану»……...……... 41

Змістовий модуль 2. Транспортна задача, моделі цілочислового та нелінійного програмування……... 57

Лабораторна робота № 4 «Побудова економіко-математичної моделі транспортної задачі та визначення її оптимального плану методом потенціалів»…….…. 57

Лабораторна робота № 5 «Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування»……..…… 96

Лабораторна робота № 6 «Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування»……..… 107

Лабораторна робота № 7 «Визначення оптимального плану задачі нелінійного програмування»…….… 123

Питання для поточного та підсумкового контролю знань здобувачів вищої освіти…….. 129

Критерії оцінювання результатів навчання та рейтингова оцінка знань здобувачів вищої освіти з дисципліни …….. 131

Список рекомендованої літератури ……....…….. 133

МЕТА, ЗАВДАННЯ КУРСУ, ВИМОГИ ДО ОСНОВНИХ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Дисципліна «Математичне програмування» є обов'язковою компонентою освітньої програми, дисципліною циклу природничо-наукової та загальноекономічної підготовки молодших бакалаврів за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», призначена для вивчення основ математичного програмування, його моделей та методів, що найчастіше застосовуються в плануванні та економічних розрахунках. В основу покладені питання, вивчення яких необхідне для розуміння принципів математичного моделювання економічних процесів та кількісного обґрунтування управлінських рішень.

Предмет дисципліни: математичні властивості та закономірності пошуку екстремуму функцій і функціоналів, методи і алгоритми оптимізації та їх застосування до економічних задач, у тому числі за допомогою програмного забезпечення.

Об'єкт дисципліни: закономірності побудови та дослідження математичних оптимізаційних моделей.

Викладання дисципліни ставить за **мету** сформувати у здобувачів вищої освіти теоретичні знання, практичні навички та вміння з формалізації задач управління, створення математичних моделей, пошуку екстремуму функцій і функціоналів з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів.

Основними завдання, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни є: вивчення здобувачами вищої освіти основних принципів та інструментарію постановки задач, методики побудови економіко-математичних моделей та методів їх розв'язування; формування практичних вмінь та навиків:

- дослідження кількісних взаємозв'язків та закономірностей розвитку економічних процесів;
- побудови та аналізу економіко-математичних моделей;
- розв'язування оптимізаційних задач у MS EXCEL;
- розв'язування задач лінійного, цілочислового, дробово-лінійного програмування, транспортних задач;
- застосування математичного апарату для обґрунтування управлінських рішень у економічній сфері.

Відповідно до Освітньо-професійної програми «Комп'ютерні науки» початкового рівня (короткий цикл) вищої освіти за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки», галузі знань 12 «Інформаційні технології» визначені компетентності та програмні результати навчання, для формування яких використовується навчальна дисципліна «Математичне програмування».

Інтегральна компетентність:

ІК. Здатність розв'язувати типові спеціалізовані задачі та практичні проблеми у галузі комп'ютерних наук або у процесі навчання, що характеризуються комплексністю та передбачають застосування теорій та методів інформаційних систем і технологій.

Загальні компетентності:

ЗК 1. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.

ЗК 2. Здатність до адаптації та дії в новій ситуації.

ЗК 3. Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.

Спеціальні (фахові) компетентності:

СК 4. Здатність розробляти моделі й алгоритми чисельного розв'язування типових задач у професійній діяльності.

СК 5. Здатність здійснювати формалізований опис задач дослідження операцій в організаційно-технічних і соціально-економічних системах, визначати їх оптимальні розв'язки, будувати моделі оптимального управління з урахуванням змін економічної ситуації, оптимізувати процеси управління в системах різного призначення та рівня ієрархії.

Програмні результати навчання:

ПРН 1. Знати і застосовувати відповідні поняття основних розділів математики в обсязі, необхідному для роботи в галузі комп'ютерних наук та інформаційних технологій.

ПРН 10. Розуміти принципи моделювання організаційно-технічних систем і операцій; використовувати методи дослідження операцій, розв'язання одно- та багатокритеріальних оптимізаційних задач лінійного, цілочисельного, нелінійного, стохастичного програмування.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.
МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1
«ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ГРАФІЧНИМ МЕТОДОМ ТА ЗАСОБАМИ ОПТИМІЗАЦІЇ MS EXCEL»

Мета роботи. Засвоїти графічний метод та засоби оптимізації *Microsoft Excel* розв'язання задач лінійного програмування.

Завдання для самостійної роботи

Задача № 1

На виготовлення двох видів продукції (А і В) витрачаються три види ресурсів P_1, P_2, P_3. Запаси ресурсів, норми їх витрат і прибуток від реалізації одиниці продукції наведено в таблиці 1.1. Побудувати економіко-математичну модель виробництва та графічним методом визначити його оптимальний план. Результати перевірити засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

Варі-ант	Витрати ресурсів на одиницю продукції, кг						Наявність ресурсів, кг			Прибуток на одиницю продукції, грн	
	А	**В**	**А**	**В**	**А**	**В**	**P_1**	**P_2**	**P_3**	**А**	**В**
0	12	4	4	4	3	12	300	120	252	30	40
1	13	7	17	16	4	9	361	520	248	11	8
2	1	1	4	7	1	4	18	93	48	24	36
3	3	2	2	3	1	1	101	99	37	27	24
4	4	13	5	6	11	5	379	197	335	25	12
5	3	1	9	4	3	4	45	144	96	9	8
6	14	15	1	2	9	5	400	49	220	21	18
7	11	6	1	2	15	14	324	60	500	10	7

8	2	1	3	5	4	15	48	100	225	12	9
9	3	8	7	2	1	1	187	143	29	10	6
10	2	7	1	1	6	1	126	30	120	20	15
11	9	4	3	2	2	2	175	65	60	15	10
12	2	3	2	2	3	2	80	58	75	15	12
13	5	2	2	3	1	8	125	83	152	12	10
14	3	2	4	1	7	8	65	70	235	30	20
15	2	2	7	2	3	8	58	143	197	15	21
16	1	1	12	5	1	4	37	360	100	12	9
17	2	1	2	5	3	4	34	105	91	9	7
18	4	7	5	14	2	1	196	350	68	15	30
19	14	15	2	1	6	11	500	60	324	14	10
20	14	3	2	2	2	13	280	62	260	15	18
21	3	2	2	2	2	3	75	58	80	15	18
22	5	2	4	3	3	6	98	84	91	18	10
23	1	2	4	1	2	15	51	120	300	6	9
24	2	5	4	3	2	4	80	91	68	15	12
25	18	15	5	11	13	4	591	335	379	12	22
26	14	3	5	4	1	4	266	136	88	8	12
27	3	2	2	2	2	3	99	74	101	14	12
28	3	4	7	2	2	15	113	161	285	9	15
29	3	6	4	3	10	4	102	91	210	18	15
30	3	2	1	1	2	5	273	100	380	10	8
31	2	1	1	2	7	3	249	438	812	10	8
32	2	1	1	2	7	3	249	438	812	10	14
33	3	4	2	1	5	2	91	34	80	11	5
34	2	1	3	2	4	1	224	428	336	24	9
35	11	5	9	10	15	4	1455	1870	1815	9	7

Задача № 2

Визначити оптимальний план задачі лінійного програмування графічним методом та результати перевірити засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

1. $$Z = x_1 + 6x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 \le 56, \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15, \\ 5x_1 + 3x_2 \ge 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

2. $$Z = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

3. $$Z = 7x_1 + 3x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 \le 90, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

4. $$Z = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 + 4x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

5. $$Z = 2x_1 - 4x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 4x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

6. $$Z = 3x_1 + 4x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 20, \\ -x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \ge 5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

7. $$Z = x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

8. $$Z = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

9. $$Z = 4x_1 + 3x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

10. $$Z = -4x_1 - 3x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 7x_1 + 3x_2 \le 21, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

11. $$Z = 3x_1 - 2x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -3x_1 + 4x_2 \ge -12, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

12. $$Z = 2x_1 - x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

13. $$Z = -x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -4x_1 + x_2 \ge -8, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

14. $$Z = 2x_1 - 3x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

15. $$Z = -2x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

16. $$Z = -3x_1 + x_2 \to max(min)$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ -9x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

17. $Z = -3x_1 - 2x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 0, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 6x_1 + 5x_2 \ge 30, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

18. $Z = -7x_1 - 4x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

19. $Z = 2x_1 + 5x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \ge 30, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 6x_2 \le 12, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

20. $Z = 6x_1 + 4x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

21. $Z = 5x_1 + 2x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 7x_1 + 6x_2 \le 42, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

22. $Z = -5x_1 - 2x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

23. $Z = 4x_1 + 2x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 9x_1 + 8x_2 \le 72, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

24. $Z = -3x_1 - 4x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 7x_2 \ge 42, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

25. $Z = -2x_1 + 3x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge -12, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

26. $Z = -5x_1 + 3x_2 \to max(min)$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18, \\ -5x_1 + 2x_2 \ge 10, \end{cases}$$
$x_1, x_2 \ge 0.$

$$Z = -3x_1 + x_2 \to max(min)$$

27. $$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = -3x_1 - 2x_2 \to max(min)$$

28. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = -2x_1 - 2x_2 \to max(min)$$

29. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

30. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = 4x_1 + 3x_2 \to max(min)$$

31. $$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 21, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

32. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = -x_1 + x_2 \to max(min)$$

33. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = 10x_1 + 40x_2 \to max(min)$$

34. $$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 25, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$$Z = x_1 + 2x_2 \to max(min)$$

35. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 2x_2 \le -4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 1

Приклад 1.1

Використовуючи табл. 1.1, запишемо вихідні дані задачі для варіанту 0 (табл. 1.2):

Таблиця 1.2 – Вихідні дані

Вид ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції, кг		Загальна кількість ресурсів, кг
	A	**B**	
1 ресурс	12	4	300
2 ресурс	4	4	120
3 ресурс	3	12	252
Прибуток на одиницю продукції, грн	30	40	
Змінні	x_1	x_2	

Розв'язання

1. **Побудова економіко-математичної моделі**

Побудуємо економіко-математичну модель виробництва.

Нехай x_1 – кількість виробів виду **A**, x_2 – кількість виробів виду **B**, тоді загальний прибуток від реалізації виробів видів **A** і **B** буде дорівнювати $Z = 30x_1 + 40x_2$. За умовою задачі необхідно отримати максимальний прибуток, тому цільова функція матиме вигляд $Z = 30x_1 + 40x_2 \to max$.

Виразимо математично умови, що обмежують використання ресурсів. Виходячи з нормативів використання кожного з ресурсів на одиницю продукції, запишемо сумарні витрати ресурсів 1 виду: $12x_1 + 4x_2$. За умовою задачі ця величина не може перевищувати загальний запас даного ресурсу, тобто $300кг$. Ця вимога описується такою нерівністю:

$$12x_1 + 4x_2 \le 300.$$

Аналогічно запишемо умови щодо використання інших видів ресурсів:

$$4x_1 + 4x_2 \le 120,$$

$$3x_1 + 12x_2 \le 252.$$

Оскільки кількість виготовленої продукції не може бути від'ємною, то $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Тоді, економіко-математична модель має вигляд:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300; \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120; \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

2. **Визначення оптимального плану задачі лінійного програмування графічним методом**

Визначимо оптимальний план одержаної задачі лінійного програмування графічним методом:

1. Перший крок згідно з алгоритмом графічного методу полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис.1.1). Для цього знаходимо для кожної прямої координати двох точок через які вона проходить.

Для прямої $(l_1): 12x_1 + 4x_2 = 300$ маємо:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, \\ x_1 = 20, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{300 - 12 \cdot 20}{4}, \\ x_1 = 20, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 15, \\ x_1 = 20. \end{cases} \Rightarrow A_1(20;15).$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{300}{12}, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 25, \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow A_2(25;0).$$

Знайдені точки відкладаємо в системі координат і проводимо лінію l_1 .

Аналогічно виконуємо побудову інших ліній відповідно за точками:

$$(l_2): 4x_1 + 4x_2 = 120 \Rightarrow B_1(0;30),\ B_2(30;0);$$

$$(l_3): 3x_1 + 12x_2 = 252 \Rightarrow C_1(0;21),\ C_2(20;16).$$

2. Кожна з побудованих прямих ділить площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з них задовольняють нерівність, що розглядається, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (її напрям позначимо стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина.

Підставимо в нерівність $12x_1 + 4x_2 \le 300$ координати довільної точки, наприклад $M_1(10;10)$:

$$12 \cdot 10 + 4 \cdot 10 \le 150 \Rightarrow 16 \le 300 \Rightarrow \textbf{вірна нерівність}.$$

Оскільки координати цієї точки задовольняють нерівність, то на рис.1.1 позначаємо штрихуванням півплощину, що включає вибрану точку і відмічаємо її напрям відповідною стрілкою.

Аналогічно знаходимо відповідні півплощини для кожного обмеження:

$M_2(20;0)$,

$(l_2): 4 \cdot 20 + 4 \cdot 0 \le 120 \Rightarrow 8 \le 120 \Rightarrow$ **вірна нерівність.**

$M_3(20;30)$,

$(l_3): 3 \cdot 20 + 12 \cdot 30 \le 252 \Rightarrow 420 \le 252 \Rightarrow$ **невірна нерівність.**

Для 1 і 2 обмеження вибираємо ту півплощину, що включає вибрану точку, а для 3-го обмеження вибираємо ту півплощину, що не включає вибрану точку, оскільки дане обмеження не справджується.

Враховуючи умову невід'ємності змінних $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, будемо розглядати тільки перший квадрант системи координат.

3. Таким чином, переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів, – многокутник OC_1BCA_2. Координати будь-якої його точки, задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Поставлену задачу буде розв'язано, якщо відшукаємо таку точку многокутника планів OC_1BCA_2 в якій цільова функція Z набуває екстремального значення.

4. Для цього побудуємо вектор-нормалі $\vec{N} = grad\, Z = (c_1; c_2)$ компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N} = grad\, Z = (30;40)$

задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор протилежний йому, – напрям їх зменшення.

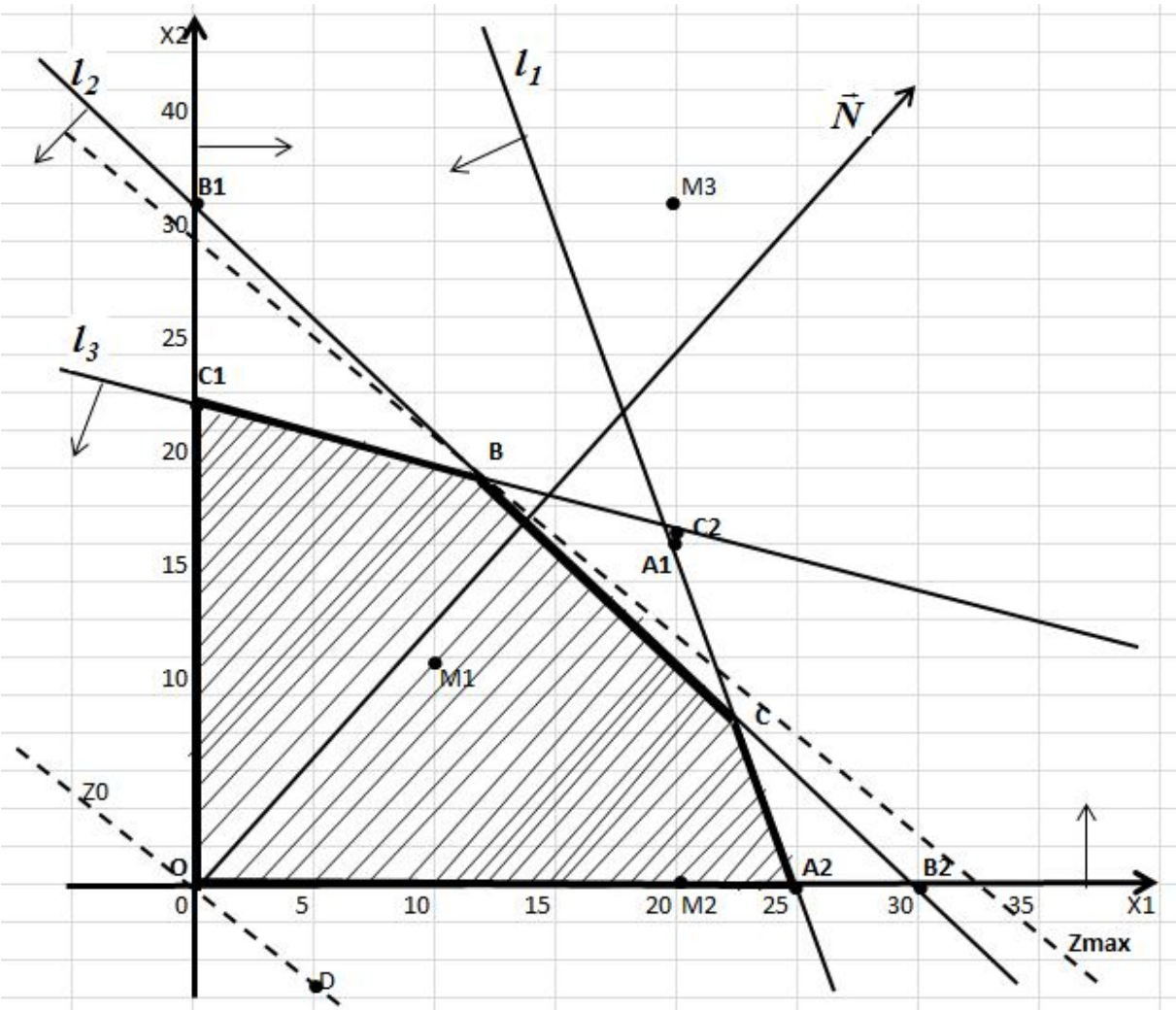

Рисунок 1.1 – Графічний метод розв’язання ЗЛП

5. Будуємо лінію рівня цільової функції Z, якою є пряма $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, що перпендикулярна до вектора $\vec{N}$. Побудуємо пряму $30x_1 + 40x_2 = 0$ за точками $O(0;0), D(5;-3,75)$ і позначимо її на рисунку Z_0. Як бачимо, вона проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{N}$.

6. Переміщуючи лінію рівня в напрямі вектора $\vec{N}$ знаходимо вершину многокутника планів, де цільова функція досягає екстремального значення. Із рис. 1.1 бачимо, що першою спільною точкою (точкою входу) лінії рівня цільової функції $30x_1 + 40x_2 = 0$ та многокутника планів OC_1BCA_2, є точка O, яка і буде точкою мінімуму, а останньою їх спільною точкою (точкою виходу) є точка B, яка і буде точкою максимуму.

7. Оскільки точка $B = l_2 \cap l_3$ є точкою перетин ліній 2 і 3, то розв'язавши систему відповідних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 18, \end{cases} \Rightarrow B(12;18),$$

обчислимо максимальне значення цільової функції в точці:

$$Z_{max} = Z(B) = Z(12;18) = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080.$$

Отже, оптимальний план *ЗЛП* $X_{max} = (12;18)$, йому відповідає максимальне значення цільової функції $Z_{max} = 1080$.

3. Визначення оптимального плану ЗЛП засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel*

Використовуючи надбудову *«ПОИСК РЕШЕНИЯ»* визначимо оптимальний план заданої задачі.

1. Оскільки цільова функція задачі та система обмежень лінійні, то маємо задачу лінійного програмування. Для її розв'язування заповнюємо відповідну форму в листі пакету *Microsoft Excel* (рис.1.2). Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв'язок задачі (B16:C16). Вводимо вихідні дані задачі: матрицю коефіцієнтів системи обмежень (B19:C21), коефіцієнти цільової функції (B23:C23), знаки обмежень (E19:E21), стовпчик вільних членів системи обмежень (F19:F21), формули лівої частини кожного обмеження (D19:D21) та формулу цільової функції (D23) (рис.1.2, рис. 1.3):

D23 fx =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B23:C23)

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	<=	300
20	2.	4	4	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B20:C20)	<=	120
21	3.	3	12	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B21:C21)	<=	252
22					Напрям	
23	**Цільова функція**	**30**	**40**	**=СУММПРОИЗВ(B16:C16;B23:C23)**	max	

Рисунок 1.2 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	0	<=	300
20	2.	4	4	0	<=	120
21	3.	3	12	0	<=	252
22					Напрям	
23	**Цільова функція**	**30**	**40**	**0**	max	

Рисунок 1.3 – Початкові дані для розв’язання задачі

2. Вибираємо ***Данные – Поиск решения:***

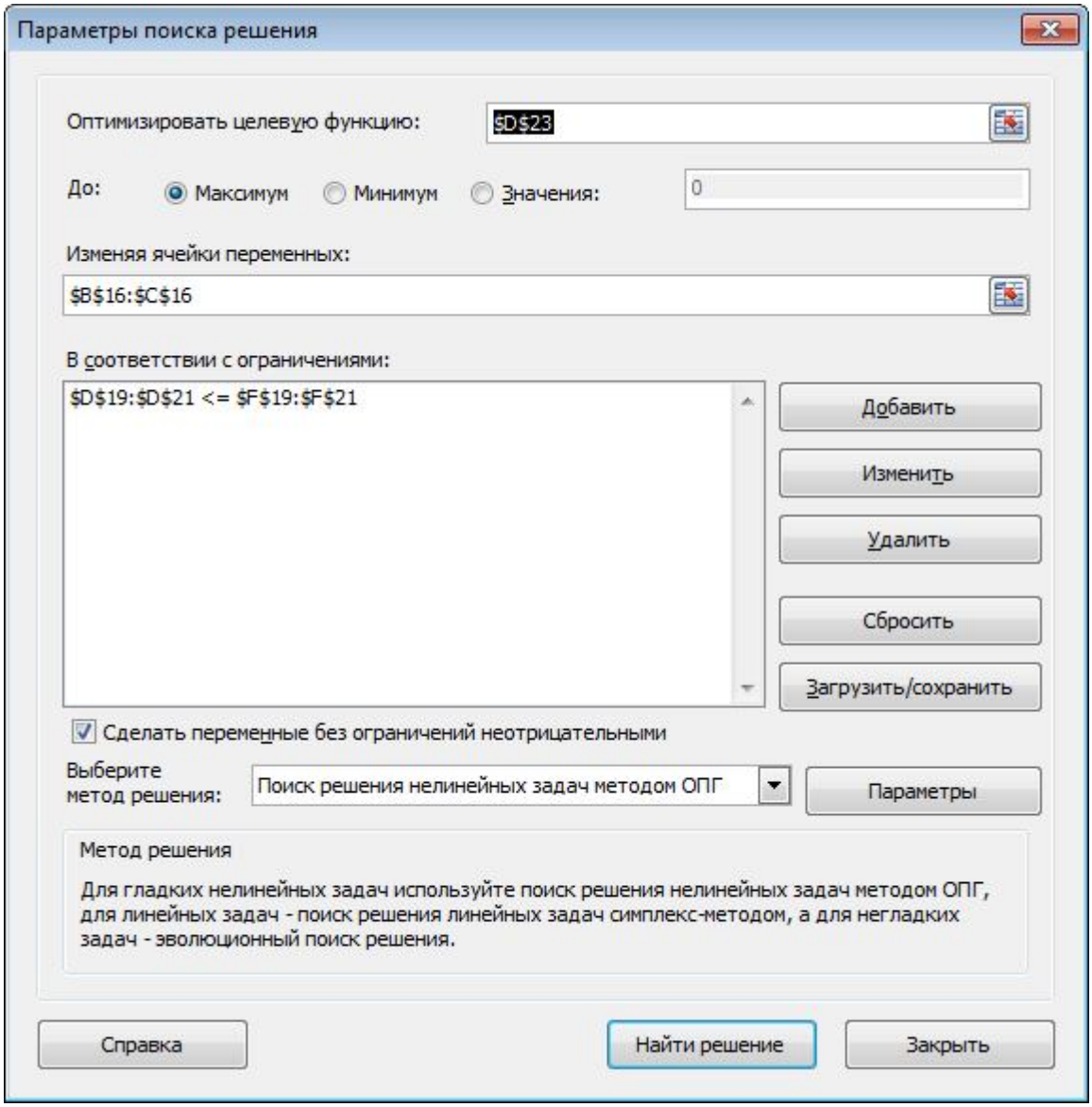

Рисунок 1.4 – Діалогове вікно *«Поиск решения»*

У діалоговому вікні, що з’явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (D23), напрям оптимізації (***Максимум***), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (B16:C16) та обмеження ($D$19:$D$21<=$F$19:$F$21). За умовою задачі змінні приймають лише невід’ємні значення, тому вказуємо це (☑ Сделать переменные без ограничений неотрицательными) (рис. 1.4):

3. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв’язок знайдено (рис. 1.5). Відповідно в клітинках B16:C16 знаходиться значення оптимального розв’язку, а в клітинці D23 оптимальне значення цільової функції задачі на максимум (рис. 1.6):

