МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНІЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модуль: „Елементи лінійної алгебри”
для виконання самостійних робіт здобувачів вищої освіти освітнього ступеня „Молодший бакалавр” початкового рівня (короткий цикл) спеціальності 073 „менеджмент” денної форми навчання.

МИКОЛАЇВ – 2020

УДК 330.4:336.01
В41

Друкується за рішенням науково-методичної комісії інженерно-енергетичного факультету Миколаївського національного аграрного університету від 24.11.2020 р. , протокол № 3

Укладачі:

В.С. Шебанін – д-р. техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор, декан факультету менеджменту, Миколаївського національного аграрного університету;
І.П. Атаманюк – д-р техн. наук, професор, завідуючий кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Шептилевський – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
О.В. Бойчук – канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
С.І. Богданов – старший викладач кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;
Є.Ю. Борчик – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої та прикладної математики, Миколаївського національного аграрного університету;

Рецензент:

В.Д.Будак – д-р техн. наук, професор, ректор Миколаївського національного університету ім. В.О.Сухомлинського.

ВСТУП

Розрахунково-графічні роботи вміщують теоретичні питання (загальні для всіх) та задачі (для кожного студента кожної групи індивідуальні за рахунок параметра β – номера групи: β=1, 2, 3 і так далі). Теоретичні питання вивчаються на лекціях та детально розглядаються на практичних та лабораторних заняттях. Після цього, в міру того, як продовжується вивчення курсу, студенти самостійно розв'язувати задачі РГР, а викладач частинами їх перевіряє. Завершуючим етапом є захист РГР, на який студент подає всі перевірені та зараховані задачі, оформлені на аркушах А4. Під час захисту студент повинен знати та правильно відповідати на теоретичні питання, вміти розв'язувати задачі аналогічного типу та давати до них необхідні пояснення.

Завдання до самостійної роботи над розрахунково-графічними роботами № 1, 2 охоплюють розділи: „Елементи лінійної алгебри", „Елементи аналітичної геометрії на площині" та „Елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії у просторі", передбачені програмою з вищої математики для студентів факультету механізації та економічного факультету.

Розрахунково-графічна робота № 1.

1. Система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Теоретичні питання.

1. Основна та розширені матриці системи.
2. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.
3. Метод (формули) Крамера.
4. Матрична форма розв’язування системи лінійних рівнянь.
5. Метод Гаусса.

Розрахункові завдання.

Задача 1. В задачах **1.1 – 1.31** дослідити системи лінійних рівнянь:

1) $A \cdot X = B_1$; 2) $B \cdot X = B_2$; 3) $D \cdot X = B_3$.

Якщо система рівнянь сумісна та означена (тобто має єдиний розв’язок) знайти її розв’язок трьома способами:

а) за допомогою визначників (за формулами Крамера);

б) за допомогою оберненої матриці;

в) за методом виключення невідомих (способом Гауса).

У випадку, коли система рівнянь сумісна, але не означена (тобто має безліч розв’язків) знайти усі її розв’язків. В наведених завданнях β - номер групи.

1.1. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-5-\beta)x_3=1+\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-4-\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=5+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-5-\beta)x_3=1+\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-4-\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-10-2\beta)x_3=2+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-5-\beta)x_3=1+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-10-2\beta)x_3=-4-\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=5+\beta\end{cases}$

1.2. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(2+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=4+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta\\(2+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=3+\beta\\(2+2\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=8+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=8+\beta\end{cases}$

1.3. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-4-\beta\\(3+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-4-\beta\\(3+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-4-\beta\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=4+2\beta\end{cases}$

1.4. 1) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=8+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta\\(8+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=8+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta\\(8+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=-2-2\beta\end{cases}$

1.5. 1) $\begin{cases}(5+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-1-\beta\\(10+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=6+\beta\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(5+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(5+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=6+\beta\\(10+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=-2-2\beta\end{cases}$

1.6. 1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta\\(6+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta\\(6+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

1.7. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=8+\beta\\(4+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=8+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=2+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=8+\beta\\(4+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-1-\beta\end{cases}$

1.8. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\\(3+\beta)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\\(2+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=5+\beta\\(3+\beta)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\\(2+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=8+2\beta\end{cases}$

1.9. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(4+\beta)x_3=1+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(4+\beta)x_3=1+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=2+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=6+2\beta\end{cases}$

1.10. 1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=2+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-4-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=5+\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-4-\beta\end{cases}$

1.11. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=1+\beta\\(2+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-7-\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=5+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-7-\beta\\(2+\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=2+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=-7-\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=5+\beta\end{cases}$

1.12. 1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=-8-2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(6+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=\beta\end{cases}$

1.13. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=\beta\\(1+\beta)x_1+(-1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=6+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=\beta\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=4+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(4+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=\beta\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=6+\beta\end{cases}$

1.14. 1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta\\(5+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=-5-\beta\\(5+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-5-\beta\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(4+2\beta)x_3=6+2\beta\end{cases}$

1.15. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta\\(2+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=7+\beta\\(1+\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=7+\beta\\(1+\beta)x_1+(-4-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=7+\beta\\(2+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-2-2\beta\end{cases}$

1.16. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-3-\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=4+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-3-\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=2+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=-3-\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\end{cases}$

1.17. 1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta\\(6+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=-4-\beta\\(2+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(6+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=6+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-4-\beta\\(2+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=4+\beta\end{cases}$

1.18. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=2+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-4-2\beta)x_3=\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=7+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=7+\beta\end{cases}$

1.19. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=4+\beta\\(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=4+\beta\\(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=4+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=6+2\beta\end{cases}$

1.20. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=3+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-1-\beta\\(2+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=\beta\\(2+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=3+\beta\end{cases}$

1.21. 1) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(\beta)x_2+(5+\beta)x_3=8+\beta\\(8+2\beta)x_1+(2\beta)x_2+(10+2\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(\beta)x_3=-1-\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(\beta)x_2+(5+\beta)x_3=8+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(\beta)x_3=-1-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(4+\beta)x_1+(\beta)x_2+(5+\beta)x_3=8+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=3+\beta\\(8+2\beta)x_1+(2\beta)x_2+(10+2\beta)x_3=16+2\beta\end{cases}$

1.22. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=6+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=3+\beta\\(2+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

1.23. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=6+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(3+\beta)x_3=3+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=-1-\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\end{cases}$

1.24. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(\beta)x_3=2+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=2+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=1+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(-6-2\beta)x_3=2+\beta\\(\beta)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=1+\beta\\(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(\beta)x_3=2+\beta\\(\beta)x_1+(4+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\end{cases}$

1.25. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(\beta)x_3=4+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=6+2\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=3+\beta\\(1+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(\beta)x_3=4+\beta\\(\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(-4-\beta)x_3=3+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-2-2\beta)x_2+(-8-2\beta)x_3=4+\beta\\(\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

1.26. 1) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(2+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=5+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-6-\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-6-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(1+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(-1-\beta)x_3=2+\beta\\(2+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=5+\beta\\(2+2\beta)x_1+(6+2\beta)x_2+(-2-2\beta)x_3=4+2\beta\end{cases}$

1.27. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=13+\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2-\beta\\(4+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=21+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=13+\beta\\(3+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-2-\beta)x_3=-2+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=26+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=13+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=-2-\beta\\(4+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=21+\beta\end{cases}$

1.28. 1) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-12-\beta\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=1+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(-3-\beta)x_3=-12-\beta\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=2+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(3+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(6+2\beta)x_1+(-4-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=-12-\beta\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(2+\beta)x_3=1+\beta\end{cases}$

1.29. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(4+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=8+\beta\\(3+\beta)x_1+(-5-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(4+2\beta)x_1+(-6-2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=2+2\beta\\(3+\beta)x_1+(-5-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(1+\beta)x_3=1+\beta\\(4+\beta)x_1+(2+\beta)x_2+(3+\beta)x_3=8+\beta\\(8+2\beta)x_1+(4+2\beta)x_2+(6+2\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

1.30. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-7-\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=6+\beta\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(4+\beta)x_3=7+\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-7-\beta)x_3=2+\beta\\(4+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-14-2\beta)x_3=4+2\beta\\(4+\beta)x_1+(3+\beta)x_2+(4+\beta)x_3=7+\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(5+\beta)x_2+(-7-\beta)x_3=2+\beta\\(1+\beta)x_1+(-2-\beta)x_2+(5+\beta)x_3=6+\beta\\(4+2\beta)x_1+(10+2\beta)x_2+(-14-2\beta)x_3=7+\beta\end{cases}$

1.31. 1) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=7+\beta\\(4+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta\\(8+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

2) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=7+\beta\\(4+\beta)x_1+(-1-\beta)x_2+(3+\beta)x_3=1+\beta\\(4+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=14+2\beta\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2+\beta)x_1+(1+\beta)x_2+(1+\beta)x_3=7+\beta\\(4+2\beta)x_1+(2+2\beta)x_2+(2+2\beta)x_3=1+\beta\\(8+\beta)x_1+(-3-\beta)x_2+(6+\beta)x_3=-2-\beta\end{cases}$

Методичні рекомендації

<u>Розв'язання задачі 1.31.</u> Візьмемо $\beta = 4$, тоді задані системи будуть такі:

$$1)\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11 \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5 \\ 12x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -6 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11 \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5 \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 22 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11 \\ 8x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 5 \\ 12x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -6 \end{cases}$$

Запишемо матриці:

$$1)A = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{Vmatrix},\ B_1 = \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix};\quad 2)C = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & 10 & 10 \end{Vmatrix}, B_2 = \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ 22 \end{Vmatrix};$$

$$3)D = \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 12 & 10 & 10 \\ 12 & -7 & 10 \end{Vmatrix}, B_3 = \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix}$$

При обчисленні визначників квадратних матриць *A, C, D* будемо використовувати властивості визначників, наприклад, розкладання визначника на суму добутків елементів деякого стовпця (чи рядка) на їх відповідні алгебраїчні доповнення. При цьому, якщо за рахунок тотожних перетворень, які не змінюють величину визначника, зробити всі елементи рядка (чи стовпця) рівними нулю (крім, можливо, одного), то обчислення визначника *n*-го порядку можна звести до обчислення визначника *(n-1)*-го порядку. Так знаходимо

$$|A|=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 8 & -5 & 7\\ 12 & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 8 & -5 & 7\\ 0 & -17 & 0\end{vmatrix}=0\cdot A_{31}+(-17)\cdot A_{32}+0\cdot A_{31}=$$

$$=-17\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}6 & 5\\ 8 & 7\end{vmatrix}=(-17)\cdot(-1)\cdot[6\cdot 7-5\cdot 8]=17\cdot 2=34\neq 0$$

Тут, не змінюючи значення визначника, до елементів третього рядка додали відповідні елементи першого рядка, домножені на *(-2)*. Отриманий таким чином (з двома нулями в третьому рядку) визначник розклали за елементами цього 3-го рядка. Далі

$$|C|=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 8 & -5 & 7\\ 12 & 10 & 10\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}12 & 10 & 10\\ 8 & -5 & 7\\ 12 & 10 & 10\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

Тут всі елементи першого рядка визначника домножили на два (щоб величина визначника при цьому не змінилася, перед визначником поставили множник $\frac{1}{2}$). Але визначник матриці, у якого рівні два рядка (чи стовпця), дорівнює нулю.

$$|D|=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 12 & 10 & 10\\ 12 & -7 & 10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 5 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 12 & -7 & 10\end{vmatrix}=0.$$

Тут перший рядок визначника, помноживши на *(-2)*, додали до відповідних елементів другого рядка, після чого одержали визначник, у якого всі елементи другого рядка нульові. Визначник, який має нульовий рядок (чи стовпець), дорівнює нулю.

