МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Інженерно-енергетичний факультет

Кафедра вищої та прикладної математики

ВИЩА МАТЕМАТИКА.

МОДУЛЬ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ»:

методичні рекомендації до виконання самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти ступеня «Бакалавр»
спеціальностей 208 «Агроінженерія»,
015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво,
переробка сільськогосподарської продукції та харчові технології)»,
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та
204 «Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва»
денної форми навчання

МИКОЛАЇВ – 2021

УДК 51
В55

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету (протокол № 4 від 20. 12. 2021р.)

Укладачі:

О.В. Бойчук – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
С.І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
Є.Ю. Борчик – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шептилевський – к.ф.-м.н., доцент кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського національного аграрного університету.

Рецензент:
Дармосюк В.М. – доцент кафедри фізики та математики Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського.

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія ймовірностей є складова частина сучасної математики, яка широко застосовується для статистичної обробки результатів в різноманітних дослідах.

В наукових дослідженнях, техніці, метеорології, сільському господарстві та масовому виробництві досить часто зустрічаються досліди, операції та явища, які багатократно повторюються в незмінних умовах. Встановлення закономірностей, яким підпорядковані масові випадкові явища, основується на вивченні статистичних даних – результатах спостережень. Незважаючи на незмінність основного комплексу умов, які в окремих дослідах відтворюються як найретельніше, їхні результати завжди будуть відрізнятися (більше або менше) один від одного, підпорядковуючись певним імовірнісним закономірностям.

Матеріал викладено таким чином, щоб максимально допомогти студентам оволодіти теорією та набути основних навичків розв'язування завдань з теорії ймовірності (модуль випадкові події), зокрема при дистанційній формі навчання.

Для досягнення цієї мети по кожній темі розглянуті приклади розв'язування завдань з поясненнями, також приведені завдання для самостійного розв'язування для засвоєння матеріалу.

Методичні рекомендації створено відповідно до програми курсу «Вища математика» для студентів спеціальностей 208 «Агроінженерія», 015 «Професійна освіта (Аграрне виробництво, переробка сільсько-господарської продукції та харчові технології)», 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка», 204 «Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва», але їх можуть використовувати студенти інших спеціальностей, що вивчають курс «Вища математика».

АЛГЕБРА ПОДІЙ

1. Основні поняття та теореми

Під подією розуміємо таку дію, про яку можна сказати, що вона відбулась, або відбувається, або може відбутись, або неможлива.

Під елементарними подіями (ω) ми розуміємо всі нерозкладні результати даного випробування, які взаємно виключають один одного. Простором елементарних подій (Ω) є множина, елементами якої є всі елементарні події, пов'язані з даним випробуванням.

Випадкова подія називається складеною, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами.

Нехай Ω – довільний простір елементарних подій. Будь-яка підмножина A множини Ω є складеною подією (рис. 1,а). Подія A настане тоді, коли результатом випробування є одна з елементарних подій, які входять в A. Елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, які належать складеній випадковій події A, називають елементарними подіями, які сприяють появі події A.

Розглянемо операції над подіями.

Сумою $A+B$ подій A, B є подія, яка складається з тих елементарних подій, які входять в подію A або в подію B, або і в A, і в B (рис. 1,б).

Згідно з цим означенням, якщо події A відповідає підмножина A простору Ω, а події B – підмножина B, то події $A+B$ відповідає підмножина $A \bigcup B$, яка складається з усіх елементарних подій, які належать *об'єднанню* множин A та B.

Добутком $A \cdot B$ подій A, B є подія, яка складається з тих елементарних подій, які входять в обидві події A та B (рис. 1,в).

Згідно з цим означенням, якщо події A відповідає підмножина A простору Ω, а події B – підмножина B, то події $A \cdot B$ відповідає підмножина $A \bigcap B$, яка складається з усіх елементарних подій, які належать *перетину* множин A та B.

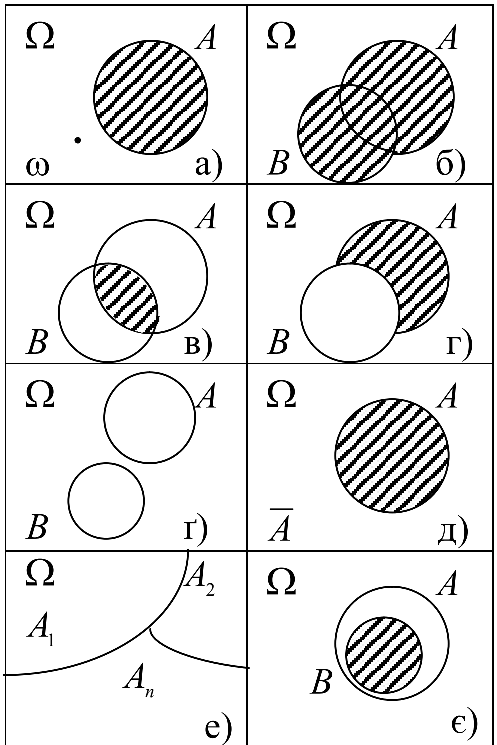


Рис. 1

Різницею $A-B$ подій A, B є подія, яка складається з тих елементарних подій, які входять в подію A і не входять в подію B (рис. 1,г).

Згідно з цим означенням, якщо події A відповідає підмножина A простору Ω, а події B – підмножина B, то події $A-B$ відповідає різниця множин A, B, тобто підмножина $A \setminus B$, яка складається з усіх елементарних подій, які входять до A, але не входять до B.

Події A, B називається несумісними, якщо $A \cdot B = \varnothing$ (рис. 1,ґ).

Події A, B сумісні, якщо $A \cdot B \neq \varnothing$.

Подія $\overline{A}$ називається протилежною до події A, якщо $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ і $A + \overline{A} = \Omega$ (рис. 1,д).

Події A_1, A_2, …, A_n утворюють повну групу несумісних подій, якщо $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ і $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ (рис. 1,е).

Якщо кожна поява події B супроводжується появою події A, то це записують $B \subset A$ або $A \supset B$ і говорять, що подія B викликає подію A, або, що подія A є наслідком події B, або, що подія B є частковим випадком події A. В цьому випадку кожна елементарна подія, що входить у B, міститься і в події A, тобто множина A є підмножиною множини B (рис. 1,є).

Події A, B є рівносильними $B = A$, якщо $A \subset B$ і $A \supset B$.

2. Приклади виконання завдань

1. Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події: 1) A – герб випаде двічі; 2) B – герб випаде тричі і більше.

Розв'язання:

Шуканий простір елементарних подій: Ω = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цциг, ггцц, гццг, гцгц, цгцг, цщгг, цггц, гццц, цгцц, щцгц, цццг, цццц};

1) A = {ггцц, ццгг, гцгц, цгцг, гццг, цггц};

2) B = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг).

2. Задано множину цілих чисел Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати випадкові події: 1) A – узяте число кратне 2; 2) B – кратне 3. Визначити $A+B$; $A \cdot B$; $A-B$.

Розв'язання:

1) A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}; 2) B = {3, 6, 9, 12, 15}.

$A+B$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} ⋃ {3, 6, 9, 12, 15} = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15};

$A \cdot B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \bigcap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\}$;

$A - B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$.

3. Квадрована фігура $\Omega = \{(x; y) : 0 \le x, y \le 4\}$ – простір елементарних подій деякого випробування, а множини $A = \{(x; y) : 0 \le x \le 4; 2 \le y \le 4\}$, $B = \{(x; y) : 3 \le x \le 4; 0 \le y \le 4\}$, $C = \{(x; y) : 1 \le x, y \le 4\}$ – деякі події, пов’язані з цим випробуванням (рис.2, а-г).

Використовуючи зображення A, B, C, геометрично знайти множини подій: 1) $A + B$; 2) $A \cdot C$; 3) $B \cdot C$; 4) $\overline{B} \cdot C$; підтвердити формули 5) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; 6) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

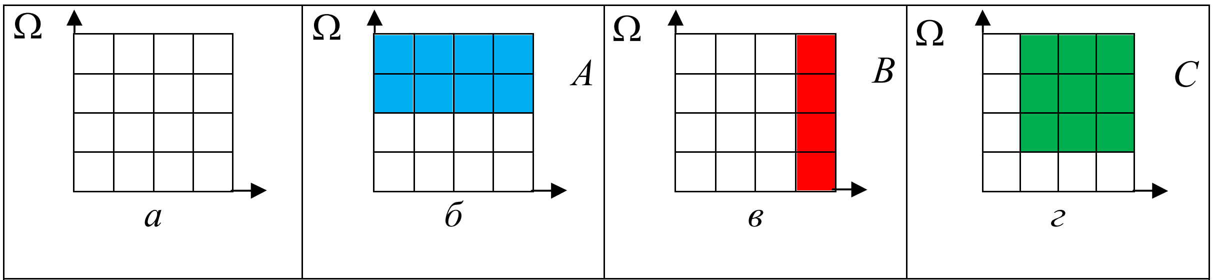


Рис. 2

***Розв’язання*:**

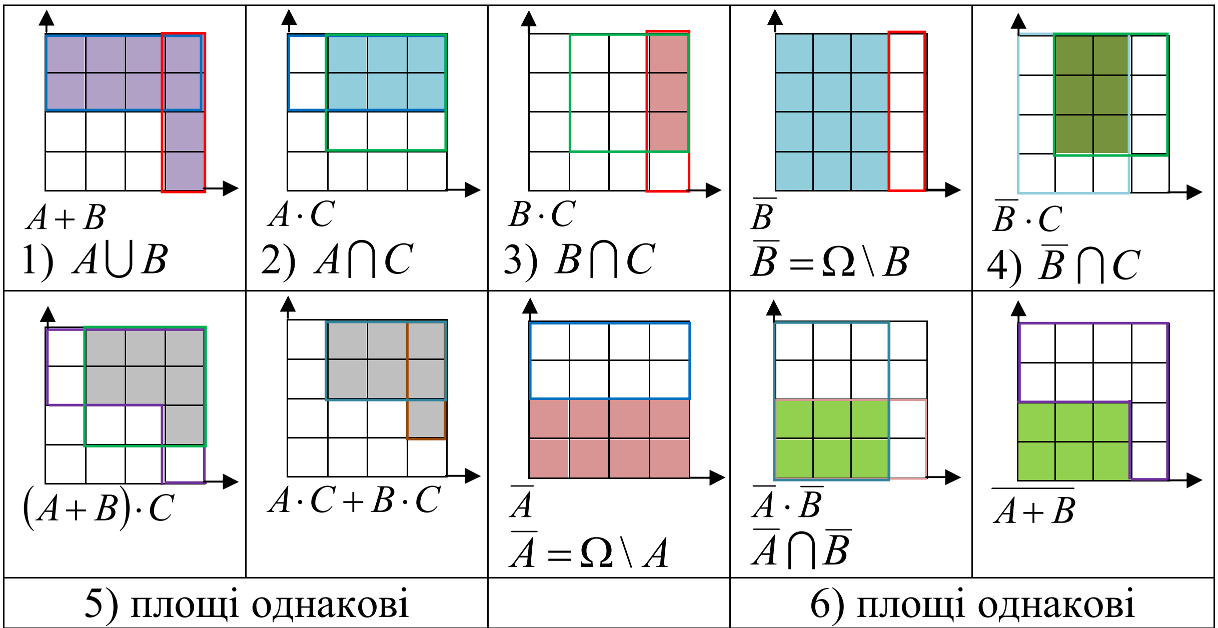


Рис. 3

4. В просторі елементарних подій деякого випробування $\Omega = \{(x; y) : 0 \le x, y \le 4\}$ події, пов’язані з цим випробуванням, задані множинами $A = \{(x; y) : 2 \le x \le 4; 0 \le y \le 4\}$, $B = \{(x; y) : 0 \le x \le 4; 3 \le y \le 4\}$, $C = \{(x; y) : 1 \le x, y \le 4\}$ (рис. 4,а – г).

Застосовуючи зображення A, B, C, геометрично знайти множину події: 1) $A - B$; підтвердити формули 2) $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$; 3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$; 4) $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$; 5) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

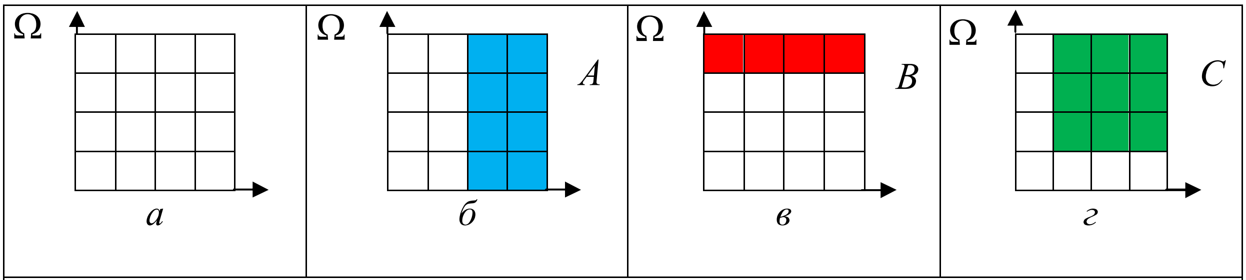


Рис. 4

***Розв'язання*:**

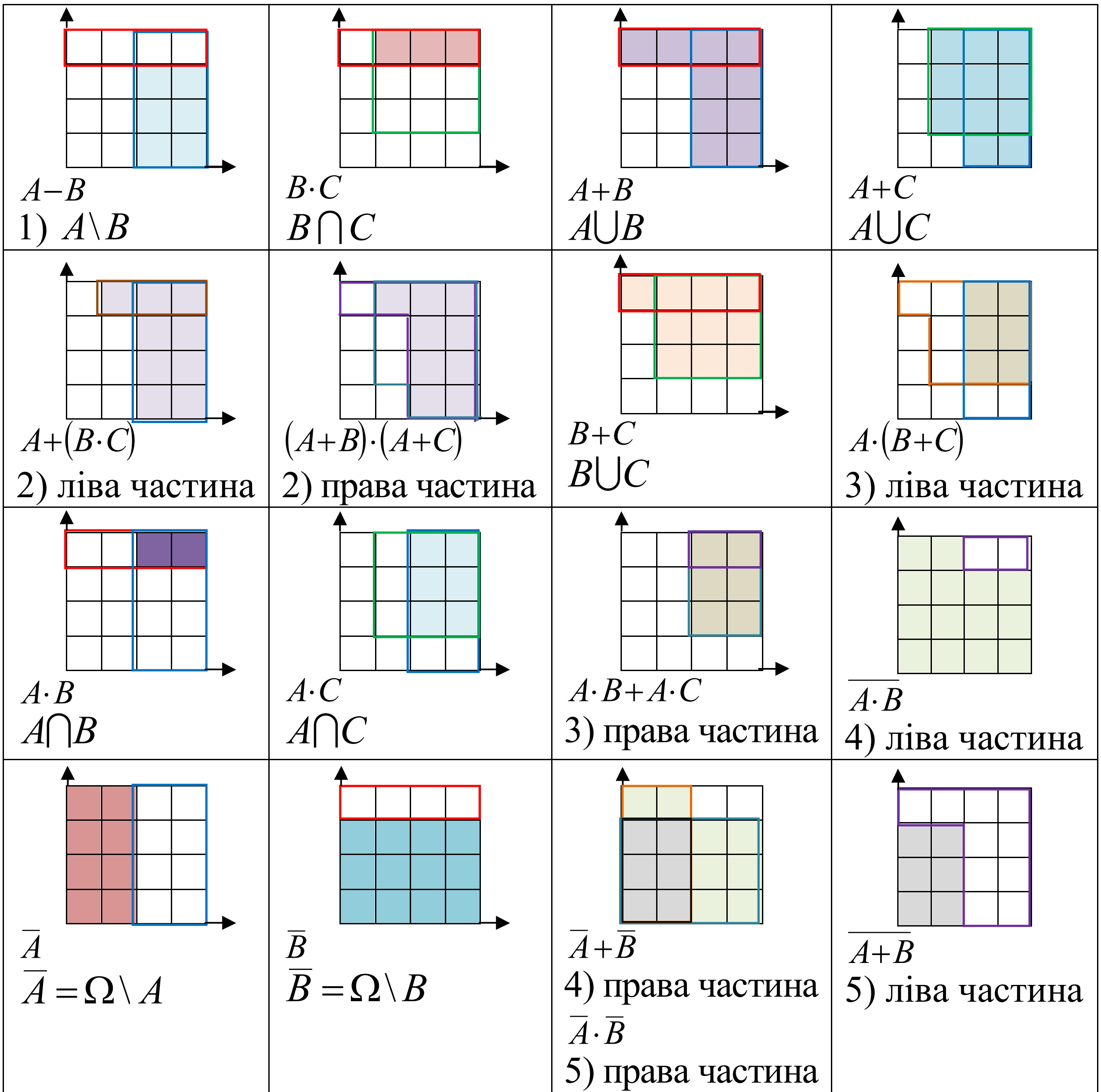


Рис. 5

3. Завдання для самостійного виконання

1. Монету підкидають три рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події: 1) A – герб випаде двічі; 2) B – герб випаде двічі і більше.

2. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25\}$. Навмання з неї беруть одне число. Побудувати множини випадкових подій: 1) A – узяте число кратне 3; 2) B – узяте число кратне кратне 5. Визначити $A+B$; $A \cdot B$; $A-B$.

3. Квадрована фігура $\Omega = \{(x;y): 0 \le x, y \le 4\}$ – простір елементарних подій деякого випробування, а множини $A = \{(x;y): 0 \le x \le 4; 2 \le y \le 4\}$, $B = \{(x;y): 0 \le x \le 3; 0 \le y \le 4\}$, $C = \{(x;y): 1 \le x, y \le 4\}$ – деякі події, пов'язані з цим випробуванням.

Використовуючи зображення квадрованої фігури Ω та множин A, B, C, знайти геометрично множини подій: 1) $A+C$; 2) $A \cdot B$; 3) $B-C$; 4) $B \cdot \overline{A}$; підтвердити формули 5) $A+(B \cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$; 6) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$; 7) $\overline{A \cdot C} = \overline{A} + \overline{C}$; 8) $\overline{A+C} = \overline{A} \cdot \overline{C}$.

ВІДНОСНІ ЧАСТОТИ. ГЕОМЕТРИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ

1. Основні теоретичні відомості

Відносною частотою події A називають відношення кількості випробувань, у яких подія A з'явилась, до загальної кількості проведених випробувань. Тобто відносна частота події A визначається формулою $W(A) = \frac{m}{n}$, де m – кількість фактів появи події A, n – загальна кількість випробувань.

Стійкість відносної частоти – це властивість, яка полягає в тому, що у різних дослідах відносна частота змінюється мало (тим менше, чим більше проведено випробувань), коливаючись біля деякого сталого числа.

Геометрична ймовірність – це ймовірність попадання точки в область (відрізок, частину площини, частину об'єму) $P = \frac{q}{Q}$.

Нехай відрізок довжиною l є частиною відрізка довжиною L. На відрізок довжиною L навмання ставиться точка. Ймовірність попадання точки на відрізок довжиною l визначається рівністю $P = \frac{l}{L}$.

Нехай плоска фігура q площею s є частиною плоскої фігури Q площею S. На фігуру Q навмання ставиться точка. Ймовірність попадання точки на фігуру q визначається рівністю $P = \frac{s}{S}$.

Нехай геометричне тіло g об'ємом v є частиною геометричного тіла G об'ємом V. В тілі G навмання ставиться точка. Ймовірність попадання точки в тіло g визначається рівністю $P=\frac{v}{V}$.

2. Приклади виконання завдань

1. Серед партії з 1000 виробів було виявлено 3 вироба, пошкоджені при перевезенні. Чому дорівнює відносна частота появи пошкодженого виробу?

***Розв'язання*:**

Подія A полягає у появі пошкодженого виробу, $n=1000$, $m=3$. Відносна частота появи події A становить $W(A)=\frac{3}{1000}=0{,}003$.

***Відповідь*:** $0{,}003$.

2. При дослідженні схожості партії насіння нового сорту було виявлено, що з 1000 насінин не зійшло 150. Чому дорівнює відносна частота схожості насіння?

***Розв'язання*:**

Подія A полягає у схожості насіння, $m=1000-150=850$, $n=1000$, $W(A)=\frac{850}{1000}=0{,}85$.

***Відповідь*:** $0{,}85$.

3. При стрільбі з рушниці відносна частота попадання у мішень рівна $0{,}85$. Знайти кількість попадань, якщо зроблено 120 пострілів.

***Розв'язання*:**

Кількість попадань можна знайти за формулою $m=W(A)\cdot n$. Тоді $m=0{,}85\cdot 120=102$.

***Відповідь*:** 102.

4. Для деякої партії насіння відносна частота схожості рівна $0{,}95$. Знайти число насінин, що не зійшли, якщо було посіяно 500 насінин.

***Розв'язання*:**

Подія A полягає у схожості насіння, $n=500$, $W(A)=0{,}95$. Тоді $m=W(A)\cdot n=0{,}95\cdot 500=475$, $n-m=500-475=25$.

***Відповідь*:** 25.

5. На ділянці телефонної лінії довжиною 100 кілометрів виявленно обрив дроту. Яка ймовірність того, що обрив буде виявлено між 10-м та 30-м кілометрами лінії?

***Розв'язання*:**

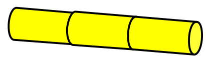
Позначимо L – довжину телефонної лінії, l – довжину ділянки між 10-м та 30-м кілометрами лінії.

$L = 100 км$, $l = 30 - 10 = 20 км$.

Тоді за формулою геометричної ймовірності $P = \frac{l}{L} = \frac{20}{100} = 0{,}2$.

***Відповідь*:** $0{,}2$.

6. Стержень розламано на дві частини у випадковому перерізі. Знайти ймовірність того, що менший з уламків має довжину не більше третини довжини стержня.

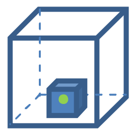


***Розв'язання*:**

Нехай L – довжина стержня. Позначимо x – відстань від перерізу зламу до вибраного кінця стержня. Сприятливими є випадки $x \le \frac{L}{3}$ і $x \ge \frac{2L}{3}$. Тоді $l = \frac{L}{3} + \frac{L}{3} = \frac{2L}{3}$, отже маємо $P = \frac{l}{L} = \frac{2L}{3} \div L = \frac{2}{3}$.

***Відповідь*:** $0{,}6667$.

7. У кубі зі стороною 20 знаходиться куб зі стороною 5. У більшому кубі вибрана довільна точка. Яка ймовірність, що вона знаходиться всередині меншого куба?

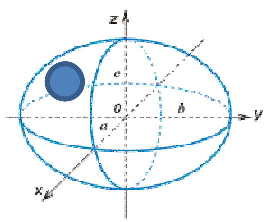


***Розв'язання*:**

Так як $V = 20^3$, $v = 5^3$, то за формулою геометричної ймовірності $P = \frac{v}{V} = \frac{5^3}{20^3} = \frac{1}{4^3}$.

***Відповідь*:** $0{,}0156$.

8. Куля $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ розміщена всередині еліпсоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. Знайти ймовірність того, що поставлена навмання точка всередину елісоїда, опиниться всередині кулі.



***Розв'язання*:**

Ймовірність попадання точки в кулю рівна $P = \frac{v}{V}$, де у даному випадку V – це об'єм еліпсоїда, v – об'єм кулі.

З рівняння кулі $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ знаходимо $r = 1$, тоді об'єм кулі $v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$.

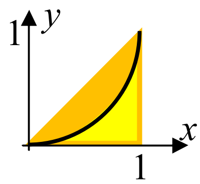
Об'єм еліпсоїда, який має рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, визначається формулою $V=\frac{4}{3}\pi abc$. Так як $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}+\frac{z^2}{4^2}=1$, то $V=\frac{4}{3}\pi\cdot 2\cdot 3\cdot 4=32\pi$.

Тоді $P=\frac{v}{V}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{32\pi}=\frac{1}{24}$.

Відповідь: $0{,}0417$.

9. У трикутнику з вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$ навмання ставиться точка $(x;y)$. Яка ймовірність, що точка буде не вище параболи $y=x^2$?

Розв'язання:



За формулою геометричної ймовірності $P=\frac{s}{S}$, де S – площа прямокутного трикутника, s – площа криволінійного трикутника, обмеженого параболою $y=x^2$, віссю Ox і прямою $x=1$.

Площа прямокутного трикутника рівна $S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$. Площу криволінійного трикутника s знайдемо за допомогою визначеного інтеграла $s=\int\limits_a^b y(x)dx=\int\limits_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$. Тоді $P=\frac{1}{3}\div\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

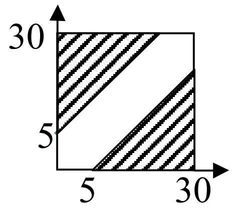
Відповідь: $0{,}667$.

10. У сигналізатор надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного з сигналів рівноможливо у будь-який момент часу. Моменти надходження сигналів не залежать один від одного. Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця в часі між моментами надходження сигналів більше 5 секунд. Знайти ймовірність того, що протягом 30 секунд сигналізатор зафіксує обидва сигнали, якщо кожний з пристроїв надасть тільки один сигнал.

Розв'язання:

Позначимо моменти надходження сигналів від першого та другого пристроїв відповідно x і y. За умовою задачі повинні справджуватись подвійні нерівності $0\le x\le 30$, $0\le y\le 30$. В прямокутній системі координат цим нерівностям задовольняють будь-які точки квадрата з діагоналлю з кінцями $(0;0)$ і $(30;30)$. Цей квадрат – фігура, координати точок якої відображають всі можливі значення моментів надходження сигналів.

Сигналізатор спрацьовує, якщо $|y-x|>5$, тобто при $y-x>5$ або $x-y>5$. Звідки $y>5+x$ або $y<x-5$. Отже, точки, які лежать вище $y=x+5$ і нижче $y=x-5$, утворюють фігуру, координати точок якої відображають всі сприятливі значення моментів надходження сигналів.



Ймовірність спрацювання сигналізатора рівна $P=\frac{s}{S}=\frac{25^2}{30^2}\approx 0{,}6944$.

***Відповідь*:** $0{,}6944$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Серед партії з $(\alpha+10)$ виробів відділ технічного контролю виявив 5 нестандартних виробів. Чому дорівнює відносна частота появи нестандартного виробу?

2. При дослідженні схожості партії насіння нового сорту було виявлено, що з 20α насінин не зійшло 10. Чому дорівнює відносна частота схожості насіння?

3. При випробуванні партії виробів відносна частота появи придатного виробу дорівнює $0{,}8$. Знайти число придатних виробів, якщо було перевірено 10α виробів.

4. Для деякої партії насіння відносна частота схожості дорівнює $0{,}9$. Знайти число насінин, що не зійшли, якщо було посіяно 10α насінин.

5. Після бурі на ділянці між 60-м та 200-м кілометрами телефонної лінії трапився розрив дроту. Яка ймовірність того, що розрив трапився між 80-м та $(80+\alpha)$-м кілометрами лінії?

6. Стержень розламано на дві частини у випадковому перерізі. Знайти ймовірність того, що менший з уламків має довжину не більше $\frac{1}{\alpha+2}$ довжини стержня.

7. У кубі стороною $(\alpha+2)$ знаходиться куля радіусом $\frac{\alpha+1}{2}$. У кубі вибрана навмання точка. Яка ймовірність знаходження точки всередині кулі?

8. Куля $x^2+y^2+z^2=(\alpha+1)^2$ розміщена всередині еліпсоїда $\frac{x^2}{(\alpha+1)^2}+\frac{y^2}{(\alpha+1)^2}+\frac{z^2}{(\alpha+1)^4}=1$. Знайти ймовірність того, що точка, яка ставиться навмання всередину елісоїда, опиниться всередині кулі.

9. У прямокутик з вершинами $(0;0)$, $\left(0;\frac{\alpha^2}{2}\right)$, $(\alpha;0)$, $\left(\alpha;\frac{\alpha^2}{2}\right)$ навмання ставиться точка $(x;y)$. Знайти ймовірність того, що точка буде не вище параболи $y=\frac{x^2}{2}$.

10. У сигналізатор надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного з сигналів рівноможливо у будь-який момент часу. Моменти надходження сигналів не залежать один від одного. Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця в часі між моментами надходження сигналів більше α. Знайти ймовірність того, що за час $(\alpha+20)$ сигналізатор зафіксує обидва сигнали, якщо кожний з пристроїв надасть тільки один сигнал.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

1. Основні теоретичні відомості

При підрахунках кількості елементарних результатів випробування, що утворюють, наприклад, простір елементарних подій, доводиться неодноразово застосовувати формули комбінаторики.

Наведемо їх.

Кількість розміщень з n елементів по k (при цьому порядок елементів відіграє суттєву роль) визначається формулою $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}=(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Наприклад, кількість розміщень по два елемента з п'яти $A_5^2=\frac{5!}{3!}=\frac{3!\cdot4\cdot5}{3!}=20$. Дійсно, розміщення по два елемента з п'яти елементів 11111: 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11, 11.

Розміщення своїм окремим випадком при $k=n$ є перестановкою.

Кількість перестановок з n елементів: $P_n=n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Так, для трьох чисел 1, 2, 3 можна записати такі перестановки: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Кількість перестановок $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$.

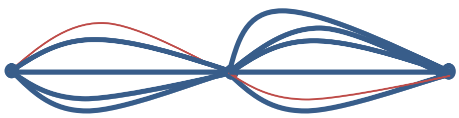
Кількість комбінацій з n елементів по k (при цьому порядок елементів суттєвої ролі не відіграє) визначається формулою $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Наприклад, кількість комбінацій по елемента з п'яти $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2} = 10$. Дійсно, комбінації по три елемента з п'яти елементів 11111: 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111, 111.

Слід пам'ятати, що $0! = 1$, $1! = 1$.

2. Приклади виконання завдань

1. З точки A в точку B можна рухатися п'ятьма шляхами, а з точки B в точку C шістьма шляхами. Скількома різними шляхами можна попасти з точки A через точку B в точку C і назад з точки C через точку B в точку A таким чином, щоб жодного разу не рухатися по пройденому вже шляху?



Розв'язання:

$5\cdot 6\cdot 4\cdot 5 = 30\cdot 20 = 600$ шляхами.

Відповідь: 600.

2. Скількома способами можна вибрати з послідовності чисел $\underbrace{1,\ 2,\ \ldots,\ 6}$, 7, $\underbrace{8,\ \ldots,\ 18,\ 19}$ два числа (при цьому їх порядок відіграє суттєву роль), одне з яких менше 7, а друге більше 7?

Розв'язання:

$6\cdot 12\cdot P_2 = 6\cdot 12\cdot 2! = 144$ способами.

Відповідь: 144.

3. З послідовності чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 потрібно по одному вибрати три числа так, щоб «розташовані в один ряд» вони утворювали різні цілі числа. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання:

$A_{14}^3 = \dfrac{14!}{(14-3)!} = \dfrac{14!}{11!} = \dfrac{11!\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{11!} = 12\cdot 13\cdot 14 = 2184$ способами.

Або $A_{14}^3 = 14\cdot 13\cdot 12 = 2184$ способами.

Відповідь: 2184.

4. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на 110592 кубиків однакового розміру. Скільки кубиків мають дві пофарбовані грані?

Розв'язання:

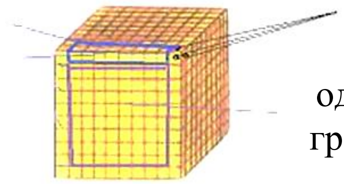
$\sqrt[3]{110592} = 48$ – це кількість кубиків вздовж одного ребра.

$12\cdot(48-2) = 552$ кубики, що мають дві пофарбовані грані (12 ребер куба, $(48-2)$ кубиків з двома пофарбованими гранями вздовж одного ребра).

Відповідь: 552.

Додаток:

$6 \cdot 46^2 = 12696$ кубиків з однією пофарбованою гранню (6 граней куба, 46^2 кубиків з однією пофарбованою гранню на одній грані);



8 кубиків з трьома пофарбованими гранями;

$46^3 = 97336$ кубиків з НЕпофарбованими гранями.

5. В ящику знаходиться 35 деталей, з яких 27 стандартні. Скількома способами можна взяти 28 деталей так, щоб три з них були нестандартні?

***Розв'язання*:**

В ящику $\underset{всі}{35} = \underset{стандарт}{27} + \underset{нестандарт}{8}$. Витягуєм $\underset{всі}{28} = \underset{стандарт}{25} + \underset{нестандарт}{3}$.

Кількість способів $C_{27}^{25} \cdot C_8^3 = \dfrac{27!}{25! \cdot 2!} \cdot \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = \dfrac{25! \cdot 26 \cdot 27}{25! \cdot 2} \cdot \dfrac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 5!} = 19656$.

***Відповідь*:** 19656.

3. Завдання для самостійного виконання

1. З міста A в місто B ведуть $(\alpha + 4)$ дороги, а з міста B в місто C ведуть $(\alpha + 3)$ дороги. Скількома різними шляхами можна здійснити подорож з міста A в місто C через місто B?

2. З точки K в точку L можна рухатися $(\alpha + 5)$ шляхами, а з точки L в точку M $(\alpha + 8)$ шляхами. Скількома різними шляхами можна попасти з точки K в точку M і назад, з точки M в точку K, через точку L таким чином, щоб жодного разу не рухатися по вже пройденому вже шляху?

3. Скількома способами можна вибрати два різних числа (при цьому їх порядок відіграє суттєву роль) з послідовності чисел 1, 2, …, α, …, $(\alpha + 9)$?