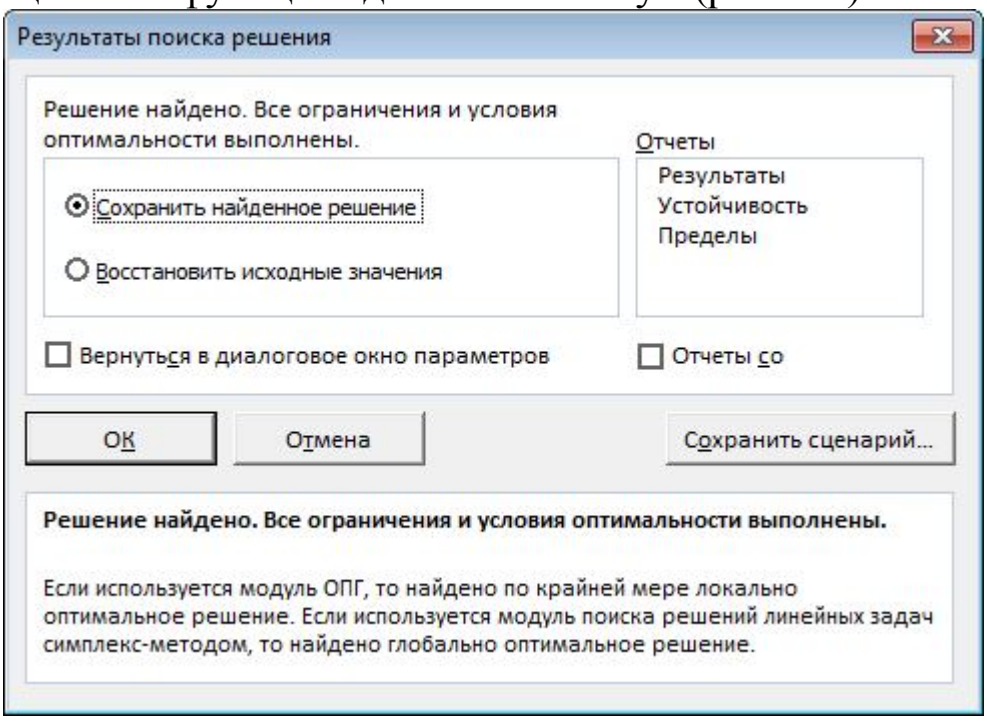

Рисунок 1.5 – Результати роботи надбудови *«Поиск решения»*

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	12	18			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	216	<=	300
20	2.	4	4	120	<=	120
21	3.	3	12	252	<=	252
22					Напрям	
23	**Цільова функція**	**30**	**40**	**1080**	max	

Рисунок 1.6 – Оптимальний план задачі

4. Якщо необхідно зберегти звіти, то виділяємо необхідні ***Отчеты*** (***Результаты***, ***Устойчивость*** чи ***Пробелы)*** та нажимаємо ***ОК.*** Відповідно отримуємо листи звітів (рис. 1.7):

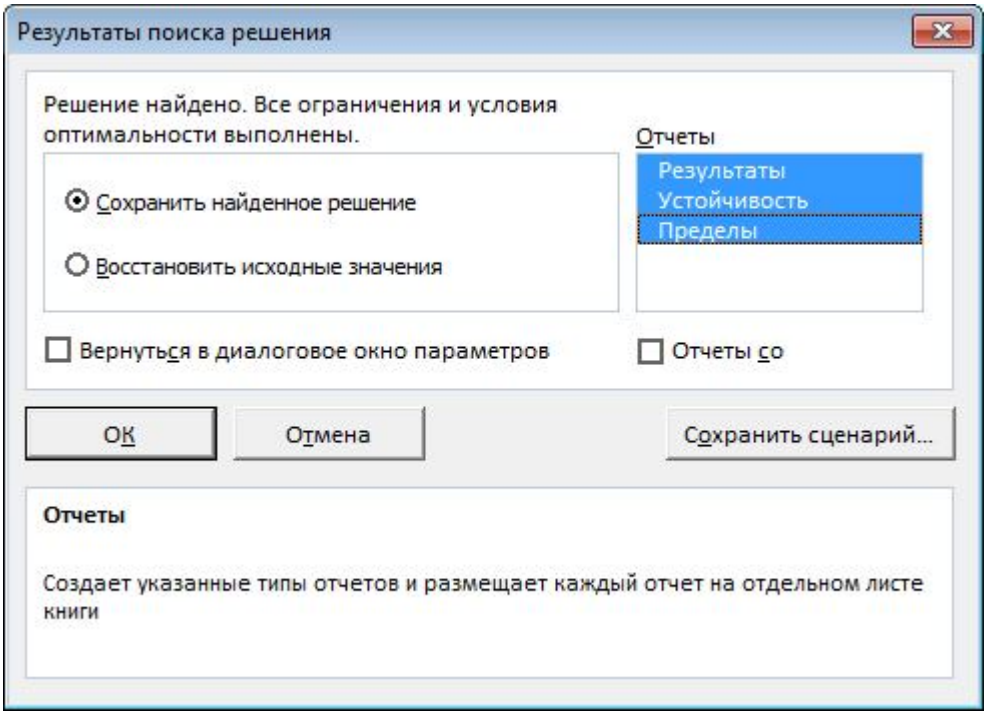

Рисунок 1.7 – Вибір необхідних звітів

Отже, оптимальний план задачі лінійного програмування $X_{max} = (12;18)$, йому відповідає максимальне значення цільової функції $Z_{max} = 1080$, що підтверджує результати отримані графічним методом.

Відповідь:

Для отримання максимального прибутку 1080 грн підприємству необхідно виготовляти продукції А – 12 одиниць, продукції В – 18 одиниць. При цьому запаси ресурсу 1 використовуються не повністю (216<300), ресурс 2 та ресурс 3 використовуються повністю.

Приклад 1.2

Визначити оптимальний план задачі лінійного програмування графічним методом

$$Z = 10x_1 + x_2 - 3 \to max(min),$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 - x_2 \le -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

1. Перший крок згідно з алгоритмом графічного методу полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис.1.8).

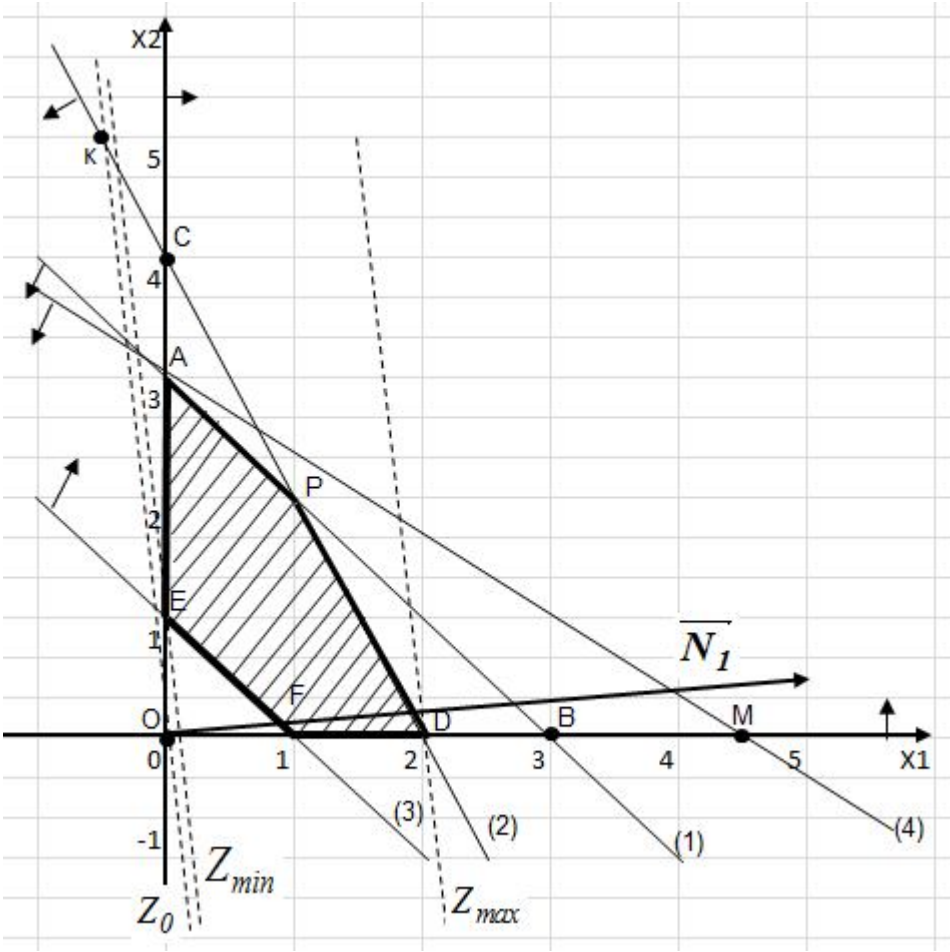

Рисунок 1.8 – Графічний метод розв'язування ЗЛП

Для цього знаходимо для кожної прямої координати двох точок через які вона проходить. Будуємо пряму $(l_1): x_1 + x_2 = 3$, використовуючи її точки перетину з координатними осями:

$$(Ox_2): \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3, \\ x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow A(0;3).$$

$$(Ox_1): \begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow B(3;0).$$

Знайдені точки відкладаємо в системі координат x_1Ox_2 і проводимо лінію l_1. Аналогічно виконуємо побудову ліній:

$$(l_2): 2x_1 + x_2 = 4 \qquad C(0;4),\ D(2;0).$$

$$(l_3): -x_1 - x_2 = -1 \qquad E(0;1),\ F(1;0).$$

$$(l_4): 2x_1 + 3x_2 = 9 \qquad A(0;3),\ M(4,5;0).$$

2. Кожна з побудованих прямих ділить площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї з них задовольняють нерівність, що розглядається, а іншої – не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (її напрям позначимо стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина.

Підставимо в нерівність $x_1 + x_2 \le 3$ координати довільної точки, наприклад $O(0;0)$: $0 + 0 \le 3 \Rightarrow 0 \le 3$. Оскільки координати цієї точки задовольняють нерівність, то на рисунку позначаємо штрихуванням півплощину, що включає вибрану точку і відмічаємо її напрям відповідною стрілкою.

Аналогічно, для точки $O(0;0)$ знаходимо відповідні півплощини для кожного обмеження:

$$(l_2): 2 \cdot 0 + 0 \le 4 \Rightarrow 0 \le 4 \Rightarrow \textbf{вірна нерівність;}$$

$$(l_3): -0 - 0 \le -1 \Rightarrow 0 \le -1 \Rightarrow \textbf{невірна нерівність;}$$

$$(l_4): 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \le 9 \Rightarrow 0 \le 9 \Rightarrow \textbf{вірна нерівність.}$$

Для 1, 2 і 4 обмеження вибираємо ту півплощину, що включає точку $O(0;0)$, а для 3-го обмеження вибираємо ту півплощину, що не включає точку $O(0;0)$, оскільки дане обмеження не справджується.

Враховуючи умову невід'ємності змінних $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, будемо розглядати тільки перший квадрант системи координат.

3. Таким чином, переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів, – многокутник $EAPDF$. Координати будь-якої його точки, задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних.

4. Для визначення точок, в яких цільова функція набуває екстремальних значень, побудуємо вектор-нормалі $\vec{N} = grad\, Z = (c_1; c_2)$ компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{N}$ задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор протилежний йому, – напрям їх зменшення, при цьому довжина вектора має другорядне значення. Тому будується довільний співнапрямлений вектор $\vec{N}_1 = \dfrac{\vec{N}}{\alpha}$, де $\alpha > 0$ вибираємо з врахуванням масштабності. Тоді, для цільової функції задачі $Z = 10x_1 + x_2 - 3 \to max$, маємо: $\vec{N} = (10;1)$, $\vec{N}_1 = \dfrac{\vec{N}}{2} = \left(5; \dfrac{1}{2}\right)$.

5. Будуємо лінію рівня цільової функції Z, якою є пряма $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, що перпендикулярна до вектора $\vec{N}_1$. Для нашої задачі побудуємо пряму $10x_1 + x_2 = 0$, що проходить через початок координат та точку $K(-0{,}5;5)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}_1$ і позначимо її на рисунку Z_0.

6. Переміщуючи лінію рівня в напрямі вектора-нормалі $\vec{N}_1$, знаходимо вершину многокутника планів, де цільова функція досягає екстремального значення. Із рис. 1.8 бачимо, що першою спільною точкою (точкою входу) лінії рівня цільової функції Z_0 та многокутника планів $EAPDF$, є точка E, яка і буде точкою мінімуму, а останньою їх спільною точкою (точкою виходу) є точка D, яка і буде точкою максимуму.

7. Оскільки точка $E = l_3 \cap Ox_2$ – є точкою перетину прямої l_3 і осі Ox_2, то розв'язавши систему відповідних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow E(0;1),$$

обчислимо мінімальне значення цільової функції в точці:

$$Z_{min} = Z(E) = Z(0;1) = 10 \cdot 0 + 1 - 3 = -2 .$$

Отже, $X_{min} = (0;1)$, йому відповідає мінімальне значення цільової функції $Z_{min} = -2$.

Аналогічно, для визначення координат точки D розглянемо систему рівнянь прямих l_2 і осі Ox_1, оскільки вона є їх точкою перетину $D = l_2 \cap Ox_1$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow D(2;0)$$

Отже, $X_{max} = (2;0)$, при цьому максимальне значення цільової функції $Z_{max} = Z(D) = Z(2;0) = 10 \cdot 2 + 0 - 3 = 17$.

8. Перевіримо одержані результати засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel* (рис. 1.9-1.12):

D24 | fx =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B24:C24)-3

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінн					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	<=	3
20	2.	2	1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B20:C20)	<=	4
21	3.	-1	-1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B21:C21)	<=	-1
22	4.	2	3	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B22:C22)	<=	9
23					Напрям	
24	**Цільова функці**	**10**	**1**	**=СУММПРОИЗВ(B16:C16;B24:C24)-3**	min	

Рисунок 1.9 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

D24 | fx =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B24:C24)-3

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	0	<=	3
20	2.	2	1	0	<=	4
21	3.	-1	-1	0	<=	-1
22	4.	2	3	0	<=	9
23					Напрям	
24	**Цільова функція**	**10**	**1**	**-3**	min	

Рисунок 1.10 – Початкові дані для розв’язання задачі на min

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	0	1			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	1	<=	3
20	2.	2	1	1	<=	4
21	3.	-1	-1	-1	<=	-1
22	4.	2	3	3	<=	9
23					Напрям	
24	**Цільова функція**	**10**	**1**	**-2**	min	

Рисунок 1.11 – Оптимальний план задачі на min

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	2	0			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	2	<=	3
20	2.	2	1	4	<=	4
21	3.	-1	-1	-2	<=	-1
22	4.	2	3	4	<=	9
23					Напрям	
24	**Цільова функція**	**10**	**1**	**17**	max	

Рисунок 1.12 – Оптимальний план задачі на max

Як бачимо, визначені оптимальні плани співпадають з раніше отриманими.

Відповідь: $X_{min} = (0;1)$, $Z_{min} = -2$;

$X_{max} = (2;0)$, $Z_{max} = 17$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2
«ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ»

Мета роботи. Засвоїти симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування.

Завдання для самостійної роботи

Задача № 1

Визначити оптимальний план задачі лінійного програмування симплекс-методом (задача № 1 із Лабораторної роботи № 1).

Задача № 2

Визначити оптимальний план заданої задачі лінійного програмування (табл. 2.1) методом штучного базису та результати перевірити засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

Таблиця 2.1 – Вихідні дані

1	$max(2x_1 - x_2 + 2x_3)$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$	**2**	$max(2x_1 + 3x_2 + 4x_3)$ $\begin{cases} x_1 - x_3 \le 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_3 \ge -4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$
3	$max(5x_1 + x_2 + x_3)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge -3 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$	**4**	$min(x_1 - 3x_2 + x_3)$ $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \le -2 \\ 2x_2 + 4x_3 \le 7 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$
5	$max(-x_1 - x_2 + 3x_3)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \ge -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 8 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$	**6**	$min(-x_1 - 2x_2 + 2x_3)$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$

7	$max(x_1+3x_2+2x_3)$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \le 10 \\ x_1-x_2-2x_3 \ge -2 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**8**	$min(x_1+3x_2-3x_3)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3 \ge 2 \\ -x_1-2x_3 \ge -6 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
9	$max(x_1-x_2+3x_3)$ $\begin{cases} x_1+3x_3 \le 10 \\ x_1-x_2-x_3 = -3 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**10**	$min(3x_1-2x_2-x_3)$ $\begin{cases} -x_1-3x_2+3x_3 \ge -6 \\ -2x_1+x_2+x_3 \le 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
11	$max(2x_1-x_2-3x_3)$ $\begin{cases} 2x_1+x_3 \le 6 \\ x_1-x_2-x_3 = -2 \\ -x_1+6x_3 \ge -4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**12**	$min(-3x_1+2x_2-2x_3+x_4)$ $\begin{cases} -x_1+x_2-x_4 = -5 \\ 2x_2+x_3 \le 4 \\ -x_1-x_2+2x_3 \ge -8 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}$
13	$max(2x_1+x_2-x_3)$ $\begin{cases} x_1+x_2 \le 1 \\ -x_2-x_3 \ge -2 \\ x_1+x_3 \le 2 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**14**	$min(-2x_1-3x_2+x_3)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3 = -2 \\ x_1+2x_2 \le 5 \\ -3x_1-2x_2 \ge -4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
15	$max(4x_1+3x_2+5x_3)$ $\begin{cases} x_1-x_3 \le 6 \\ x_1+x_2+2x_3 = 5 \\ -2x_1+2x_3 \ge -4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**16**	$min(x_1+2x_2-3x_3)$ $\begin{cases} -2x_1+x_2+3x_3 \le 4 \\ 2x_1+3x_2 \le 6 \\ x_1+x_3 \le 2 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
17	$max(x_1-5x_2-x_3)$ $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 \ge 3 \\ 2x_1+x_3 = 4 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**18**	$min(5x_1+4x_2+2x_3)$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 5 \\ 2x_1+3x_2+x_3 \ge 8 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
19	$max(3x_1+2x_2+3x_3)$ $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3 \ge 2 \\ 2x_1+x_2+x_3 \le 8 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j=\overline{1,3}.$	**20**	$min(2x_1+3x_2-5x_3)$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 7 \\ 2x_1-5x_2+x_3 \ge 10 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j=\overline{1,3}.$

21	$max(2x_1+4x_2+4x_3-3x_4)$ $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+4x_2-x_3+x_4=8 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}$	**22**	$min(3x_1+2x_2+3x_3)$ $\begin{cases} x_1+4x_2+x_3 \ge 8 \\ 2x_1+x_2+x_3=10 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
23	$max(x_1+5x_2+3x_3)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2=4 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**24**	$min(x_1+x_2+x_3+x_4)$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3 \ge 7 \\ 4x_1+2x_2-x_3+x_4=8 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,4}$
25	$max(x_1+x_2)$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2=5 \\ 3x_1+2x_2 \le 6 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,2}$	**26**	$min(-3x_1+2x_2+5x_3)$ $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3 \le 10 \\ x_1+3x_2+2x_3=8 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
27	$max(2x_1-4x_2+5x_3)$ $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=2 \\ -x_1+2x_2+3x_3=1 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**28**	$min(2x_1+5x_2-6x_3)$ $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=4 \\ -x_1+3x_2+2x_3=2 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
29	$max(2x_1+3x_2+5x_3)$ $\begin{cases} x_1-x_2-x_3 \ge -5 \\ -x_1+x_2-x_3 \le 4 \\ x_1+x_2+2x_3=10 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$	**30**	$min(3x_1+3x_2+x_3)$ $\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=8 \\ x_1+2x_2+3x_3 \le 12 \\ 4x_1+8x_2+3x_3 \ge 24 \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}$
31	$z=-30x_1+10x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3 \ge -2, \\ -3x_1+2x_2-x_3 \le 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j=\overline{1,3}.$	**32**	$z=4x_1+3x_2+x_3 \to min;$ $\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3 \ge 2, \\ x_1+x_2+x_3 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j=\overline{1,3}.$
33	$z=3x_1+2x_2+5x_3 \to max;$ $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3 \le 50, \\ 3x_1+x_3 \ge 15, \\ x_1+4x_2 \le 40, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j=\overline{1,3}.$	**34**	$z=-3x_1-4x_2-5x_3 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 \ge -4, \\ 2x_1+3x_2+2x_3 \le 6, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j=\overline{1,3}.$
35	$z=2x_1+3x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 30, \\ x_1+x_2=6, \\ 2x_1+x_2 \ge 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$		

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 2

Приклад 2.1

Визначити оптимальний план задачі лінійного програмування симплексним методом:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \to max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300; \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120; \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

1. Запишемо задачу лінійного програмування в канонічній формі та визначимо початковий опорний план. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові балансуючі змінні x_3, x_4, x_5, які за економічним змістом означають можливу, але невикористану сировину при додатковому плані виробництва:

$$Z = 30x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max;$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 + x_3 = 300, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_4 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 + x_5 = 252. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Запишемо систему обмежень задачі лінійного програмування у векторній формі:

$$x_1\overrightarrow{A_1} + x_2\overrightarrow{A_2} + x_3\overrightarrow{A_3} + x_4\overrightarrow{A_4} + x_5\overrightarrow{A_5} = \overrightarrow{A_0},$$

де

$$\overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{A_0} = \begin{pmatrix} 300 \\ 120 \\ 252 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{A_3}, \overrightarrow{A_4}, \overrightarrow{A_5}$ – одиничні та лінійно-незалежні, то вони утворюють базис трьохвимірного простору;

змінні які їм відповідають x_3, x_4, x_5 – базисні змінні, решта змінних x_1, x_2 – вільні змінні.

Прирівнявши вільні змінні до нуля з системи обмежень, одержимо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 300, x_4 = 120, x_5 = 252.$$

Отже, початковий опорний план

$$X_0 = (0;0;300;120;252),$$

йому відповідає початкове значення цільової функції:

$$Z_0 = 30 \cdot 0 + 40 \cdot 0 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 120 + 0 \cdot 252 = 0.$$

Подальший розв'язок оформимо у вигляді симплекс-таблиці (табл. 2.2).

2. Складемо симплексну таблицю

Таблиця 2.2 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	30	40	0	0	0	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	x_3	0	300	12	4	1	0	0	25	X_0= (0;0;300; 120;252)
	2	x_4	0	120	4	4	0	1	0	30	
	3	x_5	0	252	3	12	0	0	1	21	
	4	Z, Δ_j		0	-30	-40	0	0	0	$\Delta_j \le 0$ – план не оптимальний	
I	1	x_3	0	216	11	0	1	0	-1/3	19,6	X_1= (0;21; 216;36;0)
	2	x_4	0	36	3	0	0	1	-1/3	12	
	3	x_2	40	21	1/4	1*	0	0	1/12	84	
	4	Z, Δ_j		840	-20	0	0	0	10/3	$\Delta_j \le 0$ – план не оптимальний	
II	1	x_3	0	84	0	0	1	-11/3	8/9		X_2= (12;18; 84;0;0)
	2	x_1	30	12	1*	0	0	1/3	-1/9		
	3	x_2	40	18	0	1	0	-1/12	1/9		
	4	Z, Δ_j		1080	0	0	0	20/3	10/9	$\Delta_j \ge 0$ – план оптимальний	

Визначимо оціночний $(m+1)$ рядок на нульовій ітерації:

$$\Delta_0 = 0 \cdot 300 + 0 \cdot 120 + 0 \cdot 252 = 0;$$

$$\Delta_1 = (0 \cdot 12 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3) - 30 = -30;$$

$$\Delta_2 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 12) - 40 = -40;$$

$$\Delta_3 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_5 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0;$$

3. Перевіримо його на оптимальність згідно теореми оптимальності. Оскільки в ньому – два від'ємні значення $\Delta_1 = -30$, $\Delta_2 = -40$, що суперечить умові оптимальності для задачі на max, то початковий опорний план $X_0 = (0;0;300;120;252)$ – неоптимальний.

4. Для переходу до нової ітерації симплексної таблиці визначимо напрямний елемент. Спочатку визначимо напрямний стовпчик. Оскільки серед від'ємних оцінок Δ_1, Δ_2 найбільша за абсолютною величною $\Delta_2 = -40$, то другий стовпчик буде напрямним, позначимо його вертикальною стрілкою. З економічної точки зору, число -40 означає, що при включенні у план виробництва одної одиниці продукції В забезпечує збільшення прибутку на 40 тис. грн.

Для визначення напрямного рядка визначимо симплексне відношення:

$$\theta = \frac{b_i}{a_{ik}} : \theta_1 = \frac{300}{4} = 75; \theta_2 = \frac{120}{4} = 30; \theta_3 = \frac{252}{12} = 21$$

і виберемо серед знайдених значень найменше $\theta_3 = 21$, яке відповідає третьому рядку – напрямному, позначимо його горизонтальною стрілкою. На перетині напрямного стовпчика та напрямного рядка отримаємо напрямний елемент $a_{32} = 12$.

Отже, з базису виключаємо змінну x_5 і замість неї вводимо змінну x_2 з відповідним значенням $C_{баз} = 40$.

Будуємо нову ітерацію згідно методу Жордана-Гаусса.

У першій ітерації другий стовпчик записуємо як одиничний з 1^* замість напрямного елементу a_{32}, третій рядок утворимо з

елементів третього рядка попередньої ітерації поділених на число $a_{32} = 12$. Інші елементи таблиці розраховуємо за правилом прямокутника:

$$\frac{300 \cdot 12 - 4 \cdot 252}{12} = 216; \quad \frac{12 \cdot 12 - 4 \cdot 3}{12} = 11; \quad \frac{0 \cdot 12 - 4 \cdot 1}{12} = -\frac{1}{3};$$
$$\frac{120 \cdot 12 - 4 \cdot 252}{12} = 36; \quad \frac{4 \cdot 12 - 4 \cdot 3}{12} = 3; \quad \frac{0 \cdot 12 - 4 \cdot 1}{12} = -\frac{1}{3};$$
$$\frac{0 \cdot 12 - (-40) \cdot 252}{12} = 840; \quad \frac{(-30) \cdot 12 + 40 \cdot 3}{12} = -20; \quad \frac{0 \cdot 12 + 40 \cdot 1}{12} = \frac{10}{3}$$

Враховуючи, що в напрямному рядку є нульові елементи, то стовпчики x_3 і x_4 переписуємо в наступну ітерацію без змін.