Таким чином перша система рівнянь, яка має визначник $|A|=\Delta=34\neq 0$ сумісна та визначена.

а) Знайдемо її розв'язок за формулами Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 5 & -5 & 7 \\ -6 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 16 & 0 & 12 \\ -6 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \\ -6 & -7 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot \{4 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 3 \cdot A_{23}\} =$$

$$= 4 \cdot \left\{ 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 11 & 5 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= 4 \cdot \{4 \cdot (-1) \cdot [5 \cdot 10 - 5(-7)] + 3 \cdot (-1) \cdot [11 \cdot (-7) - 5(-6)]\} =$$

$$= 4 \cdot \{4(50 + 35) - 3 \cdot (-77 + 30)\} = 4 \cdot (-340 + 141) = -796;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \\ 12 & -6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 8 & 5 & 7 \\ 0 & -28 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{31} + (-28) \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} =$$

$$= -28 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = (-28) \cdot (-1) \cdot (6 \cdot 7 - 5 \cdot 8) = 28 \cdot 2 = 56;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 14 & 0 & 16 \\ 0 & -17 & -28 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 5 & 11 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & -17 & -28 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \{6 \cdot A_{11} + 7 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31}\} =$$

$$= 2 \left\{ 6 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ -17 & -28 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ -17 & -28 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= 2 \cdot \{6 \cdot [0 \cdot (-28) - 8(-17)] - 7 \cdot [5 \cdot (-28) - 11(-17)]\} =$$

$$= 2 \cdot \{6 \cdot 136 - 7 \cdot (-140 + 187)\} = 2 \cdot (816 - 329) = 2 \cdot 487 = 974.$$

Тут кожний визначник $\Delta_з$, $з = 1,2,3$, складено з основного визначника Δ шляхом заміни елементів його i-го стовпця ($з = 1,2,3$) на елементи матриці-стовпця $\boldsymbol{B_1}$ (тобто вільних членів системи).

Таким чином можна знайти

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-796}{34} = -\frac{398}{17} \approx -23{,}412;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{56}{34} = \frac{28}{17} \approx 1{,}647;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{974}{34} = \frac{487}{17} \approx 28{,}647;$$

Підставляючи знайдений розв'язок $x_1 = -\dfrac{398}{17}$; $x_2 = \dfrac{28}{17}$; $x_3 = \dfrac{487}{17}$ в систему рівнянь, переконуємось, що його знайдено правильно:

$$6 \cdot \left(-\frac{398}{17}\right) + 5 \cdot \frac{28}{17} + 5 \cdot \frac{487}{17} = 11; \quad \frac{-2388 + 140 + 2435}{17} = 11; \quad \frac{187}{17} = 11;$$

$$8 \cdot \left(-\frac{398}{17}\right) - 5 \cdot \frac{28}{17} + 7 \cdot \frac{487}{17} = 5; \quad \frac{-3184 - 140 + 3409}{17} = 5; \quad \frac{85}{17} = 5;$$

$$12 \cdot \left(-\frac{398}{17}\right) - 7 \cdot \frac{28}{17} + 10 \cdot \frac{487}{17} = -6; \frac{-4776 - 196 + 4870}{17} = -6; \ -\frac{102}{17} = -6;$$

б) Знайдемо розв'язок цієї ж системи рівнянь (1) $AX = B_1$ матричним способом, тобто скориставшись формулою

$X = A^{-1} \cdot B_1$. Так як матриця A неособлива $(|A| = \Delta = 34 \neq 0)$, то обернена матриця A^{-1} існує і дорівнює

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left\|A_{ij}\right\|^{T} \quad \left(\tilde{A} = \left\|A_{ij}\right\|^{T}\right) \quad (*).$$

Алгебраїчні доповнення A_{ij} визначаємо через мінори за формулою

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} = -5 \cdot 10 - 7(-7) = -1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = -(8 \cdot 10 - 7 \cdot 12) =$$

$$= -(80 - 84) = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-7) - (-5) \cdot 12 =$$

$$= -56 + 60 = 4$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -7 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - (-7) \cdot 5 =$$

$$= 50 + 35 = 85$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & 10 \end{vmatrix} = 6 \cdot 10 - 12 \cdot 5 =$$

$$= 60 - 60 = 0$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 12 & -7 \end{vmatrix} = -\left(6 \cdot (-7) - 12 \cdot 5\right)$$

$$= -\left(-42 - 60 = 102\right)$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 - 5 \cdot (-5) =$$

$$= 35 + 25 = 60;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = -(6 \cdot 7 - 5 \cdot 8) =$$

$$= -(42 - 40) = -2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-5) - 5 \cdot 8 =$$

$$= -30 - 40 = -70;$$

Тому матриця, яка складена з алгебраїчних доповнень A_{ij} має такий вигляд

$$\left\|A_{ij}\right\| = \left\|\begin{matrix} -1 & 4 & 4 \\ -85 & 0 & 102 \\ 60 & -2 & -70 \end{matrix}\right\|, \text{ звідки } \quad \tilde{A} = \left\|A_{ij}\right\|^{T} = \left\|\begin{matrix} -1 & -85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & -70 \end{matrix}\right\|$$

Таким чином, згідно з формулою (*) маємо

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{34} \cdot \left\|\begin{matrix} -1 & -85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & -70 \end{matrix}\right\|.$$

Так як для двох взаємно обернених матриць A та A^{-1} справедливі рівності

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця, то виконуємо перевірку

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{34} \begin{Vmatrix} -1 & -85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & -70 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 8 & -5 & 7 \\ 12 & -7 & 10 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} (-1)\cdot 6 + (-85)\cdot 8 + 60 \cdot 12 \\ 4 \cdot 6 + 0 \cdot 8 + (-2) \cdot 1 \\ 4 \cdot 6 + 102 \cdot 8 + (-70) \cdot 12 \end{Vmatrix}$$

$$\begin{matrix} (-1)\cdot 5 + (-85)\cdot(-5) + 60 \cdot (-7) & (-1)\cdot 5 + (-85)\cdot 7 + 60 \cdot 10 \\ 4 \cdot 5 + 0 \cdot (-5) + (-2)\cdot(-7) & 4 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + (-2)\cdot 10 \\ 4 \cdot 5 + 102 \cdot (-5) + (-70)\cdot(-7) & 4 \cdot 5 + 102 \cdot 7 + (-70)\cdot 10 \end{matrix} \Bigg\|$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -6 - 680 + 720 & -5 + 425 - 420 & -5 - 595 + 600 \\ 24 + 0 - 24 & 20 + 0 + 14 & 20 + 0 - 20 \\ 24 + 816 - 840 & 20 - 510 + 490 & 20 + 714 - 700 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} 34 & 0 & 0 \\ 0 & 34 & 0 \\ 0 & 0 & 34 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тепер, використовуючи одержану обернену матрицю A^{-1}, знаходимо розв'язок системи рівнянь за допомогою оберненої матриці

$$X = A^{-1} \cdot B_1 \Leftrightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} -1 & 85 & 60 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 102 & 70 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 11 \\ 5 \\ -6 \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34} \cdot \begin{Vmatrix} (-1)\cdot 11 + (-85)\cdot 5 + 60 \cdot (-6) \\ 4 \cdot 11 + 0 \cdot 5 + (-2)\cdot(-6) \\ 4 \cdot 11 + 102 \cdot 5 + (-70)\cdot(-6) \end{Vmatrix} = \frac{1}{34} \begin{Vmatrix} -11 & -425 & -360 \\ 44 & 0 & 12 \\ 44 & 510 & 420 \end{Vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{34}\cdot\begin{Vmatrix}-796\\56\\974\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-398/17\\28/17\\487/17\end{Vmatrix}\Rightarrow\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-398/17\\28/17\\487/17\end{Vmatrix}$$

звідки $X_1=-\dfrac{398}{17};\ X_2=\dfrac{28}{17};\ X_3=\dfrac{487}{17}$

в) Знайдемо розв'язок системи рівнянь (1) способом виключення невідомих (способом Гаусса). Для цього складемо розширену матрицю системи, яку еквівалентними перетвореннями зводимо до ступінчатої матриці:

$$\left\|\begin{array}{ccc|c}6&5&5&11\\8&-5&7&5\\12&-7&10&-6\end{array}\right\|\begin{array}{l}\cdot(-2)\\ \\ +\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\left\|\begin{array}{cccc}6&5&5&11\\8&-5&7&5\\0&-17&0&-28\end{array}\right\|\begin{array}{l}\cdot(-4)\\ \cdot 3+\\ \cdot(-1)\end{array}\Leftrightarrow\left\|\begin{array}{ccc|c}6&5&5&11\\0&-35&1&-29\\0&17&0&28\end{array}\right|$$

Тут, спочатку перший рядок помножили на (-2) і додали до третього рядка. Потім елементи першого рядка помножили на (-4) і результати додали до відповідних елементів другого рядка, які попередньо помножили на 3. крім того, елементи третього рядка помножили на (-1). Згідно з одержаною останньою матрицею система рівнянь приймає вигляд

$$\begin{cases}6x_1+5x_2+5x_3=11,\\ \qquad 35x_2+x_3=-29,\\ \qquad\qquad 17x_3=28.\end{cases}\qquad(2)$$

Систему рівнянь (2) можна записати і так

$$\begin{cases}6x_1+5x_3+5x_2=11,\\ \qquad x_3-35x_2=-29,\\ \qquad\qquad 17x_2=28.\end{cases}\qquad(3)$$

а її розширена матриця буде мати вигляд

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -35 & -29 \\ 0 & 0 & 17 & 28 \end{array}\right\|$$ - таку матрицю називають ступінчатою матрицею. Тобто це така квадратна матриця (без четвертого стовпця вільних членів), у якої всі елементи, що розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Системи рівнянь *(3), (2)* та *(1)* – еквівалентні (тобто мають однаковий розв'язок), але на відміну від системи *(1)*, системи рівнянь *(2)* чи *(3)* легко досліджуються та розв'язуються.

Так, наприклад, з системи *(2)* або *(3)* знаходимо:

$$17x_2 = 28; \qquad x_2 = \frac{28}{17}; \qquad x_3 - 35x_2 = -29;$$

$$x_3 = -29 + 35x_2; \quad x_3 = -29 + 35 \cdot \frac{28}{17};$$

$$x_3 = \frac{-493 + 980}{17}; \quad x_3 = \frac{487}{17};$$

$$6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11; \quad 6x_1 = 11 - 5x_2 - 5x_3;$$

$$x_1 = \frac{11 - 5x_2 - 5x_3}{6} = \frac{11 - 5 \cdot \frac{28}{17} - 5 \cdot \frac{487}{17}}{6} =$$

$$= \frac{\frac{187 - 140 - 2435}{17}}{6} = -\frac{2388}{6 \cdot 17} = -\frac{398}{17}.$$

Таким чином маємо:

$$x_1 = -\frac{398}{17}; \quad x_2 = \frac{28}{17}; \quad x_3 = \frac{487}{17}.$$

У випадку другої та третьої систем рівнянь ($CX = B_2$ i $DX = B_3$), коли $|C| = |D| = 0$, треба продовжити дослідження систем. Це можна зробити, наприклад, якщо обчислити та порівняти ранги основної та розширеної матриць системи рівнянь. Практично ж зручніше використовувати метод Гауса. Так у випадку третьої системи рівнянь маємо:

$$CX = D_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 5, \\ 12x_1 - 7x_2 + 10x_3 = -6, \end{cases}$$

звідки

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 11 & 11 \\ 12 & 10 & 5 & 5 \\ 12 & -7 & -6 & -6 \end{array} \right\| \begin{array}{l} x(-2) \\ + \\ \end{array} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -17 \\ 12 & -7 & 10 & -6 \end{array} \right\|.$$

Тут елементи першого рядка помножили на *(-2)* і додали до відповідних елементів другого рядка. Очевидно, що рівність $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -17$ (друге рівняння) не може мати місце ні при яких значеннях невідомих x_1, x_2, x_3 звідки і випливає, що третя система рівнянь несумісна, тобто не має розв'язків.