4. Скількома способами можна вибрати з послідовності чисел 1, …, α, …, $(3\alpha + 18)$ два числа (при цьому їх порядок відіграє суттєву роль), одне з яких менше $(\alpha + 7)$, а друге більше $(\alpha + 7)$?

5. Скількома способами можна вибрати з послідовності чисел 1, 2, …, α, …, $(2\alpha + 9)$ два різних числа (їх порядок не відіграє ролі), одне з яких менше $(\alpha + 6)$, а друге більше $(\alpha + 6)$?

6. З послідовності чисел 1, 2, …, α, …, $(\alpha + 15)$ потрібно по одному вибрати три числа так, щоб «розташовані в один ряд» вони утворювали різні цілі числа. Скількома способами можна це зробити?

7. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на $\left[\alpha^2(\alpha+15)+25(3\alpha+5)\right]$ кубиків однакового розміру. Скільки кубиків мають дві пофарбовані грані?

8. У вазі стоять 10 червоних і $(\alpha+4)$ рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати три квітки з вази?

9. З вази, де стоять 10 червоних і $(\alpha+4)$ рожевих гвоздик, вибирають одну червону і дві рожеві квітки. Скількома способами це можна зробити?

10. В ящику знаходиться $(2\alpha+15)$ деталей, з яких $(\alpha+6)$ нестандартні. Скількома способами можна взяти $(\alpha+9)$ деталей таким чином, щоб $(\alpha+7)$ з них були стандартні?

КЛАСИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ

1. Основні теоретичні відомості

Подія може відбутися чи не відбутися, якщо буде здійснена одна і та ж деяка сукупність умов, або інакше, якщо буде «проведено випробування». Наприклад, «постріл по мішені» – це випробування, «попадання в мішень» чи «непопадання в мішень» – це події A, B.

Події, які ми спостерігаємо або вивчаємо, можна розділити на три види: вірогідні, неможливі та випадкові.

Вірогідною називається подія, яка обов'язково відбудеться при проведенні випробування.

Неможливою називається подія, яка ніколи не відбудеться при проведенні випробування.

Випадковою називається подія, яка при проведенні випробування може або відбутися, або не відбутися. Наприклад, при одному пострілі «влучення в мішень» – випадкова подія.

Події називають *єдиноможливими*, якщо поява в результаті випробування однієї і тільки однієї з них є вірогідна подія. Наприклад, при підкиданні грального кубика якась одна (і тільки одна) його грань з відповідною кількістю очок (від одного до шести) обов'язково буде зверху.

Єдиноможливі події попарно несумісні.

Події називають *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що ні одна з цих подій не є більш можливою, ніж інші. Наприклад, поява того чи іншого числа очок на кинутому гральному кубику є події рівноможливі.

Єдиноможливі та рівноважливі події утворюють простір елементарних подій.

Згідно з класичним означенням ймовірністю події A називається невід'ємне число $P(A)$, що визначається формулою $P(A)=\dfrac{m_A}{n_A}$, де m_A – число елементарних результатів випробування, сприятливих для появи події A, n_A – число всіх єдиноможливих та рівноважливих елементарних результатів випробування.

З класичного означення ймовірності випливають наступні її властивості:

- ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці (дійсно, якщо подія вірогідна, то кожний елементарний результат випробування буде сприятливим для появи цієї події, тобто $m_A=n_A$ і тому $P(A)=1$);
- ймовірність неможливої події рівна нулю (дійсно, якщо подія неможлива, то ні один з елементарних результатів випробування не буде сприятливим для появи цієї події, тобто $m_A=0$ і тому $P(A)=0$);
- ймовірність випадкової події є додатнім числом, яке знаходиться між нулем і одиницею (дійсно, для випадкової події сприятливими будуть тільки деякі із загального числа елементарних результатів випробування, тобто $0<m_A<n_A$ і тому $0<P(A)<1$).

Таким чином, ймовірність будь-якої події задовольняє подвійну нерівність $0\le P(A)\le 1$.

2. Приклади виконання завдань

1. З послідовності чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 192,\ 193$ вибирають два числа (при цьому їх порядок має важливе значення). Знайти ймовірність того, що записавши їх «в один ряд», одержимо парне число.

***Розв'язання*:**

$m=96\cdot 192$, бо кінцеве число має бути парним, а для вибору початкового числа залишається 192 варіанта; $n=A_{193}^2=\dfrac{193!}{191!}=193\cdot 192$.

Тоді $P=\dfrac{m}{n}=\dfrac{96\cdot 192}{192\cdot 193}\approx 0{,}4974$.

***Відповідь*:** $0{,}4974$.

2. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на 175616 кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішали. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кубик, буде мати тільки одну пофарбовану грань.

***Розв'язання*:**

$n = 175616$; $\sqrt[3]{175616} = 56$ – кількість кубиків вздовж одного ребра, $m = 6 \cdot (56-2)^2 = 17496$ – кількість кубиків, що має тільки одну пофарбовану грань.

$$P = \frac{m}{n} = \frac{17496}{175616} \approx 0{,}0996.$$

***Відповідь*:** $0{,}0996$.

3. В урні знаходиться 19 білих та 16 чорних куль. З урни дістали відразу дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть однакового кольору.

***Розв'язання*:**

$$n = C_{35}^2 = \frac{35!}{2!(35-2)!} = \frac{35!}{2! \cdot 33!} = 595;$$

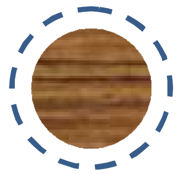
$$m = C_{19}^2 + C_{16}^2 = \frac{19!}{2!(19-2)!} + \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{19!}{2! \cdot 17!} + \frac{16!}{2! \cdot 14!} = 291;$$

$$P = \frac{m}{n} = \frac{291}{595} \approx 0{,}4891.$$

***Відповідь*:** $0{,}4891$.

4. За круглий стіл випадковим чином сідають 69 людей. Знайти ймовірність того, що дві певні особи A та B сидітимуть поруч.

***Розв'язання*:**



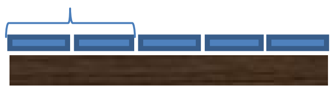
$n = P_{69} = 69!$; $m = P_2 \cdot P_{67} \cdot 69 = 2! \cdot 67! \cdot 69$.

$$P = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 67! \cdot 69}{69!} = \frac{2! \cdot 67! \cdot 69}{67! \cdot 68 \cdot 69} = \frac{2}{68} \approx 0{,}0294.$$

***Відповідь*:** $0{,}0294$.

5. На лаву випадковим чином сідають 80 людей. Знайти ймовірність того, що дві певні особи M та N сидітимуть поруч.

***Розв'язання*:**



$n = P_{80} = 80!$; $m = P_2 \cdot P_{78} \cdot 79 = 2! \cdot 78! \cdot 79$.

$$P = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 78! \cdot 79}{80!} = \frac{2}{80} = 0{,}025.$$

***Відповідь*:** $0{,}025$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. В ящику знаходиться $(2\alpha + 13)$ однакових виробів, з яких $(\alpha + 6)$ пофарбовано. Навмання дістають один з виробів. Знайти ймовірність того, що він не буде пофарбований.

2. В урні знаходиться $(\alpha+9)$ білих та $(\alpha+7)$ чорних куль. З урни дістають одну кулю і відкладають осторонь. Ця куля виявилась білою. Після цього з урни дістають ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білими.

3. З послідовності чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ (\alpha+20)$ вибирають два числа (при цьому їх порядок має значення). Знайти ймовірність того, що записавши їх «в один ряд», одержимо число 2012. Підказка: $m=1\cdot 1$.

4. З послідовності чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha,\ldots,\ (2\alpha+7)$ вибирають два числа (при цьому їх порядок має значення). Знайти ймовірність того, що записавши їх «в один ряд», одержимо парне число.

5. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на $\left[\alpha^2(\alpha+18)+108(\alpha+2)\right]$ кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішали. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кубик буде мати тільки одну пофарбовану грань.

6. В урні знаходиться $(\alpha+5)$ білих та 10 чорних куль. З урни дістали відразу дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

7. В урні знаходиться $(\alpha+5)$ білих та 10 чорних куль. З урни дістали відразу дві кулі. Яка ймовірність того, що ці кулі однокольорові?

8. В урні знаходиться $(\alpha+5)$ білих та 10 чорних куль. Навмання дістають три кулі. Яка ймовірність того, що тільки дві з них білі?

9. За круглий стіл випадковим чином сідають $(\alpha+7)$ людей. Знайти ймовірність того, що дві певні особи A та B сидітимуть поруч.

10. На лаву випадковим чином сідають $(\alpha+8)$ людей. Знайти ймовірність того, що дві певні особи M та N сидітимуть поруч.

ДОДАВАННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ НЕСУМІСНИХ ПОДІЙ МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ НЕЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ

1. Основні теоретичні відомості

Події є *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Ймовірність появи однієї (будь-якої) з двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Дана теорема узагальнюється на випадок довільного числа попарно несумісних подій: $P(A+B+C+\ldots)=P(A)+P(B)+P(C)+\ldots$

Декілька подій утворюють повну групу, якщо в результаті випробування відбувається хоча б одна з них.

Для подій повної групи має місце теорема: сума ймовірностей A_1, A_2, …, A_n подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$.

Протилежними є дві єдиноможливі події, які утворюють повну групу.

Для протилежних подій має місце теорема: сума ймовірностей протилежних подій рівна одиниці $P(A)+P(\overline{A})=1$.

Подію B називають *незалежною* від події A, якщо поява події A не змінює ймовірності події B.

Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірності цих подій, тобто $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Теорема ймовірності появи хоча б однієї з незалежних подій. Ймовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, …, A_n незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n})$.

2. Приклади виконання завдань

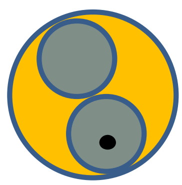
1. В урні 115 куль: 10 жовтих, 5 синіх та 100 білих. З урни виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде кольоровою (жовтою або синьою).

***Розв'язання*:**

Подія A – витягнута куля червона, подія B – витягнута куля синя. Застосуємо теорему додавання ймовірностей несумісних подій $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{10}{115}+\frac{5}{115}=\frac{15}{115}\approx 0{,}130$.

***Відповідь*:** 0,130.

2. Дві однакові монети радіусом 50 розміщені всередині круга радіусом 110, у який навмання ставиться точка. Знайти ймовірність того, що ця точка попаде на одну із монет, якщо ці монети не перекриваються.



***Розв'язання*:**

Подія A – точка попаде на першу монету, подія B – точка попаде на другу монету. Застосуємо теорему додавання ймовірностей несумісних подій та геометричне означення ймовірності $P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{s_{мI}}{S}+\frac{s_{мII}}{S}=\frac{2s_{м}}{S}=\frac{2\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{2\cdot 50^2}{110^2}\approx 0{,}4132$.

***Відповідь*:** 0,4132.

3. В ящику 110 деталей, серед яких 2 нестандартні. Знайти ймовірність того, що серед навмання вибраних 6 деталей буде не більше однієї нестандартної.

***Розв'язання*:**

1 спосіб. Подія C – серед навмання вибраних деталей не більше однієї нестандартної – складається з двох подій: подія A – серед навмання вибраних деталей одна деталь нестандартна або подія B – серед навмання вибраних деталей жодної нестандартної. Отже $C = A + B$. Тоді $P(C) = P(A) + P(B)$, де $P(A) = \dfrac{m_A}{n}$, $P(B) = \dfrac{m_B}{n}$. Так як $n = C_{110}^6 = \dfrac{110!}{6! \cdot 104!}$, $m_A = C_{108}^5 \cdot C_2^1 = \dfrac{108!}{5! \cdot 103!} \cdot \dfrac{2!}{1! \cdot 1!}$, $m_B = C_{108}^6 \cdot C_2^0 = \dfrac{108!}{6! \cdot 102!} \cdot \dfrac{2!}{0! \cdot 2!}$,

то $P(A) = \dfrac{104 \cdot 105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 2}{5!} \cdot \dfrac{6!}{105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot 110} \approx 0{,}1041$,

$P(B) = \dfrac{103 \cdot 104 \cdot 105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108}{6!} \cdot \dfrac{6!}{105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot 110} \approx 0{,}8934$ і

$P(C) = P(A) + P(B) \approx 0{,}1041 + 0{,}8934 = 0{,}9975$.

2 спосіб. Нехай подія C – серед навмання вибраних деталей не більше однієї нестандартної. Тоді протилежна подія $\overline{C}$ – серед навмання вибраних деталей дві нестандартні. Отже $P(C) = 1 - P(\overline{C})$, де $P(\overline{C}) = \dfrac{m_{\overline{C}}}{n}$. Так як $n = C_{110}^6 = \dfrac{110!}{6! \cdot 104!}$, $m_{\overline{C}} = C_{108}^4 \cdot C_2^2 = \dfrac{108!}{4! \cdot 104!} \cdot \dfrac{2!}{2! \cdot 0!}$, то

$P(\overline{C}) = \dfrac{105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108}{4!} \cdot \dfrac{6!}{105 \cdot 106 \cdot 107 \cdot 108 \cdot 109 \cdot 110} = \dfrac{5 \cdot 6}{109 \cdot 110} \approx 0{,}0025$;

$P(C) = 1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$.

***Відповідь*:** $0{,}9975$.

4. На курсі 110 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання вибирають 2 студента. Знайти ймовірність того, що хоча б 1 з них є відмінником.

***Розв'язання*:**

Нехай подія C – хоча б 1 студент із вибраних є відмінником. Тоді подія $\overline{C}$ – жоден з них не є відмінником, отже $P(C) = 1 - P(\overline{C})$, де $P(\overline{C}) = \dfrac{m_{\overline{C}}}{n}$. Так як $n = C_{110}^2 = \dfrac{110!}{2! \cdot 108!}$; $m_{\overline{C}} = C_{102}^2 \cdot C_8^0 = \dfrac{102!}{2! \cdot 100!} \cdot \dfrac{8!}{0! \cdot 8!}$, то

$P(\overline{C}) = \dfrac{101 \cdot 102}{2!} \cdot \dfrac{2!}{109 \cdot 110} = \dfrac{101 \cdot 102}{109 \cdot 110} \approx 0{,}8592$, $P(C) = 0{,}1408$.

***Відповідь*:** $0{,}1408$.

5. Студент вивчив з 60 питань тільки 45. Кожний екзаменаційний білет включає 3 питання. Знайти ймовірність того, що студент знає не менше 2 питань свого екзаменаційного білету.

***Розв'язання*:**

Нехай подія C – студент знає не менше 2 питань свого екзаменаційного білету, тобто студент знає або 2 питання (подія A), або 3 питання (подія B). Отже $C = A + B$. Події несумісні, тому $P(C) = P(A) + P(B)$, де $P(A) = \frac{m_A}{n}$, $P(B) = \frac{m_B}{n}$. Так як $n = C_{60}^3 = \frac{60!}{3! \cdot 57!}$, $m_A = C_{45}^2 \cdot C_{15}^1 = \frac{45!}{2! \cdot 43!} \cdot \frac{15!}{1! \cdot 14!}$, $m_B = C_{45}^3 \cdot C_{15}^0 = \frac{45!}{3! \cdot 42!} \cdot \frac{15!}{0! \cdot 15!}$, то $P(A) = \frac{44 \cdot 45 \cdot 15}{2!} \cdot \frac{3!}{58 \cdot 59 \cdot 60} \approx 0{,}4340$, $P(B) = \frac{43 \cdot 44 \cdot 45}{3!} \cdot \frac{3!}{58 \cdot 59 \cdot 60} \approx 0{,}4147$, $P(C) \approx 0{,}4340 + 0{,}4147 = 0{,}8487$.

***Відповідь*:** $0{,}8487$.

6. В урні знаходиться 20 білих та 30 чорних куль. З урни виймають одну кулю, відзначають її колір і повертають назад в урну. Після цього з урни дістають ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що обидві вийняті кулі будуть білими.

***Розв'язання*:**

Подія A – перша вийнята куля є білою, $P(A) = \frac{20}{50} = 0{,}4$; подія B – друга вийнята куля є білою. Так як перша вийнята куля повертається в урну, то подія B не залежить від результату першого випробування, тому $P(B) = \frac{20}{50} = 0{,}4$. Застосуємо теорему множення ймовірностей незалежних подій $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

***Відповідь*:** $0{,}16$.

7. У трьох ящиках знаходяться деталі. У першому 20 (з них 3 нестандартні), у другому 30 (з них 6 нестандартних), у третьому 10 (з них 1 нестандартна). З кожного ящика навмання беруть одну деталь. Яка ймовірність того, що всі взяті деталі є стандартними?