5. Одержаний опорний план знову перевіряємо на оптимальність. Оскільки на першій ітерації $\Delta_1 = -20 < 0$, то визначений опорний план $X_1 = (0;21;216;36;0)$ – також неоптимальний. Оцінка ***-20*** в оціночному рядку показує, що якщо буде запланований випуск однієї одиниці продукції А, то це забезпечить збільшення прибутку на 20 тис. грн.

Для напрямного стовпчика x_1 визначаємо симплексні відношення. Так як, $min\,\theta = min\left\{\frac{216}{11}; \frac{36}{3}; \frac{21}{1/4}\right\} = 12$, що відповідає другому рядку, то до базису вводимо вільну змінну x_1 замість x_4. Далі вибираємо як напрямний елемент $a_{21} = 3$ і будуємо наступну другу ітерацію симплекс-таблиці. Оскільки усі значення оціночного рядка другої ітерації $\Delta_j > 0\ (j = \overline{1,5})$, то визначений опорний план $X_2 = (12;18;84;0;0)$– оптимальний.

Отже,

$$X_{max} = (12;18;84;0;0)$$

і йому відповідає оптимальне значення цільової функції

$$Z_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 + 0 \cdot 84 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1080,$$

що співпадає з результатами отриманими графічним методом.

Відповідь:

$$X_{max} = (12;18;84;0;0),\ Z_{max} = 1080.$$

Приклад 2.2

Визначити оптимальний план задачі лінійного програмування симплекс-методом

$$Z = 10x_1 + x_2 - 3 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ -x_1 - x_2 \le -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

1. Запишемо задачу лінійного програмування в канонічній формі та визначимо початковий опорний план.

Однією з необхідних умов застосування симплекс-методу є умова невід'ємності елементів правої частини системи обмежень. Тому домноживши ліву та праву частини третього обмеження системи обмежень на -1 та ввівши до лівої частини обмежень-нерівностей додаткові балансуючи змінні x_3, x_4, x_5, x_6, одержимо задачу лінійного програмування в канонічній формі:

$$Z' = Z + 3 = 10x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_6 = 9, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$$

У цільовій функції Z', додаткові змінні мають коефіцієнти, що дорівнюють нулю.

Запишемо канонічну систему обмежень задачі лінійного програмування у векторній формі:

$$x_1 \cdot \overrightarrow{A_1} + x_2 \cdot \overrightarrow{A_2} + x_3 \cdot \overrightarrow{A_3} + x_4 \cdot \overrightarrow{A_4} + x_5 \cdot \overrightarrow{A_5} + x_6 \cdot \overrightarrow{A_6} = \overrightarrow{A_0},$$

де

$$\overrightarrow{A_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\overrightarrow{A_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\3\end{pmatrix},\overrightarrow{A_3}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{A_4}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\overrightarrow{A_5}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\overrightarrow{A_6}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\overrightarrow{A_0}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\\9\end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів є лише три одиничні: $\vec{A}_3$, $\vec{A}_4$, $\vec{A}_6$, а базис у чотирьохвимірному просторі має складатися з чотирьох одиничних лінійно-незалежних векторів, оскільки базис повинен дорівнювати кількості обмежень заданої системи ($m=4$). Необхідний одиничний вектор можна дістати, ввівши в третє обмеження з коефіцієнтом $+1$ штучну змінну x_7, якій відповідатиме одиничний вектор $\overrightarrow{A_7}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

При цьому на відміну від додаткових балансуючих змінних, штучна змінна x_7 має в цільовій функції Z' коефіцієнт $-M$ (для задачі на max) або $+M$ (для задачі на min), де M – досить велике додатне число.

Таким чином, отримали розширену задачу ($M-$задачу) лінійного програмування:

$$Z'=Z+3=10x_1+x_2+0x_3+0x_4+0x_5+0x_6-Mx_7\to max,$$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3,\\2x_1+x_2+x_4=4,\\x_1+x_2-x_5+x_7=1,\\2x_1+3x_2+x_6=9,\end{cases}$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,7}.$$

У розширеній задачі базисними змінними є x_3, x_4, x_7, x_6, а решта змінних є вільні. Прирівнявши вільні змінні до нуля, з кожного обмеження розширеної задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_5 = 0,\ x_3 = 3, x_4 = 4, x_7 = 1, x_6 = 9.$$

Отже, початковий опорний план задачі

$$X_0 = (0;0;3;4;0;9;1)$$

і початкове значення цільової функції

$$Z'_0 = 10 \cdot 0 + 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 9 - M \cdot 1 = -M\ .$$

Подальше розв'язування задачі лінійного програмування оформимо у вигляді симплекс-таблиці.

2. Складемо симплексну таблицю (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 – Симплексна таблиця

№ ітерації	№ обмеження	Базис	$C_{баз}$	План $\overline{A_0}$	10	1	0	0	0	0	$-M$	θ
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	1	x_3	0	3	1	1	1	0	0	0	0	3
	2	x_4	0	4	2	1	0	1	0	0	0	2
	3	x_7	-M	1	$\boxed{1}$	1	0	0	-1	0	1	1
	4	x_6	0	9	2	3	0	0	0	1	0	4,5
	5	Z, Δ_j		**0**	**-10**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	$\Delta_j < 0$
	6			**-M**	**-M**	**-M**	**0**	**0**	**M**	**0**	**0**	
I	1	x_3	0	2	0	0	1	0	1	0	-1	2
	2	x_4	0	2	0	-1	0	1	$\boxed{2}$	0	-2	1
	3	x_1	10	1	1^*	1	0	0	-1	0	1	-
	4	x_6	0	7	0	1	0	0	2	1	-2	3,5
	5	Z, Δ_j		**10**	**0**	**9**	**0**	**0**	**-10**	**0**	**10**	$\Delta_j < 0$
	6			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	
II	1	x_3	0	1	0	1/2	1	-1/2	0	0	0	
	2	x_5	0	1	0	-1/2	0	1/2	1	0	-1	
	3	x_1	10	2	1	1/2	0	1/2	0	0	0	
	4	x_6	0	5	0	2	0	-1	0	1	0	
	5	Z, Δ_j		**20**	**0**	**4**	**0**	**5**	**0**	**0**	**0**	$\Delta_j \geq 0$
	6			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	

Заносимо умову задачі в симплекс-таблицю (0 ітерація). Оскільки задача розв'язується за допомогою $M-$методу (методу штучних змінних), то таблиця містить на один рядок більше, ніж при звичайному симплекс-методі. При цьому в оціночний ($m+2$)-й рядок записують коефіцієнти з буквою M, а в оціночний ($m+1$)-й – доданки, які не містять M.

Далі оціночні рядки визначаються за допомогою формул

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \qquad (j = \overline{1,7}),$$

або безпосередньо із симплексної таблиці як скалярний добуток векторів-стовпчиків «$\vec{C}_{баз}$» та «$\vec{X}_j$» мінус відповідний коефіцієнт c_j, тобто $\Delta_j = \overline{C_{баз}} \cdot \overline{X_j} - c_j$.

Значення $\Delta_o = \overline{C_{баз}} \cdot \overline{A_o}$ записується у стовпчику «План» і дорівнює початковому значенню цільової функції.

Отже,

$$\Delta_0 = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 9 = 0 - M;$$

$$\Delta_1 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 2) - 10 = -10 - M;$$

$$\Delta_2 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 3) - 1 == -1 - M;$$

$$\Delta_3 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$\Delta_5 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot (-1) + 0 \cdot 0) - 0 = M;$$

$$\Delta_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0;$$

$$\Delta_7 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 1 + 0 \cdot 0) - (-M) = 0.$$

Одержані значення записуємо в оціночні 5 і 6 рядки.

3. Перевіримо оціночні рядки на оптимальність згідно теореми оптимальності.

Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), то визначений опорний план є оптимальний. Якщо ж в оціночних рядках присутня хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності, то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У нульовій ітерації в 5 і 6-му рядку є два від'ємні значення $\Delta_1 = -10 - M$ і $\Delta_2 = -1 - M$, що суперечить умові оптимальності, тому початковий опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу його необхідно поліпшити, перейшовши до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід до наступного опорного плану виконують зміною базису, тобто за рахунок виключення з поточного базису деякої змінної та введення замість неї нової з числа вільних змінних задачі.

Для задачі на max серед від'ємних оцінок Δ_j вибирають найбільшу за абсолютною величною

$$max|\Delta_j| = |\Delta_k|, \quad \Delta_j < 0.$$

У випадку задачі на min серед додатних оцінок Δ_j вибирають найбільшу величину $max\,\Delta_j = \Delta_k$, $\Delta_j > 0$.

Відповідний k-стовпчик називається напрямним.

Якщо у цьому стовпчику всі елементи $a_{ik} \le 0$, $i = \overline{1,m}$, то це означає, що цільова функція є необмеженою й оптимальних планів не існує, тобто $max\,Z = \infty$, або для задачі мінімум $min\,Z = -\infty$.

Якщо є декілька найбільших за абсолютною величиною оцінок Δ_j, то до базису вводять ту змінну, якій відповідає $max\,c_j$ (для задачі на max) і $min\,c_j$ (для задачі на min).

Для даної задачі вибираємо напрямним k-стовпчиком стовпчик x_1, оскільки $max\{|\Delta_1|;|\Delta_2|\} = |\Delta_1|$. Вибраний стовпчик позначаємо вертикальною стрілкою. Для визначення змінної, що має бути виключена з базису, знаходять для всіх додатних значень a_{ik} напрямного стовпчика симплексне відношення $\theta = \dfrac{b_i}{a_{ik}}$ та вибирають найменше його значення, тобто

$$min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_r}{a_{rk}} \ (a_{ik} > 0),$$

яке вказує на змінну, що виводиться з базису. Нехай це буде рядок $i = r$ – напрямний рядок. Симплексні відношення можна

отримати розділивши елементи стовпчика «План» на відповідні додатні елементи напрямного стовпчика.

Елемент a_{rk}, який розміщений на перетині напрямного рядка і напрямного стовпчика є напрямним елементом.

Для нашої задачі $min\,\theta = min\left\{\frac{3}{1};\frac{4}{2};\frac{1}{1};\frac{9}{2}\right\} = 1$, і відповідає 3-рядку, який в таблиці позначено горизонтального стрілкою вліво. На перетині маємо напрямний елемент (виділено рамкою) $a_{31} = 1$.

Отже, з базису виключаємо змінну x_7 (штучну змінну) і вводимо вільну змінну x_1. Будуємо нову ітерацію симплекс-таблиці, елементи якої розраховуємо за методом Жордана-Гаусса.

Для першої ітерації, маємо у нульовій ітерації напрямний елемент $a_{31} = 1$. Тому у першій ітерації третій рядок записується без змін, перший стовпчик – одиничний з 1^* замість напрямного елементу a_{31}. Інші елементи першої ітерації розраховані за правилом прямокутника.

Наприклад, елементи стовпчика «План» першої ітерації:

$$\frac{3\cdot 1-1\cdot 1}{1}=2;\ \frac{4\cdot 1-2\cdot 1}{1}=2;\ \frac{9\cdot 1-2\cdot 1}{1}=7;$$
$$\frac{0\cdot 1-(-10)\cdot 1}{1}=10\ ;\frac{-M\cdot 1-(-M)\cdot 1}{1}=0$$

Елементи стовпчика «x_2» другої ітерації:

$$\frac{1\cdot 1-1\cdot 1}{1}=0;\ \frac{1\cdot 1-2\cdot 1}{1}=-1;\ \frac{3\cdot 1-2\cdot 1}{1}=1;$$
$$\frac{-1\cdot 1-(-10)\cdot 1}{1}=9\ ;\frac{-M\cdot 1-(-M)\cdot 1}{1}=0.$$

Враховуючи, що в напрямному рядку є нульові елементи, то стовпчики x_3, x_4 і x_6 переписуємо в наступну ітерацію без змін.

5. Одержаний опорний план знову перевіряємо на оптимальність.

Перейшовши до першої ітерації в симплекс-таблиці бачимо, що в оціночному 6-му рядку відсутні від'ємні елементи та штучна змінна x_7 виведена з базису. Тому аналіз оцінок Δ_j ведемо по оціночному 5-му рядку. Маємо $\Delta_5 = -10 < 0$, а це означає що даний опорний план також неоптимальний. За напрямний стовпчик беремо стовпчик зі змінною x_5, а за напрямний рядок – другий, оскільки $min\,\theta = min\left\{\frac{2}{1};\frac{2}{2};\frac{7}{2}\right\} = 1$.

У першій ітерації напрямний елемент $a_{25} = 2$. Тому у другій ітерації другий рядок утворений з елементів другого рядка попередньої ітерації поділених на число $a_{25} = 2$, тобто маємо

$$1 \quad 0 \quad -1/2 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1 \quad 0 \quad -1,$$

а п'ятий стовпчик другої ітерації – відповідно одиничний.

Інші елементи другої ітерації розраховані за правилом прямокутника. Елементи стовпчика «План» другої ітерації:

$$\frac{2\cdot 2 - 1\cdot 2}{2} = 1; \quad \frac{1\cdot 2 - (-1)\cdot 2}{2} = 2; \quad \frac{7\cdot 2 - 2\cdot 2}{2} = 5;$$
$$\frac{10\cdot 2 - (-10)\cdot 2}{2} = 20; \quad \frac{0\cdot 2 - 0\cdot 2}{2} = 0.$$

Елементи стовпчика «x_4» другої ітерації:

$$\frac{0\cdot 2 - 1\cdot 1}{2} = -\frac{1}{2}; \quad \frac{0\cdot 2 - 1\cdot(-1)}{2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{0\cdot 2 - 1\cdot 2}{2} = -1;$$
$$\frac{0\cdot 2 - 1\cdot(-10)}{2} = 5; \quad \frac{0\cdot 2 - (-1)\cdot 0}{2} = 0.$$

Враховуючи, що в напрямному рядку є нульові елементи, то стовпчики x_1, x_3 і x_6 переписуємо в наступну ітерацію без змін. Переходимо до наступної ітерації симплексної таблиці.

Як видно з оціночних 5 і 6-го рядків всі $\Delta_j > 0 \ (j = \overline{1,n})$, тобто задовольняється умова оптимальності.

Використовуючи стовпчик «План», отримаємо наступний оптимальний план заданої задачі лінійного програмування

$$X_{max} = (2;0;0;0;0;5),$$

і оптимальне значення цільової функції

$$Z'_{max} = Z_{max} + 3 = 10 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 - M \cdot 0 = 20,$$

тоді

$$Z_{max} = 20 - 3 = 17,$$

що співпадає з результатами отриманими графічним методом.

6. Перевіримо одержані результати засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel* (рис. 2.1-2.3):

D24 | fx | =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B24:C24)-3

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	<=	3
20	2.	2	1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B20:C20)	<=	4
21	3.	-1	-1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B21:C21)	<=	-1
22	4.	2	3	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B22:C22)	<=	9
23					Напрям	
24	**Цільова функція**	**10**	**1**	**=СУММПРОИЗВ(B16:C16;B24:C24)-3**	max	

Рисунок 2.1 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

D24 | fx | =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B24:C24)-

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	0	<=	3
20	2.	2	1	0	<=	4
21	3.	-1	-1	0	<=	-1
22	4.	2	3	0	<=	9
23					Напрям	
24	**Цільова функція**	**10**	**1**	**-3**	max	

Рисунок 2.2 – Початкові дані для розв’язання задачі на max

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	2	0			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	2	<=	3
20	2.	2	1	4	<=	4
21	3.	-1	-1	-2	<=	-1
22	4.	2	3	4	<=	9
23					Напрям	
24	**Цільова функція**	**10**	**1**	**17**	max	

Рисунок 2.3 – Оптимальний план задачі на max

Як бачимо, визначений оптимальний план співпадає з раніше отриманим.

Відповідь:

$$X_{max} = (2;0),\ Z_{max} = 17.$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3
«ПОБУДОВА ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ»

Мета роботи. Засвоїти методику побудови двоїстої задачі лінійного програмування та методи визначення її оптимального плану.

Завдання для самостійної роботи

Задача № 1

Побудувати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування (задача № 1 із Лабораторної роботи № 1, № 2).

Визначити її оптимальний план:

- за 1 теоремою двоїстості;
- за 2 теоремою двоїстості;
- симплекс-методом;
- двоїстим симплекс-методом:
- перевірити розв'язок задачі засобами оптимізації *Ms Excel.*

Дати економічний аналіз на основі оптимального плану прямої та двоїстої задач лінійного програмування.

Задача № 2

Побудувати двоїсту задачу до заданої задачі лінійного програмування (табл. 3.1) та визначити її оптимальний план. Результати перевірити засобами оптимізації *Microsoft Excel.*

Таблиця 3.1 – Вихідні дані до задачі

1	$z = -30x_1 + 10x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \ge -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**2**	$z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to min;$ $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$

3	$z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 50, \\ 3x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_1 + 4x_2 \le 40, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**4**	$z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$
5	$z = 2x_1 + 3x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 = 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	**6**	$z = 5x_1 + 2x_2 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 8, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 20, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
7	$z = 5x_1 + 12x_2 - 4x_3 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**8**	$z = -x_1 + x_2 \to min;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$
9	$z = 5x_1 + 6x_2 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	**10**	$z = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \to min;$ $\begin{cases} -x_2 + 4x_3 \ge 1, \\ -x_1 + 5x_2 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 9, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$
11	$z = 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to max;$ $\begin{cases} 3x_2 + 4x_2 + x_3 \le 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**12**	$z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to min;$ $\begin{cases} x_2 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$
13	$z = x_1 + x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ 3x_1 - x_2 = 6, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,2}.$	**14**	$z = 10x_1 + 40x_2 \to min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 25, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

15	$z = x_1 + 2x_2 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 2x_2 \le -4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	**16**	$z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$
17	$z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**18**	$z = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to max;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$
19	$z = -x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 6x_4 \to min;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \ge 1, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,4}.$	**20**	$Z = 7x_1 + 6x_2 \to \max$ $2x_1 + 5x_2 \ge 10$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $x_1 \le 6$ $x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$
21	$z = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \to min;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**22**	$z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$
23	$z = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \to min;$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 \ge 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le -3, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**24**	$z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$
25	$z = x_1 - 2x_2 + 5x_3 \to max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 20, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \ge 19 \end{cases}$ $x_j \ge 0, j = \overline{1,3}.$	**26**	$Z =$ $x_1 + 10x_2 + 6x_3 + x_4 \to \min$ $5x_2 + 3x_3 + x_4 = 15$ $x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 19$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$
27	$Z = 8x_1 - 20x_2 + 6x_3 \to \max$ $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5$ $3x_1 - 4x_2 + x_3 \le 2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**28**	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$ $2x_1 + 3x_2 \le 30$ $x_1 + 2x_2 \ge 10$ $x_1 - x_2 \ge 10$ $x_1, x_2 \ge 0$

29	$Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to \max$ $x_1 + x_3 \le 6$ $x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$ $-x_1 + x_3 \ge -2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**30**	$Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max$ $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$ $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
31	$Z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max$ $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $x_1 - x_2 - 2x_3 = -4$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**32**	$Z = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \to \min$ $x_1 - 5x_2 - 4x_3 \ge 1$ $-2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le -3$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
33	$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max$ $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$ $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$	**34**	$Z = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \to \min$ $4x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$ $x_1 + x_2 - x_3 \ge 3$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$
35	$Z = -x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 6x_4 \to \min$ $x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 2$ $-x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \ge 1$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$		

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 3

Приклад 3.1

Розглянемо задану задачу лінійного програмування (Приклад 1.1 ЛР № 1, Приклад № 2.1 ЛР № 2).

Розв'язання

1. Побудова двоїстої задачі лінійного програмування

Пряма задача

$$Z = 30x_1 + 40x_2 \to max.$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, & |y_1 \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, & |y_2 \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. & |y_3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

де x_j – обсяг виробництва продукції j – го виду.

Використовуючи правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування, побудуємо відповідну двоїсту задачу.

Двоїста задача

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \ge 40. \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}.$$

де y_i – оцінка одиниці i – го виду ресурсу $\left(i = \overline{1,\ 3}\right)$.

2. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування за 1 теоремою двоїстості

Використовуючи симплекс-таблицю (табл. 2.2 ЛР № 2), визначимо оптимальний план двоїстої задачі лінійного програмування за 1 теоремою двоїстості:

$$Y^* = Y_{min} = \vec{C}_{баз} D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} =$$

$$=\left(0\cdot 1+30\cdot 0+40\cdot 0 \quad 0\cdot\left(-\frac{11}{3}\right)+30\cdot\frac{1}{3}+40\cdot\left(-\frac{1}{12}\right) \quad 0\cdot\frac{8}{9}+30\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)+40\cdot\frac{1}{9}\right)=\left(0 \quad \frac{20}{3} \quad \frac{10}{9}\right)$$

$$F_{min}=300\cdot 0+120\cdot\frac{20}{3}+252\cdot\frac{10}{9}=1080.$$

3. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування за 2 теоремою двоїстості

$$F=300y_1+120y_2+252y_3\to min$$

$$\begin{cases}12y_1+4y_2+3y_3\geq 30,\\ 4y_1+4y_2+12y_3\geq 40.\end{cases}$$

$$y_i\geq 0,\ i=\overline{1,3}.$$

Визначимо оптимальний план двоїстої задачі лінійного програмування за 2 теоремою двоїстості.

Підставимо компоненти оптимального плану прямої ЗЛП $X_{max}=(12;18;84;0;0)$ в систему її обмежень $\begin{cases}12x_1+4x_2\leq 300,\\ 4x_1+4x_2\leq 120,\\ 3x_1+12x_2\leq 252.\end{cases}$

Отримаємо,

$$\begin{cases}12\cdot 12+4\cdot 18\leq 300,\\ 4\cdot 12+4\cdot 18\leq 120,\\ 3\cdot 12+12\cdot 18\leq 252.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}216<300 \quad \Rightarrow y_1=0,\\ 120=120,\\ 252=252.\end{cases}$$

Оскільки $\begin{matrix}x_1=12>0\Rightarrow 12y_1+4y_2+3y_3=30,\\ x_2=18>0\Rightarrow 4y_1+4y_2+12y_3=40.\end{matrix}$

Тоді, розв’язавши систему рівнянь, одержимо оптимальний план двоїстої задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases}12y_1+4y_2+3y_3=30,\\ 4y_1+4y_2+12y_3=40,\\ y_1=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y_2+3y_3=30,\\ 4y_2+12y_3=40,\\ y_1=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_3=\frac{10}{9},\\ y_2=\frac{20}{3},\\ y_1=0.\end{cases}$$

Звідси, $Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$, зі значення цільової функції:

$$F_{min} = 300 \cdot 0 + 120 \cdot \frac{20}{3} + 252 \cdot \frac{10}{9} = 1080.$$

4. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування двоїстим симплекс-методом

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to min$$

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \geq 40. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

1. Приведемо систему обмежень до системи нерівностей типу $''\leq''$, помножив всі обмеження системи на (-1):

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 \to min$$

$$\begin{cases} -12y_1 - 4y_2 - 3y_3 \leq -30, \\ -4y_1 - 4y_2 - 12y_3 \leq -40. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,3}.$$

2. Для побудови початкового опорного плану приведемо одержану задачу до канонічного виду, ввівши до лівої частини додаткові балансуючі змінні y_4, y_5:

$$F = 300y_1 + 120y_2 + 252y_3 + 0y_4 + 0y_5 \to min$$

$$\begin{cases} -12y_1 - 4y_2 - 3y_3 + y_4 = -30, \\ -4y_1 - 4y_2 - 12y_3 + y_5 = -40. \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$$

Запишемо систему обмежень ЗЛП у векторній формі:

$$y_1\vec{A}_1 + y_2\vec{A}_2 + y_3\vec{A}_3 + y_4\vec{A}_4 + y_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \end{pmatrix}$,

$\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \end{pmatrix}$

Таблиця 3.2 – Таблиця двоїстого симплекс-методу

N	i	Базис	$c_{баз}$	План, P_0	300	120	252	0	0	Базисний опорний план
					y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
0	1	y_4	0	-30	-12	-4	-3	1	0	$Y_0=(0;0;0;-30;-40)$
	2	y_5	0	-40	-4	-4	$\boxed{-12}$	0	1	
	3	Z,Δ_j		0	-300	-120	-252	0	0	$\Delta_j \le 0$
		θ		$b_i<0$	$\frac{-300}{-4}=75$	$\frac{-120}{-4}=30$	$\frac{-252}{-12}=21$	–	–	План не оптимальний
I	1	y_4	0	-20	-11	$\boxed{-3}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$Y_1=\left(0;0;\frac{10}{3};-20;0\right)$
	2	y_3	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1^*	0	$-\frac{1}{12}$	
	3	Z,Δ_j		840	--216	-36	0	0	-21	$\Delta_j \le 0$
		θ		$b_i<0$	$\frac{-216}{-11}=19\frac{7}{11}$	$\frac{-36}{-3}=12$	–	–	$-21:\left(-\frac{1}{4}\right)=84$	План не оптимальний
II	1	y_2	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{11}{3}$	1^*	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$Y_2=\left(0;\frac{20}{3};\frac{10}{9};0;0\right)$
	2	y_3	30	$\frac{10}{9}$	$-\frac{8}{9}$	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	
	3	Z,Δ_j		1080	-84	0	0	-12	-18	$\Delta_j \le 0$
				$b_i \ge 0$						План оптимальний

Оскільки вектори $\vec{A}_4, \vec{A}_5$ – одиничні та лінійно-незалежні, то вони утворюють базис двохвимірного простору; змінні які їм відповідають y_4, y_5 – базисні змінні, решта змінних y_1, y_2, y_3 – вільні. Прирівнявши вільні змінні до нуля, одержимо значення базисних змінних:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow y_4 = -30, y_5 = -40$$

Отже, початковий опорний план $Y_0 = (0;0;0;-30;-40)$, йому відповідає початкове значення цільової функції:

$$F_0 = 300 \cdot 0 + 120 \cdot 0 + 252 \cdot 0 + 0 \cdot (-30) + 0 \cdot (-40) = 0.$$

3. Подальший розв'язок оформимо у вигляді симплекс-таблиці (табл. 3.2).