У випадку другої системи рівнянь маємо:

$$CX = B_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 11, \\ 8x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 5, \\ 12x_1 + 10x_2 + 10x_3 = 20, \end{cases}$$

звідки

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 11 & 11 \\ 12 & 10 & 5 & 5 \\ 12 & -7 & -6 & -6 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ + \\ + \end{array} \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 14 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 5 & 11 \\ 14 & 0 & 12 & 16 \end{array} \right\|$$

Тут спочатку елементи першого рядка додали до відповідних елементів третього рядка, потім перший рядок помножили на *(-2)* і додали до елементів третього рядка. Отриманий нульовий третій рядок викреслили (тобто в такому випадку третім рівнянням системи можна знехтувати).

Таким чином з’ясували, що фактично маємо систему двох (а не трьох) рівнянь з трьома невідомими. Якщо позначити $x_3 = t$, де $t \in (-\infty; +\infty)$ - довільне дійсне число, то рівняння системи можна записати так

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5t = 11, \\ 14x_1 + 12t = 16 \,|: 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 11 - 5t, \\ 7x_1 = 8 - 6t, \end{cases}$$

звідки знаходимо (з другого рівняння) $x_1 = \frac{8}{7} - \frac{6t}{7}$,а з першого рівняння одержимо:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5t = 11, \\ 14x_1 + 12t = 16 \,|: 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 11 - 5t, \\ 7x_1 = 8 - 6t, \end{cases}$$

Неважко встановити, що формули $x_1 = \frac{8}{7} - \frac{6}{7}t,\ x_2 = \frac{29}{35} + \frac{1}{35}t,$ $x_3 = t$ описують безліч розв’язків системи рівнянь *(3)*. Дійсно, підставляючи ці значення в *(3)* переконуємось, що вони задовольняють рівнянням системи:

$$\begin{cases} 6 \cdot \left(\frac{8}{7} - \frac{6}{7}t \right) + 5 \cdot \left(\frac{29}{35} + \frac{1}{35}t \right) + 5t = 11, \\ 8 \cdot \left(\frac{8}{7} - \frac{6}{7}t \right) - 5 \cdot \left(\frac{29}{35} + \frac{1}{35}t \right) + 7t = 5, \\ 12 \cdot \left(\frac{8}{7} - \frac{6}{7}t \right) + 10 \cdot \left(\frac{29}{35} + \frac{1}{35}t \right) + 10t = 22, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{48}{7} - \frac{36}{7}t + \frac{29}{7} + \frac{1}{7}t + 5t = 11, \\ \frac{64}{7} - \frac{48}{7}t - \frac{29}{7} - \frac{1}{7}t + 7t = 5, \\ \frac{96}{7} - \frac{72}{7}t + \frac{58}{7} + \frac{2}{7}t + 10t = 22, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{77}{7} - \dfrac{35}{7}t + 5t = 11, \\ \dfrac{35}{7} - \dfrac{49}{7}t + 7t = 5, \\ \dfrac{154}{7} - \dfrac{70}{7}t + 10t = 22, \end{cases} \begin{cases} 11 - 5t + 5t = 11, \\ 5 - 7t + 7t = 5, \\ 22 - 10t + 10t, \end{cases} = 22 \Rightarrow \begin{cases} 11 = 11, \\ 5 = 5, \\ 22 = 22. \end{cases}$$

І так буде для кожного окремого конкретного розв'язку системи, наприклад, якщо

$$t = 0 : x_1 = \frac{8}{7},\ \ x_2 = \frac{29}{35}, x_3 = 0;$$

$$t = 1 : x_1 = \frac{2}{7},\ \ x_2 = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}, x_3 = 1;$$

$$t = -1 : x_1 = \frac{14}{7} = 2,\ \ x_2 = \frac{28}{35} = \frac{4}{5}, x_3 = -1;$$

і так далі.

Відповіді.

1. Перша система рівнянь $AX = B_1$ має єдиний розв'язок.

$$x_1 = -\frac{398}{17} = -23\frac{7}{17},\ \ x_2 = -\frac{28}{17} = -1\frac{11}{17}, x_3 = \frac{487}{17} = 28\frac{11}{17};$$

або

$$x_1 \approx -23{,}412,\ \ x_2 \approx -1{,}647, x_3 \approx 28{,}647.$$

2. Друга система рівнянь $CX = B_2$ має безліч розв'язків, які визначаються за формулами

$$x_1 = \frac{8}{7} - \frac{6}{7}t,\ \ x_2 = \frac{29}{35} + \frac{1}{35}t,\ \ \ x_3 = t, де \in (-\infty : +\infty).$$

3. Третя система рівнянь $DX = D_3$ розв'язків не має (несумісна).

2. Аналітична геометрія на площині.

Теоретичні питання.

1. Система прямокутних координат на прямій та площині. Найпростіші задачі.
2. Пряма на площині. Різні форми рівнянь прямої на площині.
3. Лінії другого порядку на площині: еліпс, гіпербола, парабола, коло.

Розрахункові завдання.

Задача 2. В задачах **2.1 – 2.31** задані координати вершин трикутника *ABC***.** Знайти:

1) довжина сторін *AB, BC* та *AC***;**

2) рівняння сторін *AB, AC, BC* та їх кутові коефіцієнти;

3) величину кута *B* в радіанах з точністю до двох знаків;

4) довжину бісектриси *BF* Внутрішнього кута *B*;

5) рівняння висоти *CD* та її довжину;

6) рівняння медіани *AE* та координати точки *P* перетину цієї медіани з висотою *CD*;

7) рівняння прямої *PL*, яка проходить через точку *P* паралельно до сторони *AB*;

8) рівняння та довжину перпендикуляра (висоти) *BN*, який проведено з вершини *B* на медіану *AE*;

9) координати точки *M*, розташованої симетрично до точки **A** відносно прямої *CD*;

10) Побудувати на міліметровому папері (формат *A4*) трикутник *ABC* та знайдені його елементи в системі координат *x0y*, взявши за одиницю масштабу 1 см.

2.1 $A(-6;3)$, $B(6+\beta;-6-\beta)$, $C(4;8)$.

2.2 $A(-7;-2)$, $B(5+\beta;-11-\beta)$, $C(9;11)$.

2.3 $A(-2;1)$, $B(10+\beta;-8-\beta)$, $C(14;14)$.

2.4 $A(-6;8)$, $B(6+\beta;-1-\beta)$, $C(10;21)$.

2.5 $A(-1;-2)$, $B(11+\beta;-11-\beta)$, $C(15;11)$.

2.6 $A(-10;5)$, $B(2+\beta;-4-\beta)$, $C(6;18)$.

2.7 $A(-1;1)$, $B(11+\beta;-8-\beta)$, $C(15;14)$.

2.8	$A(-10;4)$,	$B(2+\beta;-5-\beta)$,	$C(6;17)$.
2.9	$A(-8;4)$,	$B(4+\beta;-5-\beta)$,	$C(8;17)$.
2.10	$A(-6;-1)$,	$B(6+\beta;-10-\beta)$,	$C(10;12)$.
2.11	$A(-7;7)$,	$B(5+\beta;-2-\beta)$,	$C(3;12)$.
2.12	$A(-2;1)$,	$B(10+\beta;-8-\beta)$,	$C(8;6)$.
2.13	$A(-6;5)$,	$B(6+\beta;-4-\beta)$,	$C(4;10)$.
2.14	$A(2;-1)$,	$B(14+\beta;-10-\beta)$,	$C\ (12;4)$.
2.15	$A(-5;8)$,	$B(7+\beta;-1-\beta)$,	$C(5;13)$.
2.16	$A(-9;7)$,	$B(3+\beta;-2-\beta)$,	$C(1;12)$.
2.17	$A(-9;6)$,	$B(3+\beta;-3-\beta)$,	$C(1;11)$.
2.18	$A(-1;2)$,	$B(11+\beta;-7-\beta)$,	$C(9;7)$.
2.19	$A(-9;5)$,	$B(3+\beta;-4-\beta)$,	$C(1;10)$.
2.20	$A(-5;4)$,	$B(7+\beta;-5-\beta)$,	$C(5;9)$.
2.21	$A(-4;1)$,	$B(8+\beta;-8-\beta)$,	$C(12;14)$.
2.22	$A(-3;0)$,	$B(9+\beta;-9-\beta)$,	$C(13;13)$.
2.23	$A(-4;5)$,	$B(8+\beta;-4-\beta)$,	$C(12;18)$.
2.24	$A(-4;0)$,	$B(8+\beta;-9-\beta)$,	$C(12;13)$.
2.25	$A(-9;3)$,	$B(3+\beta;-6-\beta)$,	$C(7;16)$.
2.26	$A(-3;2)$,	$B(9+\beta;-7-\beta)$,	$C(13;15)$.
2.27	$A(-9;10)$,	$B(3+\beta;1+\beta)$,	$C(7;23)$.
2.28	$A(-11;0)$,	$B(1+\beta;-9-\beta)$,	$C(5;13)$.
2.29	$A(-4;8)$,	$B(8+\beta;-1-\beta)$,	$C(12;21)$.
2.30	$A(-3;10)$,	$B(9+\beta;1+\beta)$,	$C(7;15)$.
2.31	$A(-7;7)$,	$B(5+\beta;-4-\beta)$,	$C(9;18)$.

Методичні вказівки.

Розв'язання задачі 2.31. Нехай $\beta = 3$**,** тоді координати вершин трикутника ABC будуть такі:

$$A(-7;7), \qquad B(8;-7), \qquad C(9;18).$$

1. Відстань d між точками $A(x_1;y_1)$ та $B(x_1;y_2)$ визначається за формулою

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

Використовуючи (1), знаходимо довжину сторони *AB*:

$$d_{AB}=|AB|=\sqrt{(8-(-7))^2+((-7)-7)^2}=\sqrt{15^2+(-14)^2}$$
$$=\sqrt{225+196}=\sqrt{421\approx 20{,}52} \text{ см.}$$

Таким чином $|AB|\approx 20{,}5$ см.