***Розв'язання*:**

Події A, B, C – стандартна деталь витягнута відповідно з І, ІІ, ІІІ ящика, з умови маємо $P(A) = \frac{17}{20} = 0{,}85$; $P(B) = \frac{24}{30} = 0{,}8$; $P(C) = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

Застосуємо теорему множення ймовірностей незалежних подій $P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}85\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}612$.

***Відповідь*:** $0{,}612$.

8. Студент шукає потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірності того, що формула є у першому, другому, третьому довіднику відповідно рівні $0{,}6$; $0{,}7$; $0{,}8$. Знайти ймовірність того, що: 1) формула є тільки в одному довіднику; 2) формула є тільки у двох довідниках; 3) формула є у всіх трьох довідниках; 4) формула є хоча б в одному довіднику; 5) формули нема в жодному довіднику.

***Розв'язання*:**

Позначимо події: A_1 – формула знайдена в I довіднику; A_2 – формула знайдена в II довіднику; A_3 – формула знайдена в III довіднику. Тоді $P(A_1)=0{,}6=p_1$ – ймовірність знайти формулу в I довіднику, $P(\overline{A_1})=0{,}4=q_1$ – ймовірність не знайти формулу в I довіднику; $P(A_2)=0{,}7=p_2$ – ймовірність знайти формулу в II довіднику; $P(\overline{A_2})=0{,}3=q_2$ – ймовірність не знайти формулу в II довіднику; $P(A_3)=0{,}8=p_3$ – ймовірність знайти формулу в III довіднику; $P(\overline{A_3})=0{,}2=q_3$ – ймовірність не знайти формулу в III довіднику.

1) Розглянемо подію D_1 – студент знайшов формулу тільки в одному довіднику, тоді маємо $P(D_1)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3$ або $P(D_1)=0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}036+0{,}056+0{,}096=0{,}188.$

2) Розглянемо подію D_2 – студент знайшов потрібну формулу тільки у двох довідниках, тоді $P(D_2)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3$ або $P(D_2)=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8+0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}084+0{,}144+0{,}224=0{,}452.$

3) Розглянемо подію D_3 – студент знайшов потрібну формулу у всіх трьох довідниках, тоді $P(D_3)=p_1p_2p_3=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}336$.

4) Розглянемо подію D_4 – студент не знайшов формулу в жодному довіднику, тоді маємо $P(D_4)=q_1q_2q_3=0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}024$.

5) Розглянемо подію D_5 – студент знайшов потрібну формулу хоча б в одному довіднику. Так як D_4 і D_5 – протилежні події, то $P(D_4)+P(D_5)=1$, звідки $P(D_5)=1-P(D_4)=1-0{,}024=0{,}976$. Другий спосіб $P(D_5)=P(D_1)+P(D_2)+P(D_3)=0{,}188+0{,}452+0{,}336=0{,}976$.

***Відповідь*:** 1) $0{,}188$; 2) $0{,}452$; 3) $0{,}336$; 4) $0{,}024$; 5) $0{,}976$.

9. Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, рівна $0{,}95$. Для другого і третього елемента ця ймовірність відповідно рівна $0{,}85$ і $0{,}75$. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу не вийде з ладу хоча б один елемент?

***Розв'язання*:**

Так як $p_1 = 0{,}95$; $p_2 = 0{,}85$; $p_3 = 0{,}75$ – ймовірності того, що відповідно перший, другий, третій елемент не вийде з ладу, то ймовірності того, що ці елементи вийдуть із ладу, рівні відповідно: $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}05$; $q_2 = 1 - p_2 = 0{,}15$; $q_3 = 1 - p_3 = 0{,}25$. Тоді маємо для події C, що полягає в тому, що з ладу не вийде хоча б один елемент: $P(C) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$, тобто $P(C) = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}9981$.

***Відповідь*:** $0{,}9981$.

10. Ймовірність хоча б одного попадання в мішень при 4 пострілах рівна $0{,}9984$. Знайти ймовірність попадання в мішень при одному пострілі.

***Розв'язання*:**

Подія A – попадання в мішень хоча б один раз при 4 пострілах, подія $\overline{A}$ – жодного разу в мішень не попали при 4 пострілах, тоді маємо $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9984 = 0{,}0016$.

З іншого боку $P(\overline{A}) = q \cdot q \cdot q \cdot q = q^4$, де q – ймовірність не попасти в мішень при одному пострілі.

Тоді $q^4 = 0{,}0016$, звідки $q = 0{,}2$, ймовірність попасти в мішень при одному пострілі $p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

***Відповідь*:** $0{,}8$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. В урні знаходиться $(\alpha + 15)$ куль: 10 жовтих, 5 синіх та α білих. З урни дістають кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде кольоровою (жовтою або синьою).

2. Дві однакові монети радіуса α розміщені всередині круга радіуса $2(\alpha + 10)$, в який навмання ставиться точка. Знайти ймовірність того, що ця точка попаде на одну із монет, якщо ці монети не перекриваються.

3. У ящику знаходиться $(\alpha + 10)$ деталей, серед яких 2 нестандартні. Знайти ймовірність того, що з навмання вибраних 6 деталей буде не більше однієї нестандартної.

4. На курсі $(\alpha+100)$ студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання вибирають 2 студентів. Знайти ймовірність того, що хоча б один з них є відмінником.

5. Студент вивчив з $(\alpha+60)$ питань тільки 45. Кожний екзаменаційний білет включає 3 питання. Знайти ймовірність того, що студент знає не менше 2 питань свого екзаменаційного білету.

6. В урні знаходиться $(\alpha+10)$ білих та 10 чорних куль. З урни виймають одну кулю, відзначають її колір і повертають назад в урну. Після цього з урни дістають ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що обидві вийняті кулі будуть білими.

7. У трьох ящиках знаходяться деталі. У першому $(\alpha+10)$ штук (з них 5 нестандартних), у другому $(\alpha+20)$ штук (з них 6 нестандартних), у третьому $(\alpha+5)$ штук (з них 3 нестандартні). З кожного ящика навмання беруть одну деталь. Знайти ймовірність того, що всі вийняті деталі є стандартними.

8. Студент шукає потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірності того, що формула є у першому, другому, третьому довіднику відповідно рівні p_1; p_2; p_3. Знайти ймовірність того, що: 1) формула є тільки в одному довіднику; 2) формула є тільки у двох довідниках; 3) формула є у всіх трьох довідниках; 4) формула є хоча б в одному довіднику; 5) формули нема в жодному довіднику.

α	p_1	p_2	p_3	α	p_1	p_2	p_3
1	0,5	0,7	0,8	6	0,5	0,5	0,8
2	0,5	0,7	0,9	7	0,5	0,5	0,9
3	0,5	0,8	0,9	8	0,5	0,7	0,7
4	0,7	0,8	0,9	9	0,5	0,8	0,8
5	0,5	0,5	0,7	10	0,5	0,9	0,9

9. Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, рівна $(1-0{,}05\cdot\alpha)$. Для другого і третього елемента ця ймовірність відповідно рівна $(1-0{,}02\cdot\alpha)$ і $(1-0{,}01\cdot\alpha)$. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу не вийде з ладу хоча б один елемент?

10. Ймовірність хоча б одного попадання в мішень при 4 пострілах рівна $0{,}01\cdot\alpha$. Знайти ймовірність попадання в мішень при одному пострілі.

ДОДАВАННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ СУМІСНИХ ПОДІЙ МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ЗАЛЕЖНИХ ПОДІЙ

1. Основні теоретичні відомості

Дві події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає появу іншої події в одному і тому ж випробуванні.

Теорема. *Додавання ймовірностей сумісних подій*. Ймовірність появи хоча б однієї події з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$.

Подію B називають *залежною* від події A, якщо поява події A змінює ймовірності події B.

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називають ймовірність події B, яку обчислюють за припущенням, що подія A вже настала.

Теорема. *Множення ймовірностей залежних подій*. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій рівна добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої за умови, що перша подія вже настала, тобто $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$.

Дана теорема узагальнюється на випадок довільного числа залежних подій: ймовірність сумісної появи кількох подій рівна добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності усіх наступних інших, обчислених за припущенням, що всі попередні події вже настали, тобто $P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$.

2. Приклади виконання завдань

1. В одному ящику 105 білих та 110 червоних куль, а в другому ящику 110 білих та 105 червоних куль. Знайти ймовірність того, що при вийманні з кожного ящика по кулі хоча б одна з них буде білою.

***Розв'язання*:**

Подія A – білу кулю дістали з першого ящика, подія B – білу кулю дістали з другого ящика. Події A, B сумісні, тоді використовуючи теорему додавання ймовірностей сумісних подій, маємо $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$. Так як $P(A)=\dfrac{105}{215}$, $P(B)=\dfrac{110}{215}$, то $P(A+B)=\dfrac{105}{215}+\dfrac{110}{215}-\dfrac{105}{215}\cdot\dfrac{110}{215}\approx 0{,}75$.

***Відповідь*:** $0{,}75$.

2. Двоє лучників стріляють по мішені. Ймовірності попадання в мішень для лучників відповідно рівні $0{,}7$ та $0{,}8$. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень попаде не менше одного лучника.

***Розв'язання*:**

І спосіб. Подія A – в мішень попав перший лучник, подія B – в мішень попав другий лучник, подія $A+B$ – в мішень попало не менше одного лучник. Так як події A і B є сумісними подіями, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$. За умовою $P(A)=0{,}7$, $P(B)=0{,}8$, тоді $P(A+B)=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}94$.

ІІ спосіб. Протилежна подія $\overline{A}\cdot\overline{B}$ – в мішень не попали двоє лучників, отже $P(A+B)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$. З умови маємо $P(\overline{A})=0{,}3$ і $P(\overline{B})=0{,}2$. Тоді $P(A+B)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=1-0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}94$.

ІІІ спосіб. Умові задачі відповідають три випадки: або 1) обоє влучили; або 2) перший влучив, а другий ні; або 3) другий влучив, а перший ні. Тоді $P(A+B)=P(A)\cdot P(B)+P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})$. Підставивши дані, маємо $P(A+B)=0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}94$.

***Відповідь*:** $0{,}94$.

3. Серед 50 виробів 4 вироби браковані, а 80% з небракованих виробів є першосортними. Яка ймовірність того, що вибраний навмання виріб є першосортним?

***Розв'язання*:**

Подія A – вибрано небракований виріб, $P(A)=\dfrac{46}{50}=0{,}92$; подія B – небракований виріб, який вибрано, є першосортним, $P_A(B)=0{,}8$. Задана подія є добутком двох подій A та B, її ймовірність можна знайти за формулою $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=0{,}92\cdot 0{,}8=0{,}736$.

***Відповідь*:** $0{,}736$.

4. 95% виготовлених виробів є стандартними, а 80% виробів із стандартних є виробами першого сорту. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб є першого сорту.

***Розв'язання*:**

Подія A – вибрано стандартний виріб, $P(A)=0{,}95$; подія B – стандартний виріб є першосортним, $P_A(B)=0{,}8$. Задана подія є добутком двох подій A та B, її ймовірність можна знайти за формулою $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=0{,}95\cdot 0{,}8=0{,}76$.

***Відповідь*:** $0{,}76$.

5. В урні знаходиться 20 білих та 30 чорних куль. З урни виймають відразу дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білими.

***Розв'язання*:**

Подія A – перша з двох вийнятих куль є білою, $P(A)=\frac{20}{50}=0,4$;

подія B – друга з двох вийнятих куль є білою, $P_A(B)=\frac{19}{49}=0,387$ (оскільки в урні залишилися 19 білих і 30 чорних куль).

За теоремою множення ймовірностей залежних подій маємо $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)=0,4\cdot 0,387=0,1548$.

***Відповідь*:** $0,1548$.

6. В урні знаходиться 20 білих та 30 чорних куль. З урни виймають відразу дві кулі. Знайти ймовірність того, що ці кулі різнокольорові.

***Розв'язання*:**

Можливі два сприятливих варіанта послідовності подій:

І варіант: подія A – перша з двох вийнятих куль є білою, $P(A)=\frac{20}{50}$; подія B – друга з двох вийнятих куль є чорною, $P_A(B)=\frac{30}{49}$ (оскільки в урні залишилися 19 білих і 30 чорних куль).

ІІ варіант: подія B – перша з двох вийнятих куль є чорною, $P(B)=\frac{30}{50}$; подія A – друга з двох вийнятих куль є білою, $P_B(A)=\frac{20}{49}$ (оскільки в урні залишилися 20 білих і 29 чорних куль).

Ймовірність того, що обидві кулі будуть різнокольоровими, рівна

$$P=P(A)P_A(B)+P(B)P_B(A)=\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}+\frac{30}{50}\cdot\frac{20}{49}=2\cdot\frac{600}{50\cdot 49}\approx 0,4898.$$

***Відповідь*:** $0,4898$.

7. В урні знаходиться 12 білих та 8 чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть чорними.

***Розв'язання*:**

Подія A – перша з вийнятих куль є чорною, тоді $P(A)=\frac{8}{20}$; подія B – друга вийнята куля є чорною, тоді $P_A(B)=\frac{7}{19}$; подія C – третя вийнята куля є чорною, тоді $P_{AB}(C)=\frac{6}{18}$.

За теоремою множення ймовірностей залежних подій маємо $P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=0{,}4\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{1}{3}=0{,}049$.

***Відповідь*:** $0{,}049$.

8. В урні знаходиться 15 білих, 25 синіх та 10 чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть різного кольору.

***Розв'язання*:**

Розглянемо варіант, коли перша вийнята куля є білою (подія A), друга – синьою (подія B), третя – чорною (подія C). Так як ймовірності цих подій рівні $P(A)=\frac{15}{50}$, $P_A(B)=\frac{25}{49}$, $P_{AB}(C)=\frac{10}{48}$, то за теоремою множення ймовірностей залежних подій ймовірність розлядуваного варіанта послідовності подій дорівнює $P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{15}{50}\cdot\frac{25}{49}\cdot\frac{10}{48}$.

Якщо кулі різного кольору будуть вийняті в іншому порядку, то ймовірність варіанта буде такою ж, оскільки просто чисельники поміняються місцями. Тому ймовірність одного варіанта треба помножити на їх кількість.

Так як вийняті три кулі різного кольору, то кількість можливих варіантів дорівнює числу перестановок трьох елементів $P_3=3!=6$. Тоді остаточно $P=\frac{6\cdot 25\cdot 10\cdot 15}{50\cdot 49\cdot 48}=0{,}19$.

***Відповідь*:** $0{,}19$.

9. В ящику 110 виробів, з яких 6 пофарбовані. Робітник навмання взяв 2 вироба. Знайти ймовірність того, що хоча б один з виробів пофарбований.

***Розв'язання*:**

Подія C – хоча б один з двох виробів пофарбований. Подія $\overline{C}$ – жоден з взятих виробів непофарбований, тобто $\overline{C}=\overline{A}\cdot\overline{B}$, де подія $\overline{A}$ – перший взятий виріб непофарбований, подія $\overline{B}$ – другий взятий виріб непофарбований.

Тоді $P(C)=1-P(\overline{C})=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-P(\overline{A})\cdot P_A(\overline{B})$.

Так як $P(\overline{A})=\frac{104}{110}$, $P_A(\overline{B})=\frac{103}{109}$, то $P(C)=1-\frac{104}{110}\cdot\frac{103}{109}\approx 0{,}107$.

***Відповідь*:** $0{,}107$.

10. Студент прийшов на залік, знаючи з 130 питань тільки 24. Яка ймовірність скласти залік, якщо після відмови відповідати на питання викладач задає ще одне питання?

***Розв'язання*:**

Подія A – студент відповів на перше питання, подія $\overline{A}$ – студент не відповів на перше питання, подія B – студент відповів на друге питання, подія $\overline{B}$ – студент не відповів на друге питання.

I спосіб. Подія C – студент склав залік, подія $\overline{C}$ – студент не склав залік (якщо він не відповів на два питання). Тоді $P(C)=1-P(\overline{C})$, $P(\overline{C})=P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(\overline{B})$, де $P(\overline{A})=\dfrac{106}{130}$, $P_{\overline{A}}(\overline{B})=\dfrac{105}{129}$. Отже маємо $P(C)=1-\dfrac{106}{130}\cdot\dfrac{105}{129}\approx 0{,}336$.

II спосіб. Подія C – студент склав залік (цьому сприяють два варіанта: якщо він відповів на перше питання або не відповів на перше питання і відповів на друге питання), тобто маємо $P(C)=P(A)+P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{24}{130}+\dfrac{106}{130}\cdot\dfrac{24}{129}\approx 0{,}3363$.

***Відповідь*:** $0{,}336$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. В одному ящику $(\alpha+5)$ білих та $(\alpha+10)$ червоних куль, а в другому ящику $(\alpha+10)$ білих та $(\alpha+5)$ червоних куль. Знайти ймовірність того, що хоча б з одного ящика буде вийнято білу кулю, якщо з кожного ящика дістають по одній кулі.