Оскільки в оціночному $(m+1)$ рядку нульової ітерації: $-300;-120;-252;0;0$ всі $\Delta_j \le 0$ для задачі на min ($\Delta_j \ge 0$ для задачі на max), то $Y_0 = (0;0;0;-30;-40)$ є ***псевдоплан***. Серед його компонент є від'ємні, тому Y_0 – не є розв'язком задачі.

Переходимо до нового псевдоплану. Вибираємо найбільше за абсолютною величиною від'ємне значення стовпця «План», що вказує на напрямний рядок: $max\{|b_i|\} = max\{|-30|;|-40|\} = 40$.

Звідси, напрямним буде другий рядок і з базису виведемо змінну y_5. Для визначення змінної, яку необхідно ввести у базис, визначимо найменше симплексне відношення, що вказує на напрямний стовпчик:

$$\min_{a_{ij}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right) = \min\left(\frac{-300}{-4};\frac{-120}{-4};\frac{-252}{-12}\right) = \min(75;30;21) = 21.$$

Звідси, напрямним буде третій стовпчик і змінну y_3 введемо у базис. Використовуючи напрямний елемент $a_{23} = -12$, за алгоритмом перетворень Жордана-Гаусса, побудуємо наступну ітерацію.

Новий псевдоплан $Y_1 = \left(0;0;\frac{10}{3};-20;0\right)$ не є оптимальним, оскільки містить від'ємне число $b_1 = -20$. Серед елементів першого рядка є від'ємні числа, тому, перейдемо до нового псевдоплану в якому виключимо змінну y_4.

Визначимо найменше симплексне відношення:

$$\min_{a_{ij}<0}\left(\frac{\Delta_j}{a_{ij}}\right)=\min\left(\frac{-216}{-11};\frac{-36}{-3};-21:\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\min\left(19\frac{7}{11};12;84\right)=12$$

і введемо змінну y_2 до базису.

Використовуючи напрямний елемент $a_{12}=-3$, за алгоритмом перетворень Жордана-Гаусса, побудуємо наступну ітерацію.

З таблиці 3.2 одержимо план $Y_2=\left(0;\frac{20}{3};\frac{10}{9};0;0\right)$, у якому немає від'ємних компонентів, тому він – ***оптимальний***.

Отже,

$$Y_{min}=\left(0\quad\frac{20}{3}\quad\frac{10}{9}\right),$$

йому відповідає значення цільової функції

$$F_{min}=300\cdot 0+120\cdot\frac{20}{3}+252\cdot\frac{10}{9}=1080.$$

5. Визначення оптимального плану двоїстої задачі лінійного програмування засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel*

Перевіримо розрахунки засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel* (рис. 3.1-3.3):

E22 | fx | =СУММПРОИЗВ(B16:D16;B22:D22)

	A	B	C	D	E	F	G
16	Значення змінних						
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	3	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B19:D19)	>=	30
20	2.	4	4	12	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B20:D20)	>=	40
21						Напрям	
22	**Цільова функція**	**300**	**120**	**252**	**=СУММПРОИЗВ(B16:D16;B22:D22)**	min	

Рисунок 3.1 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

E22 | =СУММПРОИЗВ(B16:D16;B22:D22)

	A	B	C	D	E	F	G
16	Значення змінних						
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	3	0	>=	30
20	2.	4	4	12	0	>=	40
21						Напрям	
22	**Цільова функція**	**300**	**120**	**252**	**0**	min	

Рисунок 3.2 – Початкові дані для розв’язання задачі на min

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y3			
16	Значення змінних	0	6 2/3	1 1/9			
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	12	4	3	30	>=	30
20	2.	4	4	12	40	>=	40
21						Напрям	
22	**Цільова функція**	**300**	**120**	**252**	**1080**	min	

Рисунок 3.3 – Оптимальний план двоїстої задачі

Як бачимо, визначений оптимальний план співпадає з раніше отриманим.

Відповідь: $Y_{min} = \left(0 \quad \frac{20}{3} \quad \frac{10}{9}\right)$, $F_{min} = 1080$.

6. Економічний аналіз на основі оптимального плану прямої та двоїстої задач лінійного програмування

Виконаємо економічний аналіз заданої задачі (Приклад 1.1 ЛР № 1). Для цього проаналізуємо отримані оптимальні плани прямої та двоїстої задач та симплекс-таблицю (табл. 2.2 ЛР № 2).

6.1. Економічний аналіз на основі оптимального плану двоїстої задачі

План двоїстої задачі $Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$ дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві.

Оскільки, $y_2 = \frac{20}{3}$ та $y_3 = \frac{10}{9}$ відмінні від нуля, то ресурси 2 та 3 використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_1 = 0$, тому відповідний 1 вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві: $F_{min} = 1080$ ум. од.

6.2. Статус ресурсів прямої задачі

Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами.

Перший — підстановкою оптимального плану прямої задачі $X_{max} = (12;18;84;0;0)$ у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі — недефіцитний:

$$\begin{cases} 12 \cdot 12 + 4 \cdot 18 \le 300, \\ 4 \cdot 12 + 4 \cdot 18 \le 120, \\ 3 \cdot 12 + 12 \cdot 18 \le 252. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 216 < 300, \\ 120 = 120, \\ 252 = 252. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ресурс1} - \text{недефіцитний}, \\ \text{ресурс2} - \text{дефіцитний}, \\ \text{ресурс3} - \text{дефіцитний}. \end{cases}$$

Другий спосіб — за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля — ресурс недефіцитний:

$$\begin{cases} x_3 = 84, \\ x_4 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textit{ресурс1} - \textit{недефіцитний}, \\ \textit{ресурс2} - \textit{дефіцитний}, \\ \textit{ресурс3} - \textit{дефіцитний}. \end{cases}$$

Третій спосіб — за допомогою двоїстих оцінок. Якщо $y_i \neq 0$, то зміна (збільшення або зменшення) обсягів $i-$го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства, і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо $y_i = 0$, то $i-$й ресурс недефіцитний:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = \dfrac{20}{3}, \\ y_3 = \dfrac{10}{9}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \textit{ресурс1} - \textit{недефіцитний}, \\ \textit{ресурс2} - \textit{дефіцитний}, \\ \textit{ресурс3} - \textit{дефіцитний}. \end{cases}$$

6.3. Інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів

З симплекс-таблиці (табл. 2.2 ЛР № 2) бачимо, що якщо запас другого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю $(b_2 = 120 + 1 = 121)$, то цільова функція Z_{max} збільшиться за інших однакових умов на $y_2 = \dfrac{20}{3} = 6\dfrac{2}{3}$ ум. од. і становитиме

$$Z_{max} = 1080 + 6\frac{2}{3} = 1086\frac{2}{3} \text{ ум. од.}$$

Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика $"x_4"$ останньої симплекс-таблиці, який

відповідає двоїстій оцінці $y_2 = \frac{20}{3}$. У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_3^* зменшиться на $\frac{11}{3}$, змінної x_1^* — збільшиться на $\frac{1}{3}$, а x_2^* – зменшиться на $\frac{1}{12}$.

При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = \left(12\frac{1}{3};17\frac{11}{12};80\frac{1}{3};0;0\right).$$

Отже, збільшення запасу другого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції A та падіння виробництва продукції B, а обсяг використання першого ресурсу зменшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде

$$Z_{max} = 30 \cdot 12\frac{1}{3} + 40 \cdot 17\frac{11}{12} = 30 \cdot \frac{37}{3} + 40 \cdot \frac{215}{12} = \frac{13040}{12} = 1086\frac{2}{3},$$

тобто зросте на $y_2 = 6\frac{2}{3}$.

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного третього ресурсу за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю $(b_3 = 252 + 1 = 253)$. Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика $"x_5"$ останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці $y_3 = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$, можна записати новий оптимальний план.

У новому оптимальному плані значення базисної змінної x_3^* збільшиться на $\frac{8}{9}$, змінної x_1^* — зменшиться на $\frac{1}{9}$, а x_2^* – збільшиться на $\frac{1}{9}$. При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = \left(11\frac{8}{9};18\frac{1}{9};84\frac{8}{9};0;0\right).$$

$$Z_{max} = 30 \cdot 11\frac{8}{9} + 40 \cdot 18\frac{1}{9} = 30 \cdot \frac{107}{9} + 40 \cdot \frac{163}{9} = \frac{9730}{9} = 1081\frac{1}{9}.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на $y_3 = 1\frac{1}{9}$ у.о. за рахунок зменшення випуску продукції A, але збільшення виробництва продукції B. При цьому обсяг використання першого ресурсу збільшується.

6.4. Оцінка рентабельності продукції, що виготовляється на підприємстві

Оцінка рентабельності продукції виконується за допомогою двоїстих оцінок та обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожний вид продукції.

Підставимо оптимальний план двоїстої задачі $Y_{min} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{20}{3} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$ у систему обмежень двоїстої задачі:

$$\begin{cases} 12y_1 + 4y_2 + 3y_3 \geq 30, \\ 4y_1 + 4y_2 + 12y_3 \geq 40. \end{cases}$$

Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина) нерівності перевищує ціну цієї продукції (права частина нерівності), то виробництво такої продукції для підприємства недоцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

Отримаємо, що

$$\begin{cases} 12 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{20}{3} + 3 \cdot \frac{10}{9} \geq 30, \\ 4 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{20}{3} + 12 \cdot \frac{10}{9} \geq 40. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{270}{9} = 30, \\ \frac{360}{9} = 40. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{прод. } A - \text{рентабельна} \\ \text{прод. } B - \text{рентабельна} \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції.

Тому, якщо додаткова змінна двоїстої задачі дорівнює нулю $y_i = 0$, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо $y_i \neq 0$, то відповідна продукція нерентабельна.

Для заданої задачі додаткові змінні двоїстої задачі розміщуються в оціночному рядку останньої симплекс-таблиці у стовпчиках $"x_1"–"x_2"$. Їх оптимальні значення $y_3 = 0; y_4 = 0$, тому продукція A і B –рентабельна.

Приклад № 3.2

Двоїста задача будується за відповідними правилами, аналогічно як у прикладі 3.1. Її оптимальний план знаходиться одним із методів, розглянутих раніше.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.
ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА, МОДЕЛІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4
«ПОБУДОВА ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ЇЇ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ»

Мета роботи. Засвоїти методику побудови економіко-математичної моделі транспортної задачі та методи визначення її оптимального плану.

Завдання для самостійної роботи

Задача № 1

Побудувати економіко-математичну модель транспортної задачі, знайти її початковий опорний план 4 методами («північно-західного» кута, мінімальної вартості, подвійної вартості, апроксимації Фотеля) та визначити її оптимальний план методом потенціалів. Результати перевірити засобами оптимізації *Microsoft Excel.*

№ 1

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	4	70
A_2	6	5	7	6	50
A_3	6	4	6	8	70
A_4	7	5	5	7	70
Потреба	110	35	25	100	

№ 2

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	4	70
A_2	3	5	7	1	50
A_3	6	4	6	8	70
A_4	7	5	5	3	70
Потреба	100	45	25	100	

№ 3

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	2	4	70
A_2	6	5	7	3	50
A_3	6	4	3	8	70
A_4	7	5	5	5	70
Потреба	120	25	35	90	

№ 4

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	5	50
A_2	4	2	2	4	25
A_3	3	5	6	7	45
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	70	25	25	20	

№ 5

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	4	70
A_2	6	5	4	6	50
A_3	4	4	6	5	70
A_4	7	5	5	7	70
Потреба	110	25	45	100	

№ 6

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	5	50
A_2	5	2	2	4	25
A_3	1	5	6	7	45
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	70	25	25	20	

№ 7

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	5	50
A_2	5	2	4	4	25
A_3	3	1	6	2	45
A_4	5	6	2	3	40
Потреба	75	35	15	20	

№ 8

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	4	70
A_2	6	5	7	6	80
A_3	6	1	4	8	70
A_4	7	5	5	2	70
Потреба	140	15	35	100	

№ 9

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	2	5	50
A_2	5	2	2	4	35
A_3	1	5	5	3	65
A_4	5	6	2	1	30
Потреба	70	35	25	40	

№ 10

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	6	5	50
A_2	5	2	2	4	55
A_3	3	5	1	3	45
A_4	5	6	2	1	40
Потреба	70	45	25	50	

№ 11

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	4	70
A_2	6	5	7	2	50
A_3	6	4	5	3	90
A_4	7	2	5	1	70
Потреба	80	55	35	100	

№ 12

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	5	50
A_2	5	2	2	4	65
A_3	2	5	6	7	65
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	80	25	45	20	

№ 13

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	5	5	50
A_2	5	2	2	4	25
A_3	3	1	6	2	45
A_4	5	6	2	5	40
Потреба	60	35	25	20	

№ 14

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	2	4	70
A_2	6	5	7	6	50
A_3	6	4	1	8	70
A_4	7	5	5	7	80
Потреба	75	35	45	100	

№ 15

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	2	5	50
A_2	5	2	2	4	25
A_3	1	5	4	7	65
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	70	25	35	20	

№ 16

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	6	5	50
A_2	5	2	2	4	25
A_3	3	5	2	5	65
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	70	25	35	20	

№ 17

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	4	70
A_2	6	5	7	6	50
A_3	6	4	6	3	90
A_4	7	5	5	2	70
Потреба	85	35	45	100	

№ 18

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	5	50
A_2	5	2	2	4	85
A_3	3	5	1	3	45
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	95	25	45	20	

№ 19

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	4	6	5	70
A_2	2	2	2	4	25
A_3	3	1	6	7	45
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	70	45	25	20	

№ 20

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	5	2	4	70
A_2	6	5	3	6	50
A_3	6	4	6	8	40
A_4	7	5	2	1	70
Потреба	110	35	25	80	

№ 21

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	5	50
A_2	5	2	2	4	85
A_3	1	5	1	7	45
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	70	55	25	20	

№ 22

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	1	2	4	70
A_2	6	5	7	2	50
A_3	6	4	5	3	90
A_4	7	2	5	1	70
Потреба	80	55	35	100	

№ 23

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	5	50
A_2	5	2	2	4	65
A_3	2	5	6	7	45
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	80	25	45	20	

№ 24

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	5	5	50
A_2	5	2	2	4	25
A_3	3	1	6	2	45
A_4	5	6	2	5	40
Потреба	60	35	25	20	

№ 25

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	3	2	4	70
A_2	6	5	7	6	50
A_3	6	4	1	8	70
A_4	7	5	5	7	80
Потреба	75	35	45	100	

№ 26

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	2	5	50
A_2	5	2	2	4	25
A_3	1	5	4	7	65
A_4	5	6	2	5	30
Потреба	70	25	35	20	

№ 27

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	7	11	5	300
A_2	6	9	10	8	350
A_3	11	12	7	6	300
Потреба	200	220	210	230	

№ 28

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	6	7	450
A_2	3	8	9	10	300
A_3	8	11	7	12	400
Потреба	240	300	295	245	

№ 29

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	13	9	11	8	400
A_2	10	12	6	7	200
A_3	5	4	12	9	180
Потреба	300	220	160	170	

№ 30

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	2	270
A_2	6	9	4	5	180
A_3	11	8	10	9	300
Потреба	260	280	300	240	

№ 31

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	11	10	7	9	400
A_2	8	5	4	13	250
A_3	4	3	14	15	170
Потреба	220	190	310	170	

№ 32

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	6	3	2	205
A_2	2	5	4	8	195
A_3	9	10	11	6	240
Потреба	175	225	230	170	

№ 33

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	10	5	4	200
A_2	3	6	11	8	180
A_3	4	5	7	13	310
Потреба	180	240	170	180	

№ 34

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9	11	16	15	240
A_2	5	7	13	10	280
A_3	4	17	12	14	300
Потреба	190	200	250	250	

№ 35

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	8	6	400
A_2	11	9	3	12	300
A_3	7	10	5	8	200
Потреба	350	400	250	180	

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 4

Приклад 4.1

Пункти постачання	Тарифи (для пунктів споживання)				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	1	2	60
A_2	4	2	6	3	40
A_3	7	3	5	4	35
Потреба	40	25	20	50	

Розв'язання

1. Побудова математичної моделі транспортної задачі

Побудуємо економіко-математичну модель транспортної задачі. Нехай x_{ij}– кількість продукції, що перевозиться від i-го постачальника до j-го споживача $(i=\overline{1,3}; j=\overline{1,4})$; c_{ij}– вартість перевезення одиниці продукції від i-го постачальника до j-го споживача; a_i – запаси продукції i-го постачальника; b_i – попит на продукцію j-го споживача.

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 40 + 35 = 135,$$

а

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 25 + 20 + 50 = 135,$$

тобто

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j,$$

то транспортна задача є збалансованою.

Тоді економіко-математична модель транспортної задачі запишеться таким чином:

$$Z = 5x_{11} + 4x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 2x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 7x_{31} +$$
$$+ 3x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} \to min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 35, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,3}, \ j = \overline{1,4}.$$

Економічний зміст перших трьох обмежень полягає в тому, що вся продукція від кожного постачальника має вивозитися до споживачів повністю.

Аналогічно, вся продукція, що надходить до кожного споживача, має повністю задовольняти його попит. Дана умова відповідає іншим чотирьом обмеженням.

2. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом «північно-західного» кута

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5 **40**	4 **20**	1	2
$A_2 = 40$	4	2 **5**	6 **20**	3 **15**
$A_3 = 35$	7	3	5	4 **35**

Побудову початкового опорного плану за методом північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки x_{11} таблиці, в яку записують менше із чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і

заповнюють її, і т.д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці.

За допомогою методу північно-західного кута побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі.

У клітинку (1;1) поміщаємо $x_{11} = min(60;40) = 40$. Попит першого споживача задоволено повністю, тому перший стовпчик з розрахунку виключаємо. Залишок продукції $x_{12} = 20$ від першого постачальника записуємо у клітинку (1;2). У цьому випадку запас першого постачальника вичерпано.

Переходимо до розподілу продукції другого постачальника. У клітинку (2;2) записуємо необхідну кількість продукції $x_{22} = 5$. Тоді попит другого споживача задоволено повністю і другий стовпчик виключаємо з розгляду. Залишок продукції від другого постачальника з урахуванням попиту третього споживача поміщаємо у клітинку (2;3), тобто $x_{23} = 20$. Оскільки попит третього споживача задоволено повністю, то третій стовпчик виключаємо з розгляду. Залишок продукції другого постачальника, з урахуванням попиту четвертого споживача, поміщаємо в клітинку (2;4), тобто $x_{24} = 15$. У цьому випадку запас другого постачальника вичерпано.

Запас продукції третього постачальника поміщаємо у клітинку (3;4), тобто $x_{34} = 35$. В результаті одержали повний розподіл продукції і задовольнили попит кожного споживача.

Після побудови початкового плану у таблиці має бути заповненою $(m + n - 1)$ клітинок, де $m -$ кількість постачальників, а $n -$ кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають невиродженим. Якщо кількість заповнених клітинок у таблиці перевищує $(m + n - 1)$, то початковий план побудований неправильно і він є неопорним. Ознакою опорності плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. Циклом у транспортній задачі називають ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо кількість заповнених клітинок у таблиці менш як $(m + n - 1)$, то опорний план називають виродженим**.** У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так щоб не

порушилася ациклічність циклу, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу.

Для побудованого плану заданої транспортної задачі заповнені 6 клітинок, що дорівнює $m+n-1=3+4-1=6$, а це означає, що початковий опорний план

$$X_0=\begin{pmatrix} 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 20 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

є невиродженим.

Відповідне значення цільової функції для нього

$$Z=5\cdot 40+4\cdot 20+2\cdot 5+6\cdot 20+3\cdot 15+4\cdot 35=595.$$

3. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом мінімальної вартості

Метод мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість c_{ij} перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками і споживачами.

Побудуємо початковий опорний план заданої транспортної задачі за методом мінімальної вартості.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j			
	$B_1=40$	$B_2=25$	$B_3=20$	$B_4=50$
$A_1=60$	5	4	1 **20**	2 **40**
$A_2=40$	4 **5**	2 **25**	6	3 **10**
$A_3=35$	7 **35**	3	5	4

Оскільки найменший тариф у клітинці (1;3), $c_{13}=1$, то в неї поміщаємо кількість продукції $x_{13}=20$ і виключаємо з розгляду третій стовпчик, так як попит третього споживача

задоволено. Наступний найменший тариф $c_{14} = c_{22} = 2$. З урахуванням попиту четвертого споживача помістимо необхідну кількість продукції в клітинку (1;4), тобто $x_{14} = 40$ і виключимо з розгляду перший рядок, оскільки запас першого постачальника вичерпано Потім в клітинку (2;2) поміщаємо кількість продукції $x_{22} = 25$ і виключаємо з розгляду другий стовпчик, так як попит другого споживача задоволено.

Наступним мінімальним тарифом буде $c_{24} = 3$. Отже, в клітинку (2;4) поміщуємо продукцію $x_{24} = 10$ і виключаємо з розгляду четвертий стовпчик, оскільки попит четвертого споживача також задоволено.

Наступний найменший тариф $c_{21} = c_{34} = 4$. Поміщаємо у клітинку (2;1) кількість продукції $x_{21} = 5$ і виключаємо з розгляду другий рядок, оскільки запаси другого постачальника вичерпано. У нас залишився єдиний не викреслений перший стовпчик і єдиний третій рядок, для яких спільна клітинка (3;1), у яку поміщаємо залишок продукції $x_{31} = 35$.

Після розподілення всієї продукції та задоволення попиту всіх споживачів дістанемо вихідний початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 5 & 25 & 0 & 10 \\ 35 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

для якого значення цільової функції

$$Z = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 35 = 445.$$

4. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом подвійної вартості

Метод подвійної переваги полягає в тому, що перед заповненням таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю заповнюють з клітинок позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім заповнюють за методом мінімальної вартості.

Побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі методом подвійної переваги.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5	4	VV 1 **20**	V 2 **40**
$A_2 = 40$	V 4 **15**	VV 2 **25**	6	3
$A_3 = 35$	7 **25**	V 3	5	4 **10**

Помітимо у кожному рядку значком V клітинки, що мають найменший тариф. У першому рядку – клітинку (1;3), у другому – (2;2), у третьому – (3;2). Аналогічно у першому стовпчику – клітинку (2;1), у другому – (2;2), у третьому – (1;3), у четвертому – (1;4). Отже, клітинки (1;3) і (2;2) мають дві позначки, а тому треба заповнити їх першими: $\boldsymbol{x_{13} = 20}$, $\boldsymbol{x_{22} = 25}$. Потім заповнюємо клітинки з однією позначкою – (1;4) і (2;1): $\boldsymbol{x_{14} = 40}$, $\boldsymbol{x_{21} = 15}$. Клітинку (3;2) не заповнюємо, оскільки попит другого споживача уже повністю задоволено. Далі збалансуємо задачу, використовуючи метод мінімальної вартості. А саме, $\boldsymbol{x_{34} = 10}$, $\boldsymbol{x_{31} = 25}$.

Отже, отримали початковий опорний план

$$\boldsymbol{X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 15 & 25 & 0 & 10 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}},$$

для якого значення цільової функції

$$\boldsymbol{Z = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 25 = 425}.$$

5. Побудова початкового опорного плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля

Метод апроксимації Фогеля полягає в тому, що на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими тарифами в кожному рядку і в кожному стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Потім серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшим

тарифом. Якщо ж однакових найбільших різниць декілька, то вибирають будь-який рядок чи стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок чи стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Різниці для рядків
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	1 $\boxed{2}$ —
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3	1 1 1
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10	1 1 1
Різниці для стовпчиків	1 1 $\boxed{1}$	1 1 1	$\boxed{4}$ — —	1 1 1	

Побудуємо початковий опорний план вихідної транспортної задачі методом апроксимації Фогеля.

Для даної задачі маємо, що після першого кроку найбільша різниця у третьому стовпчику дорівнює ***4***. А найменший у ньому тариф $\boldsymbol{c_{13} = 1}$ у клітинці (1;3), тому заповнюємо $\boldsymbol{x_{13} = 20}$. Не враховуючи заповнену клітинку (1;3), на другому кроці визначаємо відповідні різниці між найменшими тарифами у всіх рядках, і всіх стовпцях, крім третього стовпчика, оскільки попит третього споживача уже задоволено. Найбільша різниця ***2*** у першому рядку, а найменший тариф у цьому рядку $\boldsymbol{c_{14} = 2}$. Отже, заповнюємо $\boldsymbol{x_{14} = 40}$ і виключаємо з розгляду перший рядок. Визначаємо знову відповідні різниці. Оскільки вони усі рівні між собою, то виберемо довільним чином.