Аналогічно знаходимо довжини сторін *BC* та *AC*:

$$d_{BC}=|BC|=\sqrt{(9-8)^2+(18+7)^2}=\sqrt{1+625}=\sqrt{326}\approx 25{,}02 \text{ см.}$$

$$d_{AB}=|AC|=\sqrt{(9+7)^2+(18-7)^2}=\sqrt{256+121}=\sqrt{377}\approx$$
$$\approx 19{,}46(см).$$

тобто наближено $|BC|\approx 25{,}0cm;|AC|\approx 19{,}5cm.$

2. Рівняння прямої (сторони), яка проходить через точки $A(x_1;y_1)$ та $B(x_2;y_2)$ має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_{2-}y_1} \qquad (2)$$

Підставляючи в (2) координати точок *A* та *B*, одержимо рівняння сторони *AB*:

$$\frac{x-(-7)}{8-(-7)}=\frac{y-7}{-7-7}; \qquad \frac{x+7}{15}=\frac{y-7}{-14};$$

$$-14(x+7)=15(y-7); -14x-98=15y-105;$$

$$14x+15y-7=0 \quad (AB).$$

Перевірка:

т. $A: 14(-7)+15\cdot 7-7=0; \qquad -98+105-7=0;$

$-98+98=0;$ $0=0;$

т. $B: 14\cdot 8+15\cdot(-7)-7=0;$ $112-105-7=0;$

$7-7=0;$ $0=0;$

Підставляючи в (2) координати точок A та C, дістанемо рівняння сторони AC:

$$\frac{x+7}{9+7}=\frac{y-7}{18-7}; \qquad \frac{x+7}{16}=\frac{y-7}{11};$$

$$11(x+7)=16(y-7); \qquad 11x+77=16y-112;$$

$$11x-16y+189=0 \qquad (AC).$$

Перевірка:

т. $A: 11(-7)-16\cdot 7+189=0;$ $-77-112+189=0;$

$-189+189=0;$ $0=0;$

т. $C: 11\cdot 9-16\cdot 18+189=0;$ $99-288+189=0;$

$99-99=0;$ $0=0;$

Аналогічно знаходимо рівняння сторони BC:

$$\frac{x-8}{9-8}=\frac{y+7}{18+7}; \qquad \frac{x-8}{1}=\frac{y+7}{25};$$

$$25(x-8)=(y+7)\cdot 1; \qquad 25x-200=y+7;$$

$$25x-y-207=0 \qquad (BC).$$

Перевірка:

т. B: $25\cdot 8-(-7)-207=0;$ $200+7-207=0;$

$200-200=0;$ $0=0;$

т. C: $25\cdot 9-18-207=0;$ $225-18-207=0;$

$207-207=0;$ $0=0;$

Розв'язавши кожне зрівнянь сторін (AB), (AC) та (BC) відносно Y, знаходимо їх рівняння у вигляді рівнянь прямих з кутовим коефіцієнтом:

$(\mathrm{AB})\,15y = -14x + 7;\quad Y = -\frac{14}{15}x + \frac{7}{15}$, звідки $\kappa_{AB} = -\frac{14}{15};$

$(AC)\,16Y = 11x + 189;\quad y = \frac{11}{16}x + \frac{189}{16,}$ звідки $\kappa_{AC} = \frac{11}{16};$

$(BC)\,25x - y - 207 = 0;\ \ y = 25x - 207,$ звідки $\kappa_{BC} = 25;$

3. Відомо, що тангенс кута φ між двома прямими, кутові коефіцієнти яких відповідно дорівнюють κ_1 та κ_2, обчислюються за формулою:

$$tg\varphi = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1 \cdot \kappa_2}. \qquad (3).$$

Шуканий кут B утворений прямими AB та BC, кутові коефіцієнти які знайдені: $\kappa_1 = \kappa_{BC} = 25; \kappa_2 = \kappa_{AB} = -\frac{14}{15}.$

Використовуючи формулу (3) дістанемо:

$$tgB = \frac{\kappa_{AB} - \kappa_{BC}}{1 + \kappa_{BC} \cdot \kappa_{AB}} = \frac{-\frac{14}{15} - 25}{1 + 25 \cdot \left(-\frac{14}{15}\right)} = \frac{(-14 - 25 \cdot 15) \cdot 3}{15(3 + 5 \cdot (-14))} =$$

$$= \frac{-14 - 375}{5 \cdot (3 - 70)} = \frac{-389}{-335} \approx 1{,}1612,$$

звідки $B \approx 49^0 16'$, або $B \approx 0{,}86$ радіана.

4. Довжину бісектриси BF знаходимо як відстань між двома точками B та F. Невідомі координати X, y точки F визначимо за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \qquad (4)$$

де відношення $\lambda = \frac{AF}{FC}$, і координати точок A та C – відомі:

$A(x_1; y_1)$, $C(x_2; y_2)$.

Використовуючи властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника дістанемо

$$\lambda = \frac{AF}{FC} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\sqrt{421}}{\sqrt{626}} = \sqrt{\frac{421}{626}} \approx \sqrt{0{,}6725} \approx 0{,}82.$$

Так як точка F ділить відрізок AC у відношенні $\lambda = 0{,}82$, то згідно з (4) знаходимо

$$x_F = \frac{-7 + 0{,}82 \cdot 9}{1 + 0{,}82} = \frac{-7 + 7{,}38}{1{,}82} = \frac{0{,}38}{1{,}82} \approx 0{,}209 \approx 0{,}21;$$

$$y_F = \frac{7 + 0{,}82 \cdot 18}{1 + 0{,}82} = \frac{7 + 14{,}76}{1{,}82} = \frac{21{,}76}{1{,}82} \approx 11{,}956 \approx 11{,}96.$$

Отже, точка Fмає координати $F(0{,}21; 11{,}96)$ (для побудови її на площині в системі координат $x0y$ візьмемо $x_F \approx 0{,}2$, $y_F \approx 11{,}96$.

Для знаходження довжини бісектриси BF використаємо формулу (1):

$$d_{BF} = |BF| = \sqrt{(0{,}21 - 8)^2 + (11{,}96 + 7)^2} =$$

$$\sqrt{(-7{,}79)^2+(18{,}96)^2}==\sqrt{60{,}6841+359{,}4816}=\sqrt{420{,}1657}$$

$\approx 20{,}498 \approx 20{,}5(см)$.

Отже $d_{BF} \approx 20{,}5 см.$

5. Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_0(x_0;y_0)$ в заданому напрямку κ, має вигляд

$$y-y_0=\kappa(x-x_0). \tag{5}$$

Висота *CD* перпендикулярна до сторони *AB*. Для того, щоб знайти кутовий коефіцієнт висоти *CD* будемо використовувати умову перпендикулярності прямих

$$\kappa_1\cdot\kappa_2=-1, \text{ або } \kappa_2=-\frac{1}{\kappa_1}. \tag{6}$$

Так як $\kappa_{AB}=-\frac{14}{15}$, $\kappa_{CD}=-\frac{1}{\kappa_{AB}}=\frac{15}{14}$. Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати точки $C:\ x_C=9, y_C=18$ та знайдений кутовий коефіцієнт висоти $\kappa=\kappa_{CD}=\frac{15}{14}$, дістанемо

$$y-18=\frac{15}{14}(x-9); \qquad 14(y-18)=15(x-9);$$

$$14y-252=15x-135; \qquad 15x-14y+117=0 \quad 9\ (CD)$$

Для того, щоб знайти довжину висоти *CD*, визначимо спочатку координати точки *D* – точки перетину прямих *AB* та *CD*, розв'язавши сумісно систему рівнянь

$$\begin{matrix}(AB)\\(CD)\end{matrix}\begin{cases}14x+15y-7=0 & \cdot 14\\ 15x-14y+117=0 & \cdot 15\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 196x + 210y - 98 = 0 \\ 225x - 210y + 1755 = 0 \end{cases} + \Rightarrow 421x + 1657 = 0;$$

$$421x = -1657; \quad x = \frac{-1657}{421} \approx -3{,}936; \quad x_D \approx -3{,}94;$$

$$14 \cdot (-3{,}94) + 15y - 7 = 0;$$

$$15y = 7 + 55{,}16; \quad 15y = 62{,}16; \quad y = \frac{62{,}16}{15} = 4{,}144;$$

$y_D \approx 4{,}14$ (необхідно зробити перевірку правильності знайденого розв'язку $x_D = -3{,}94$ та $y_D = 4{,}14$, підставляючи його замість *x* та *y* в обидва рівняння записаної системи).

Таким чином $D(-3{,}94; 4{,}14)$, але для побудови на рисунку візьмемо $x_D \approx -3{,}9$; $y_D \approx 4{,}1$. За формулою (1) знаходимо довжину висоти CD:

$$d_{CD} = |CD| = \sqrt{(-3{,}94 - 9)^2 + (4{,}14 - 18)^2} =$$

$$= \sqrt{(-12{,}94)^2 + (-13{,}86)^2} = = \sqrt{167{,}4436 + 192{,}0996} =$$

$$= \sqrt{359{,}5432} \approx 18{,}96(см).$$

Отже $[CD] \approx 19см$.

6. Для того, щоб знайти рівняння медіани *AE*, визначимо спочатку координати точки *E*, середини сторони *BC*. Для цього використовуємо формули ділення відрізка на дві рівні частини (дивись (4), де $\lambda = 1$):

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \qquad (7)$$

$$x_E = \frac{8 + 9}{2} = \frac{17}{2} = 8{,}5; \qquad y_E = \frac{-7 + 18}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5;$$

$E(8{,}5;5{,}5)$.

Підставляючи в (2) координати точок A та E, знаходимо рівняння медіани:

$$\frac{x+7}{8{,}5+7}=\frac{y-7}{5{,}5-7}; \qquad \frac{x+7}{15{,}5}=\frac{y-7}{-1{,}5};$$

$$-1{,}5\cdot(x+7)=15{,}5\cdot(y-7)\Big|\cdot(-2);$$

$$3(x+7)=-31(y-7); \qquad 3x+21=-31y+217;$$

$$3\,3x+31y-196=0 \qquad (AE).$$

Виконати перевірку, підставляючи в рівняння AE замість x та y координати точок A та E**.**

Для того, щоб знайти координати точки P-точки перетину висоти CD та медіани AE, розв'яжемо сумісно систему рівнянь:

$$\begin{matrix}(AE)\\(CD)\end{matrix}\begin{cases}3x+31y-196=0 \quad \cdot(-5)\\ 15x-14y+117=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-15x-155y+980=0,\\ 15x-14y+117=0,\end{cases}\Bigg| +\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -169y+1097=0;$$

$$169y=1097; \qquad y=\frac{1097}{169}\approx 6{,}49; \qquad 3x+31\cdot 6{,}49-196=0;$$

$$3x=196-201{,}19; \qquad 3x=-5{,}19; \qquad x=\frac{5{,}19}{3}\approx -1{,}73.$$

Отже $x_p\approx -1{,}7;$ $y=_p\approx 6{,}5;$ $P(-1{,}7;6{,}5)$.

7. Так як шукана пряма PL паралельна до сторони AB, то її кутовий коефіцієнт κ_{PL} буде дорівнювати кутовому коефіцієнту κ_{AB} прямої AB. Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати знайденої точки P, та кутовий коефіцієнт $\kappa = \kappa_{PL} = -\frac{14}{15}$, дістанемо

$$y - 6{,}5 = -\frac{14}{15}(x + 1{,}7) \Big| \cdot 10;$$

$$10y - 65 = -\frac{14}{15}(10x + 17) \Big| \cdot 15;$$

$$15 \cdot (10y - 65) = -14 \cdot (10x + 17);$$

$$150y - 975 = -140x - 238;$$

$140x + 150y - 637 = 0, (PL)$ де $PL \| AB$.