2. Двоє лучників стріляють по мішені. Ймовірності попадання в мішень для лучників відповідно рівні $0{,}7$ та $0{,}1\cdot\alpha$. Знайти ймовірність того, що при одному залпі в мішень попаде не менше одного лучника.

3. Серед $(\alpha+10)$ виробів 6 бракованих, а 80% з небракованих виробів є першосортними. Яка ймовірність того, що вибраний навмання виріб є першосортним?

4. $\left(\dfrac{100\alpha}{\alpha+1}\right)\%$ виготовлених виробів є стандартними, а $\left(\dfrac{100(\alpha+1)}{\alpha+2}\right)\%$ із стандартних є виробами першого сорту. Знайти ймовірність того, що вибраний виріб є виробом першого сорту.

5. В урні знаходиться $(\alpha+10)$ білих та 10 чорних куль. З урни виймають відразу дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?

6. В урні знаходиться $(\alpha+10)$ білих та 10 чорних куль. З урни виймають відразу дві кулі. Яка ймовірність того, що ці кулі різнокольорові?

7. В урні знаходиться $(2\alpha+1)$ білих та $(\alpha+2)$ чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть чорного кольору.

8. В урні знаходиться α білих, $(\alpha+1)$ синіх та $(\alpha+2)$ чорних куль. З урни виймають одразу три кулі. Знайти ймовірність того, що всі вони будуть різного кольору.

9. В ящику $(\alpha+10)$ виробів, з яких 6 пофарбовані. Робітник навмання взяв два вироби. Знайти ймовірність того, що хоча б один з виробів пофарбований.

10. Студент прийшов на залік, знаючи з $(\alpha+30)$ питань тільки 24. Яка ймовірність скласти залік, якщо після відмови відповідати на питання викладач задає ще одне питання?

ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

1. Основні поняття та теореми

Ймовірність події A, яка може настати лише за однієї з умов, яким відповідають попарно несумісні події H_1, H_2, ..., H_n, що утворюють повну групу і називаються гіпотезами, дорівнює сумі добутків ймовірностей цих гіпотез на відповідні умовні ймовірності події A: $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$.

Цю формулу називають «формулою повної ймовірності».

2. Приклади виконання завдань

1. Є три зовнішньо однакові урни. У першій урні знаходиться 8 білих та 3 чорних куль; у другій – 7 білих та 6 чорних; у третій – 3 білих та 10 чорних. З навмання вибраної урни дістають одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

***Розв'язання*:**

Нехай A – подія діставання білої кулі, гіпотези H_1, H_2, H_3 – несумісні події вибору відповідно першої, другої або третьої урни, внаслідок яких виникає подія A. Формула повної ймовірності має вигляд $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)$.

Урни одинакові, тому ймовірності вибору будь-якої з них рівні $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$, тоді $P(A)=\frac{1}{3}\left[P_{H_1}(A)+P_{H_2}(A)+P_{H_3}(A)\right]$.

Умовна ймовірність дістати білу кулю з першої урни становить $P_{H_1}(A)=\frac{8}{11}$, з другої урни – $P_{H_2}(A)=\frac{7}{13}$, з третьої урни – $P_{H_3}(A)=\frac{3}{13}$.

Таким чином отримаємо $P(A)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{8}{11}+\frac{7}{13}+\frac{3}{13}\right)\approx 0{,}4988$.

***Відповідь*:** $0{,}4988$.

2. В трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому 2 білі та 1 сіра, в другому – 3 білі та 1 сіра, в третьому – 2 білі та 2 сірі. Яка ймовірність, що з навмання взятого ящика дістануть білу мишу?

***Розв'язання*:**

Нехай A – подія діставання білої миші, гіпотези H_1, H_2, H_3 – несумісні події вибору відповідно першого, другого або третього ящика, внаслідок яких виникає подія A. Формула повної ймовірності має вигляд $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)$.

Ящики однакові, тому ймовірності вибрати будь-який з них рівні $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$, тоді $P(A)=\frac{1}{3}\left[P_{H_1}(A)+P_{H_2}(A)+P_{H_3}(A)\right]$.

Умовна ймовірність дістати білу мишу з першого ящика рівна $P_{H_1}(A)=\frac{2}{3}$, з другого – $P_{H_2}(A)=\frac{3}{4}$, з третього – $P_{H_3}(A)=\frac{2}{4}$. Тоді шукана ймовірність становить $P(A)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{4}\right)=0{,}6389$.

***Відповідь*:** $0{,}6389$.

3. В лабораторії є 6 ноутбуків нової моделі і 4 ноутбука старої моделі. Ймовірність не вийти з ладу під час роботи для ноутбука нової моделі рівна $0{,}95$, ймовірність не вийти з ладу під час роботи для ноутбука старої моделі рівна $0{,}8$. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний для виконання лабораторної роботи ноутбук, не вийде з ладу під час роботи.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – ноутбук не вийшов з ладу. Ця подія можлива за умови, що напередодні відбулася одна з двох несумісних подій H_1 або H_2, які полягають у виборі ноутбука нової або старої моделі відповідно. Ймовірності вибору ноутбука нової моделі становить $P(H_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, а старої моделі – $P(H_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

З умови маємо $P_{H_1}(A)=0,95$; $P_{H_2}(A)=0,8$. Тоді ймовірність того, що до кінця виконання роботи ноутбук не вийде з ладу рівна $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{3}{5}\cdot 0,95+\frac{2}{5}\cdot 0,8=0,89$.

***Відповідь*:** $0,89$.

4. Робітник отримав три коробки деталей, виготовлених заводом №1 і дві коробки деталей, виготовлених заводом №2. Ймовірність того, що деталь заводу №1 стандартна, рівна $0,8$, а ймовірність того, що деталь заводу №2 стандартна, рівна $0,9$. Робітник навмання взяв деталь з навмання вибраної коробки. Знайти ймовірність того, що взято стандартну деталь.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – діставання стандартної деталі. Ймовірності для деталі бути виготовленою заводом №1 рівна $P(H_1)=\frac{3}{5}$, а заводом №2 – $P(H_2)=\frac{2}{5}$. З умови маємо $P_{H_1}(A)=0,8$; $P_{H_2}(A)=0,9$. Тоді ймовірність того, що навмання взята деталь виявилась стандартною рівна $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{3}{5}\cdot 0,8+\frac{2}{5}\cdot 0,9=0,84$.

***Відповідь*:** $0,84$.

5. В групі спортсменів 22 лижника, 8 велосипедистів та 6 бігунів. Ймовірність виконати фахову норму для лижника становить $0,9$; для велосипедиста – $0,8$; для бігуна – $0,75$. Знайти ймовірність того, що спортсмен, якого вибрали навмання, виконає норму.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – спортсмен, вибраний навмання, виконає норму. Вибраний навмання спортсмен виявиться лижником з ймовірністю $P(H_1)=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$, велосипедистом з ймовірністю $P(H_2)=\frac{8}{36}=\frac{4}{18}$, бігуном з ймовірністю $P(H_3)=\frac{6}{36}=\frac{3}{18}$. З умови маємо $P_{H_1}(A)=0,9$; $P_{H_2}(A)=0,8$; $P_{H_3}(A)=0,75$. Тоді ймовірність того, що спортсмен виконає норму, рівна $P(A)=\frac{11}{18}\cdot 0,9+\frac{4}{18}\cdot 0,8+\frac{3}{18}\cdot 0,75=0,853$.

***Відповідь*:** $0,853$.

6. Для проведення заліку викладач заготовив 21 завдання з похідних і 30 завдань з інтегралів. Для складання заліку студенту треба розв'язати перше завдання, що попалось. Яка ймовірність для студента скласти залік, якщо він може виконати тільки 15 завдань з похідних та 25 завдань з інтегралів?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – студент склав залік; подія H_1 – студенту попалось завдання з похідних, ймовірність цього рівна $P(H_1)=\frac{21}{51}$, умовна ймовірність того, що студент виконає це завдання $P_{H_1}(A)=\frac{15}{21}$; подія H_2 – студенту попалось завдання з інтегралів, ймовірність цього рівна $P(H_2)=\frac{30}{51}$, умовна ймовірність того, що студент виконає це завдання $P_{H_2}(A)=\frac{25}{30}$. Ймовірність того, студент складе залік, рівна $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{21}{51}\cdot\frac{15}{21}+\frac{30}{51}\cdot\frac{25}{30}=\frac{40}{51}=0{,}7843$.

***Відповідь*:** 0,7843.

7. У першій урні 15 білих та 7 чорних куль; у другій – 12 білих та 10 чорних куль. З другої урни у першу перекладають, не дивлячись, одну кулю. Після цього з першої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – з першої урни дістали білу кулю. Ця подія можлива за умови, що напередодні відбулася одна з двох несумісних подій H_1 або H_2, які полягають в тому, що з другої урни дістали відповідно білу або чорну кулю і переклали в першу.

Для гіпотез маємо $P(H_1)=\frac{12}{22}$, $P(H_2)=\frac{10}{22}$. При перекладанні білої кулі в першій урні буде 16 білих та 7 чорних куль, тоді умовна ймовірність витягнути білу кулю рівна $P_{H_1}(A)=\frac{16}{23}$. При перекладанні чорної кулі в першій урні буде 15 білих та 8 чорних куль, тоді умовна ймовірність витягнути білу кулю становить $P_{H_2}(A)=\frac{15}{23}$.

Підставивши ймовірності у формулу повної ймовірності $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)$, отримаємо ймовірність того, що куля буде білою, $P(A)=\frac{12}{22}\cdot\frac{16}{23}+\frac{10}{22}\cdot\frac{15}{23}=\frac{12\cdot 16+10\cdot 15}{22\cdot 23}\approx 0{,}6759$.

***Відповідь*:** $0{,}6759$.

8. У першій коробці знаходиться 20 деталей, з яких 18 стандартних, у другій коробці – 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другої коробки в першу перекладають, не дивлячись, одну деталь. Після цього з першої коробки навмання дістають одну деталь. Знайти ймовірність того, що ця деталь буде стандартною.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – з першої коробки дістали стандартну деталь. Ця подія можлива за умови, що напередодні відбулася одна з двох несумісних подій H_1 або H_2, які полягають в тому, що з другої коробки дістали відповідно стандартну або нестандартну деталь і переклали в першу коробку.

Для гіпотез маємо $P(H_1)=\frac{9}{10}$, $P(H_2)=\frac{1}{10}$. При перекладанні стандартної деталі в першій коробці буде 19 стандартних та 2 нестандартних деталей, тоді умовна ймовірність витягнути стандартну деталь з першої коробки рівна $P_{H_1}(A)=\frac{19}{21}$. При перекладанні нестандартної деталі в першій коробці буде 18 стандартних та 3 нестандартних деталей, тоді умовна ймовірність витягнути стандартну деталь з першої коробки рівна $P_{H_2}(A)=\frac{18}{21}$.

Підставивши ймовірності у формулу повної ймовірності $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)$, отримаємо ймовірність того, що деталь буде стандартною, $P(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=\frac{9\cdot 19+18}{10\cdot 21}=0{,}9$.

***Відповідь*:** $0{,}9$.

9. Є дві партії однорідних виробів. Перша складається з 12 виробів серед яких один дефектний; друга – з 17 виробів, серед яких три дефектні. З першої партії беруть випадковим чином 5 виробів, з другої 7 виробів і змішують між собою. З одержаної партії з 12 виробів беруть один виріб. Знайти ймовірність того, що взятий виріб буде дефектним.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – взятий виріб із змішаної партії є дефектним. Ця подія можлива за умови, що відбулася одна з двох несумісних подій H_1 або H_2, які полягають у виборі з одержаної партії вироба першої або другої партії відповідно Ймовірності взяти з одержаної партії виріб першої партії $P(H_1)=\frac{5}{12}$, а виріб другої партії – $P(H_2)=\frac{7}{12}$.

Ймовірність взяти напочатку з першої партії дефектний виріб $P_{H_1}(A)=\frac{1}{12}$, ймовірність взяти напочатку з другої партії дефектний виріб $P_{H_2}(A)=\frac{3}{17}$.

Підставивши ймовірності у формулу повної ймовірності $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)$, отримаємо ймовірність того, що виріб буде дефектним, $P(A)=\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{17}\approx 0{,}1377$.

***Відповідь*:** $0{,}1377$.

10. В групі 12 відмінників, 25 студентів добре вчаться та 10 студентів вчаться слабо. Відмінники на іспиті можуть одержати тільки відмінні оцінки. Студенти, які вчаться добре, можуть з рівною ймовірністю отримати відмінні та добрі оцінки. Студенти, які вчаться слабо, можуть одержати з рівною ймовірністю добрі, задовільні та незадовільні оцінки. Для іспиту викликається навмання один студент. Яка ймовірність того, що він отримає відмінну або добру оцінку?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – студент отримав відмінну або добру оцінку. Ця подія відбувається за умови, що напередодні викликали або відмінника, або студента, який вчиться добре, або студента, який вчиться слабо, з відповідними ймовірностями $P(H_1)=\frac{12}{47}$; $P(H_2)=\frac{25}{47}$; $P(H_3)=\frac{10}{47}$.

Відмінник отримає відмінну оцінку з ймовірністю $P_{H_1}(A)=1$; студентом, який вчиться добре, отримає відмінну або добру оцінку з ймовірністю $P_{H_2}(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$; студент, який вчиться слабо, отримає добру оцінку з ймовірністю $P_{H_3}(A)=\frac{1}{3}$.

Застосувавши формулу повної ймовірності, одержимо ймовірність отримання студентом на іспиті відмінної або доброї оцінки $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{12}{47}\cdot 1+\frac{25}{47}\cdot 1+\frac{10}{47}\cdot\frac{1}{3}\approx 0{,}8582.$

***Відповідь*:** $0{,}8582$.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Є три зовнішньо однакових урни. У першій урні знаходиться $(\alpha+5)$ білих та $(\alpha+3)$ чорних куль; у другій – $(\alpha+2)$ білих та $(\alpha+4)$ чорних; у третій – тільки білі кулі. З навмання вибраної урни дістають одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля біла.

2. В трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому $(2+\alpha)$ білих та $(1+\alpha)$ сірих, в другому – $(3+\alpha)$ білих та $(2+\alpha)$ сірих, в третьому – $(2+\alpha)$ білих та $(2+\alpha)$ сірих. Яка ймовірність, що з навмання взятого ящика дістануть білу мишу?

3. В лабораторії є $(\alpha+1)$ ноутбуків нової моделі і α ноутбуків старої моделі. Ймовірність не вийти з ладу під час роботи для ноутбука нової моделі рівна $0{,}98$, ймовірність не вийти з ладу під час роботи для ноутбука старої моделі рівна $0{,}88$. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний для виконання лабораторної роботи ноутбук не вийде з ладу під час роботи.

4. Робітник отримав $(3+\alpha)$ коробок деталей, виготовлених заводом №1 і $(2+\alpha)$ коробок деталей, виготовлених заводом №2. Ймовірність того, що деталь заводу №1 стандартна, рівна $0{,}8$, а ймовірність того, що деталь заводу №2 стандартна, рівна $0{,}9$. Робітник навмання взяв деталь з коробки. Знайти ймовірність того, що взято стандартну деталь.

5. В групі спортсменів $(20+\alpha)$ лижників, $(6+\alpha)$ велосипедистів та $(4+\alpha)$ бігунів. Ймовірність виконати фахову норму для лижника становить $0{,}95$, для велосипедиста – $0{,}85$, для бігуна – $0{,}75$. Знайти ймовірність того, що вибраний навмання спортсмен виконає фахову норму.

6. Для проведення заліку викладач заготовив $(11+\alpha)$ завдань з похідних і $(20+\alpha)$ завдань з інтегралів. Для складання заліку студенту треба розв'язати перше завдання, що попалось. Яка ймовірність для студента скласти залік, якщо він може виконати тільки $(5+\alpha)$ завдань з похідних та $(15+\alpha)$ завдань з інтегралів?

7. У першій урні $(\alpha+5)$ білих та $(\alpha+3)$ чорних куль; у другій – $(\alpha+2)$ білих та $(\alpha+4)$ чорних. З першої урни у другу перекладають, не дивлячись, одну кулю. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

8. У першій коробці знаходиться $(\alpha+13)$ стандартних та $(\alpha+3)$ нестандартних деталей, у другій коробці – $(\alpha+17)$ стандартних та $(\alpha+4)$ нестандартних. З другої коробки в першу перекладають, не дивлячись, одну деталь. Після цього з першої коробки навмання дістають одну деталь. Яка ймовірність того, що ця деталь стандартна?

9. Є дві партії однорідних виробів. Перша складається з $(\alpha+5)$ виробів серед яких чотири дефектних; друга – з $(\alpha+10)$ виробів, серед яких вісім дефектних. З першої партії беруть випадковим чином 5 виробів, з другої 8 виробів і змішують між собою. З одержаної партії з 13 виробів беруть один виріб. Знайти ймовірність того, що взятий виріб буде дефектним.