Наприклад, виберемо перший стовпчик. У ньому найменший тариф $\boldsymbol{c_{21} = 4}$, тому заповнюємо $\boldsymbol{x_{21} = 40}$ і виключаємо з розгляду перший стовпчик. Таким чином, залишився тільки третій рядок. Згідно методу мінімальної

вартості заповнюємо клітинку (3;2), а потім – (3;4), відповідно $x_{32} = 25$, $x_{34} = 10$.

Отже, початковий опорний план

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

для якого значення цільової функції

$$Z = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375.$$

6. Побудова оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів

Опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_j відповідно до постачальників та споживачів згідно теореми.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі).

Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ існують такі числа u_i та v_j, для яких виконуються умови:

$$1)\ u_i + v_j = c_{ij},\ x_{ij} > 0,$$

$$2)\ u_i + v_j \le c_{ij},\ x_{ij} = 0$$

для всіх $i = \overline{1,m}$ та $j = \overline{1,n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначають із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не виконується, тобто $u_i + v_j \ge c_{ij}$, то поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок декілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто

$\boldsymbol{max}\{\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}\}$. Дану клітинку називають ***потенціальною***.

Для вибраної порожньої потенціальної клітинки будують цикл перерахування та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці – знак «+», а всім іншим по черзі – знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел $\boldsymbol{x_{ij}}$, що стоять у клітинках зі знаком «-». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+», і і віднімають від чисел у клітинках зі знаком **«–».**

Отже, потенціальна клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом $\boldsymbol{x_{ij}}$ вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі, який знову перевіряють на оптимальність.

Застосуємо метод потенціалів до побудованих початкових опорних планів.

6.1. Знайдемо оптимальний план транспортної задачі за допомогою метода потенціалів, використовуючи початковий опорний план знайдений ***методом північно-західного кута.***

Отже, маємо першу транспортну таблицю.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 40	4 20 –	1 + 7	2	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4	2 5 +	6 **20** –	3 15	$u_2 = -2$
$A_3 = 35$	7	3	5	4 35	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 8$	$v_4 = 5$	$Z_1 = 595$

Оскільки опорний план невироджений, то його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Потенціали u_i і v_j будемо записувати у відповідних місцях транспортної таблиці.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ для усіх заповнених клітинок ($x_{ij} > 0$) складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_2 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_3 = 6, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 5 \\ v_2 = 4, \\ u_2 = -2, \\ v_3 = 8, \\ v_4 = 5, \\ u_3 = -1. \end{cases}$$

Одержана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо візьмемо довільне число, наприклад, $u_1 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $v_1 = 5$, $v_2 = 4$, $u_2 = -2$, $v_3 = 8$, $v_4 = 5$, $u_3 = -1$.

Виконаємо перевірку обчислених потенціалів, згідно умови

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j = Z$$

$$60 \cdot 0 + 40 \cdot (-2) + 35 \cdot (-1) + 40 \cdot 5 + 25 \cdot 4 + 20 \cdot 8 + 50 \cdot 5 = 595;$$

$$595 = 595.$$

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ ($x_{ij} = 0$):

$$A_i B_j : u_i + v_j \qquad c_{ij}$$

$$A_1 B_3 : u_1 + v_3 = 0 + 8 = 8 > 1;$$

$$A_1 B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 > 2;$$

$$A_2 B_1 : u_2 + v_1 = -2 + 5 = 3 < 4;$$

$$A_3 B_1 : u_3 + v_1 = -1 + 5 = 4 < 7;$$

$$A_3 B_2 : u_3 + v_2 = -1 + 4 = 3 = 3;$$

$$A_3 B_3 : u_3 + v_3 = -1 + 8 = 7 > 5.$$

Умова оптимальності не виконується для трьох клітинок A_1B_3, A_1B_4 та A_3B_3. Знайдемо для кожної з них відповідні порушення згідно формули $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij}$.

Отже,

$$\Delta_{13} = 8 - 1 = 7,\ \Delta_{14} = 5 - 2 = 3,\ \Delta_{33} = 7 - 5 = 2.$$

Серед них вибираємо найбільше, тобто

$$max\{\Delta_{13}; \Delta_{14}; \Delta_{33}\} = max\{7;3;2\} = \Delta_{13} = 7.$$

Дане порушення $\Delta_{13} = 7$ записуємо в лівому нижньому куті відповідної клітинки.

Отже, перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним.

Тому від нього переходимо до наступного плану, використовуючи вихідну потенціальну клітину A_1B_3.

У клітинці A_1B_3 ставимо знак «+» і для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл перерахування, починаючи з потенціальної клітинки A_1B_3: (1;3), (1;2), (2;2), (2;3) та позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У транспортній таблиці одержаний цикл показуємо у вигляді замкненої лінії, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці. У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Для даної задачі $min\{x_{12}; x_{23}\} = min\{20;20\} = 20$.

Якщо у двох клітинках однакові значення, то звільняємо ту, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Оскільки $c_{12} = 4, c_{23} = 6$, то вибираємо клітинку A_2B_3. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_2B_3 порожня, оскільки з неї забираємо 20 і переносимо його в потенціальну клітинку A_1B_3: $x_{13} = 20$, у A_1B_2: $x_{12} = 20 - 20 = 0$, у A_2B_2: $x_{22} = 5 + 20 = 25$.

Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у другу таблицю без змін.

Таким чином, отримуємо другу транспортну таблицю.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 40	4 **0** –	1 20	2 + **3**	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4	2 25 +	6	3 15 –	$u_2 = -2$
$A_3 = 35$	7	3	5	4 35	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 4$	$v_3 = 1$	$v_4 = 5$	$Z_2 = 455$

Для знайденого опорного плану

$$X_2 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_2 = 5 \cdot 40 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 455.$$

Перевіримо новий опорний план на оптимальність, аналогічно раніше описаним діям.

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_2 = 4, \\ u_1 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 5, \\ v_2 = 4, \\ v_3 = 1, \\ u_2 = -2, \\ v_4 = 5, \\ u_3 = -1. \end{cases}$$

Перевірка розрахунків потенціалів:

$$60 \cdot 0 + 40 \cdot (-2) + 35 \cdot (-1) + 40 \cdot 5 + 25 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 50 \cdot 5 = 455;$$

$$455 = 455.$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 > 2;$$
$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = -2 + 5 = 3 < 4;$$
$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = -2 + 1 = -1 < 6;$$
$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = -1 + 5 = 4 < 7;$$
$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = -1 + 4 = 3 = 3;$$
$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = -1 + 1 = 0 < 5.$$

План не оптимальний, оскільки $\Delta_{14} = 5 - 2 = 3 > 0$.

Будуємо новий опорний план, використовуючи клітинку A_1B_4 як потенціальну. У клітинці A_1B_4 ставимо знак «+» і для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл перерахування, починаючи з потенціальної клітинки A_1B_4: (1;4), (1;2), (2;2), (2;4) та позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–».

У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{12}; x_{24}\} = min\{0;15\} = 0$, то в потенціальну клітинку A_1B_4 переносимо з A_1B_2 число **0**: $x_{14} = 0$, у A_2B_2: $x_{22} = 25 + 0 = 25$, у A_2B_4: $x_{24} = 15 - 0 = 15$, клітинка A_1B_2 – порожня. Усі інші заповнені клітинки другої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Отримуємо третю транспортну таблицю.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 40 –	4	1 20	2 0 +	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 + **2**	2 25	6	3 **15** –	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3	5	4 35	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_3 = 455$

Для знайденого опорного плану

$$X_3 = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix},$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_3 = 5 \cdot 40 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 455.$$

Перевіримо його на оптимальність.

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_4 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 5, \\ v_3 = 1, \\ v_4 = 2, \\ u_2 = 1, \\ v_2 = 1, \\ u_3 = 2. \end{cases}$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 1 = 1 < 4;$$
$$A_2B_1 : u_2 + v_1 = 1 + 5 = 6 > 4;$$
$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = 1 + 1 = 2 < 6;$$
$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + 5 = 7 = 7;$$
$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = 2 + 1 = 3 = 3;$$
$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + 1 = 3 < 5.$$

План не оптимальний, оскільки $\Delta_{21} = 6 - 4 = 2 > 0$.

Будуємо новий опорний план з потенціальною клітиною A_2B_1. Маємо цикл з вершинами: (2;1), (1;1), (1;4), (2;4). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{11}; x_{24}\} = min\{40;15\} = 15$, то в потенціальну клітинку A_2B_1 переносимо з A_2B_4 число **15**:

$x_{21} = 15$, у A_1B_1: $x_{11} = 40 - 15 = 25$, у A_1B_4: $x_{14} = 0 + 15 = 15$, клітинка A_2B_4 – порожня. Усі інші заповнені клітинки третьої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5 **25** –	4	1 20	2 15 +	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 15 +	2 25 –	6	3	$u_2 = -1$
$A_3 = 35$	7	3 + 2	5	4 35 –	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_4 = 425$

Для знайденого опорного плану

$$X_4 = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 20 & 15 \\ 15 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{pmatrix},$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_4 = 5 \cdot 25 + 2 \cdot 15 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 15 + 4 \cdot 35 = 425.$$

Перевіримо його на оптимальність.

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 5, \\ u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_1 = 5, \\ v_3 = 1, \\ v_4 = 2, \\ u_2 = -1, \\ v_2 = 3, \\ u_3 = 2. \end{cases}$$

Перевірка розрахунків потенціалів:

$$60 \cdot 0 + 40 \cdot (-1) + 35 \cdot 2 + 40 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 20 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 425;$$

$$425 = 425.$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 3 = 3 < 4;$$
$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = -1 + 1 = 0 < 6;$$
$$A_2B_4 : u_2 + v_4 = -1 + 2 = 1 < 3;$$
$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + 5 = 7 = 7;$$
$$A_3B_2 : u_3 + v_2 = 2 + 3 = 5 > 3;$$
$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + 1 = 3 < 5.$$

План не оптимальний, оскільки $\Delta_{32} = 5 - 3 = 2 > 0$.

Будуємо новий опорний план з потенціальною клітиною A_3B_2. Маємо цикл перерахунку з вершинами (3;2), (2;2), (2;1), (1;1), (1;4), (3;4). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{11}; x_{22}; x_{34}\} = min\{25;25;35\} = 25$, тобто в двох клітинках однакові мінімальні значення, то звільняємо ту клітинку, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Так як $c_{11} = 5, c_{22} = 2$, то звільняємо клітинку A_1B_1. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_1B_1 порожня, оскільки з неї забираємо 25 і переносимо його в потенціальну клітинку A_3B_2: $x_{32} = 25$, у A_2B_2: $x_{22} = 25 - 25 = 0$, у A_2B_1: $x_{21} = 15 + 25 = 40$, у A_1B_4: $x_{14} = 15 + 25 = 40$, у A_3B_4: $x_{34} = 35 - 25 = 10$.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 40	2 0 –	6	3 +	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3 25 +	5	4 10 –	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_5 = 375$

Усі інші заповнені клітинки четвертої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Для знайденого опорного плану

$$X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_5 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375 .$$

Система рівнянь для визначення потенціалів:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 1, \\ u_1 + v_4 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_3 + v_2 = 3, \\ u_3 + v_4 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0, \\ v_3 = 1, \\ v_4 = 2, \\ v_1 = 3, \\ u_2 = 1, \\ v_2 = 1, \\ u_3 = 2. \end{cases}$$

Перевірка другої умови оптимальності:

$$A_1B_1 : u_1 + v_1 = 0 + 3 = 3 < 5;$$

$$A_1B_1 : u_1 + v_2 = 0 + 1 = 1 < 4;$$

$$A_2B_3 : u_2 + v_3 = 1 + 1 = 2 < 6;$$

$$A_2B_4 : u_2 + v_4 = 1 + 2 = 3 = 3;$$

$$A_3B_1 : u_3 + v_1 = 2 + 3 = 5 < 7;$$

$$A_3B_3 : u_3 + v_3 = 2 + 1 = 3 < 5.$$

Оскільки всі умови оптимальності виконуються, то знайдений опорний план є оптимальним.

Він має вигляд

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

і йому відповідає мінімальне значення цільової функції $Z_{min} = 375$.

Розглянута транспортна задача має іще один альтернативний оптимальний план, оскільки для порожньої клітинки A_2B_4: $u_2 + v_4 = 1 + 2 = 3 = c_{24}$.

Щоб отримати альтернативний оптимальний план, достатньо виконати перерозподіл, взявши за потенціальну клітинку A_2B_4. Маємо цикл: (2;4), (3;4), (3;2), (2;2). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{22}; x_{34}\} = min\{0;10\} = 0$, то в потенціальну клітинку A_2B_4 переносимо з A_2B_2 число **0**: $x_{24} = 0$, у A_3B_4: $x_{34} = 10 - 0 = 10$, у A_3B_2: $x_{32} = 25 + 0 = 25$, клітинка A_2B_2 – порожня. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3 **0**
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10

Тоді,

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

і оптимальне значення цільової функції $Z_{min} = 375$.

Ми одержали попередній оптимальний план. Це пояснюється тим, що перерозподілене значення $x_{22} = 0$. Якби воно було відмінне від нуля, то компоненти оптимального плану змінилися б, а значення цільової функції залишилося б попереднім.

6.2. Розв'яжемо транспортну задачу методом потенціалів, розглянувши в якості вихідного опорного плану – план, отриманий ***методом мінімальної вартості.***

Отже, перша транспортна таблиця.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 5 +	2 **25 –**	6	3 10	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7 35 –	3 + **2**	5	4	$u_3 = 4$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_1 = 445$

Розв'язування задачі запишемо більш компактно.

Оскільки кількість заповнених клітинок **6** і дорівнює значенню виразу $\boldsymbol{m+n-1=3+4-1=6}$, то опорний план невироджений. Перевіримо його на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Потенціали $\boldsymbol{u_i}$ і $\boldsymbol{v_j}$ будемо записувати у відповідних місцях транспортної таблиці.

Визначимо потенціали плану згідно з першою умовою оптимальності $\boldsymbol{u_i + v_j = c_{ij}}$ для заповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij} > 0}$). Візьмемо $\boldsymbol{u_1 = 0}$. Тоді, з транспортної таблиці, розраховуючи послідовно, маємо

$$\boldsymbol{v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1},$$
$$\boldsymbol{v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2},$$
$$\boldsymbol{u_2 = c_{24} - v_4 = 3 - 2 = 1},$$
$$\boldsymbol{v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3},$$
$$\boldsymbol{v_2 = c_{22} - u_2 = 2 - 1 = 1},$$
$$\boldsymbol{u_3 = c_{31} - v_1 = 7 - 3 = 4}.$$

Перевіримо другу умову оптимальності $\boldsymbol{u_i + v_j \le c_{ij}}$ для незаповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij} = 0}$). Вона не виконується для клітинок $\boldsymbol{A_3B_2 : 4+1>3}$ і $\boldsymbol{A_3B_4 : 4+2>4}$. Відповідні порушення

$\Delta_{32} = 5 - 3 = 2$ і $\Delta_{34} = 6 - 4 = 2$ рівні між собою. В якості потенціальної клітинки беремо A_3B_2, оскільки в неї менший тариф $(c_{32} = 3, c_{34} = 4)$. Розглянемо цикл перерахування (3;2), (2;2), (2;1), (3;1). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{22}; x_{31}\} = min\{25;35\} = 25$, то в потенціальну клітинку A_3B_2 переносимо з A_2B_2 число **25**: $x_{32} = 25$, у A_2B_1: $x_{21} = 5 + 25 = 30$, у A_3B_1: $x_{31} = 35 - 25 = 10$, клітинка x_{22} – порожня. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Тоді, друга транспортна таблиця має вид:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 30 +	2	6	3 10 –	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7 **10 –**	3 25	5	4 + **2**	$u_3 = 4$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = -1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_2 = 395$

Для знайденого опорного плану

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 30 & 0 & 0 & 10 \\ 10 & 25 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

визначаємо відповідне значення цільової функції

$$Z_2 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 25 = 395.$$

Перевіримо його на оптимальність згідно теореми оптимальності. Аналогічно, як раніше, з заповнених клітинок таблиці ($x_{ij} > 0$), використовуючи першу умову оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$, визначаємо потенціали плану:

$$u_1 = 0,$$
$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_2 = c_{24} - v_4 = 3 - 2 = 1,$$
$$v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3,$$
$$u_3 = c_{31} - v_1 = 7 - 3 = 4,$$
$$v_2 = c_{32} - u_3 = 3 - 4 = -1.$$

Перевіримо другу умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) опорного плану транспортної задачі. Вона не виконується для клітинки A_3B_4: $4 + 2 > 4$. Відповідне порушення $\Delta_{34} = 6 - 4 = 2$.

Отже, клітинка A_3B_4 є потенціальна. Розглянемо цикл перерахування (3;4), (2;4), (2;1), (3;1). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{24}; x_{31}\} = min\{10;10\} = 10$, тобто в двох клітинках однакові мінімальні значення, то звільняємо ту клітинку, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Так як $c_{31} = 7, c_{24} = 3$, то звільняємо клітинку A_3B_1. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_3B_1 порожня, оскільки з неї забираємо 10 і переносимо його в потенціальну клітинку A_3B_4: $x_{34} = 10$, у A_2B_4: $x_{24} = 10 - 10 = 0$, у A_2B_1: $x_{21} = 30 + 10 = 40$. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Третя транспортна таблиця має вид:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3 **0**	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_3 = 375$

Для знайденого опорного плану

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

обчислюємо відповідне значення цільової функції

$$Z_3 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375.$$

Для заповнених клітинок транспортної таблиці ($x_{ij} > 0$), визначимо потенціали плану:

$$u_1 = 0,$$
$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_2 = c_{24} - v_4 = 3 - 2 = 1,$$
$$v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3,$$
$$u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 2 = 2,$$
$$v_2 = c_{32} - u_3 = 3 - 2 = 1.$$

Порівнюючи суму потенціалів $u_i + v_j$ з відповідними тарифами c_{ij} транспортної таблиці, бачимо, що друга умова оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для всіх незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) виконується, тому знайдений план є оптимальним:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{і } Z_{min} = Z_3 = 375.$$

Оскільки для клітинки A_2B_2: $u_2 + v_2 = 1 + 1 = 2 = c_{22}$, то існує альтернативний план, який знаходиться аналогічно виконаним діям у п 6.1.

6.3. Розв'яжемо транспортну задачу методом потенціалів, розглянувши в якості вихідного опорного плану – план, отриманий ***методом подвійної переваги.***

Отже, перша транспортна таблиця.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 15 +	2 25 –	6	3	$u_2 = -1$
$A_3 = 35$	7 **25 –**	3 + 2	5	4 10	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_1 = 425$

Розв'язування задачі запишемо в компактному вигляді.

Оскільки кількість заповнених клітинок **6** і дорівнює значенню виразу $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$, то опорний план невироджений. Перевіримо його на оптимальність за допомогою методу потенціалів. Потенціали u_i і v_j будемо записувати у відповідних місцях транспортної таблиці.

Визначимо потенціали плану згідно з першою умовою оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ для заповнених клітинок ($x_{ij} > 0$). Візьмемо $u_1 = 0$. Тоді, з транспортної таблиці, розраховуючи послідовно, маємо

$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_3 = c_{34} - v_4 = 4 - 2 = 2,$$
$$v_1 = c_{31} - u_3 = 7 - 2 = 5,$$
$$u_2 = c_{21} - v_1 = 4 - 5 = -1,$$
$$v_2 = c_{22} - u_2 = 2 - (-1) = 3,$$

Перевіримо другу умову оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$). Вона не виконується для клітинки $A_3B_2 : 3 + 2 > 3$. Відповідне порушення $\Delta_{32} = 5 - 3 = 2$.

Отже, клітинка A_3B_2 є потенціальна. Розглянемо цикл перерахування: (3;2), (2;2), (2;1), (3;1). Позначаємо вершини циклу почергово знаками «+» та «–». У вершинах циклу зі знаком «–» вибираємо найменше число, додаємо його у клітинки зі знаком «+» і віднімаємо від чисел у клітинках зі знаком «–».

Оскільки $min\{x_{22}; x_{31}\} = min\{25;25\} = 25$, тобто в двох клітинках одинакові мінімальні значення, то звільняємо ту клітинку, в якій більше значення тарифу, оскільки вона менш вихідна. Так як $c_{22} = 2, c_{31} = 7$, то звільняємо клітинку A_3B_1. Виконавши перерозподіл дістанемо: клітинка A_3B_1 порожня, оскільки з неї забираємо 25 і переносимо його в потенціальну клітинку A_3B_2: $x_{32} = 25$, у A_2B_2: $x_{22} = 25 - 25 = 0$, у $A_2B_1 : x_{21} = 15 + 25 = 40$. Усі інші заповнені клітинки попередньої таблиці, які не входили до циклу, переписуємо у наступну таблицю без змін.

Отже, друга транспортна таблиця має вид:

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j				Потенціали, u_i
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$	
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40	$u_1 = 0$
$A_2 = 40$	4 40	2 0	6	3	$u_2 = 1$
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = 3$	$v_2 = 1$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	$Z_2 = 375$

Для знайденого опорного плану

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

обчислюємо відповідне значення цільової функції

$$Z_2 = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 10 = 375.$$

Перевіримо його на оптимальність згідно теореми оптимальності. Аналогічно, як раніше, з заповнених клітинок таблиці ($x_{ij} > 0$), використовуючи першу умову оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$, визначаємо потенціали плану:

$$u_1 = 0,$$
$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1,$$
$$v_4 = c_{14} - u_1 = 2 - 0 = 2,$$
$$u_3 = c_{31} - v_4 = 4 - 2 = 2,$$
$$v_2 = c_{32} - u_3 = 3 - 2 = 1,$$
$$u_2 = c_{22} - v_2 = 2 - 1 = 1,$$
$$v_1 = c_{21} - u_2 = 4 - 1 = 3.$$

Порівнюючи суму потенціалів $u_i + v_j$ з відповідними тарифами c_{ij} транспортної таблиці, бачимо, що друга умова оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ для всіх незаповнених клітинок ($x_{ij} = 0$) виконується, тому знайдений план є оптимальним:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{і } Z_{опт} = Z_2 = 375.$$

Оскільки для клітинки A_2B_4: $u_2 + v_4 = 1 + 2 = 2 = c_{24}$, то існує альтернативний план, який знаходиться аналогічно виконаним діям у п 6.1.

6.4. Розв'яжемо транспортну задачу методом потенціалів, розглянувши в якості вихідного опорного плану – план, отриманий ***методом апроксимації Фогеля.***

Отже, перша транспортна таблиця.

Постачальники, A_i	Споживачі, B_j			
	$B_1 = 40$	$B_2 = 25$	$B_3 = 20$	$B_4 = 50$
$A_1 = 60$	5	4	1 20	2 40
$A_2 = 40$	4 40	2	6	3
$A_3 = 35$	7	3 25	5	4 10

Розв'язування задачі запишемо в компактному вигляді.

Оскільки кількість заповнених клітинок **5**, але не дорівнює значенню виразу $\boldsymbol{m+n-1=3+4-1=6}$, то опорний план вироджений. У даному випадку потрібно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку клітинку, яка не утворює циклу. Наприклад, заповнимо клітинку $\boldsymbol{A_2B_2}$: $\boldsymbol{x_{22}=0}$.

Постачальники, A_i	B_j				Потенціали, u_i
	$B_1=40$	$B_2=25$	$B_3=20$	$B_4=50$	
$A_1=60$	5	4	1 20	2 40	$u_1=0$
$A_2=40$	4 40	2 **0**	6	3	$u_2=1$
$A_3=35$	7	3 25	5	4 10	$u_3=2$
v_j	$v_1=3$	$v_2=1$	$v_3=1$	$v_4=2$	$Z_1=375$

Визначимо потенціали плану згідно з першою умовою оптимальності $\boldsymbol{u_i+v_j=c_{ij}}$ для заповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij}>0}$). Візьмемо $\boldsymbol{u_1=0}$. Тоді, з транспортної таблиці, розраховуючи послідовно маємо

$$\boldsymbol{u_1=0},$$
$$\boldsymbol{v_3=c_{13}-u_1=1-0=1},$$
$$\boldsymbol{v_4=c_{14}-u_1=2-0=2},$$
$$\boldsymbol{u_3=c_{31}-v_4=4-2=2},$$
$$\boldsymbol{v_2=c_{32}-u_3=3-2=1},$$
$$\boldsymbol{u_2=c_{22}-v_2=2-1=1},$$
$$\boldsymbol{v_1=c_{21}-u_2=4-1=3}.$$

Порівнюючи суму потенціалів $\boldsymbol{u_i+v_j}$ з відповідними тарифами $\boldsymbol{c_{ij}}$ транспортної таблиці, бачимо, що друга умова оптимальності $\boldsymbol{u_i+v_j\le c_{ij}}$ для всіх незаповнених клітинок ($\boldsymbol{x_{ij}=0}$) виконується, тому знайдений план є оптимальним:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{і } Z_{min} = Z_1 = 375.$$

Оскільки для клітинки A_2B_4: $u_2 + v_4 = 1 + 2 = 2 = c_{24}$, то існує альтернативний план, який знаходиться аналогічно виконаним діям у п 6.1.