Перевірка: $140 \cdot (-1{,}7) + 150 \cdot 6{,}5 - 637 = 0;$

$$-238 + 975 - 637 = 0; \quad 238 + 238 = 0; \quad 0 = 0.$$

8. Пряма (висота) BN перпендикулярна до медіани (прямої) AE. Враховуючи умову перпендикулярності (6), знаходимо кутовий коефіцієнт BN:

$$(AE) \qquad 3x + 31y - 196 = 0; \qquad 31y = -3x + 196;$$

$$y = -\frac{3}{31}x + \frac{196}{31}, \qquad \kappa_{AE} = -\frac{3}{31};$$

$$\kappa_{BN} = -\frac{1}{\kappa_{AE}} = -\frac{1}{\left(-\frac{3}{31}\right)} = \frac{31}{3}.$$

Підставляючи в (5) замість x_0 і y_0 координати *B(8;-7)* та знайдений кутовий коефіцієнт $\kappa = \kappa_{BN} = \frac{31}{3}$, дістанемо

$$y + 7 = \frac{31}{3}(x - 8) \Big| \cdot 3;$$

$$3 \cdot (y + 7) = 31 \cdot (x - 8);$$

$$3y + 21 = 31x - 248;$$

$$31x - 3y - 269 = 0 \qquad (BN).$$

Довжину перпендикуляра (висоти) можна знаходити як відстань від точки $M^*(x^*; y^*)$ до прямої $Ax + Bx + C = 0$ за формулою

$$d_{BN} = |BN| = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (8)$$

Враховуючи, що потрібно обчислити довжину перпендикуляра *BN*, який дорівнює відстані від точки *B* до прямої *AE*: $3x + 31y - 196 = 0$, звідки *A=3*; *B=31*. Підставляємо в (8) замість $\tilde{o}^*$ і $\acute{o}^*$ координати $x_B = 8$, $y = -7$ та коефіцієнти *A=3; B=31*, дістанемо:

$$d_{BN} = |BN| = \frac{|3 \cdot 8 + 31 \cdot (-7) - 196|}{\sqrt{3^2 + 31^2}} = \frac{|24 - 217 - 196|}{\sqrt{9 + 961}} =$$

$$= \frac{|-389|}{\sqrt{970}} = \frac{389}{31{,}145} \approx 12{,}49(см).$$

Отже $|BN| \approx 12{,}5см.$

9. Так як пряма *AB* перпендикулярна до прямої *CD,* то шукана *M***,** яка розташована симетрично до точки *A***,** відносно прямої *CD*, знаходиться на прямій *AB*. Крім того, точка *D* є середина відрізка *AM*. Застосовуючи формули (7), знаходимо координати шуканої точки *M*:

$$x_D = \frac{x_A + x_M}{2}; \qquad -3{,}94 = \frac{-7 + x_M}{2};$$

$$x_M = 2\cdot(-3{,}94) + 7; \qquad X_M = -7{,}88 + 7 = -0{,}88;$$

$$x_M \approx -0{,}9.$$

$$y_D = \frac{y_A + y_M}{2}; \qquad 4{,}14 = \frac{7 + y_M}{2};$$

$$y_M = 2\cdot 4{,}14 - 7; \quad y_M = 8{,}28 - 7 = 1{,}28;$$

$$x \approx 1{,}3.$$

Отже M (-0,9;1,3).

10. Трикутник *ABC*, бісектриса *BF*, медіана *AE*, пряма *PL,* перпендикуляр *BN* та точка *M* побудовані в системі координат *X0У* на рис.1.

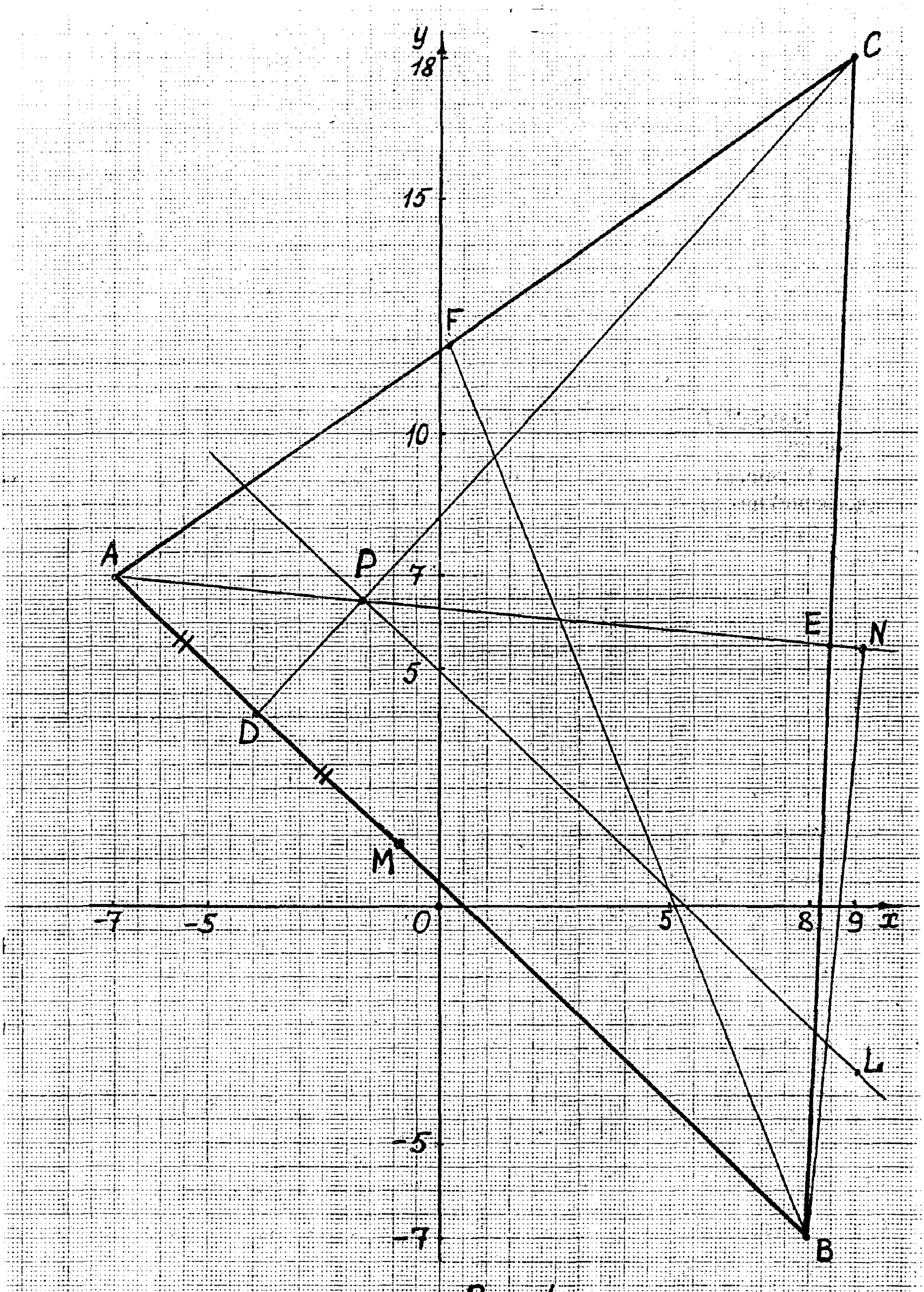


Рис.1

Розрахунково-графічна робота №2.

Аналітична геометрія в просторі.

Теоретичні питання.

1. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Розкладання вектора. Проекція вектора на вісь.
2. Площина як поверхня першого порядку в просторі та її рівняння.
3. Пряма лінія в просторі та її рівняння.
4. Кутові співвідношення між прямими, площинами, прямими та площинами.

Розрахункові завдання.

Задача 3. В задачах 3.1 – 3.31 задані координати вершин піраміди *ABCD*.

Потрібно:

1) записати вектори $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ в системі орт і знайти модулі (довжини) цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ в радіанах з точністю до двох знаків;

3) знайти проекцію вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;

4) знайти площу грані *ABC*;

5) знайти об’єм піраміди *ABCD*.

3.1 $A(-5-\beta;\beta;1+\beta)$, $B(-4;-2;3)$ $C(6;2;11)$, $D(3;4;9)$.

3.2 $A(1+\beta;-4-\beta;\beta)$, $B(2;-6;2)$, $C(12;-2;10)$, $D(9;0;8)$.

3.3 $A(-1-\beta;-2-\beta;-8-\beta)$ $B(0;-4;-6)$, $C(10;0;2)$, $D(7;2;0)$.

3.4 $A(\beta;2+\beta;-10-\beta)$, $B(1;0-8)$, $C(14;3;8)$, $D(11;5;6)$.

3.5 $A(3+\beta;1+\beta;-2-\beta)$, $B(4;-1;0)$, $C(14;3;8)$, $D(11;5;6)$.

3.6 $A(-8-\beta;3+\beta;-1-\beta)$, $B(-7;1;1)$, $C(3;5;9)$, $D(0;7;7)$.

3.7 $A(2+\beta;-1-\beta;-4-\beta)$, $B(3;-3;-2)$, $C(13;1;6)$, $D(10;3;4)$.

3.8 $A(-4-\beta;5+\beta;-5-\beta)$, $B(-3;3;-3)$, $C(7;7;5)$, $D(4;9;3)$.

3.9 $A(-2-\beta;-3-\beta;2+\beta)$, $B(-1;-5;4)$, $C(9;-1;12)$, $D(6;1;10)$.

3.10 $A(-3-\beta;4+\beta;-3-\beta)$, $B(-2;2;-1)$, $C(8;6;7)$, $D(5;8;5)$.

3.11 $A(2+\beta;-3-\beta;1+\beta)$, $B(6;1;-1)$, $C(4;8;-9)$, $D(2,-1,2)$.

3.12 $A(5+\beta;-1-\beta;-4-\beta)$, $B(9;3;-6)$, $C(7;10;-14)$, $D(5;1;-3)$.

3.13 $A(1+\beta;-4-\beta;\beta)$, $B(5;0;-2)$, $C(3;7;-10)$, $D(1;-2;1)$.

3.14 $A(-3-\beta;-6-\beta;2+\beta)$ $B(1;-2;0)$, $C(-1;5-8)$, $D(-3;-4;3)$

3.15 $A(-1-\beta;1+\beta;-5-\beta)$, $B(3;5;-7)$, $C(1;12;-15)$, 0

3.16 $A(-4-\beta;2+\beta;-1-\beta)$, $B(0;6;-3)$, $C(-2;13;-11)$ $D(-4;4;0)$.

3.17 $A(\beta;4+\beta;3+\beta)$, $B(4;8;1)$, $C(2;15-7)$, $D(0;6;4)$.

3.18 $A(-2-\beta;\beta;-2-\beta)$, $B(2;4;-4)$, $C(0;11;-12)$, $D(-2;2;-1)$.

3.19 $A(3+\beta;3+\beta-3-\beta)$, $B(7;7;-5)$, $C(5;14-13)$, $D(3;5;-2)$.

3.20 $A(4+\beta;-2-\beta;5+\beta)$, $B(8;2;3)$, $C(6;9;-5)$, $D(4;0;6)$.