10. В групі 20 відмінників, $(\alpha+10)$ студентів добре вчаться та 10 студентів вчаться слабо. Відмінники на іспиті можуть одержати тільки відмінні оцінки. Студенти, які вчаться добре, можуть з рівною ймовірністю отримати відмінні та добрі оцінки. Студенти, які вчаться слабо, можуть одержати з рівною ймовірністю добрі, задовільні та незадовільні оцінки. Для іспиту викликається навмання один студент. Яка ймовірність того, що він отримає відмінну або дору оцінку?

ЙМОВІРНІСТЬ ГІПОТЕЗ. ФОРМУЛА БЕЙЄСА

1. Основні поняття та теореми

Формула Байєса або формула ймовірностей гіпотез за відомим фактом події A обчислює $P_A(H_i)$ – ймовірність того, що ця подія була викликана саме причиною-гіпотезою H_i. Формула має вигляд

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}=\frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)},$$

де гіпотези H_1, H_2, …, H_n – несумісні події, що утворюють повну групу; $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$ – ймовірності появи подій H_1, H_2, …, H_n; $P_{H_1}(A)$, $P_{H_2}(A)$, …, $P_{H_n}(A)$ – умовні ймовірності того, що подія A відбувається за умови, що напередодні відбулися події H_1, H_2, …, H_n відповідно.

Ймовірність $P_A(H_i)$ – апостеріорна ймовірність (на відміну від апріорної ймовірності $P(H_i)$, яка відома ще до початку випробувань).

2. Приклади виконання завдань

1. Деякий виріб виготовляється на двох заводах. Відомо, що обсяг продукції першого заводу в два рази перевищує обсяг продукції другого заводу. Частка браку на першому заводі складає $0{,}9\%$, на другому – $0{,}8\%$. Навмання взятий виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений першим заводом?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – вибраний бракований виріб. Ця подія настане в результаті появи однієї з двох несумісних подій: або H_1 (деталь виготовлена першим заводом), або H_2 (деталь виготовлена другим заводом). Ймовірності цих гіпотез становлять $P(H_1)=\frac{2}{3}$, $P(H_2)=\frac{1}{3}$ відповідно.

За умовою задачі ймовірність появи бракованої деталі для першого заводу рівна $P_{H_1}(A)=0{,}009$, для другого – $P_{H_2}(A)=0{,}008$.

Підставивши знайдені ймовірності у формулу Байєса $P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}$, маємо ймовірність того, що навмання взятий бракований виріб виготовлений першим заводом,

$$P_A(H_1)=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}009}{\frac{2}{3}\cdot 0{,}009+\frac{1}{3}\cdot 0{,}008}=\frac{2\cdot 0{,}009}{2\cdot 0{,}009+1\cdot 0{,}008}=0{,}6923.$$

***Відповідь*:** 0,6923.

2. Два автомата виготовляють однакові деталі. Продуктивність першого втричі більше продуктивності другого. Перший автомат виробляє 68% деталей відмінної якості, а другий – 91%. Навмання взята деталь виявилась невідмінної якості. Знайти ймовірність того, що деталь виготовлена першим автоматом.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – поява деталі невідмінної якості, яка настає внаслідок появи однієї з несумісних подій H_1 або H_1 (деталь виготовлена першим автоматом), або H_2 (деталь виготовлена другим автоматом).

Ймовірності гіпотез відповідно становлять $P(H_1)=\dfrac{3}{4}$, $P(H_2)=\dfrac{1}{4}$.

Ймовірність виготовлення деталі невідмінної якості першим автоматом рівна $P_{H_1}(A)=1-0{,}68=0{,}32$; другим автоматом – $P_{H_2}(A)=1-0{,}91=0{,}09$.

Підставивши знайдені ймовірності у формулу Байєса $P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}$, отримаємо ймовірність того, що навмання взята деталь невідмінної якості виготовлена першим автоматом, $P_A(H_1)=\dfrac{\frac{3}{4}\cdot 0{,}32}{\frac{3}{4}\cdot 0{,}32+\frac{1}{4}\cdot 0{,}09}=\dfrac{0{,}96}{0{,}96+0{,}09}=0{,}9143$.

***Відповідь*:** 0,9143.

3. Є три урни. У першій 5 білих куль та 3 чорні, у другій – 4 білі та 5 чорних куль, у третій – 3 білі кулі та 2 чорні. З навмання вибраної урни дістають кулю. Ця куля виявляється білою. Яка ймовірність того, що ця куля витягнута з другої урни?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – витягнута біла куля. Ця подія наступить в результаті появи однієї з трьох несумісних подій: або H_1 (кулю дістали з першої урни), або H_2 (з другої), або H_3 (з третьої).

Ймовірність вибору будь-якої урни $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\dfrac{1}{3}$.

Ймовірність дістати білу кулю з першої урни рівна $P_{H_1}(A)=\dfrac{5}{8}$, з другої – $P_{H_2}(A)=\dfrac{4}{9}$, за третьої $-P_{H_3}(A)=\dfrac{3}{5}$.

З формули $P_A(H_2)=\dfrac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}$ отримаємо ймовірність того, що біла куля витягнута з другої урни,

$$P_A(H_2)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}+\frac{4}{9}+\frac{3}{5}}\approx 0{,}2662.$$

***Відповідь*:** 0,2662.

4. В першому ящику знаходиться 20 деталей, з них 15 стандартних, в другому – 30 деталей, з них 24 стандартних, в третьому – 10 деталей, з них 6 стандартних. З навмання вибраного ящика взято стандартну деталь. Знайти ймовірність того, що деталь взята з першого ящика.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – взято стандартну деталь. Ця подія виникає внаслідок появи однієї з несумісних подій H_1, H_2, H_3, де H_1 – деталь взята з першого ящика, H_2 – з другого, H_3 – з третього. Ймовірність вибору будь-якого ящика $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність взяти стандартну деталь з першого ящика становить $P_{H_1}(A)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$; з другого – $P_{H_2}(A)=\frac{24}{30}=\frac{4}{5}$; з третього – $P_{H_3}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

З формули $P_A(H_1)=\dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}$ отримаємо ймовірність того, що що стандартна деталь взята з першого ящика, $P_A(H_1)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}=\frac{15}{43}\approx 0{,}3488$.

***Відповідь*:** 0,3488.

5. В трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому – 13 білих і 21 сіра, в другому – 16 білих в 19 сірих, в третьому – 17 білих і 22 сірі. З навмання взятого ящика дістали білу мишу. Яка ймовірність того, що її дістали з другого ящика?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – дістали білу мишу. Ця подія виникає внаслідок появи однієї з несумісних подій H_1, H_2, H_3, де H_1 – вибрано перший ящик, H_2 – вибрано другий ящик, H_3 – вибрано третій ящик. Так як ящики однакові і вибрати їх можна з однаковою ймовірністю, то $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність дістати білу мишу з першого ящика рівна $P_{H_1}(A)=\frac{13}{34}$; з другого – $P_{H_2}(A)=\frac{16}{35}$; з третього – $P_{H_3}(A)=\frac{17}{39}$.

З формули $P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}$ отримаємо ймовірність того, що білу мишу дістали з другого ящика,

$$P_A(H_2)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{35}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{34}+\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{35}+\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{39}}=\frac{21216}{17745+21216+20230}=\frac{21216}{59191}\approx 0{,}3584.$$

***Відповідь*: 0,3584.**

6. Для проведення заліку викладач заготовив 20 завдань з кратних та криволінійних інтегралів, 17 завдань з диференціальних рівнянь і 13 завдань з рядів. Студент вміє виконувати з цих завдань тільки 18 завдань з кратних та криволінійних інтегралів, 10 завдань з диференціальних рівнянь і 9 завдань з рядів. Для складання заліку студент повинен розв’язати перше навмання витягнуте завдання. Студент склав залік. Яка ймовірність того, що студенту на заліку попалось завдання з рядів?

***Розв’язання*:**

Нехай подія A – студент склав залік. Ця подія настає внаслідок появи однієї з гіпотез: H_1 (студент витягнув завдання з кратних та криволінійних інтегралів); H_2 (студент витягнув завдання з диференціальних рівнянь); H_3 (студент витягнув завдання з рядів). Ймовірності цих гіпотез рівні $P(H_1)=\frac{20}{50}$, $P(H_2)=\frac{17}{50}$, $P(H_3)=\frac{13}{50}$.

Умовні ймовірності виконання студентом завдання з кратних та криволінійних інтегралів, з диференціальних рівнянь і з рядів відповідно рівні $P_{H_1}(A)=\frac{18}{20}$; $P_{H_2}(A)=\frac{10}{17}$; $P_{H_3}(A)=\frac{9}{13}$.

Ймовірність того, що студент склав залік, розв’язавши завдання з рядів, рівна $P_A(H_3)=\frac{\frac{13}{50}\cdot\frac{9}{13}}{\frac{20}{50}\cdot\frac{18}{20}+\frac{17}{50}\cdot\frac{10}{17}+\frac{13}{50}\cdot\frac{9}{13}}=\frac{9}{37}\approx 0{,}2432$.

***Відповідь*: 0,2432.**

7. Є сім урн. В перших пяти урнах знаходиться по 5 білих та 6 чорних куль. В шостій та сьомій – по одній білій і дві чорні. Випадково вибирається урна і з неї виймається куля. Яка ймовірність того, що вибрана шоста або сьома урна, якщо вийнято чорну кулю?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – витягнута чорна куля. Ця подія настане в результаті появи однієї з гіпотез: або H_1 (вибрали одну з п'яти перших урн), або H_2 (вибрали одну з останіх двох урн). Ймовірності цих гіпотез рівні $P(H_1)=\frac{5}{7}$, $P(H_2)=\frac{2}{7}$. Ймовірність дістати чорну кулю з перших п'яти урн, рівна $P_{H_1}(A)=\frac{6}{11}$; а з останніх двох урн – $P_{H_2}(A)=\frac{2}{3}$.

За формулою Байєса $P_A(H_2)=\dfrac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}$ ймовірність того, що чорну кулю дістали з шостої або сьомої урни, рівна $P_A(H_2)=\dfrac{\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{11}+\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{3}}=\dfrac{\frac{4}{3}\cdot 33}{\frac{30}{11}\cdot 33+\frac{4}{3}\cdot 33}=\dfrac{44}{90+44}\approx 0{,}3284$.

***Відповідь*:** $0{,}3284$.

8. У партії виробів змішані деталі трьох заводів: 7 деталей першого, 11 деталей другого та 13 деталей третього. Відомо, що ймовірності виготовлення виробу без дефекту для першого, другого та третього заводів відповідно рівні $0{,}6$; $0{,}9$; $0{,}75$. Взято навмання одну деталь із змішаної партії виробів. Вона виявилась дефектною. Знайти ймовірність того, що деталь виготовлена третім заводом.

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – деталь дефектна. Ця подія настає внаслідок появи однієї з гіпотез: або H_1 (деталь виготовлена першим заводом), або H_2 (деталь виготовлена другим заводом), або H_3 (деталь виготовлена третім заводом). Ймовірності вибору деталей першого, другого та третього заводів відповідно рівні $P(H_1)=\frac{7}{31}$, $P(H_2)=\frac{11}{31}$, $P(H_3)=\frac{13}{31}$.

Ймовірність того, що деталь дефектна, для першого заводу рівна $P_{H_1}(A)=1-0{,}6=0{,}4$; для другого – $P_{H_2}(A)=1-0{,}9=0{,}1$; для третього – $P_{H_3}(A)=1-0{,}75=0{,}25$.

З формули $P_A(H_3)=\dfrac{P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)}$ отримаємо ймовірність того, що дефектна деталь виготовлена третім заводом, $P_A(H_3)=\dfrac{\frac{13}{31}\cdot 0{,}25}{\frac{7}{31}\cdot 0{,}4+\frac{11}{31}\cdot 0{,}1+\frac{13}{31}\cdot 0{,}25}=\dfrac{3{,}25}{7{,}15}\approx 0{,}4545$.

9. Для участі в спортивних змаганнях виділено з першої групи 4 студента, з другої групи 6 студентів і з третьої групи 5 студентів. Ймовірності попасти у збірну команду університету для студентів першої, другої та третьої груп відповідно рівні $0{,}9$; $0{,}7$; $0{,}8$. Навмання обраний студент попав у збірну команду. До якої з груп найімовірніше належить цей студент?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – обраний студент попав у збірну команду університету. Ця подія настає внаслідок появи однієї з гіпотез: H_1 (студент належить до першої групи); H_2 (студент належить до другої групи); H_3 (студент належить до третьої групи). Ймовірності цих гіпотез становлять $P(H_1)=\dfrac{4}{15}$, $P(H_2)=\dfrac{6}{15}$, $P(H_3)=\dfrac{5}{15}$. Умовні ймовірності попасти у збірну команду відповідно рівні $P_{H_1}(A)=0{,}9$; $P_{H_2}(A)=0{,}7$; $P_{H_3}(A)=0{,}8$.

Ймовірності того, що студент, який попав у збірну команду, є студентом першої, другої, третьої груп, становлять відповідно

$$P_A(H_1)=\frac{\frac{4}{15}\cdot 0{,}9}{\frac{4}{15}\cdot 0{,}9+\frac{6}{15}\cdot 0{,}7+\frac{5}{15}\cdot 0{,}8}=\frac{4\cdot 0{,}9}{4\cdot 0{,}9+6\cdot 0{,}7+5\cdot 0{,}8}=\frac{3{,}6}{11{,}8}\approx 0{,}3051;$$

$$P_A(H_2)=\frac{\frac{6}{15}\cdot 0{,}7}{\frac{4}{15}\cdot 0{,}9+\frac{6}{15}\cdot 0{,}7+\frac{5}{15}\cdot 0{,}8}=\frac{6\cdot 0{,}7}{4\cdot 0{,}9+6\cdot 0{,}7+5\cdot 0{,}8}=\frac{4{,}2}{11{,}8}\approx 0{,}3559;$$

$$P_A(H_3)=\frac{\frac{5}{15}\cdot 0{,}8}{\frac{4}{15}\cdot 0{,}9+\frac{6}{15}\cdot 0{,}7+\frac{5}{15}\cdot 0{,}8}=\frac{5\cdot 0{,}8}{4\cdot 0{,}9+6\cdot 0{,}7+5\cdot 0{,}8}=\frac{4}{11{,}8}\approx 0{,}3390.$$

Порівнюючи ймовірності, робимо висновок: найімовірніше всього студент, що попав у збірну команду, належить до другої групи.

***Відповідь*: до другої.**

10. Для участі в студентських спортивних змаганнях виділено з першої групи курсу 10 студентів, з другої – 11, з третьої – 12. Ймовірності того, що студенти першої, другої і третьої групи попадуть у збірну команду університету, відповідно рівні $0{,}85$; $0{,}65$ та $0{,}95$. Навмання обраний студент попав у збірну команду. До якої з груп найімовірніше всього належить цей студент?

***Розв'язання*:**

Нехай подія A – обраний студент попав у збірну. Ця подія настає внаслідок появи однієї з гіпотез: H_1 (студент належить до першої групи); H_2 (студент належить до другої групи); H_3 (студент належить до третьої групи). Ймовірності цих гіпотез становлять $P(H_1)=\frac{10}{33}$, $P(H_2)=\frac{11}{33}$, $P(H_3)=\frac{12}{33}$. Умовні ймовірності попасти у збірну університету відповідно рівні $P_{H_1}(A)=0{,}85$; $P_{H_2}(A)=0{,}65$; $P_{H_3}(A)=0{,}95$.

Так як найбільшою ймовірністю гіпотез є $P(H_3)=\frac{12}{33}$, одночасно з цим найбільшою умовною ймовірністю є $P_{H_3}(A)=0{,}95$, то робимо висновок про те, що найімовірніше всього студент, що попав у збірну, належить до третьої групи.

***Відповідь*: до третьої.**

3. Завдання для самостійного виконання

1. Деякий виріб виготовляється на двох заводах. Відомо, що обсяг продукції першого заводу в $(\alpha+1)$ раз перевищує обсяг продукції другого заводу. Частка браку на першому заводі складає $0{,}01\%$, на другому – $0{,}2\%$. Навмання взятий виріб виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей виріб виготовлений першим заводом?

2. Два автомата виготовляють однакові деталі. Продуктивність першого в $(\alpha+1)$ разів більше продуктивності другого. Перший автомат виробляє 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що деталь виготовлена першим автоматом.

3. Є три урни. У першій $(\alpha+3)$ білих куль та $(\alpha+1)$ чорних, у другій – $(\alpha+2)$ білих та $(\alpha+3)$ чорних кулі, у третій – тільки білі кулі. З навмання вибраної урни дістають кулю. Ця куля виявляється білою. Яка ймовірність того, що ця куля витягнута з третьої урни?