7. Проаналізувати знайдені початкові опорні плани

№	Початковий опорний план	Початкове значення цільової функції	Кількість етапів для знаходження оптимального плану
1	Метод північно-західного кута	$Z_0 = 595$	5
2	Метод мінімальної вартості	$Z_0 = 445$	3
3	Метод подвійної переваги	$Z_0 = 425$	2
4	Метод апроксимації Фогеля	$Z_0 = 375$	1

У попередньому пункті, за допомогою методу потенціалів, було отримано оптимальний план транспортної задачі з мінімальним значенням цільової функції $Z_{опт} = 375$.

Проаналізуємо значення цільової функції, що були отримані при знаходженні початкового опорного плану транспортної задачі різними методами. Як бачимо, для даного приклада, кожний з наступних методів дає план, ближчий до оптимального, оскільки значення його цільової функції зменшується, а метод апроксимації Фогеля дає оптимальний план. Але на практиці це не завжди так.

Для зменшення кількості розрахунків рекомендується після знаходження початкового опорного плану транспортної задачі різними методами залишити план з найменшим значенням цільової функції і до нього застосувати метод потенціалів.

8. Визначення оптимального плану транспортної задачі засобами оптимізації Microsoft Excel

1. Використовуючи надбудову «ПОИСК РЕШЕНИЙ» визначимо оптимальний план транспортної задачі.

Для її розв’язування заповнюємо відповідну форму в листі пакету Excel (рис. 4.1). Вводимо вихідні дані задачі: матрицю тарифів (C21:F23), матрицю-стовпчик запасів (J27:J29), матрицю-рядок попиту (C33:F50), формули для перевірки збалансованості задачі (J32, I33). Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв’язок задачі (C27:F29), формули для обчислення запасів постачальників (H27:H29), формули для обчислення попиту споживачів (C31:F31), формулу цільової функції (H23) (рис. 4.1):

H23 | =СУММПРОИЗВ(C21:F23;C27:F29)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	5	4	1	2				
22		X2j	4	2	6	3		ЦФ	Напрям	
23		X3j	7	3	5	4		=СУММПРОИЗВ(C21:F23;C27:F29)	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j						=СУММ(C27:F27)	=	60
28		X2j						=СУММ(C28:F28)	=	40
29		X3j						=СУММ(C29:F29)	=	35
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	=СУММ(C27:C29)	=СУММ(D27:D29)	=СУММ(E27:E29)	=СУММ(F27:F29)				
32		Знак	=	=	=	=				=СУММ(J27:J29)
33	Попит	Права частина	40	25	20	50			=СУММ(C33:G33)	Баланс

Рисунок 4.1 – Введення вихідних даних та розрахункових формул

2. В результаті отримаємо початкові дані для розв’язання транспортної задачі (рис. 4.2).

3. Вибираємо ***Данные – Поиск решения***. У діалоговому вікні, що з’явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (H23), напрям оптимізації (***Минимум***), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (C27:F29) та обмеження ($C$27:$F$29=целое, $C$31:$F$31=$C$33:$F$33, $H$27:$H$29=$J$27:$J$29).

За умовою задачі змінні приймають лише невід’ємні значення, тому обов’язково вказуємо це

(☑ Сделать переменные без ограничений неотрицательными) (рис. 4.3):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	5	4	1	2				
22		X2j	4	2	6	3		ЦФ	Напрям	
23		X3j	7	3	5	4		0	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j						0	=	60
28		X2j						0	=	40
29		X3j						0	=	35
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	0	0	0	0				
32		Знак	=	=	=	=				135
33	Попит	Права частина	40	25	20	50			135	Баланс

Рисунок 4.2 – Початкові дані для розв’язання транспортної задачі

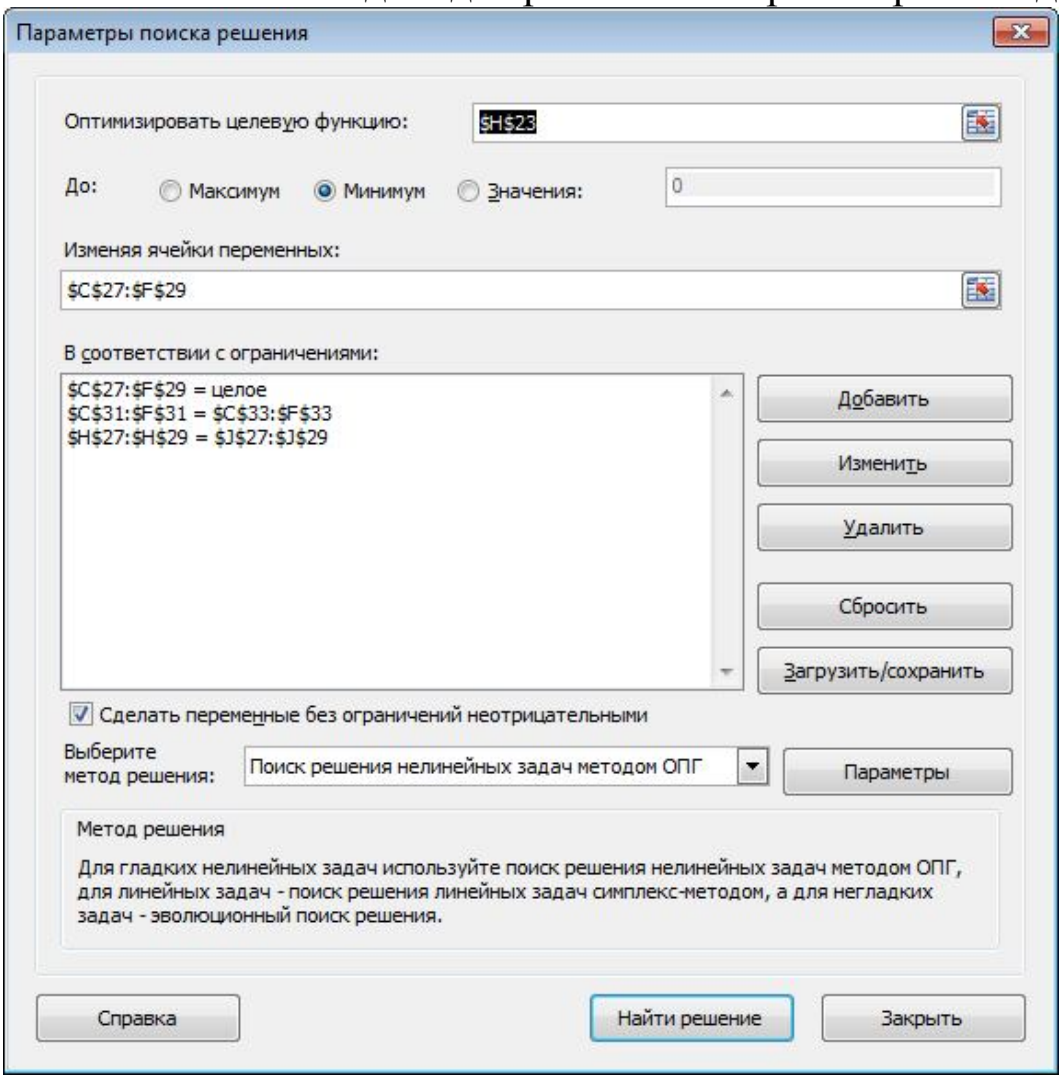

Рисунок 4.3 – Діалогове вікно *«Поиск решения»*

4. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв’язок знайдено. Відповідно в клітинках C27:F29 знаходиться значення оптимального розв’язку, а в клітинці H23 оптимальне значення цільової функції задачі (рис. 4.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
19			МАТРИЦЯ ВАРТОСТІ							
20		Тарифи	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4				
21		X1j	5	4	1	2				
22		X2j	4	2	6	3		ЦФ	Напрям	
23		X3j	7	3	5	4		375	min	
24								Формули		
25			МАТРИЦЯ РОЗВ'ЯЗКУ					обмежень		Запаси
26		Змінні	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4		Ліва частина	Знак	Права частина
27		X1j	0	0	20	40		60	=	60
28		X2j	40	0	0	0		40	=	40
29		X3j	0	25	0	10		35	=	35
30										
31	Формули обмежень	Ліва частина	40	25	20	50				
32		Знак	=	=	=	=				135
33	Попит	Права частина	40	25	20	50			135	Баланс

Рисунок 4.4 – Результати роботи надбудови «Поиск решения»

Отже, оптимальний план транспортної задачі має вигляд

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}, Z_{min} = 375,$$

що підтверджує попередні розрахунки.

Відповідь:

$$X_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 40 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 10 \end{pmatrix}, Z_{min} = 375,$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5
«ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ЗАДАЧІ ЦІЛОЧИСЛОВОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

Мета роботи. Засвоїти методи визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування .

Завдання для самостійної роботи

Задача № 1

Визначити оптимальний план задачі цілочислового програмування методом Гоморі та методом «віток та меж». Результати перевірити засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

1) $F= x_1 + 4x_2 \to \max$ $2x_1 + 4x_2 \le 17$ $10x_1 + 3x_2 \le 15$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	2) $F= 2x_1 + x_2 \to \max$ $x_1 + 2x_2 \le 16$ $x_1 + 2x_2 \ge 2$ $2x_1 + x_2 \le 16$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
3) $F= x_1 + 2x_2 \to \max$ $2x_1 + 2x_2 \le 7$ $4x_1 - 5x_2 \le 9$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	4) $F= 8x_1 + 6x_2 \to \max$ $3x_1 + 5x_2 \le 11$ $4x_1 + x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
5) $F= 8x_1 + 6x_2 \to \max$ $2x_1 + 5x_2 \le 12$ $4x_1 + x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	6) $F= x_1 + 4x_2 \to \max$ $2x_1 + 4x_2 \le 7$ $10x_1 + 3x_2 \le 15$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
7) $F= x_1 + 2x_2 \to \max$ $5x_1 + 7x_2 \le 21$ $-x_1 + 3x_2 \le 8$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	8) $F= 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min$ $2x_1 + 4x_2 \ge 10$ $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 10$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ x_1, x_2, x_3 – цілі

9) $F= x_1 + x_2 \to \max$ $6x_1 + 5x_2 \le 20$ $2x_1 + 3x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	10) $F= x_1 + 2x_2 \to \max$ $2x_1 + 9x_2 \le 36$ $x_1 + x_2 \le 7$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
11) $F= 8x_1 + 6x_2 \to \max$ $2x_1 + 5x_2 \le 11$ $4x_1 + x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	12) $F= x_1 + x_2 \to \max$ $2x_1 + x_2 \le 18$ $x_1 + 2x_2 \le 16$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
13) $F= x_1 + 2x_2 \to \max$ $x_1 + 2x_2 \le 10$ $x_1 + 2x_2 \ge 2$ $2x_1 + x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	14) $F= 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min$ $2x_1 + 4x_2 \ge 10$ $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 8$ $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ x_1, x_2, x_3 – цілі
15) $F= 2x_1 + x_2 \to \max$ $2x_1 + 3x_2 \le 12$ $4x_1 + x_2 \ge 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	16) $F= 2x_1 + 3x_2 \to \max$ $x_1 + 4x_2 \le 14$ $2x_1 + 3x_2 \ge 12$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
17) $F= x_1 + x_2 \to \max$ $3x_1 + 2x_2 \le 5$ $x_2 \le 2$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	18) $F= x_1 + x_2 \to \max$ $20x_1 + 10x_2 \le 75$ $12x_1 + 7x_2 \le 55$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
19) $F= 5x_1 + 3x_2 \to \max$ $3x_1 + 5x_2 \le 15$ $5x_1 + 2x_2 \le 1$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	20) $F= 5x_1 - 3x_2 \to \max$ $3x_1 + 2x_2 \ge 6$ $2x_1 - 3x_2 \ge -6$ $x_1 - x_2 \le 4$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
21) $F= 6x_1 + 4x_2 \to \min$ $2x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - x_2 \ge 1$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	22) $F= 2x_1 + x_2 \to \max$ $2x_1 + 3x_2 \le 11$ $4x_1 + x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі

23) $F= x_1 + x_2 \to \max$ $2x_1 + 11x_2 \le 38$ $x_1 + x_2 \le 7$ $4x_1 - 5x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	24) $F= 4x_1 + 4x_2 \to \max$ $2x_1 + 4x_2 \le 5$ $2x_1 + x_2 \le 9$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
25) $F= 2x_1 - x_2 \to \max$ $2x_1 + x_2 \le 8$ $x_1 + 3x_2 \ge 6$ $3x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	26) $F= x_1 + x_2 \to \max$ $6x_1 + 5x_2 \le 20$ $2x_1 + 3x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
27) $F= 7x_1 - 2x_2 \to \max$ $x_1 + x_2 \le 5$ $2x_1 - 3x_2 \le 6$ $3x_1 + x_2 \ge 2$ $x_1 - x_2 \ge -3$ $x_1, x_2 \ge 0$, x_1, x_2 – цілі	28) $F= x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \min$ $2x_1 + x_2 - x_3 \le 4$ $4x_1 - 3x_2 \le 2$ $-3x_1 + 2x_2 \le 3$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2, x_3 – цілі
29) $F= 6x_1 + 4x_2 \to \min$ $2x_1 + x_2 \ge 3$ $x_1 - x_2 \le 1$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	30) $F= 2x_1 + x_2 \to \max$ $7x_1 + 4x_2 \le 28$ $-x_1 + 2x_2 \le 14$ $5x_1 + 2x_2 \ge 10$ $4x_1 - 3x_2 \le 12$ $x_1, x_2 \ge 0$, x_1, x_2 – цілі
31) $F= 8x_1 + 2x_2 \to \max$ $x_1 - 4x_2 \le 4$ $-4x_1 + x_2 \le 4$ $x_1 + x_2 \le 6$ $x_1, x_2 \ge 0$, x_1, x_2 – цілі	32) $F= 2x_1 + 3x_2 \to \min$ $x_1 + 2x_2 \ge 16$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
33) $F=3x_1+2x_2 \to \max$ $2x_1+3x_2 \le 10$ $2x_1+x_2 \le 5$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі	34) $F=3x_1+2x_2+ \to \max$ $3x_1+8x_2 \le 8$ $x_1+4x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$ x_1, x_2 – цілі
35) $F=4x_1+3x_2-4 \to \max$ $3x_1+5x_2 \le 11$ $4x_1+x_2 \le 10$ $x_1, x_2 \ge 0$, x_1, x_2 – цілі	

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 5

Приклад 5.1

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_1, x_2 - цілі$$

Розв'язання

1. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом Гоморі

1. Запишемо ЗЛП в канонічній формі:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1;4}$$

$$x_j - цілі$$

2. Знаходимо розв'язок послабленої задачі, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних. Симплексна таблиця матиме вигляд (табл. 5.1):

Таблиця 5.1 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	1	4	0	0	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4		
0	1	x_3	0	19/3	2	1	1	0	19/3	$X_0 =$ (0;0;19/3;4/3)
	2	x_4	0	4	1	3	0	1	4/3	
	3	Z, Δ_j		**0**	**-1**	**-4**	**0**	**0**		$\Delta_j \le 0$ **– план неоптимальний**
I	1	x_3	0	5	5/3	0	1	-1/3	19,6	$X_1 =$ (0;4/3;5;0)
	2	x_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	12	
	3	Z, Δ_j		**16/3**	**1/3**	**0**	**0**	**4/3**		$\Delta_j \ge 0$ **– план оптимальний, але не цілочисловий**

3. Оскільки в умовно-оптимальному плані $X_1 = \left(0; \frac{4}{3}\right)$ значення другої змінної $x_2 = \frac{4}{3}$ – дробове число, що не задовольняє початкові умови цілочисловості задачі, то побудуємо для другого рядка симплексної таблиці (табл. 5.1) додаткове обмеження Гоморі виду:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \geq \{b_j\},$$

$$\left\{\frac{1}{3}\right\} x_1 + \{1\} x_2 + \{0\} x_3 + \left\{\frac{1}{3}\right\} x_4 \geq \left\{\frac{4}{3}\right\},$$

$$\frac{1}{3} x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + \frac{1}{3} x_4 \geq \frac{1}{3},$$

$$x_1 + x_4 \geq 1.$$

Приведемо його до канонічної форми за допомогою додаткової балансуючої зміни x_5 та введемо штучну змінну x_6:

$$x_1 + x_4 - x_5 + x_6 = 1.$$

Отримаємо розширену задачу лінійного програмування:

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \frac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_4 - x_5 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1;6}$$

$$x_j - цілі$$

Розв’язання одержаної задачі можна значно спростити, приєднавши здобуте обмеження Гоморі до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом (табл. 5.2):

Таблиця 5.2 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	1	4	0	0	0	-M	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	1	x_3	0	5	5/3	0	1	-1/3	0	0	3	$X_0 =$ (0;4/3;5;0;0)
	2	x_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0	0	4	
	3	x_6	-M	1	$\boxed{1}$	0	0	1	-1	1	1	
	4	Z, Δ_j		**16/3**	**1/3**	**0**	**0**	**4/3**	**0**	**0**	$\Delta_j \le 0$	
	5			**-M**	**-M**	**0**	**0**	**-M**	**M**	**0**	**Опорний план не оптимальний**	
1	1	x_3	0	10/3	0	0	1	-2	5/3	-5/3	19,6	$X_1 =$ (1;1;10/3;0;0)
	2	x_2	4	1	0	1	0	0	1/3	-1/3	12	
	3	x_1	1	1	1	0	0	1	-1	1		
	4	Z, Δ_j		**5**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1/3**	**-1/3**	$\Delta_j \ge 0$	
	5			**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**M**	**Опорний план оптимальний та цілочисловий**	

Оскільки виконується як умова оптимальності так і умова цілочисловості змінних початкових змінних, то знайдений опорний план є оптимальний цілочисловим планом початкової задачі:

$$X_{max} = (1;1), Z_{max} = 5.$$

2. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом «віток та меж»

1. Знаходимо розв'язок послабленої задачі, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних:

$$X_1 = \left(0; \frac{4}{3}\right), \text{ тобто } x_1 = 0;\ x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

2. Отже, допустиме ціле значення x_2 має задовольняти одну з нерівностей $x_2 \le \left[1\frac{1}{3}\right] = 1$ або $x_2 \ge \left[1\frac{1}{3}\right] + 1 = 2$.

Приписавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві не пов'язані між собою задачі:

1 задача

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 - цілі$$

2 задача

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 - цілі$$

3. Розв'язуємо по черзі обидві утворені задачі лінійного програмування.

Задача 1

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 - цілі \end{cases}$$

Розв'язання

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_5 = 1 \\ x_j \ge 0, x_j - цілі; j = \overline{1;5} \end{cases}$$

Розв'язання першої задачі наведено у відповідній симплекс-таблиці (табл. 5.3):

Таблиця 5.3 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	1	4	0	0	0	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	1	x_3	0	19/3	2	1	1	0	0	19/3	$X_0 =$ (0;0;19/3;4;1)
	2	x_4	0	4	1	3	0	1	0	4/3	
	3	x_5	0	1	0	$\boxed{1}$	0	0	1	1	
	4	Z, Δ_j		**0**	**-1**	**-4**	**0**	**0**	**0**	$\Delta_j \le 0$ **– план не оптимальний**	
1	1	x_3	0	16/3	2	0	1	0	-1	8/3	$X_1 =$ **(1;1;10/3;0;0)**
	2	x_4	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	-3	1	
	3	x_2	4	1	0	1	0	0	1	-	
	4	Z, Δ_j		**4**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**4**	$\Delta_j \le 0$ **– план не оптимальний**	
2	**1**	x_3	**0**	**10/3**	**0**	**0**	**1**	**-2**	**5**		$X_2 =$ **(1;1;10/3;0;0)**
	2	x_1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**-3**		
	3	x_2	**4**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**		
	4	Z, Δ_j		**5**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	$\Delta_j \ge 0$ **– план оптимальний та цілочисловий**	

Оскільки виконується як умова оптимальності так і умова цілочисловості змінних, то знайдений опорний план є оптимальним цілочисловим планом початкової задачі:

$$X_{max} = (1;1),\ Z_{max} = 5.$$

Задача 2

$$Z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_2 \ge 2 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$x_1, x_2 - цілі$$

Розв'язання

$$Z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j - цілі;\ j = \overline{1;6}$$

Розв'язання другої задачі наведено у відповідній симплекс-таблиці (табл. 5.4):

Таблиця 5.4 – Симплексна таблиця

N	i	Базис	$C_{баз}$	План	1	4	0	0	0	-M	θ	Базисний опорний план
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
0	1	x_3	0	19/3	2	1	1	0	0	0	19/3	$X_0 =$ (0;0;19/3;4;0;0)
	2	x_4	0	4	1	$\boxed{3}$	0	1	0	0	4/3	
	3	x_6	-M	2	0	1	0	0	-1	1	2	
	4	Z, Δ_j		0	-1	-4	0	0	0	0	$\Delta_j \leq 0$ – план не оптимальний	
	5			-2M	0	-M	0	0	M	0		
I	1	x_3	0	5	5/3	0	1	-1/3	0	0	19,6	
	2	x_2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0	0	12	
	3	x_6	-M	2/3	-1/3	0	0	-1/3	-1	1		
	4	Z, Δ_j		16/3	1/3	0	0	4/3	0	0	$\Delta_j \geq 0$ – план не оптимальний	
	5			-2M/3	M/3	0	0	M/3	M	0		

Оптимального плану не існує, оскільки серед базисних змінних міститься штучна змінна x_6, що не виключається.

Висновок

Для першої задачі (з обмеженням $x_2 \leq 1$) оптимальним буде розв'язок $x_1^1 = 1$, $x_2^1 = 1$, $Z_{max}^1 = 5$, а для другої (з обмеженням $x_2 \geq 2$) – не маємо розв'язку, оскільки серед базисних змінних міститься штучна змінна, що не виключається.

Таким чином, маємо оптимальний план заданої задачі цілочислового програмування $X_{max} = (1;1)$, $Z_{max} = 5$, що співпадає з розв'язком, здобутим за методом Гоморі.

3. Визначення оптимального плану ЗЦЧП засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel*

Побудова оптимального плану засобами оптимізації редактора *Microsoft Excel* виконується аналогічно як у прикладі 1.1, але добавляється умова цілочисловості (рис. 5.1 – 5.4):

D22 | fx =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B22:C22)

	A	B	C	D	E	F
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	2	1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	<=	=19/3
20	2.	1	3	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B20:C20)	<=	4
21					Напрям	
22	**Цільова функція**	**1**	**4**	**=СУММПРОИЗВ(B16:C16;B22:C22)**	max	

Рисунок 5.1 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

D22 | fx =СУММПРОИЗВ(B16:C16;B22:C22)

	A	B	C	D	E	F
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	2	1	0	<=	6,333333
20	2.	1	3	0	<=	4
21					Напрям	
22	**Цільова функція**	**1**	**4**	**0**	max	

Рисунок 5.2 – Початкові дані для розв’язання задачі

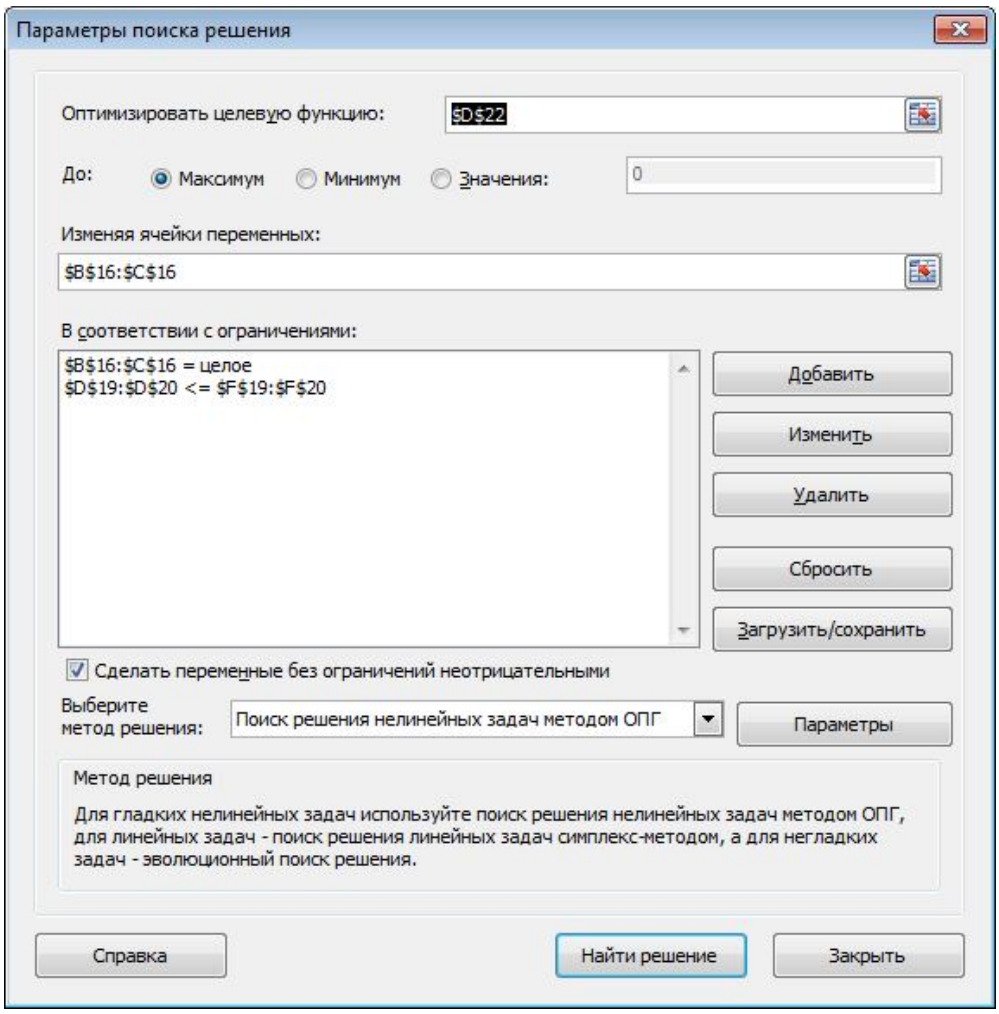

Рисунок 5.3 –Діалогове вікно *«Поиск решения»*

	A	B	C	D	E	F
16	Значення змінних	1	1			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	2	1	3	<=	6,333333
20	2.	1	3	4	<=	4
21					Напрям	
22	**Цільова функція**	**1**	**4**	**5**	max	

Рисунок 5.4 – Оптимальний план задачі

Як бачимо, визначений оптимальний план співпадає з раніше отриманим.