3.21 $A(-4-\beta;1+\beta;2+\beta)$, $B(-3;1;4)$, $C(7;3;12)$, $D(4;5;10)$,

3.22 $A(2+\beta;-3-\beta;1+\beta)$, $B(3;-5;3)$, $C(13;-1;11)$, $D(10;1;9)$.

3.23 $A(\beta;-1-\beta;-7-\beta)$, $B(1;-3;-5)$, $C(11;1;3)$, $D(8;3;1)$.

3.24 $A(1+\beta;3+\beta;-9-\beta)$, $B(2;1;-7)$, $C(12;5;-1)$, $D(9;7;-1)$.

3.25 $A(4+\beta;2+\beta;-1-\beta)$, $B(5;0;1)$, $C(15;4;9)$, $D(12;6;7)$.

3.26 $A(-7-\beta;4+\beta;\beta)$, $B(-6;2;2)$, $C(4;6;10)$, $D(1;8;8)$.

3.27 $A(3+\beta;\beta;-3-\beta)$, $B(4;-2;-1)$, $C(14;2;7)$, $D(11;4;5)$.

3.28 $A(-3-\beta;6+\beta;-4-\beta)$ $B(-2;4;-2)$ $C(8;8;6)$, $D(5;10;4)$.

3.29 $A(-1-\beta;-2-\beta;3+\beta)$, $B(0;-4;5)$, $C(10;0;13)$, $D(7;2;11)$.

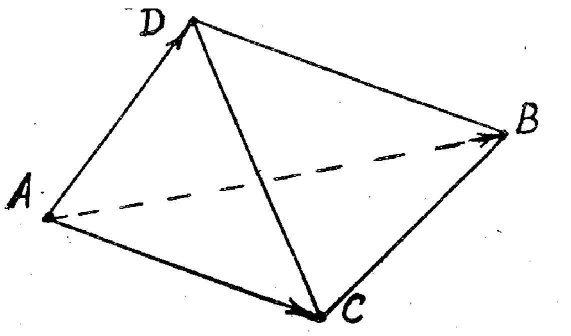
3.30 $A(-2-\beta;5+\beta;-2-\beta)$, $B(-1;3;0)$, $C(9;7;8)$, $D(6;9;6)$.

3.31 $A(2+\beta;2+\beta;1+\beta)$, $B(2;-2;3)$, $C(12;1;9)$, $D(1;2;6)$.

Методичні вказівки.

Розв'язання задачі 3.31. Візьмемо $\beta = 4$, тоді координати вершин піраміди *ABCD* будуть такі: A(6;6;5), $B(2;-2;3)$, $C(12;1;9)$, $D(1;2;6)$.

Побудуємо схематичний рисунок піраміди *ABCD*, не прив'язуючи до системи координат 0xyz.



1. Довільний вектор $\bar{a}$ можна записати в системі орт $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$ за слідкуючою формулою

$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}$ (1), де a_x, a_y, a_z - проекції вектора $\bar{a}$ на координатні осі *0x, 0y, 0z*; $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k},$ - одиничні вектори, які направлені так, як направлені осі *0x, 0y, 0z*. Якщо задані точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то проекції вектора $\bar{a} = \overline{M_1M_2}$ на координатні осі знаходяться за формулами:

$$a_x = x_2 - x_1; \qquad a_y = y_2 - y_1; \qquad a_z = z_2 - z_1. \qquad (2)$$

Тоді:

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\cdot \bar{i} + (y_2 - y_1)\cdot \bar{j} + (z_2 - z_1)\cdot \bar{k} \qquad (3).$$

Підставляючи в (3) координати точок *A* та *B*, одержимо вектор $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = (2-6)\cdot \bar{i} + (-2-6)\cdot \bar{j} + (3-5)\cdot \bar{k} = -4\cdot \bar{i} - 8\cdot \bar{j} - 2\cdot \bar{k}.$$

Аналогічно, підставляючи в (3) координати точок A та C, знаходимо вектор $\overline{AC}$:

$$\overline{AC} = (12-6)\cdot \bar{i} + (1-6)\cdot \bar{j} + (9-5)\cdot \bar{k} = 6\cdot \bar{i} - 5\cdot \bar{j} + 4\cdot \bar{k}\,.$$

Підставляючи в (3) координати точок A та D, знаходимо вектор $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = (1-6)\cdot \bar{i} + (2-6)\cdot \bar{j} + (6-5)\cdot \bar{k} = -5\cdot \bar{i} - 4\cdot \bar{j} + 1\cdot \bar{k}\,.$$

Якщо вектор $\bar{a}$ задано в системі орт (1), то його можна записати в координатній формі так

$$\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}.$$

Отже знайдені вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ мають такі координати

$$\overline{AB} = \{-4;-8;-2\};$$

$$\overline{AC} = \{6;-5;4\};$$

$$\overline{AD} = \{-5;-4;1\}.$$

Якщо вектор $\bar{a}$ задано формулу (1), або (4), то його модуль (довжина) обчислюється за формулою

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (5)$$

Застосовуючи формулу (5) обчислюємо модулі знайдених векторів $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+64+4} = \sqrt{84} \approx 9{,}17;$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{6^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{36+25+16} = \sqrt{77} \approx 8{,}77;$$

$$|\overline{AD}| = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{25+14+1} = \sqrt{42} \approx 6{,}48.$$

Отже $|\overline{AB}| \approx 9{,}2$ лін. од.; $|\overline{AC}| \approx 8{,}8$ лін. од.; $|\overline{AD}| \approx 6{,}5$ лін. од.

2. Так як скалярний добуток двох векторів $\overline{a}$ та $\overline{b}$ дорівнює добутку їх довжин, помноженому на косинус кута між ними, тобто

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| = cos\,\beta,$$

то косинус кута β між двома векторами $\overline{a}$ та $\overline{b}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на добуток їх модулів

$$\cos\beta = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}$$

Якщо координати векторів-співмножників відомі $\overline{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ та $\overline{b} = \{b_x; b_y; b_z\}$ то їх скалярний добуток можна знайти за формулою

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \qquad (7).$$

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ за формулою (7):

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (-4) \cdot 6 + (-8) \cdot (-5) + (-2) \cdot 4 = -24 + 40 - 8 = 8.$$

Модулі цих векторів уже знайдені:

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{84},\qquad \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{77}.$ Отже за формулою (6) дістанемо:

$$cos\,\beta = cos\,A = \frac{8}{\sqrt{84} \cdot \sqrt{77}} = \frac{8}{\sqrt{6468}} \approx \frac{8}{80{,}42388} \approx 0{,}0995.$$

Так як $cos\,A \approx 0{,}0995,$ то $A \approx 84^0 17'$, або $A \approx 1{,}4711$ радіана.

3. Проекція вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$ (тобто на вісь, яка направлена так як вектор $\overline{a}$) знаходиться за формулою

$$ПР_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot cos\,\beta.$$

Враховуючи формулу (6) для знаходження $cos\,\beta$, дістанемо

$$ПР_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}| \cdot \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|},$$ звідки

$$ПР_{\bar{a}}\bar{b} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} \qquad (8)$$

Отже проекція вектора $\overline{AD}$ на $\overline{AB}$ дорівнює скалярному добутку цих векторів, поділеному на модуль вектора $\overline{AB}$:

$$ПР_{\overline{AB}}\overline{AD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\overline{AB}|} = \frac{(-4)\cdot(-5)+(-8)\cdot(-4)+(-2)\cdot 1}{\sqrt{84}} =$$

$$= \frac{20+32-2}{\sqrt{84}} \approx \frac{40}{9{,}165} \approx 4{,}36.$$

Остаточно $ПР_{\overline{AB}}\overline{AD} \approx 4{,}4$ лін. од.

4. Площа грані ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$. Позначимо векторний добуток вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AC}$ через вектор $\overline{AM}$:

$$\overline{AM} = \overline{AB} \times \overline{AC}.$$

Тоді, виходячи з геометричного змісту модуля векторного добутку двох векторів, величина модуля вектора $\overline{AM}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, а площа грані ABC буде дорівнювати половині модуля вектора $\overline{AM}$:

$$S_{ABFC} = |\overline{AM}|, \;\; S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AM}|.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$

$$\overline{AM}=\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -4 & -8 & -2\\ 6 & -5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\bar{i}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-8 & -2\\ -5 & 4\end{vmatrix}+\bar{j}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 6 & 4\end{vmatrix}+$$

$$+\bar{k}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-4 & -8\\ 6 & -5\end{vmatrix}=\bar{i}(-32-10)-\bar{j}\cdot(-16+12)+\bar{k}\cdot(20+48)=$$

$$=-42\cdot\bar{i}+4\cdot\bar{j}+68\cdot\bar{k}.$$

Таким чином $\overline{AM}=\{-42;4;68\}$, а його модуль дорівнює

$$\left|\overline{AM}\right|=\sqrt{(-42)^2+4^2+68^2}=\sqrt{1764+16+4624}=\sqrt{6404}=80{,}02.$$

Отже $S_{ABFC}\approx 80{,}02$ кв.од., звідки

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{6404}\approx\frac{1}{2}\cdot 80{,}02\approx 40{,}01 \text{ кв.од.}$$

5. Об’єм паралелепіпеда, побудованого на трьох не компланарних векторах чисельно дорівнює абсолютній величині їх мішаного добутку:

$$V=\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|,$$

а об’єм піраміди дорівнює шостій частині від об’єму паралелепіпеда

$$V_{піраміди}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\right|.$$

Обчислимо мішаний добуток $(\overline{AB}x\overline{AC})\cdot\overline{AD}$;

$$(\overline{AB}x\overline{AC})\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-4 & -8 & -2\\ 6 & -5 & 4\\ -5 & -4 & 1\end{vmatrix}\begin{array}{l} +\\ +\\ \times(-4)\end{array}\ \times 2 =$$

$$=\begin{vmatrix}-14 & -16 & 0\\ 26 & 11 & 0\\ -5 & -4 & 1\end{vmatrix}=0\cdot A_{13}+0\cdot A_{23}+1\cdot A_{33}=A_{33}=$$

$$=(-1)^{3+3}\cdot M_{33}=\begin{vmatrix}-14 & -16 & 0\\ 26 & 11 & 0\\ -5 & -4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-14 & -16\\ 26 & 11\end{vmatrix}=$$

$$=(-14)\cdot 11-(-16)\cdot 26=-154+416=262$$

Отже об'єм V паралелепіпеда дорівнює V=262 куб.од.,

а об'єм піраміди $АВСД$ $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot 262\approx 43{,}67$ куб. одиниць.

<u>Задача 4.</u> В задачах 4.1-4.31 задані координати точок А, В та С. Потрібно:

1) записати канонічні рівняння прямої АВ;
2) записати рівняння площини Q, яка проходить через точку С, перпендикулярно до прямої АВ та знайти точку М перетину цієї площини з прямою АВ;
3) записати рівняння прямої, яка проходить через точку В паралельно до площини Q, як лінію перетину двох площин;
4) знайти точку N, яка симетрична для точки С відносно прямої АВ;

5) знайти відстань від точки С до прямої АВ.