4. Є три партії деталей по $(\alpha+20)$ в кожній. Число стандартних деталей в першій, другій та третій партіях відповідно рівні $(\alpha+20)$; $(\alpha+15)$; $(\alpha+10)$. З навмання обраної партії взято стандартну деталь. Знайти ймовірність того, що деталь взято з третьої партії.

5. В трьох однакових ящиках знаходяться миші. В першому – $(2+\alpha)$ білих і $(10+\alpha)$ сірих, в другому – $(5+\alpha)$ білих і $(8+\alpha)$ сірих, в третьому – $(6+\alpha)$ білих, і $(11+\alpha)$ сірих. З навмання взятого ящика дістали білу мишу. Яка ймовірність того, що її дістали з другого ящика?

6. Для проведення заліку викладач заготовив $(10+\alpha)$ завдань з кратних та криволінійних інтегралів, $(9+\alpha)$ завдань з диференціальних рівнянь і $(11+\alpha)$ завдань з рядів. Студент вміє виконувати з цих завдань тільки $(6+\alpha)$ завдань з кратних та криволінійних інтегралів, $(3+\alpha)$ завдань з диференціальних рівнянь і $(7+\alpha)$ завдань з рядів. Для складання заліку студент повинен розв'язати перше навмання витягнуте завдання. Студент склав залік. Яка ймовірність того, що на заліку студенту попалось завдання з диференціальних рівнянь?

7. Є п'ять урн. В перших трьох урнах знаходиться по $(\alpha+2)$ білих та $(\alpha+3)$ чорних куль. В четвертій та п'ятій – по одній білій і дві чорні. Випадково вибирається урна і з неї виймається куля. Яка ймовірність того, що вибрана четверта або п'ята урна, якщо вийнято білу кулю?

8. У партії виробів змішані деталі трьох заводів: $(\alpha+5)$ деталей першого, $(\alpha+15)$ деталей другого та $(\alpha+10)$ деталей третього. Відомо, що ймовірності наявності дефекту для виробів першого, другого та третього заводів дорівнюють відповідно $0{,}3$; $0{,}1$; $0{,}2$. Взято навмання одну деталь із змішаної партії виробів. Вона виявилась дефектною. Знайти ймовірність того, що деталь виготовлена першим заводом.

9. Для участі в спортивних змаганнях виділено з першої групи α студентів, з другої групи $(\alpha+1)$ студентів і з третьої групи $(\alpha+2)$ студентів. Ймовірності попасти у збірну команду університету для студентів першої, другої та третьої груп відповідно рівні $0{,}9$; $0{,}7$; $0{,}8$. Навмання обраний студент попав у збірну команду. До якої з груп найімовірніше належить цей студент?

10. Для участі в студентських спортивних змаганнях виділено з першої групи курсу $(\alpha+1)$ студентів, з другої – $(\alpha+2)$, з третьої – $(\alpha+3)$. Ймовірність того, що студенти першої, другої і третьої групи попадуть у збірну команду університету, відповідно рівні $0{,}85$; $0{,}65$ та $0{,}95$. Навмання обраний студент попав у збірну команду. До якої з груп найімовірніше всього належить цей студент?

ПОВТОРЕННЯ ВИПРОБУВАНЬ. СХЕМА БЕРНУЛЛІ

1. Основні поняття та теореми

Серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A має одну і ту ж саму ймовірність $P(A)=p$, що не залежить від номера випробувань, називається схемою випробувань Бернуллі.

Ймовірність того, що при n повторюваних незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно m разів у будь-якій послідовності, визначається за допомогою формули Бернуллі $P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$ або $P_n(m)=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}\cdot p^m\cdot q^{n-m}$, де q – ймовірність непояви події A в кожному випробувані, $q=1-p$.

Найімовірнішим числом m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається таке число m, для якого ймовірність приймає максимальне значення, і визначається формулою $n\cdot p-q\le m_0\le n\cdot p+p$. Якщо $(np-q)$ і $(np+p)$ є дробовими числами, то отримуємо одне значення m_0, а якщо цілими числами, то маємо два значення найімовірнішого числа: $m_0=np-q$ і $m_{0+1}=np+p$.

2. Приклади виконання завдань

1. Студент знає 75 питань програми із 100. Екзаменаційний білет містить три питання. Знайти ймовірність того, що: а) студент знає всі питання білету; б) студент знає не менше двох питань білету.

***Розв'язання*:**

Ймовірність того, що студент знає випадкове питання, складає $p=\dfrac{75}{100}=0{,}75$, ймовірність того, що не знає це питання, дорівнює $q=1-p=1-0{,}75=0{,}25$. Кількість випробувань $n=3$.

а) Ймовірність того, що студент знає всі питання $(m=3)$ екзаменаційного білету, рівна $P_3(3)=\dfrac{3!}{3!(3-3)!}\cdot 0{,}75^3\cdot 0{,}25^0\approx 0{,}4219$.

б) Ймовірність того, що студент знає не менше двох питань ($m \geq 2$) екзаменаційного білету, визначається за формулою $P_3(\geq 2) = P_3(3) + P_3(2)$, де $P_3(2) = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25^1 \approx 0{,}4219$ – ймовірність того, що з трьох питань екзаменаційного білету студент знає два питання. Тоді $P_3(\geq 2) = 0{,}4219 + 0{,}4219 = 0{,}8438$.

Відповідь**:** а) $0{,}4219$; б) $0{,}8438$.

2. Схожість насіння дорівнює 70%. Для випробування відбирають 7 насінин. Знайти ймовірність того, що буде: а) рівно 5 проростань; б) не менше 6 проростань.

Розв'язання**:**

Ймовірність того, що випадкова насіннина проросте, складає $p = 0{,}7$, ймовірність того, що випадкова насіннина не проросте, дорівнює $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. Кількість випробувань $n = 7$.

а) Ймовірність події, що з 7 насінин проросте рівно 5 ($m = 5$), визначимо за формулою Бернуллі $P_7(5) = \dfrac{7!}{5!(7-5)!} \cdot 0{,}7^5 \cdot 0{,}3^2 \approx 0{,}3177$.

б) Ймовірність події, що з 7 насінин проросте не менше 6 ($m \geq 6$), визначається формулою $P_7(\geq 6) = P_7(6) + P_7(7)$, де $P_7(6) = \dfrac{7!}{6!(7-6)!} \cdot 0{,}7^6 \cdot 0{,}3^1 \approx 0{,}2471$ – ймовірність проростання 6 насінин з 7; $P_7(7) = \dfrac{7!}{7!(7-7)!} \cdot 0{,}7^7 \cdot 0{,}3^0 \approx 0{,}0824$ – ймовірність проростання 7 насінин з 7, тоді $P_7(\geq 6) = 0{,}2471 + 0{,}0824 = 0{,}3295$.

Відповідь**:** а) $0{,}3177$; б) $0{,}3295$.

3. В деякому водоймищі карпи складають 78% від усіх риб. Знайти ймовірність того, що серед 6 виловлених у водоймищі риб виявиться: а) рівно 5 карпів; б) менше 5 карпів.

Розв'язання**:**

Ймовірність того, що виловлена у водоймищі риба є карпом, складає $p = 0{,}78$, ймовірність того, що виловлена у водоймищі риба не є карпом, рівна $q = 1 - p = 1 - 0{,}78 = 0{,}22$. Кількість випробувань $n = 6$.

а) Ймовірність того, що серед 6 виловлених риб виявиться рівно 5 карпів ($m = 5$), становить $P_6(5) = \dfrac{6!}{5!(6-5)!} \cdot 0{,}78^5 \cdot 0{,}22^1 \approx 0{,}3811$.

б) Ймовірність того, що з 6 виловлених риб виявиться менше 5 карпів $(m<5)$, визначається формулою $P_6(<5)=1-P_6(5)-P_6(6)$, де $P_6(6)=\dfrac{6!}{6!(6-6)!}\cdot 0{,}78^6\cdot 0{,}22^0\approx 0{,}2252$ – ймовірність того, що серед 6 виловлених у водоймищі риб виявиться рівно 6 карпів, тоді $P_6(<5)=1-P_6(5)-P_6(6)=1-0{,}3811-0{,}2252=0{,}3937$.

***Відповідь*:** а) $0{,}3811$; б) $0{,}3937$.

4. Частка плодів, що пошкоджені хворобою в прихованій формі, складає 14%. Випадковим чином відбирають 5 плодів. Знайти ймовірність того, що у вибірці буде: а) рівно 4 пошкоджених плода; б) не більше 1 пошкодженого плода.

***Розв'язання*:**

Ймовірність того, що плід пошкоджений хворобою, складає $p=0{,}14$, ймовірність того, що плід не пошкоджений хворобою, дорівнює $q=1-0{,}14=0{,}86$. Кількість випробувань $n=5$.

а) Ймовірність того, що серед 5 вибраних випадковим чином плодів буде рівно 4 пошкоджених хворобою $(m=4)$, становить $P_5(4)=\dfrac{5!}{4!(5-4)!}\cdot 0{,}14^4\cdot 0{,}86^1\approx 0{,}0017$.

б) Ймовірність того, що серед 5 вибраних навмання плодів буде не більше одного пошкодженого $(m\le 1)$, визначається формулою $P_5(\le 1)=P_5(0)+P_5(1)$, де $P_5(0)=\dfrac{5!}{0!(5-0)!}\cdot 0{,}14^0\cdot 0{,}86^5\approx 0{,}4704$ – ймовірність того, що серед 5 відібраних плодів не буде жодного пошкодженого; $P_5(1)=\dfrac{5!}{1!(5-1)!}\cdot 0{,}14^1\cdot 0{,}86^4\approx 0{,}3829$ – ймовірність того, що серед 5 відібраних плодів буде рівно 1 пошкоджений хворобою, тоді $P_5(\le 1)=0{,}4704+0{,}3829=0{,}8533$.

***Відповідь*:** а) $0{,}0017$; б) $0{,}8533$.

5. Прилад складається з чотирьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи протягом зміни для кожного вузла рівна $7/9$. Вузли виходять зі строю незалежно один від другого. Знайти ймовірність того, що протягом зміни: 1) відмовить рівно один вузол; 2) приклад буде працювати безвідмовно (відмовить нуль вузлів); 3) відмовить не більше одного вузла; 4) відмовить хоча б один вузол. 5) Знайти найімовірніше число вузлів, які протягом зміни відмовлять.

***Розв'язання*:**

Кількість випробувань $n = 4$. Ймовірність того, що вузол протягом зміни не відмовить, складає $q = \frac{7}{9}$, ймовірність того, що відмовить, дорівнює $p = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$.

1) Ймовірність того, що протягом зміни відмовить рівно один вузол ($m = 1$), становить $P_4(1) = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^3 \approx 0{,}4182$.

2) Ймовірність того, що протягом зміни не відмовить жоден вузол ($m = 0$), становить $P_4(0) = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^4 \approx 0{,}3660$.

3) Ймовірність того, що протягом зміни відмовить не більше одного вузла ($m \le 1$), дорівнює $P_4(\le 1) = P_4(0) + P_4(1) = 0{,}7842$.

4) Ймовірність того, що протягом зміни відмовить хоча б один вузол $m \ge 1$, дорівнює $P_4(\ge 1) = 1 - P_4(0) = 1 - 0{,}3660 = 0{,}6340$.

5) Визначимо найімовірніше число вузлів, які протягом зміни відмовлять. Підставимо дані у формулу $n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$, маємо $4 \cdot \frac{2}{9} - \frac{7}{9} \le m_0 \le 4 \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{9}$, звідки $\frac{1}{9} \le m_0 \le \frac{10}{9}$, тоді $m_0 = 1$.

***Відповідь*:** 1) $0{,}4182$; 2) $0{,}3660$; 3) $0{,}7842$; 4) $0{,}6340$; 5) 1.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Студент знає $(\alpha + 25)$ питань програми з $(\alpha + 50)$. Екзаменаційний білет містить три питання. Знайти ймовірність того, що: а) студент знає всі питання білету; б) студент знає не менше двох питань білету.

2. Схожість насіння дорівнює $(60 + \alpha)\%$. Для випробування відбирають 5 насінин. Знайти ймовірність того, що буде: а) рівно 3 проростання; б) не менше 4 проростань.

3. В деякому водоймищі карпи складають $(70 + \alpha)\%$. Знайти ймовірність того, що з 4 риб, виловлених у водоймищі, виявиться: рівно 3 карпа; менше 3 карпів.

4. Частка плодів, що пошкоджені хворобою в прихованій формі, складає $(10 + \alpha)\%$. Випадковим чином відбирають 4 плода. Знайти ймовірність того, що у вибірці буде: а) рівно 3 пошкоджених плода; б) не більше 1 пошкодженого плода.

5. Прилад складається з чотирьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи протягом зміни для кожного вузла дорівнює $\frac{\alpha+1}{\alpha+4}$. Вузли виходять зі строю незалежно один від другого. Знайти ймовірність того, що протягом зміни: 1) відмовить рівно один вузол; 2) приклад буде працювати безвідмовно (відмовить нуль вузлів); 3) відмовить не більше одного вузла; 4) відмовить хоча б один вузол. 5) Знайти найімовірніше число вузлів, які протягом зміни відмовлять.

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ СХЕМИ БЕРНУЛЛІ

1. Основні поняття та теореми

I. Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі при великих значеннях n і m є незручним та приводить до значних похибок. Щоб уникнути їх, застосовують асимптотичні формули.

1) Ймовірність того, що випадкова подія A з n незалежних випробувань настане m раз, визначає асимптотична формула $P_n(m) \cong \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Для $\varphi(x)$ складені таблиці для невід'ємних значень x ($0 \le x \le 4$). Функція Гаусса $\varphi(x)$ є парною, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для значень $x > 4$ приймають $\varphi(x) \approx 0$.

2) Використання асимптотичної формули у випадках $p \approx 0$ приводить до значних відхилень від точного значення $P_n(m)$. Тому при малих значеннях p використовують асимптотичну *формулу Пуассона* $P_n(m) \cong \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, де $\lambda = np$. Формула використовується, якщо $\lambda \le 10$.

3) Для знаходження ймовірності того, що при n випробуваннях подія A має місце не менше m_1 і не більше m_2 разів, застосовують наближену формулу $P(m_1; m_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для $\Phi(x)$ складені таблиці для невід'ємних значень x ($0 \le x \le 5$). Функція Лапласа є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для значень $x > 5$ вважають $\Phi(x) = 0{,}5$.

II. Ймовірність p появи випадкової події A в кожному експерименті визначають за відносною частотою появи події $W(A)=\frac{m}{n}$, встановлюючи в скількох m експериментах подія відбулася з n проведених експериментів. Звичайно, має місце похибка $|W(A)-p|<\varepsilon$, де $\varepsilon>0$ і є малою величиною.

Ймовірності того, що відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від сталої ймовірності p за абсолютною величиною не перевищує заданого числа $\varepsilon>0$, визначається формулою $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

2. Приклади виконання завдань

1. Схожість насіння складає 80%. Яка ймовірність того, що з посіяних 2500 зерен проросте рівно 2000?

***Розв'язання*:**

Скористаємось формулою $P_n(m)\cong\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, де $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. За умовою $p=0{,}8$, $q=1-0{,}8=0{,}2$, $n=2500$, $m=2000$, тоді $x=\frac{2000-2500\cdot 0{,}8}{\sqrt{2500\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}=\frac{0}{20}=0$; $\varphi(0)=0{,}3989$; $P_{2500}(2000)=\frac{0{,}3989}{20}\approx 0{,}0199$.

***Відповідь*:** 0,0199.

2. Схожість насіння пшениці складає 74%. Яка ймовірність того, що з посіяних 800 зерен проросте рівно а) 650; б) 600; в) 550?

***Розв'язання*:**

Скористаємось формулою $P_n(m)\cong\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, де $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. За умовою $p=0{,}74$, $q=1-0{,}74=0{,}26$, $n=800$. Тоді маємо:

а) $m=650$, $x=\frac{650-800\cdot 0{,}74}{\sqrt{800\cdot 0{,}74\cdot 0{,}26}}\approx\frac{58}{12{,}41}\approx 4{,}67$; $\varphi(4{,}67)=0$; $P_{800}(650)=0$;

б) $m=600$, $x=\frac{600-800\cdot 0{,}74}{\sqrt{800\cdot 0{,}74\cdot 0{,}26}}\approx\frac{8}{12{,}41}\approx 0{,}64$; $\varphi(0{,}65)=0{,}3251$; $P_{800}(600)=\frac{0{,}3251}{12{,}41}\approx 0{,}0262$;

в) $m = 550$, $x = \dfrac{550 - 800 \cdot 0{,}74}{\sqrt{800 \cdot 0{,}74 \cdot 0{,}26}} \approx \dfrac{-42}{12{,}41} \approx -3{,}38$; $\varphi(-3{,}38) = 0{,}0013$;

$P_{800}(550) = \dfrac{0{,}0013}{12{,}41} \approx 0{,}0001$.