Відповідь: $X_{max} = (1;1)$, $Z_{max} = 5$.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6
«ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

Мета роботи. Засвоїти методи визначення оптимального плану задач дробово-лінійного програмування.

Завдання для самостійної роботи

Задача № 1

Визначити оптимальний план задачі дробово-лінійного програмування графічним та симплексним методом. Результати перевірити засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

1. $Z = \dfrac{5x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to max(min)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 1 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**2.** $Z = \dfrac{x_1 + 3x_2}{-2x_1 + x_2} \to max(min)$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
3. $Z = \dfrac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \to max(min)$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4; \\ -x_1 + 2x_2 \le 6; \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$	**4.** $Z = \dfrac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to max(min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 11 \\ x_1 - x_2 \le 8 \\ -x_1 + 3x_2 \le 9 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$
5. $Z = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to max(min)$ $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$	**6.** $Z = \dfrac{x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to max(min)$ $\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \ge 48 \\ 10x_1 + 5x_2 \le 50 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

7. $Z=\dfrac{x_1+2x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+4x_2\ge 10 \\ 5x_1-2x_2\ge 6 \\ x_1-2x_2\ge -10 \\ x_1\le 11 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	8. $Z=\dfrac{-3x_1+5x_2}{-x_1-4x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} 2x_1+x_2\ge 8 \\ 3x_1-4x_2\ge -10 \\ -x_1-7x_2\le -17 \\ 3x_1+2x_2\le 32 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
9. $Z=\dfrac{2x_1-3x_2}{x_1+4x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1-x_2\ge -2 \\ x_1+x_2\le 10 \\ 3x_1+7x_2\ge 34 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	10. $Z=\dfrac{4x_1+3x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\ge 6 \\ 10x_1+7x_2\le 70 \\ x_1\le 5 \\ x_2\le 4 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
11. $Z=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1+5x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} -4x_1+x_2\le 4 \\ -x_1+2x_2\ge 2 \\ x_1+x_2\le 13 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	12. $Z=\dfrac{-5x_1+2x_2}{3x_1+4x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+4x_2\le 16 \\ 2x_1+3x_2\ge 12 \\ 3x_1+2x_2\le 18 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
13. $Z=\dfrac{x_1+3x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+3x_2\ge 4 \\ 3x_1-x_2\le 6 \\ x_1+x_2\le 3 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	14. $Z=\dfrac{x_1+x_2}{4x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+11x_2\ge 11 \\ 3x_1-x_2\le 28 \\ 5x_1-13x_2\ge 11 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$

15. $Z=\dfrac{2x_1-x_2}{x_1}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\ge 5 \\ 2x_1-x_2\ge 1 \\ x_1-3x_2\le 1 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	16. $Z=\dfrac{3x_1-x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\ge 5 \\ -x_1+3x_2\le 7 \\ 3x_1-x_2\le 11 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
17. $Z=\dfrac{x_1-2x_2}{3x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} 3x_1+x_2\ge 7 \\ -x_1+4x_2\le 5 \\ 4x_1-3x_2\le 17 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	18. $Z=\dfrac{5x_1-3x_2}{x_1+3x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2\ge 12 \\ -x_1+6x_2\le 18 \\ x_1-3x_2\le 3 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
19. $Z=\dfrac{x_1-4x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} 3x_1+5x_2\ge 2 \\ 17x_1+x_2\le 153 \\ 8x_1-14x_2\ge 14 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	20. $Z=\dfrac{x_1+x_2}{2x_1+3x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 9 \\ -x_1-x_2\ge 6 \\ 2x_1-x_2\le 10 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
21. $Z=\dfrac{-5x_1+4x_2}{2x_1+3x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} 2x_1-4x_2\le 12 \\ -x_1+2x_2\le 8 \\ x_1+x_2\ge 10 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	22. $Z=\dfrac{3x_1-2x_2}{x_1+2x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} 2x_1+4x_2\le 16 \\ -4x_1+2x_2\le 8 \\ x_1+3x_2\ge 9 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
23. $Z=\dfrac{x_1+2x_2}{3x_1+2x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} x_1+x_2\le 6 \\ x_1+8x_2\le 8 \\ x_1\ge 1 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	24. $Z=\dfrac{x_1-x_2}{2x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases} 2x_1+4x_2\ge 5 \\ 5x_1-x_2\le 46 \\ 3x_1-5x_2\ge 15 \end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$

25. $Z=\dfrac{-5x_1+4x_2}{-2x_1-3x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}2x_1-4x_2\le 12;\\ -x_1+2x_2\le 8;\\ x_1+x_2\ge 10;\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,2}.\end{cases}$	**26.** $Z=\dfrac{2x_1-3x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}-x_1+2x_2\le 6\\ 9x_1+4x_2\le 56\\ 3x_1+5x_2\ge 4\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
27. $Z=\dfrac{x_1-2x_2}{2x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}x_1+2x_2\le 10\\ x_1+2x_2\ge 2\\ 2x_1+x_2\le 10\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	**28.** $Z=\dfrac{3x_1+4x_2}{x_1+6x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}x_1-x_2\le 1\\ 2x_1+x_2\le 2\\ x_1-x_2\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
29. $Z=\dfrac{x_1+3x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}9x_1+7x_2\le 79\\ 2x_1-5x_2\le 11\\ 2x_1+x_2\ge 40\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	**30.** $Z=\dfrac{x_1-x_2}{2x_1+3x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}-4x_1+6x_2\le 22\\ 11x_1+13x_2\le 146\\ 2x_1-4x_2\le 8\\ x_1+x_2\ge 2\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$
31. $Z=\dfrac{x_1+x_2}{2x_1+3x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}-2x_1+3x_2\le 9\\ x_1+x_2\le 6\\ 2x_1-x_2\le 10\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$	**32.** $Z=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1+x_2}\to max(min)$ $\begin{cases}-x_1+x_2\le 1\\ 3x_1+2x_2\ge 12\\ x_1\le 5\end{cases}$ $x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$

33. $Z = \dfrac{6x_1 + 3x_2}{2x_1 + 4x_2} \to max(min)$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 19 \\ 4x_1 - 9x_2 \geq -41 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 32 \\ -7x_1 + 2x_2 \geq 53 \\ 2x_1 + 16x_2 \geq 53 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	**34.** $Z = \dfrac{x_1 + x_2}{x_2 + 8} \to max(min)$ $\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
35. $Z = \dfrac{x_1 - 4x_2}{x_2 + 4} \to max(min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 5x_1 - 4x_2 \geq -2 \\ 7x_1 + 5x_2 \geq 35 \end{cases}$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 6

Приклад 6.1

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to max(min)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 12; \\ 2x_1 - x_2 \leq 9; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання

1. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування графічним методам

1. Перший крок згідно з алгоритмом графічного методу полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис. 6.1). Для цього знаходимо для кожної прямої координати двох точок через які вона проходить:

$$(l_1): x_1 + 3x_2 = 12 \Rightarrow A_1(0;4), A_2(6;2);$$

$$(l_2): 2x_1 - x_2 = 9 \Rightarrow B_1(4,5;0), B_2(7;5);$$

$$(l_3): -x_1 + 4x_2 = 8 \Rightarrow C_1(0;2), C_2(4;3).$$

Знайдені точки відкладаємо в системі координат і проводимо відповідні прямі. Кожна з побудованих прямих ділить площину системи координат на дві півплощини. Щоб визначити необхідну півплощину (її напрям позначимо стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному випадку таким зображенням є інша півплощина.

Наприклад, для точки $O(0;0)$ маємо:

$$(l_1): 0 + 3 \cdot 0 \geq 12 \Rightarrow 0 \geq 12 \Rightarrow \textbf{невірна нерівність;}$$

$$(l_2): 2 \cdot 0 - 0 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 9 \Rightarrow \textbf{вірна нерівність;}$$

$$(l_3): -0 + 4 \cdot 0 \leq 8 \Rightarrow 0 \leq 8 \Rightarrow \textbf{вірна нерівність.}$$

Для 1-го обмеження вибираємо ту півплощину, що не включає точку $O(0;0)$, оскільки дане обмеження не справджується, а для 2 і 3 обмеження вибираємо ту півплощину, що включає точку $O(0;0)$. Вибрані півплощини на рисунку позначаємо штрихуванням і відмічаємо їх напрям стрілкою.

Враховуючи умову невід'ємності змінних $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, будемо розглядати тільки перший квадрант системи координат.

Таким чином, переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів, – трикутник ABC (рис. 6.1).

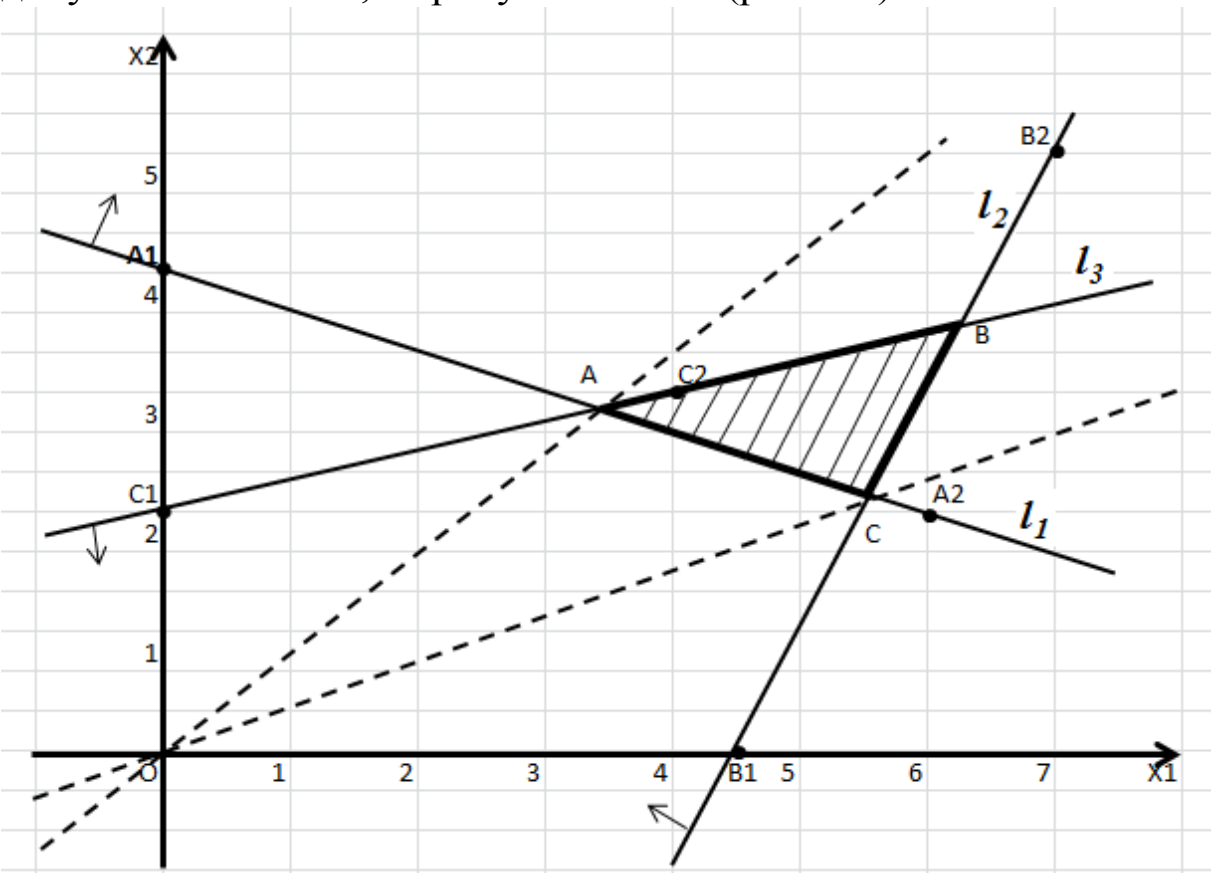

Рисунок 6.1 – Область допустимих планів

2. Побудуємо цільову функцію задачі. Цільова функція являє собою пряму $x_2 = kx_1$ (на рис. 6.1 показана пунктиром), яка обертатиметься навколо початку системи координат залежно від змінюваних параметрів x_1, x_2 так, що точки A і C будуть точками мінімуму і максимуму функції.

Виразимо x_2 із цільової функції:

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2},$$

$$Zx_1 + Zx_2 = 3x_1 + 2x_2,$$

$$Zx_2 - 2x_2 = 3x_1 - Zx_1,$$

$$x_2(Z-2) = x_1(3-Z)$$

$$x_2 = \frac{3-Z}{Z-2}x_1.$$

Звідси, кутовий коефіцієнт цільової функції $k(Z) = \dfrac{3-Z}{Z-2}$.

3. Дослідимо поведінку кутового коефіцієнта $k(Z)$ залежно від значень Z. Розглянемо похідну:

$$k' = \frac{dk}{dZ} = \left(\frac{3-Z}{Z-2}\right)' = \frac{(3-z)'(Z-2)-(Z-2)'(3-Z)}{(Z-2)^2} =$$

$$= \frac{-1(Z-2)-1(3-Z)}{(Z-2)^2} = -\frac{1}{(Z-2)^2}.$$

Знаменник похідної завжди додатній, а чисельник від Z не залежить. Звідси похідна має постійний знак і при збільшенні значення Z кутовий коефіцієнт буде тільки зростати або тільки спадати, а пряма $x_2 = kx_1$ буде обертатися в одну сторону. Якщо $k' > 0$, то пряма $x_2 = kx_1$ обертається проти годинникової стрілки, а якщо $k' < 0$ – за годинниковою стрілкою.

Для нашої задачі $k' < 0$, тому функція $k(Z)$ є спадною, її графік обертатиметься навколо початку координат за годинниковою стрілкою. Тому перша точка області допустимих планів A – точка мінімуму, а остання точка C – точка максимуму.

4. Обчислимо координати цих точок та значення цільової функції у них. Оскільки вони є точками перетину відповідних прямих: $A = l_1 \cap l_3$, $C = l_1 \cap l_2$, то розв'язавши відповідні системи рівнянь, наприклад, за формулами Крамера, отримаємо:

Для точки A:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 12 \\ -x_1 + 4x_2 = 8 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-3) = 7;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 24 = 24;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - (-12) = 20.$$

Звідси,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{7}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{7}.$$

Отже, координати $A\left(\frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right)$.

Для точки C:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 12 \\ 2x_1 - x_2 = 9 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 27 = -39;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 24 = -15.$$

Звідси,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{39}{7}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{15}{7}.$$

Отже, координати точки $C\left(\frac{39}{7}; \frac{15}{7}\right)$.

Знайдемо значення цільової функції в цих точках:

$$Z_A = \frac{3 \cdot \frac{24}{7} + 2 \cdot \frac{20}{7}}{\frac{24}{7} + \frac{20}{7}} = \frac{112}{44} \approx 2{,}545,$$

$$Z_C = \frac{3 \cdot \frac{39}{7} + 2 \cdot \frac{15}{7}}{\frac{39}{7} + \frac{15}{7}} = \frac{147}{54} \approx 2{,}722;$$

Результати $(Z_C > Z_A)$ підтверджують, що екстремальні значення знайдено правильно: максимум досягається в точці C, а мінімум – у точці A.

Отже,

$$X_{min} = \left(\frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right),\ Z_{min} = 2{,}545,$$

$$X_{max} = \left(\frac{39}{7}; \frac{15}{7}\right),\ Z_{max} = 2{,}722.$$

2. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування симплексним методам

$$Z = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2} \to max(min)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 12; \\ 2x_1 - x_2 \leq 9; \\ -x_1 + 4x_2 \leq 8; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

1. Зведемо початкову задачу до задачі лінійного програмування. Позначимо $\frac{1}{y_0} = x_1 + x_2$, де $y_0 > 0$. Введемо нові змінні: $y_1 = y_0 x_1$, $y_2 = y_0 x_2$, тоді $x_1 = \frac{y_1}{y_0}$, $x_2 = \frac{y_2}{y_0}$.

Виконаємо відповідні підстановки та домножимо систему обмежень задачі на y_0. Отримаємо задачу лінійного програмування:

$$Z = \frac{3\dfrac{y_1}{y_0} + 2\dfrac{y_1}{y_0}}{\dfrac{1}{y_0}} = 3y_1 + 2y_2 \to max(min)$$

за умов

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 - 12y_0 \geq 0; \\ 2y_1 - y_2 - 9y_0 \leq 0; \\ -y_1 + 4y_2 - 8y_0 \leq 0 \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_0 \geq 0.$$

2. Розв'яжемо отриману задачу лінійного програмування симплекс-методом, або засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

Для задачі на мінімум отримаємо (рис. 6.2, рис. 6.3):

E24 fx =СУММПРОИЗВ(B16:D16;B24:D24)

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y0			
16	Значення змінних						
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1	1	3	-12	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B19:D19)	>=	0
20	2	2	-1	-9	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B20:D20)	<=	0
21	3	-1	4	-8	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B21:D21)	<=	0
22	4	1	1	0	=СУММПРОИЗВ($B$16:$D$16;B22:D22)	=	1
23						Напрям	
24	**Цільова функція**	**3**	**2**	**0**	**=СУММПРОИЗВ(B16:D16;B24:D24)**	min	
25							
26	***Відповідь:***	X1	X2			Zmin =	=E24
27		=B16/$D$16	=C16/$D$16				

Рисунок 6.2 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y0			
16	Значення змінних	6/11	5/11	7/44			
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1	1	3	-12	0	>=	0
20	2	2	-1	-9	-1	<=	0
21	3	-1	4	-8	0	<=	0
22	4	1	1	0	1	=	1
23						Напрям	
24	**Цільова функція**	**3**	**2**	**0**	**2,545457**	min	
25							
26	***Відповідь:***	X1	X2			Zmin =	2,545457
27		3 3/7	2 6/7				

Рисунок 6.3 – Оптимальний план задачі на мінімум

Звідси, отримаємо оптимальний план перетвореної задачі:

$$y_1 = \frac{6}{11},\ y_2 = \frac{5}{11},\ y_0 = \frac{7}{44}.$$

Враховуючи, що $x_j = \frac{y_j}{y_0}$, визначимо оптимальний план початкової задачі на мінімум:

$$x_1 = \frac{\frac{6}{11}}{\frac{7}{44}} = \frac{24}{7},\ x_2 = \frac{\frac{5}{11}}{\frac{7}{44}} = \frac{20}{7},$$

тобто

$$X_{min} = \left(\frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right),\ Z_{min} = 2{,}545.$$

Для задачі на максимум маємо (рис. 6.4):

	A	B	C	D	E	F	G
15	Змінні	Y1	Y2	Y0			
16	Значення змінних	13/18	5/18	7/54			
17							
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Знак	Права частина
19	1	1	3	-12	0	>=	0
20	2	2	-1	-9	0	<=	0
21	3	-1	4	-8	-1	<=	0
22	4	1	1	0	1	=	1
23						Напрям	
24	**Цільова функція**	**3**	**2**		**2,722225**	max	
25							
26	***Відповідь:***	X1	X2			Zmin =	2,722225
27		5 4/7	2 1/7				

Рисунок 6.4 – Оптимальний план задачі на максимум

Звідси отримаємо оптимальний план перетвореної задачі:

$$y_1 = \frac{13}{18},\ y_2 = \frac{5}{18},\ y_0 = \frac{7}{54}.$$

Тоді, оптимальний план початкової задачі на максимум:

$$x_1 = \frac{\frac{13}{18}}{\frac{7}{54}} = \frac{39}{7},\ x_2 = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{7}{54}} = \frac{15}{7},$$

тобто

$$X_{max} = \left(\frac{39}{7}; \frac{15}{7}\right),\ Z_{max} = 2{,}722.$$

Як бачимо, отримані оптимальні плани симплексним методом співпадають з результати графічного методу.

3. Визначення оптимального плану вихідної задачі дробово-лінійного програмування засобами оптимізації табличного редактора Microsoft Excel

Використовуючи надбудову **«ПОИСК РЕШЕНИЯ»** визначимо оптимальний план вихідної задачі.

1. Оскільки цільова функція задачі дробова, а система обмежень лінійна, то маємо задачу дробово-лінійного програмування.

Для її розв'язування заповнюємо відповідну форму в листі пакету Excel (рис. 6.5). Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв'язок задачі (B16:C16). Вводимо вихідні дані задачі: матрицю коефіцієнтів системи обмежень (B19:C21), знаки обмежень (E19:E21), стовпчик вільних членів системи обмежень (F19:F21), формули лівої частини кожного обмеження (D19:D21) та формулу цільової функції (D23). За умовою цільова функція задачі дробово-лінійна, тому для уникнення ділення на нуль в якості початкових значень x_1, x_2 розглянемо довільні ненульові їх значення, наприклад 1 (рис.6.5):

D23 | fx | =(3*B16+2*C16)/(B16+C16)

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	1	1			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	3	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	>=	12
20	2.	2	-1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B20:C20)	<=	9
21	2.	-1	4	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B21:C21)	<=	8
22					Напрям	
23	**Цільова функція**			**=(3*B16+2*C16)/(B16+C16)**	max	

Рисунок 6.5 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

2. Вибираємо ***Данные – Поиск решения***. У діалоговому вікні, що з'явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (D3), напрям оптимізації (***Максимум***), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (B16:C16) та обмеження

($D$19>=$F$19, $D$20:$D$21<=$F$20:$F$21).

За умовою задачі змінні приймають лише невід'ємні значення, тому обов'язково вказуємо це

(☑ Сделать переменные без ограничений неотрицательными) (рис. 6.6):

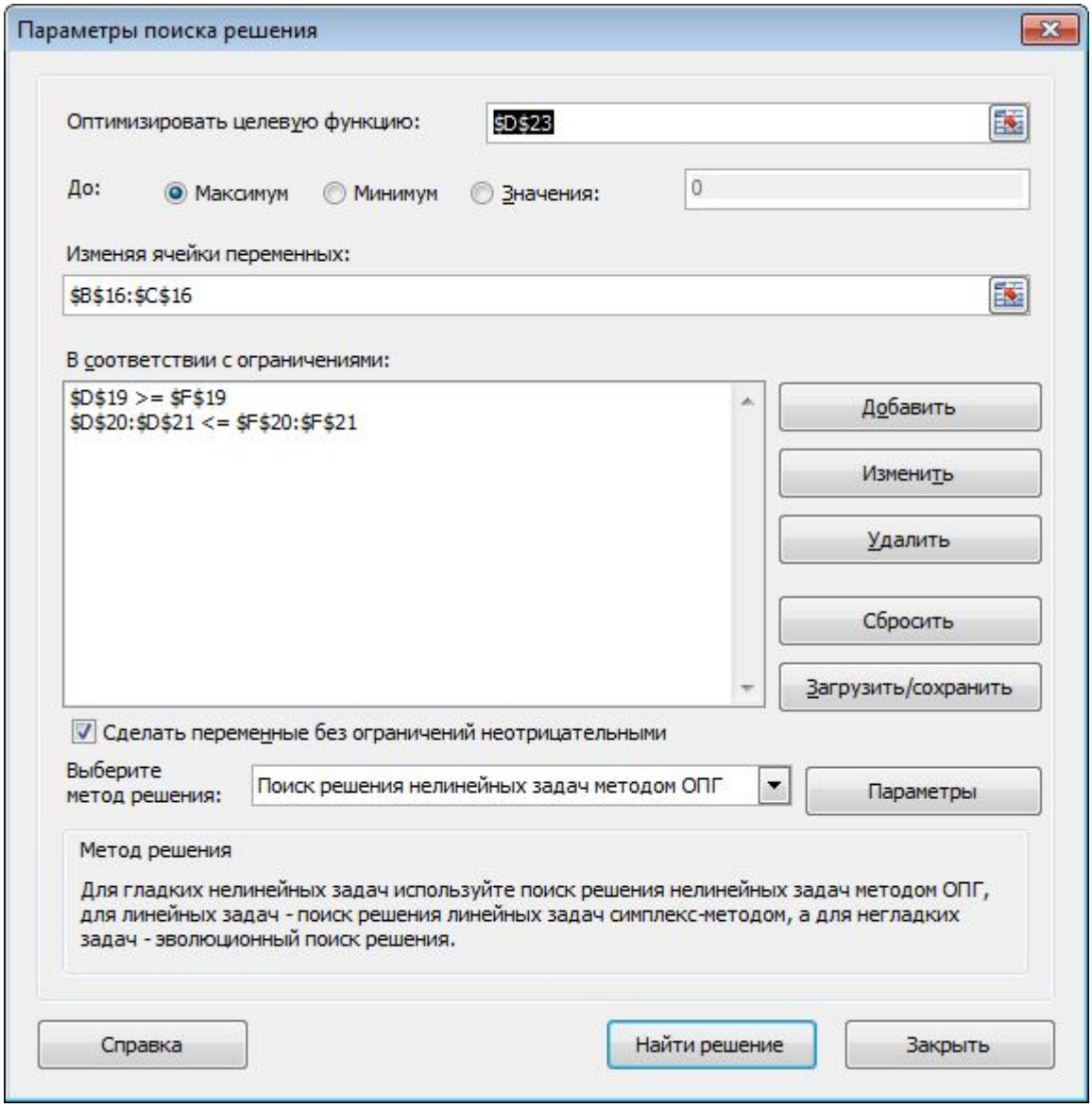

Рисунок 6.6 – Діалогове вікно ***«Поиск решения»***

3. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв'язок знайдено. Відповідно в клітинках B16:C16 знаходиться значення оптимального розв'язку, а в клітинці D23 оптимальне значення цільової функції задачі на максимум (рис. 6.7):

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	5 4/7	2 1/7			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	3	12	>=	12
20	2.	2	-1	9	<=	9
21	2.	-1	4	3	<=	8
22					Напрям	
23	**Цільова функція**			2,722222	max	

Рисунок 6.7 – Оптимальний план задачі дробово-лінійного програмування на максимум

4. Аналогічно визначаємо оптимальний план вихідної задачі на мінімум (рис. 6.8):

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	3 3/7	2 6/7			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	3	12	>=	12
20	2.	2	-1	4	<=	9
21	2.	-1	4	8	<=	8
22					Напрям	
23	**Цільова функція**			2,545455	min	

Рисунок 6.8 – Оптимальний план задачі дробово-лінійного програмування на мінімум

Як бачимо, визначені оптимальні плани співпадають з раніше отриманими.