4.1	$A(5+\beta;1+\beta;7+\beta)$,	$B(9;3+\beta;3)$,	$C(6+\beta;\beta;3+\beta)$.
4.2	$A(1+\beta;4+\beta;5+\beta)$,	$B(5;6+\beta;1)$,	$C(2+\beta;3+\beta;1+\beta)$.
4.3	$A(4+\beta;-1-\beta;9+\beta)$,	$B(8;1+\beta;5)$,	$C(5+\beta;-2-\beta;5+\beta)$.
4.4	$A(2+\beta;\beta;8+\beta)$,	$B(6;2+\beta;4)$,	$C(3+\beta;-1-\beta;4+\beta)$.
4.5	$A(-2-\beta;2+\beta;3+\beta)$,	$B(2;4+\beta;-1)$,	$C(-1-\beta;1+\beta;-1-\beta)$.
4.6	$A(-1-\beta;4+\beta;2+\beta)$,	$B(3;6+\beta;-2)$,	$C(\beta;3+\beta;-2-\beta)$.
4.7	$A(-2-\beta;2+\beta;10+\beta)$,	$B(2;4+\beta;6)$,	$C(1-1\beta;1+\beta;6+\beta)$.
4.8	$A(3+\beta;6+\beta;2+\beta)$,	$B(7;8+\beta;-2)$,	$C(4+\beta;5+\beta;-2-\beta)$.
4.9	$A(6+\beta;-2-\beta;11+\beta)$,	$B(10;\beta;7)$,	$C(7+\beta;-3-\beta;7+\beta)$.
4.10	$A(3+\beta;3+\beta;2+\beta)$,	$B(7;5+\beta;-2)$,	$C(4+\beta;2+\beta;-2-\beta)$.
4.11	$A(3+\beta;-1-\beta;5+\beta)$,	$B(7;1+\beta;1)$,	$C(4+\beta;-2-\beta;1+\beta)$.
4.12	$A(-1-\beta;2+\beta;3+\beta)$,	$B(3;4+\beta;-1)$,	$C(\beta;1+\beta;-1-\beta)$.
4.13	$A(2+\beta;-3-\beta;7+\beta)$,	$B(6;-1-\beta;3)$,	$C(3+\beta;-4-\beta;3+\beta)$.
4.14	$A(\beta;-2-\beta;6+\beta)$,	$B(4;\beta;2)$,	$C(1+\beta;-3-\beta;2+\beta)$.
4.15	$A(-3-\beta;1+\beta;2+\beta)$,	$B(1;3+\beta;-2)$,	$C(-2-\beta;\beta;-2-\beta)$.
4.16	$A(-2-\beta;3+\beta;1+\beta)$,	$B(2;5+\beta;-3)$,	$C(-1-\beta;2+\beta;-3-\beta)$.
4.17	$A(-4-\beta;\beta;8+\beta)$,	$B(0;2+\beta;4)$,	$C(-3-\beta;-1-\beta;4+\beta)$.
4.18	$A(1+\beta;4+\beta;\beta)$,	$B(5;6+\beta;-4)$,	$C(2+\beta;3+\beta;-4-\beta)$.
4.19	$A(4+\beta;-4-\beta;9+\beta)$,	$B(8;-2-\beta;5)$,	$C(5+\beta;-5-\beta;5+\beta)$.
4.20	$A(5+\beta;5+\beta;4+\beta)$,	$B(9;7+\beta;0)$,	$C(6+\beta;4+\beta;\beta)$.
4.21	$A(1+\beta;-1-\beta;3+\beta)$,	$B(5;-1-\beta;-1)$,	$C(2+\beta;-4-\beta;-1-\beta)$.
4.22	$A(-3-\beta;\beta;1+\beta)$,	$B(1;2+\beta;-3)$,	$C(-2-\beta;-1-\beta;-3-\beta)$.
4.23	$A(1+\beta;-2-\beta;6+\beta)$,	$B(5;-2-\beta;2)$,	$C(2+\beta;-5-\beta;2+\beta)$.
4.24	$A(1+\beta;-1-\beta;7+\beta)$,	$B(5;1+\beta;3)$,	$C(2+\beta;-2-\beta;3+\beta)$.
4.25	$A(-5-\beta;-1-\beta;\beta)$,	$B(-1;1+\beta;-4)$,	$C(-4-\beta;-2-\beta;-4-\beta)$.
4.26	$A(-3-\beta;2+\beta;\beta)$,	$B(1;4+\beta;-4)$,	$C(-2-\beta;1+\beta;-4-\beta)$.
4.27	$A(-3-\beta;1+\beta;9+\beta)$,	$B(1;3+\beta;5)$,	$C(-2-\beta;\beta;5+\beta)$.
4.28	$A(-1-\beta;2+\beta;-2-\beta)$,	$B(3;4+\beta;-6)$,	$C(\beta;1+\beta;-6-\beta)$.
4.29	$A(2+\beta;-6-\beta;7+\beta)$,	$B(5;-4-\beta;3)$,	$C(3+\beta;-7-\beta;7+\beta)$.
4.30	$A(3+\beta;3+\beta;2+\beta)$,	$B(7;5+\beta;-2)$,	$C(4+\beta;2+\beta;-2-\beta)$.
4.31	$A(4+\beta;4+\beta;3+\beta)$,	$B(10;2+\beta;0)$,	$C(7+\beta;4+\beta;2+\beta)$.

Методичні вказівки.

Розв’язання задачі 4.31. Візьмемо $\beta = 5$, тоді координати точок *A, B і C* будуть такі:

$$A(9;9;8), \quad B(10;7;0) \quad C(12;9;7).$$

1. Канонічні рівняння прямої в просторі, яка проходить через точки $A(x_1;y_1;z_1)$ та $B(x_2;y_2;z_2)$ мають вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (1)$$

Підставляючи в (1) координати точок *A* та *B*, дістанемо

$$\frac{x-9}{10-9}=\frac{y-9}{7-9}=\frac{z-8}{0-8};\frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8};\ (AB)$$

Тут $\bar{a}_1=(1;-2;-8)$- спрямовуючий вектор прямої *AB*.

2. Запишемо рівняння площини Q в загальному вигляді

$A_x + B_y + C_z + D = 0.$

Якщо площина проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, то її рівняння можна записати так:

$A(x - x_0)+D(y - y_0)+C(z - z_0)= 0.$ (2) де $\bar{n}=(A;B;C)$- нормальний вектор площини, який перпендикулярний до площини.

Так як відшукувана площина Q перпендикулярна до прямої *AB*, то нормальний вектор $\bar{n}$ такої площини буди колінеарним спрямовуючому вектору $\bar{a}_1$ прямої *AB*, а тому можна взяти взагалі $\bar{n}=\bar{a}=(1;-2;-8)$. Замінимо коефіцієнти *A, B, C* в рівнянні (2) числами 1, -2 та -8 і підставимо замість $x_0;y_0;z_0$ координати точки $C(12;9;7)$, дістанемо

$$1\cdot(x-12)+(-2)\cdot(y-9)+(-8)\cdot(z-7)=0,$$

$$x-12-2y+18-8z+56=0 \qquad (3).$$

$$(Q)\; x-2y-8z+62=0$$

Перевірка:

т. С:

$$12-2\cdot 9-8\cdot 7+62=0;\ 12-18-56+62=0;$$
$$12-18+6=0; 0=0.$$

Отже точка $C \in Q$.

Визначимо координати точки *M* перетину площини *Q* з прямою *AB*. Для цього спочатку запишемо параметричні рівняння прямої *AB*. Нехай

$$\frac{x-9}{1}=\frac{y-9}{-2}=\frac{z-8}{-8}=t,$$

де *t* – деякий параметр, звідки

$$\frac{x-9}{1}=t; \frac{y-9}{-2}=t; \frac{z-8}{-8}=t,$$

тобто

$$x=t+9; y=-2t+9; z=-8t+8 \qquad (4)$$

Підставляючи (4) в (3) знаходимо значення *t*, при якому точка прямої *AB* буде належати і площині *Q*:

$$t+9+4t-18+64t-64+62=0;$$
$$69t-11=0; 69t=11; t=\frac{11}{69}.$$

Підставляючи в (4) $t=\frac{11}{69}$, знаходимо координати точки *M* перетину прямої *AB* з площиною *Q*:

$$x_M = \frac{11}{69} + 9 = \frac{11 + 621}{69} = \frac{632}{69} = 9{,}16;$$
$$y_M = -\frac{22}{69} + 9 = \frac{-22 + 621}{69} = \frac{599}{69} = 8{,}68;$$
$$z_M = -\frac{88}{69} + 8 = \frac{-88 + 552}{69} = \frac{464}{69} = 6{,}72.$$

Виконати перевірку, підставивши значення $\frac{632}{69}$, $\frac{599}{69}$, $\frac{464}{69}$ замість x, y, z в канонічні рівняння прямої AB та в рівняння (3) площини Q і отримати відповідні рівності (тотожності).

Отже $M\left(\frac{632}{69};\frac{599}{69};\frac{464}{69}\right)$, або $M\,(9{,}16;8{,}68;6{,}72)$.

3. Канонічні рівняння прямої в просторі мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{5}$$

де $x_0; y_0; z_0$ – координати точки, через яку проходить пряма (5); m, l, p – координати спрямовуючого вектора $\overline{a}$ цієї прямої: $\overline{a} = (m; l; p)$. За умовою пряма проходить через точку $B(10;7;0)$ паралельно до площини Q (3) з нормальним вектором $\overline{n} = (1;-2;-8)$. Так як нормальний вектор площини $\overline{n}$ і спрямовуючий вектор $\overline{a_2}$ прямої, паралельної до цієї площини, взаємно перпендикулярні (рис.2), то їх скалярний добуток дорівнює нулю $\overline{n} \cdot \overline{a_2} = 0$, де $a_2 = (m_2; l_2; p_2)$, звідки

$$1 \cdot m_2 + (-2) \cdot l_2 + (-8) \cdot p_2 = 0; m_2 - 2l_2 - 8p_2 = 0,$$
$$m_2 = 2l_2 + 8p_2.$$

Візьмемо наприклад, $l_2 = -2$ та $p_2 = 1$, тоді $m_2 = 2\cdot(-2)+8\cdot 1 = 4$. Отже, маємо $\overline{a_2} = (4;-2;1)$.