Відповідь: а) 0; б) $0{,}0262$; в) $0{,}0001$.

3. Серед зерен жита $0{,}07\%$ насінин пшениці. Яка ймовірність того, що при випадковому відборі 5000 зерен буде знайдено 4 насінини пшениці?

Розв'язання:

Кількість випробувань $n = 5000$. Ймовірність того, що випадкове зерно є зерном пшениці, складає $p = 0{,}0007$. Так як $\lambda = np = 3{,}5 \le 10$, то скористаємося формулою $P_n(m) \cong \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, де $m = 4$. Тоді маємо

$P_{5000}(4) = \dfrac{3{,}5^4 \cdot e^{-3{,}5}}{4!} \approx 0{,}1888$.

Відповідь: $0{,}1888$.

4. Ймовірність влучення у мішень при кожному пострілі дорівнює $0{,}001$. Знайти ймовірність влучення у мішень двох та більше куль, якщо число пострілів дорівнює 1050.

Розв'язання:

Ймовірність попадання у ціль двох та більше куль $(m \ge 2)$ визначимо за формулою $P_{1050}(\ge 2) = 1 - P_{1050}(0) - P_{1050}(1)$.

Кількість випробувань $n = 1050$. Ймовірність того, що постріл є влучним, складає $p = 0{,}001$. Так як $\lambda = np = 1{,}05 \le 10$, то скористаємося формулою $P_n(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$. При $m = 0$ і $m = 1$ отримаємо

$P_{1050}(0) = \dfrac{1{,}05^0 \cdot e^{-1{,}05}}{0!} \approx 0{,}3499$, $P_{1050}(1) = \dfrac{1{,}05^1 \cdot e^{-1{,}05}}{1!} \approx 0{,}3674$ відповідно. Тоді шукана ймовірність рівна $P_{1050}(\ge 2) = 1 - 0{,}3499 - 0{,}3674 = 0{,}2827$.

Відповідь: $0{,}2827$.

5. Схожість насіння кукурудзи рівна 80%. Яка ймовірність того, що з 700 зерен проросте не менше 580 і не більше ніж 600?

Розв'язання:

Застосуємо $P(m_1; m_2) \cong \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

За умовою $p=0{,}8$, $q=1-0{,}8=0{,}2$, $n=700$, $m_1=580$, $m_2=600$. Тоді $x_1=\dfrac{580-700\cdot 0{,}8}{\sqrt{700\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\approx 1{,}89$, $x_2=\dfrac{600-700\cdot 0{,}8}{\sqrt{700\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}\approx 3{,}78$. Функція Лапласа при цих значеннях аргумента рівна $\varPhi(1{,}89)=0{,}4706$, $\varPhi(3{,}78)=0{,}4999$, тоді $P(580;600)\cong 0{,}4999-0{,}4706=0{,}0293$.

***Відповідь*:** 0,0293.

6. Схожість насіння сорго рівна 65%. Яка ймовірність того, що з посіяних 850 зерен проросте: а) не більше 550; б) не менше 570?

***Розв'язання*:**

Застосуємо $P(m_1;m_2)\cong\varPhi(x_2)-\varPhi(x_1)$, де $x_1=\dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$.

За умовою $p=0{,}65$, $q=1-0{,}65=0{,}35$, $n=850$.

а) При $m_1=0$, $x_1=\dfrac{0-850\cdot 0{,}65}{\sqrt{850\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}}\approx -39{,}73$, $\varPhi(-39{,}73)=-0{,}5$, при $m_2=550$, $x_2=\dfrac{550-850\cdot 0{,}65}{\sqrt{850\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}}\approx -0{,}19$, $\varPhi(-0{,}19)=-0{,}0753$. Тоді маємо $P(0;550)=-0{,}0753-(-0{,}5)=0{,}4247$.

б) При $m_1=570$, $x_1=\dfrac{570-850\cdot 0{,}65}{\sqrt{850\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}}\approx 1{,}26$, $\varPhi(1{,}26)=0{,}3962$, при $m_2=850$, $x_2=\dfrac{850-850\cdot 0{,}65}{\sqrt{850\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}}\approx 21{,}39$, $\varPhi(21{,}39)=0{,}5$. Тоді маємо $P(570;850)=0{,}5-0{,}3962=0{,}1038$.

***Відповідь*:** а) 0,4247; б) 0,1038.

7. Схожість насіння сорго рівна 65%. Яка ймовірність того, що з посіяних 850 зерен проросте: а) не більше 630; б) більше 630?

***Розв'язання*:**

а) При $m_1=0$, $x_1=\dfrac{0-850\cdot 0{,}65}{\sqrt{850\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}}\approx -39{,}73$, $\varPhi(-39{,}73)=-0{,}5$, при $m_2=630$, $x_2=\dfrac{630-850\cdot 0{,}65}{\sqrt{850\cdot 0{,}65\cdot 0{,}35}}\approx 5{,}57$, $\varPhi(5{,}57)=0{,}5$. Тоді маємо $P(0;630)=0{,}5-(-0{,}5)=1$.

б) $P(630;850)$ визначимо як ймовірність протилежної події $P(630;850)=1-P(0;630)=1-1=0$.

***Відповідь*:** а) 1; б) 0.

8. До складу надійшло 400 виробів, з яких 80% вищого сорту. Знайти ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти виробів вищого сорту від імовірності 0,8 становить 0,01.

***Розв'язання*:**

За умовою задачі $n = 400$; $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}01$. Тоді маємо

$$P(|W(A) - 0{,}8| < 0{,}01) \cong 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{400}{0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = 2\Phi(0{,}5) \approx 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}3830.$$

***Відповідь*:** 0,3830.

9. Ймовірність влучення у ціль при кожному з 700 пострілів рівна 0,5. Яке максимальне відхилення частоти від ймовірності влучення при одному пострілі можна очікувати з ймовірністю 0,997?

***Розв'язання*:**

За умовою задачі $p = q = 0{,}5$; $n = 700$; $P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 0{,}997$. З формули $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ дістанемо $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}997$ або $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}4985$. Так як $\Phi(2{,}96) = 0{,}4985$, то $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2{,}96$, звідки $\varepsilon = 2{,}96\sqrt{\frac{pq}{n}} = 2{,}96\sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{700}} \approx 0{,}056$.

***Відповідь*:** 0,056.

10. Ймовірність пошкодження яблук паршею дорівнює $p = 0{,}2$. Скільки яблук треба відібрати, щоб з ймовірністю 0,995 можна було стверджувати, що частота яблук, пошкоджених паршею, відхиляється від сталої ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,3?

***Розв'язання*:**

Так як $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}3$; $P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 0{,}995$ то з $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ дістанемо $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}995$ або $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}4975$. Так як $\Phi(2{,}81) = 0{,}4975$, то $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2{,}81$, $\sqrt{\frac{n}{pq}} = \frac{2{,}81}{\varepsilon}$, $\frac{n}{pq} = \frac{2{,}81^2}{\varepsilon^2}$, звідки $n = \frac{2{,}81^2\, pq}{\varepsilon^2} = \frac{2{,}81^2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}3^2} \approx 14$.

***Відповідь*:** 14.

3. Завдання для самостійного виконання

1. Схожість насіння складає 80%. Яка ймовірність того, що з посіяних $100\alpha^2$ зерен проросте рівно $80\alpha^2$?

2. Схожість насіння пшениці складає $(60+\alpha)\%$. Яка ймовірність того, що з посіяних $(10\alpha+300)$ зерен проросте рівно $(10\alpha+150)$?

3. Серед зерен жита $\left(\frac{\alpha}{100}\right)\%$ насінин пшениці. Яка ймовірність того, що при випадковому відборі 5000 зерен буде знайдено 2 насінини пшениці?

4. Ймовірність влучення у мішень при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти ймовірність влучення у мішень двох та більше куль, якщо число пострілів дорівнює $(1000+10\alpha)$.

5. Схожість насіння кукурудзи рівна $(70+\alpha)\%$. Яка ймовірність того, що з $(10\alpha+200)$ зерен проросте не менше $(10\alpha+80)$ і не більше ніж $(10\alpha+100)$?

6. Схожість насіння сорго рівна 70%. Яка ймовірність того, що з посіяних 100α зерен проросте: а) не більше 65α; б) не менше 75α?

7. Схожість насіння сорго рівна 70%. Яка ймовірність того, що з посіяних 100α зерен проросте: а) не більше 80α; б) більше 80α?

8. До складу надійшло $100\alpha^2$ виробів, з яких 80% вищого сорту. Чому дорівнює ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти виробів вищого сорту від імовірності 0,8 становить 0,01?

9. Ймовірність влучення у ціль при кожному з 700 пострілів дорівнює $\frac{5}{\alpha+5}$. Яке максимальне відхилення частоти від ймовірності влучення при одному пострілі можна очікувати з ймовірністю 0,997?

10. Ймовірність пошкодження яблук паршею дорівнює $\frac{1}{\alpha+5}$. Скільки яблук треба відібрати, щоб з ймовірністю 0,995 можна було стверджувати, що частота яблук, пошкоджених паршею, відхиляється від сталої ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,3?

Додаток 1. Таблиця значень функції Гаусса

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3667
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3521	3503	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3392	3271	3251	3230	3209	3287	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2903	2780	2756	2832	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2689	2565	2541	2516	2592	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1682	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	100969	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0476	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0191	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0090	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа

Значення функції $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*
0,00	0,0000	**0,34**	0,1331	**0,68**	0,2517	**1,02**	0,3461
0,01	0,0040	**0,35**	0,1368	**0,69**	0,2549	**1,03**	0,3485
0,02	0,0080	**0,36**	0,1406	**0,70**	0,2580	**1,04**	0,3508
0,03	0,0120	**0,37**	0,1443	**0,71**	0,2611	**1,05**	0,3551
0,04	0,0160	**0,38**	0,1480	**0,72**	0,2642	**1,06**	0,3554
0,05	0,0199	**0,39**	0,1517	**0,73**	0,2673	**1,07**	0,3577
0,06	0,0239	**0,40**	0,1554	**0,74**	0,2703	**1,08**	0,3599
0,07	0,0279	**0,41**	0,1591	**0,75**	0,2734	**1,09**	0,3621
0,08	0,0319	**0,42**	0,1628	**0,76**	0,2764	**1,10**	0,3643
0,09	0,0359	**0,43**	0,1664	**0,77**	0,2794	**1,11**	0,3665
0,10	0,0398	**0,44**	0,1700	**0,78**	0,2823	**1,12**	0,3686
0,11	0,0438	**0,45**	0,1736	**0,79**	0,2852	**1,13**	0,3708
0,12	0,0478	**0,46**	0,1772	**0,80**	0,2881	**1,14**	0,3729
0,13	0,0517	**0,47**	0,1808	**0,81**	0,2910	**1,15**	0,3749
0,14	0,0557	**0,48**	0,1844	**0,82**	0,2939	**1,16**	0,3770
0,15	0,0596	**0,49**	0,1879	**0,83**	0,2967	**1,17**	0,3790
0,16	0,0636	**0,50**	0,1915	**0,84**	0,2995	**1,18**	0,3810
0,17	0,0675	**0,51**	0,1950	**0,85**	0,3023	**1,19**	0,3830
0,18	0,0714	**0,52**	0,1985	**0,86**	0,3051	**1,20**	0,3849
0,19	0,0753	**0,53**	0,2019	**0,87**	0,3078	**1,21**	0,3869
0,20	0,0793	**0,54**	0,2054	**0,88**	0,3106	**1,22**	0,3883
0,21	0,0832	**0,55**	0,2088	**0,89**	0,3133	**1,23**	0,3907
0,22	0,0871	**0,56**	0,2123	**0,90**	0,3159	**1,24**	0,3925
0,23	0,0910	**0,57**	0,2157	**0,91**	0,3186	**1,25**	0,3944
0,24	0,0948	**0,58**	0,2190	**0,92**	0,3212	**1,26**	0,3962
0,25	0,0987	**0,59**	0,2224	**0,93**	0,3238	**1,27**	0,3980
0,26	0,1026	**0,60**	0,2257	**0,94**	0,3264	**1,28**	0,3997
0,27	0,1064	**0,61**	0,2291	**0,95**	0,3289	**1,29**	0,4015
0,28	0,1103	**0,62**	0,2324	**0,96**	0,3315	**1,30**	0,4032
0,29	0,1141	**0,63**	0,2357	**0,97**	0,3340	**1,31**	0,4049
0,30	0,1179	**0,64**	0,2389	**0,98**	0,3365	**1,32**	0,4066
0,31	0,1217	**0,65**	0,2422	**0,99**	0,3389	**1,33**	0,4082
0,32	0,1255	**0,66**	0,2454	**1,00**	0,3413	**1,34**	0,4099
0,33	0,1293	**0,67**	0,2486	**1,01**	0,3438	**1,35**	0,4115

x	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*	*x*	*Φ (x)*
1,36	0,4131	**1,67**	0,4525	**1,98**	0,4761	**2,58**	0,4951
1,37	0,4147	**1,68**	0,4535	**1,99**	0,4767	**2,60**	0,4953
1,38	0,4162	**1,69**	0,4545	**2,00**	0,4772	**2,62**	0,4956
1,39	0,4177	**1,70**	0,4554	**2,02**	0,4783	**2,64**	0,4959
1,40	0,4192	**1,71**	0,4564	**2,04**	0,4793	**2,66**	0,4961
1,41	0,4207	**1,72**	0,4573	**2,06**	0,4803	**2,68**	0,4963
1,42	0,4222	**1,73**	0,4582	**2,08**	0,4812	**2,70**	0,4965
1,43	0,4236	**1,74**	0,4591	**2,10**	0,4821	**2,72**	0,4967
1,44	0,4251	**1,75**	0,4599	**2,12**	0,4830	**2,74**	0,4969
1,45	0,4265	**1,76**	0,4608	**2,14**	0,4838	**2,76**	0,4971
1,46	0,4219	**1,77**	0,4616	**2,16**	0,4846	**0,78**	0,4973
1,47	0,4292	**1,78**	0,4625	**2,18**	0,4854	**2,80**	0,4974
1,48	0,4306	**1,79**	0,4633	**2,20**	0,4861	**2,82**	0,4976
1,49	0,4319	**1,80**	0,4641	**2,22**	0,4868	**2,84**	0,4977
1,50	0,4332	**1,81**	0,4649	**2,24**	0,4875	**2,86**	0,4979
1,51	0,4345	**1,82**	0,4656	**2,26**	0,4881	**2,88**	0,4980
1,52	0,4357	**1,83**	0,4664	**2,28**	0,4887	**2,90**	0,4981
1,53	0,4370	**1,84**	0,4671,	**2,30**	0,4893	**2,92**	0,4982
1,54	04382	**1,85**	0,4678	**2,32**	0,4898	**2,94**	0,4984
1,55	0,4394	**1,86**	0,4686	**2,34**	0,4904	**2,96**	0,4985
1,56	0,4406	**1,87**	0,4693	**2,36**	0,4909	**2,98**	0,4986
1,57	0,4418	**1,88**	0,4699	**2,38**	0,4913	**3,00**	0,49865
1,58	0,4429	**1,89**	0,4706	**2,40**	0,4918	**3,20**	0,49931
1,59	0,4441	**1,90**	0,4713	**2,42**	0,4922	**3,40**	0,49966
1,60	0,4452	**1,91**	0,4719	**2,44**	0,4927	**3,60**	0,499841
1,61	0,4463	**1,92**	0,4726	**2,46**	0,4931	**3,80**	0,499928
1,62	0,4474	**1,93**	0,4732	**2,48**	0,4934	**4,00**	0,499968
1,63	0,4484	**1,94**	0,4738	**2,50**	0,4938	**4,50**	0,499997
1,64	0,4495	**1,95**	0,4744	**2,52**	0,4991	**5,00**	0,499997
1,65	0,4505	**1,96**	0,4750	**2,54**	0,4945		
1,66	0,4515	**1,97**	0,4756	**2,56**	0,4948		

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. 366с.

2. Контрольні завдання та методичні вказівки з теорії ймовірностей повиконанню модуля 14. Ч. 1. «Випакові події» для студентів денної форми навчання / В.С. Шебанін, М.О. Веремієнко, О.М. Мірошниченко та ін. Миколаїв: МДАА, 2002. 88с.

3. Теорія ймовірностей і математична статистика : підручник для студентів ВНЗ. Ч. 1 / М.А. Мартиненко, О.М. Нещадим, В.М. Сафонов. К. : ЦП "Компринт", 2016. 288с.

Навчальне видання

ВИЩА МАТЕМАТИКА.

МОДУЛЬ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ»

Методичні рекомендації

Укладачі: Бойчук Олена Володимирівна
Богданов Сергій Іванович
Борчик Євген Юрійович
Шептилевський Олексій Вікторович

Формат 60х84/16 Ум. друк. арк.
Тираж __ прим. Зам. №

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.