Відповідь:

$$X_{max} = \left(\frac{39}{7}; \frac{15}{7}\right), \; Z_{max} = 2{,}722,$$

$$X_{min} = \left(\frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right), \; Z_{min} = 2{,}545.$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7
«ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

Мета роботи. Засвоїти методи визначення оптимального плану задач нелінійного програмування.

Завдання для самостійної роботи

Задача № 1

Знайти оптимальний план задачі нелінійного програмування методом множників Лагранжа та використовуючи достатні умови екстремуму функції однієї незалежної змінної. Результати перевірити засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel.*

Варіант	Умова завдання
1.	$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + 5, \quad x_1 + x_2 = 5$
2.	$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2 - 5, \quad x_1 + x_2 = 4$
3.	$f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1 + 4, \quad x_1 + x_2 = 3$
4.	$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2 + 3, \quad x_1 + x_2 = 1$
5.	$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1 + 3, \quad x_1 - x_2 = 5$
6.	$f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_2 - 4, \quad x_1 - x_2 = 4$
7.	$f = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 - 3, \quad x_1 - x_2 = 3$
8.	$f = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 3x_1 + 6, \quad x_1 + x_2 = 2$
9.	$f = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 3x_2 - 6, \quad x_1 - x_2 = 1$
10.	$f = x_1^2 + 4x_2^2 - 3x_1x_2 + 4x_1 + 5, \quad x_2 - x_1 = 5$
11.	$f = 4x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 4x_2 - 5, \quad x_2 - x_1 = 4$
12.	$f = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_1x_2 + 5x_1 + 6, \quad x_2 - x_1 = 3$
13.	$f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2 - 5x_2 - 6, \quad x_2 - x_1 = 2$
14.	$f = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2 - 6x_1 + 7, \quad x_1 - x_2 = -1$
15.	$f = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 6x_2 - 7, \quad x_1 + x_2 = 6$
16.	$f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 7x_1x_2 - 7x_2 - 8, \quad x_2 - x_1 = -7$

17.	$f = x_1^2 + 5x_2^2 - 7x_1x_2 + 7x_1 + 8, \quad x_1 + x_2 = 8$
18.	$f = 5x_1^2 + x_2^2 - 8x_1x_2 + 8x_1 - 8, \quad x_1 + x_2 = 9$
19.	$f = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 - 8x_1 + 9, \quad x_1 - x_2 = 6$
20.	$f = 3x_1^2 + 5x_2^2 - x_1x_2 + 6x_1 - 6, \quad x_1 - x_2 = 7$
21.	$f = 4x_1^2 + 5x_2^2 + x_1x_2 - 6x_2 + 6, \quad x_2 - x_1 = -8$
22.	$f = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 - 5x_1 - 5, \quad x_1 - x_2 = 9$
23.	$f = x_1^2 + 6x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_2 + 5, \quad x_1 - x_2 = -6$
24.	$f = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_1x_2 - 4x_1 - 4, \quad x_2 - x_1 = 7$
25.	$f = 3x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1 + 4, \quad x_2 - x_1 = 8$
26.	$f = 4x_1^2 + 6x_2^2 - 3x_1x_2 + 3x_1 + 5, \quad x_2 - x_1 = 9$
27.	$f = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_2 - 3x_2 - 3, \quad x_1 + x_2 = 10$
28.	$f = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_1x_2 - 2x_2 - 2, \quad x_1 - x_2 = 10$
29.	$f = x_1^2 + 7x_2^2 - 5x_1x_2 + x_1 - 1, \quad x_2 - x_1 = 10$
30.	$f = x_1^2 + 7x_2^2 + 6x_1x_2 - x_2 + 2, \quad x_1 + x_2 = 12$
31.	$f = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 + x_1 + 6, \quad x_1 + x_2 = 7$
32.	$f = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + x_2 - 4, \quad x_1 + x_2 = 5$
33.	$f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 - x_1 + 6, \quad x_1 + x_2 = 4$
34.	$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 - x_2 + 5, \quad x_1 + x_2 = 2$
35.	$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 2x_1 + 1, \quad x_1 - x_2 = 6$

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ № 7

Приклад 7.1

$f=(x_1-2)^2+(x_2-5)^2$ при обмеженнях $x_1+x_2=8$.

Розв'язання

1. Визначення оптимального плану задачі нелінійної програмування методом множників Лагранжа

1. Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1,x_2,\lambda)=(x_1-2)^2+(x_2-5)^2+\lambda_1(8-x_1-x_2).$$

2. Візьмемо частинні похідні від функції Лагранжа і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=2(x_1-2)-\lambda_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=2(x_2-5)-\lambda_1=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1}=8-x_1-x_2=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(8-x_2-2)-\lambda_1=0\\ 2(x_2-5)-\lambda_1=0\\ x_1=8-x_2\end{cases}$$

3. Розв'яжемо систему рівнянь та знайдемо точки, в яких цільова функція може мати екстремум:

$$\begin{cases}-2x_2+12-\lambda_1=0\\ 2x_2-10-\lambda_1=0\\ x_1=8-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x_2-22=0\\ x_1=8-x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=\dfrac{11}{2}\\ x_1=\dfrac{5}{2}\\ \lambda=1\end{cases}$$

Отже, точка $A\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{11}{2}\right)$ є критичною точкою.

4. Дослідимо точку A на тип екстремуму. Обчислимо значення частинних похідних другого порядку та запишемо матрицю Гессе:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=2,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}=0,\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=2,\ H=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

Оскільки $M_1 = 2 > 0$, $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0$, то точка $A\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$ є точкою мінімуму і

$$F_{min} = f(A) = f\left(\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{11}{2} - 5\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Визначення оптимального плану задачі нелінійного програмування за допомогою достатніх умов екстремуму функції однієї незалежної змінної

1. Розглянемо задану функцію

$$f(x_1; x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2$$

при обмеженнях $x_1 + x_2 = 8$ як функцію однієї незалежної змінної. Для цього виразимо з рівняння зв'язку x_2 через x_1 і підставимо у цільову функцію $f(x_1; x_2)$:

$$x_2 = 8 - x_1,$$

$$f(x_1) = (x_1 - 2)^2 + (8 - x_1 - 5)^2 = (x_1 - 2)^2 + (3 - x_1)^2 .$$

2. Дослідимо функцію $f(x_1)$ на безумовний екстремум. Знайдемо критичні точки:

$$f'(x_1) = 2(x_1 - 2) + 2(3 - x_1) \cdot (-1) = 2x_1 - 4 - 6 + 2x_1 = 4x_1 - 10,$$

$$f'(x_1) = 0 \Rightarrow 4x_1 - 10 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Визначимо значення другої похідної в точці x_1:

$$f''(x_1) = (4x_1 - 10)' = 4 > 0.$$

Згідно другої достатньої теореми екстремуму функції маємо, що в точці x_1 – мінімум.

Враховуючи, що $x_2 = 8 - x_1 = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$, маємо $A\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$– точка мінімуму початкової задачі, що підтверджує попередні результати.

3. Перевірка розв'язку засобами оптимізації табличного редактора *Microsoft Excel*

1. Для визначення оптимального плану задачі нелінійного програмування заповнюємо відповідну форму в листі пакету Excel. Вказуємо клітинки в яких буде міститися розв'язок задачі (B16:C16). Вводимо вихідні дані задачі: матрицю-рядок коефіцієнтів обмеження (B19:C19), знак обмеження (E19), стовпчик вільних членів обмеження (F19), формулу лівої частини обмеження (D19) та формулу цільової функції (D23) (рис.7.1):

D21 | fx =(B16-2)^2+(C16-5)^2

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних					
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	=СУММПРОИЗВ($B$16:$C$16;B19:C19)	=	8
20					Напрям	
21	**Цільова функція**			=(B16-2)^2+(C16-5)^2	min	

Рисунок 7.1 – Початкові дані задачі та формули для розрахунків

2. Вибираємо ***Данные – Поиск решения***. У діалоговому вікні, що з'явилося, вказуємо необхідні дані. А саме: цільову клітинку (D21), напрям оптимізації (Мінімум), адреси клітинок в які необхідно помістити кінцеві результати (B16:C16) та обмеження ($D$19=$F$19) (рис. 7.2).

3. Нажимаємо ***Найти решение*** і отримуємо, що розв'язок знайдено. Відповідно в клітинках B16:C16 знаходиться значення оптимального розв'язку, а в клітинці D21 оптимальне значення цільової функції задачі (рис. 7.3).

Як бачимо, оптимальний план отриманий засобами оптимізації *Microsoft Excel* повністю співпадає з раніше отриманими результатами.

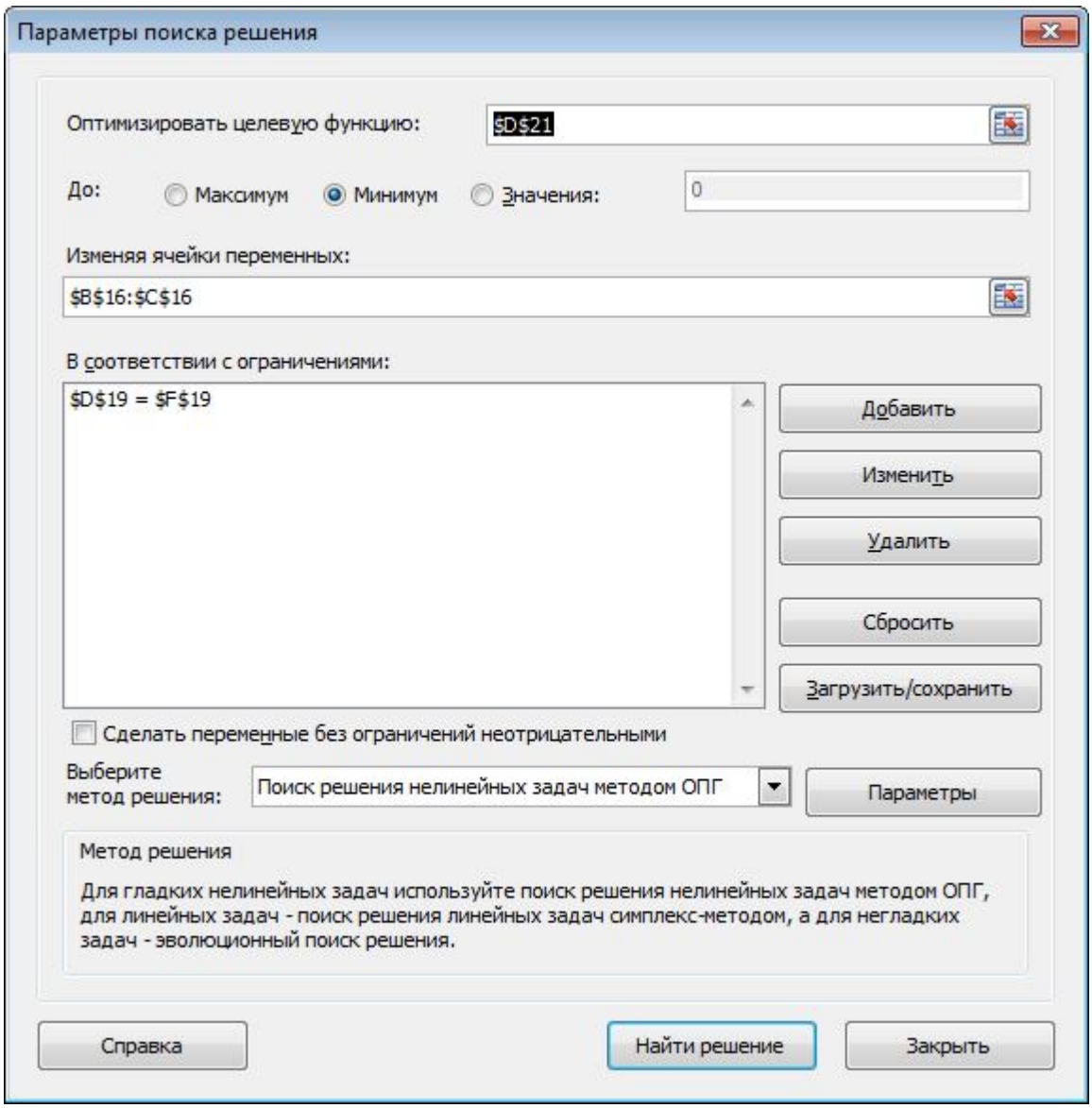

Рисунок 7.2 – Діалогове вікно ***«Поиск решения»***

	A	B	C	D	E	F
15	Змінні	X1	X2			
16	Значення змінних	2,5	5,5			
17						
18	Обмеження	Матриця коефіцієнтів системи обмежень		Ліва частина	Знак	Права частина
19	1.	1	1	8	=	8
20					Напрям	
21	**Цільова функція**			0,5	min	

Рисунок 7.3 – Оптимальний план задачі нелінійного програмування

Відповідь:

$$X_{min}\left(\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right),\ F_{min}=\frac{1}{2}\ .$$

ПИТАННЯ ДЛЯ ПОТОЧНОГО ТА ПІДСУМКОВОГО КОНТРОЛЮ ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ

1. Предмет об’єкт та завдання курсу.
2. Економічна система: параметри, залежні та незалежні змінні.
3. Економічна та математична постановка оптимізаційних задач.
4. Класифікація задач математичного програмування.
5. Застосування методів математичного програмування в економіці.
6. Економічна та математична постановка задачі лінійного програмування.
7. Форми запису задачі лінійного програмування: загальна, канонічна, симетрична.
8. Допустимий, опорний та оптимальний план задачі лінійного програмування.
9. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.
10. Алгоритм графічного методу розв'язання задачі лінійного програмування.
11. Алгоритм симплексного методу розв'язання задачі лінійного програмування.
12. Структура симплексної таблиці. Визначення початкового опорного плану.
13. Теорема про оптимальний план задачі лінійного програмування.
14. Перевірка опорного плану на оптимальність. Перехід до нового опорного плану. Напрямний стовпчик та напрямний рядок. Напрямний елемент.
15. Штучні змінні. Алгоритм методу штучного базису розв’язання задачі лінійного програмування.
16. Алгоритм двоїстого симплекс-методу розв’язання задач лінійного програмування.
17. Основна та двоїста задачі як пара взаємоспряжених задач лінійного програмування.
18. Правила побудови двоїстої задачі лінійного програмування.
19. Економічна інтерпретація двоїстих задач.
20. Аналіз розв’язків лінійних економіко-математичних моделей.
21. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів.
22. Аналіз коефіцієнтів цільової функції. Аналіз коефіцієнтів технологічної матриці для базисних і вільних змінних.

23. Приклади практичного використання двоїстих оцінок у аналізі економічних задач.

24. Економічна і математична постановка транспортної задачі.

25. Транспортна таблиця.

26. Теорема про існування розв'язку транспортної задачі.

27. Зведення незбалансованої транспортної задачі до збалансованої.

28. Метод північно-західного кута побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

29. Метод мінімальної вартості побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

30. Метод подвійної переваги побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

31. Метод апроксимації Фогеля побудови початкового опорного плану транспортної задачі.

32. Алгоритм методу потенціалів.

33. Перевірка опорного плану транспортної задачі на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

34. Перехід від одного опорного плану транспортної задачі до іншого у випадку порушення умов оптимальності.

35. Економічна і математична постановка задачі цілочислового програмування.

36. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом Гоморі.

37. Визначення оптимального плану задачі цілочислового програмування методом «віток та меж».

38. Економічна і математична постановка задачі дробово-лінійного програмування.

39. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування графічний методом.

40. Визначення оптимального плану задачі дробово-лінійного програмування симплексним методом.

41. Економічна і математична постановка задачі нелінійного програмування.

42. Визначення оптимального плану задачі нелінійного програмування графічним методом.

43. Класичний метод оптимізації задач нелінійного програмування на базі використання множників Лагранжа та їх економічна інтерпретація.

КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ ТА РЕЙТИНГОВА ОЦІНКА ЗНАНЬ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ З ДИСЦИПЛІНИ

Оцінювання знань здобувачів вищої освіти під час лабораторних занять та виконання індивідуальних завдань проводиться за такими критеріями:

1) розуміння, ступінь засвоєння теорії та методології проблем, що розглядаються;

2) вміння та навики розв'язувати прикладні економічні задачі.

При оцінюванні індивідуальних завдань увага приділяється також їх правильному оформленню та змістовому наповненню.

При оцінюванні результатів самостійної роботи здобувачів вищої освіти враховується особистий внесок здобувача та коректність висновків.

Рейтингова оцінка знань здобувачів вищої освіти

№ п/п	Форма контролю	Контроль протягом семестру	Максимальна/ мінімальна кількість балів
Змістовий модуль 1. Моделі лінійного програмування			
1.	Аудиторна робота в т.ч.:		
	- лабораторні роботи, опитування	3	9/6
2.	Самостійна робота в т.ч.:		
	- опрацювання теоретичного матеріалу	5	5/3
	- тести для самоконтролю	5	5/3
3.	Модульний тест № 1	1	5/3
	Всього за змістовий модуль	**х**	**24/15**
Змістовий модуль 2. Транспортна задача, моделі цілочислового та нелінійного програмування			
4.	Аудиторна робота в т.ч.:		
	- лабораторні роботи, опитування	4	12/8
5.	Самостійна робота в т.ч.:		
	- опрацювання теоретичного матеріалу	4	4/3
	- тести для самоконтролю	4	4/3
6.	Модульний тест № 2	1	5/3
	Всього за змістовий модуль	х	**25/17**
7	Підсумковий тест	1	7/2

8	Науково-дослідна робота	1	4/2
	Всього	х	**60/36**
9	Екзамен	1	40/24
	Разом по дисципліні		**100/60**

Проміжний контроль знань здійснюється у вигляді атестацій, які проводяться за результатами обов'язкових контрольних заходів, що передбачені навчальною програмою: виконання лабораторних робіт з перевіркою на ПЕОМ, тестування, проведення опитування, виконання індивідуальних розрахунково-графічних робіт, науково-дослідна роботи. В кінці семестру здобувачі вищої освіти складають екзамен з курсу.

Підсумковий контроль знань здійснюється шляхом складання екзамену в письмовій формі. До екзамену допускається здобувачі вищої освіти, які засвоїли теоретичний матеріал, пройшли тестування, виконали згідно з вимогами лабораторні та розрахунково-графічні роботи, відпрацювали пропущенні заняття та набрали не менше 36 балів.

Оцінювання знань здобувачів вищої освіти здійснюється за рейтинговою системою балів. Підсумковий контроль виконується згідно шкали оцінювання.

Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти, та шкала оцінювання – екзамен

Сума балів за всі види освітньої діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою
90 - 100	**A**	**5 (відмінно)**
82 - 89	**B**	**4 (добре)**
75 - 81	**C**	**4(добре)**
64 - 74	**D**	**3 (задовільно)**
60 - 63	**E**	**3 (задовільно)**
35 - 59	**FX**	**не зараховано з можливістю повторного складання 2 (незадовільно)**
0 - 34	**F**	**не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни 2 (незадовільно)**

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Боровик О. В., Боровик Л. В. Дослідження операцій в економіці : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 424 с.

2. Вітлінський В. В., Наконечний С. І., Терещенко Т. О. Математичне програмування : навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. Київ : КНЕУ, 2001. 248 с.

3. Вітлінський В. В., Терещенко Т. О., Савіна С. С. Економіко-математичні методи та моделі: оптимізація : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 303 с.

4. Воронков О. О. Оптимізаційні методи і моделі : конспект лекцій з курсу. Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2016. 110 с.

5. Дослідження операцій в економіці : підруч. / О. І. Черняк та ін. ; ред. О. І. Черняка. Миколаїв : МНАУ, 2020. 398 с.

6. Дослідження операцій : метод рекоменд. для самост. роботи студ. ден. та заоч. форм навчання напряму підготов. / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2014. 98 с.

7. Дослідження операцій : курс лекцій / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 248 с.

8. Дослідження операцій в економіці : підруч. / І. К Федоренко. та ін. ; за ред. І. К. Федоренка, О. І. Черняка. Київ : Знання, 2017. 558 с.

9. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / В. В. Вітлінський та ін. ; за заг. ред. В. В. Вітлінського. Київ : КНЕУ, 2008. 536 с.

10. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / за ред. О. Т. Іващука. Тернопіль : ВПЦ «Економічна думка ТНЕУ», 2008. 704 с.

11. Економіко-математичне моделювання : навч. посіб. / Т. С. Клебанова та ін. Харків : ВД «Інжек», 2012. 352 с.

12. Івченко І. Ю. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : Центр учбової літератури, 2007. 232 с.

13. Катренко А. В. Дослідження операцій : підруч. Львів : Магнолія Плюс, 2015. 352 с.

14. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навч. посіб. Київ : Ліра-К, 2015. 215 с.

15. Математичне програмування. Дослідження операцій : навч. посіб. / А. Ф. Барвінський та ін. Львів : ТОВ «Інтелект-Захід», 2008. 468 с.

16. Математичне програмування : контр. індивід. завд. та метод. реком. для сам. роб. студ. / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2015. 80 с.

17. Математичне програмування : метод. реком. з вивч. дисципліни та виконання контрольних робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 132 с.

18. Математичне програмування : метод. вказівки для самост. роботи з використанням структурно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань з контролем на ПЕОМ для студентів денної та заочної форми навчання економічного факультету спеціальностей 7.050106, 7.050202 / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв, 2003. 99 с.

19. Математичне програмування : метод. вказівки для самост. роботи з використанням структурно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань з контролем на ПЕОМ для студентів денної та заочної форми навчання економічного факультету спеціальностей 7.050106, 7.050202 / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв : МНАУ, 2004. 55 с.

20. Математичне програмування : контрольні завдання та метод. реком. для самост. роботи студентів денної та заочної форм навчання спеціальностей 7.050106, 7.050202, 7.050206 з урахуванням кредитно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв : МНАУ, 2005. 97 с.

21. Математичне програмування : метод. реком. для самост. роботи з використанням кредитно-модульної системи навчання та рейтингової оцінки знань з контролем на ПЕОМ для студ. денної та заочної форми навчання економічного факультету спеціальностей 7.050106, 7.050202, 7.050201 / В. С. Шебанін та ін. Миколаїв : МНАУ, 2005. 47 с.

22. Наконечний С. І., Савіна С. С. Математичне програмування : навч. посіб. Київ : КНЕУ, 2016. 452 с.

23. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. з вивч. дисципліни та виконання контрол. робіт здобувачами вищ. освіти / О. В. Шебаніна та ін. Миколаїв : МНАУ, 2017. 107 с.

24. Оптимізаційні методи та моделі : конспект лекцій для здобувачів вищ. освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 135 с.

25. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання практичних занять і самост. роботи для здобувачів вищ. освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 87 с.

26. Оптимізаційні методи та моделі : метод. реком. до виконання тестових завдань і самост. роботи для здобувачів вищ. освіти освітнього ступеня "Бакалавр" спеціальності 072 "Фінанси, банківська справа та страхування" денної форми навчання / уклад. : О. В. Шебаніна, В. П. Клочан, І. В. Клочан та ін. Миколаїв : МНАУ, 2020. 107 с.

27. Толбатов Ю. А., Толбатов Є. Ю. Математичне програмування : підруч. для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. 432 с.

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Методичні вказівки

Укладачі:

Шебаніна Олена В'ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Клочан Ірина Володимирівна та ін.

Формат 60х84 1/16. Ум. друк. арк. 8,5.
Наклад 50 прим. Зам. № _____

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Георгія Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від
20.02.2013 р.