Підставляючи в (5) замість $x_0; y_0; z_0$ координати точки *B*: $x_B = 10; y_B = 7; z_B = 0$ та замість m, l, p числа 4; -2; 1 дістанемо канонічні рівняння шуканої прямої *BD*, паралельної до площини *Q*:

$$\frac{x-10}{4} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z-0}{1}; (BD)\frac{x-10}{4} = \frac{y-7}{-2} = z. \qquad (6)$$

Прирівнюючи попарно вирази в рівняннях (6), запишемо відшукувань рівняння прямої *BD*, як лінію перетину двох площин π_1 та π_2:

$$\begin{cases} \dfrac{x-10}{4} = \dfrac{z}{1} \\ \dfrac{y-7}{-2} = \dfrac{z}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\cdot(x-10) = 4z; \\ 1\cdot(x-2) = -2z; \end{cases}$$

$$(BD)\begin{cases} x - 4z - 10 = 0, (\pi_1) \\ y + 2z - 2 = 0, (\pi_2) \end{cases}$$

4. Так як пряма *AB* перпендикулярна до площини *Q*, то будь-яка пряма, яка розташована в цій площині, буде перпендикулярна до прямої *AB*. Отже пряма *CM* перпендикулярна до прямої *AB* (рис.2), а тому шукана точка *N*, яка розташована симетрично до точки *C*, відносно прямої *AB*, находиться на прямій *CM*. Пряма *CM* (або *CN*) розташована в площині *Q*, крім того, точка *M* є середина відрізка *CN*. Застосовуючи формули для знаходження координат точки, яка ділить відрізок на дві рівні частини (в просторі)

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}, \tag{7}$$

знаходимо координати шуканої точки N:

$$x_M=\frac{x_C+x_N}{2};\quad x_N=2x_M-x_C=2\cdot\frac{632}{69}-12;$$

$$x_N=\frac{1264-828}{69};\ x_N=\frac{436}{69}\approx 6{,}32;$$

$$y_M=\frac{y_C+y_N}{2};\quad y_N=2y_M-y_C=2\cdot\frac{599}{6}-9;$$

$$y_N=\frac{1198-621}{69};\ y_N=\frac{577}{69}\approx 8{,}26;$$

$$z_M=\frac{z_C+z_N}{2};\quad z_N=2z_M-z_C=2\cdot\frac{464}{69}-7;$$

$$z_N=\frac{928-483}{69};\ z_N=\frac{445}{69}\approx 6{,}44.$$

Підставляючи знайдені координати x_N, y_N, z_N замість x, y, z в рівняння площини (3) зробимо перевірку, чи належить точка N площині Q:

$$\frac{436}{69}-2\cdot\frac{577}{69}=8\cdot\frac{445}{69}+62=0;$$

$$\frac{436-1154-3560}{69}+62=0;\frac{-4278}{69}+62=0;$$

$$-62+62=0;0=0.$$

Отже знайдена точка $N\in Q$ і має координати:

$N\left(\frac{436}{69};\frac{576}{69};\frac{445}{69}\right)$, або $N\,(6{,}32;8{,}32;6{,}44)$.

5. Для того, щоб знайти відстань від точки *C* до прямої *AB*, достатньо обчислити відстань від точки *C(12,9,7)* до точки перетину $M\left(\frac{632}{69};\frac{599}{69};\frac{464}{69}\right)$. Дійсно, так як пряма *AB* перпендикулярна до площини Q, то відшукувана відстань дорівнює довжині перпендикуляра СМ ($CM \perp AB$).

Отже маємо

$$|CM| = \sqrt{\left(\frac{632}{69}-12\right)^2+\left(\frac{599}{69}-9\right)^2+\left(\frac{464}{69}-7\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(-196)^2}{69^2}+\frac{(-22)^2}{69^2}+\frac{(-19)^2}{69^2}} = \sqrt{\frac{38416+484+361}{69^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{39261}}{69} \approx \frac{198{,}1439}{69} \approx 2{,}87 \ (\textit{лін.одиниць}).$$

Пряма *AB*, площина *Q*, точки *M* та *N*, пряма *BD*, площини π_1 та π_2, які її визначають, побудовані на рис.2.

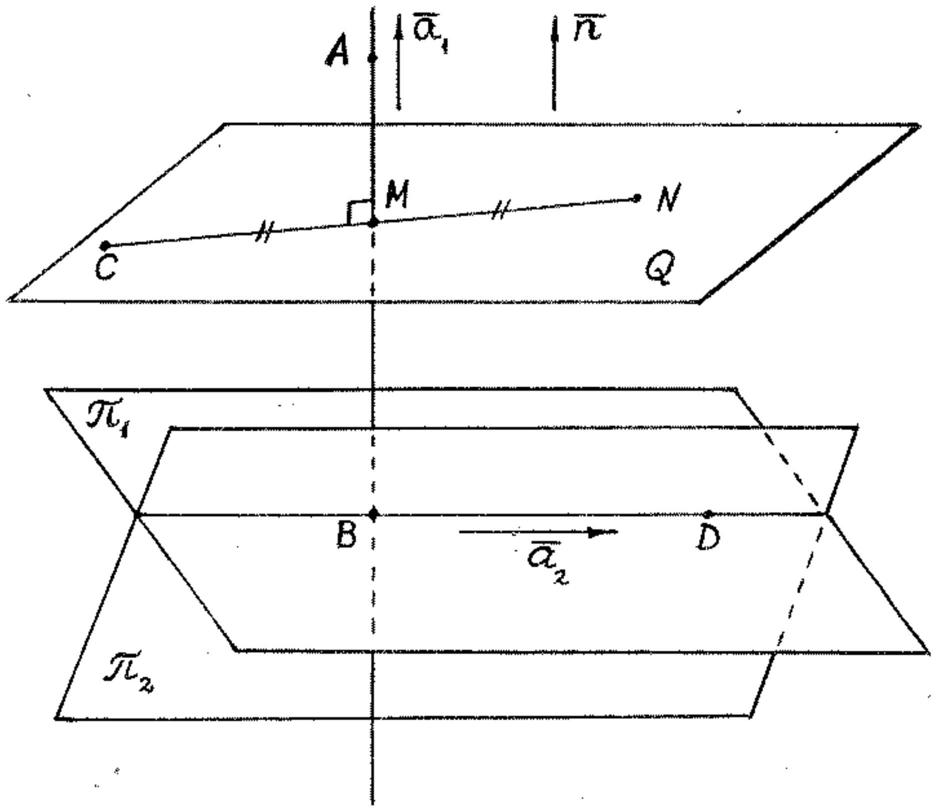


Рис.2

<u>Задача 5.</u> В задачах 5.1-5.31 задані координати точок *A, B, C, D* та *M*.

Потрібно знайти:

1) рівняння площини *Q*, яка проходить через три точки *A, B* та *C;*
2) канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку *M*, перпендикулярно до площини *Q;*
3) точки N, N_1, N_2, N_3 перетину здобутої прямої з площиною *Q* та з координатними площинами *xOy, xOz, yOz*.
4) відстані від точок *M* та *D* до площини *Q*;
5) координати точки *P*, яка симетрична до точки *M* відносно площини *Q*.

5.1	$A(\beta;-2+\beta;-1+\beta)$;	$B(2+\beta;4+\beta;-2+\beta)$;	$C(3+\beta;2+\beta;\beta)$;
	$D(14+\beta;-10+\beta;-13+\beta)$	$M(-11+\beta;8+\beta;10+\beta)$	
5.2	$A(-1+\beta;\beta;-2+\beta)$;	$B(-2+\beta;4+\beta;-5+\beta)$;	$C(7+\beta;2+\beta;5+\beta)$;
	$D(17+\beta;-7+\beta;-10+\beta;)$	$M(-6+\beta;7+\beta;8+\beta)$;	
5.3	$A(4+\beta;\beta;3+\beta)$;	$B(-1+\beta;2+\beta;-3+\beta)$;	$C(2+\beta;\beta;1+\beta)$;
	$D(15+\beta;-11+\beta;-10+\beta)$	$M(-12+\beta;1+\beta;2+\beta)$	
5.4	$A(8+\beta;7+\beta;4+\beta)$;	$B(2+\beta;1+\beta;1+\beta;)$	$C(6+\beta;1+\beta;5+\beta)$;
	$D(16+\beta;-10+\beta;-11+\beta)$	$M(-10+\beta;8+\beta;8+\beta)$;	
5.5	$A(5+\beta;8+\beta;\beta)$;	$B(2+\beta;4+\beta;-1+\beta)$;	$C(3+\beta;\beta;2+\beta)$;
	$D(12+\beta;-14+\beta;-13+\beta)$	$M(-7+\beta;11+\beta;11+\beta)$	
5.6	$A(3+\beta;-2+\beta;3+\beta)$;	$B(6+\beta;6+\beta;2+\beta)$;	$C(1+\beta;4+\beta;-2+\beta)$;
	$D(9+\beta;-12+\beta;-14+\beta)$;	$M(-12+\beta;4+\beta;5+\beta)$;	
5.7	$A(6+\beta;8+\beta;1+\beta)$;	$B(9+\beta;4+\beta;6+\beta)$;	$C(\beta;2+\beta;-2+\beta)$;
	$D(13+\beta;-8+\beta;-15+\beta)$;	$M(-4+\beta;14+\beta;14+\beta)$	
5.8	$A(2+\beta;8+\beta;-3+\beta)$;	$B(10+\beta;4+\beta;7+\beta)$;	$C(4+\beta;8+\beta;-1+\beta)$;
	$D(11+\beta;-10+\beta;-16+\beta)$	$M(-8+\beta;11+\beta;13+\beta)$	
5.9	$A(\beta;6+\beta;-4+\beta)$;	$B(2+\beta;-4+\beta;3+\beta)$;	$C(6+\beta;4+\beta;3+\beta)$;
	$D(10+\beta;-8+\beta;-18+\beta)$;	$M(-9+\beta;4+\beta;5+\beta)$;	
5.10	$A(-2+\beta;\beta;-3+\beta)$	$B(3+\beta;10+\beta;-3+\beta)$;	$C(2+\beta;6+\beta;-2+\beta)$
	$D(11+\beta;-10+\beta;-19+\beta)$	$M(-5+\beta;14+\beta;16+\beta)$	
5.11	$A(5+\beta;6+\beta;1+\beta)$;	$B(4+\beta;-2+\beta;4+\beta)$;	$C(7+\beta;8+\beta;2+\beta)$;
	$D(12+\beta;-16+\beta;-12+\beta)$	$M(-6+\beta;10+\beta;11+\beta)$	
5.12	$A(-3+\beta;-2+\beta;4+\beta)$;	$B(-4+\beta;2+\beta;-7+\beta)$;	$C(5+\beta;\beta;3+\beta)$;
	$D(13+\beta;-10+\beta;-14+\beta)$	$M(-9+\beta;7+\beta;8+\beta)$;	
5.13	$A(2+\beta;-2+\beta;1+\beta)$;	$B(-3+\beta;\beta;-5+\beta)$;	$C(\beta;-2+\beta;-1+\beta)$;
	$D(14+\beta;-12+\beta;-12+\beta)$	$M(-12+\beta;7+\beta;8+\beta)$	
5.14	$A(5+\beta;4+\beta;1+\beta)$;	$B(-1+\beta;-2+\beta;-2+\beta)$;	$C(3+\beta;-2+\beta;2+\beta)$;
	$D(15+\beta;-12+\beta;-11+\beta)$	$M(-9+\beta;8+\beta;9+\beta)$;	
5.15	$A(3+\beta;6+\beta;-2+\beta)$;	$B(\beta;2+\beta;-3+\beta)$;	$C(1+\beta;-2+\beta;\beta)$;
	$D(16+\beta;-12+\beta;-10+\beta)$	$M(-12+\beta;13+\beta;14+\beta)$;	
5.16	$A(1+\beta;-4+\beta;1+\beta)$;	$B(4+\beta;4+\beta;\beta)$;	$C(-1+\beta;2+\beta;-4+\beta;)$
	$D(17+\beta;-8+\beta;-11+\beta)$;	$M(-3+\beta;13+\beta;14+\beta)$	

5.17	$A(4+\beta;6+\beta;-1+\beta)$;	$B(7+\beta;2+\beta;4+\beta)$;	$C(-2+\beta;\beta;4+\beta)$;
	$D(10+\beta;-14+\beta;-15+\beta)$	$M(-5+\beta;10+\beta;12+\beta)$	
5.18	$A(\beta;6+\beta;-5+\beta)$;	$B(8+\beta;2+\beta;5+\beta)$;	$C(2+\beta;6+\beta;-3+\beta)$;
	$D(11+\beta;-14+\beta;-14+\beta)$	$M(-8+\beta;7+\beta;12+\beta)$	
5.19	$A(-2+\beta;4+\beta;-6+\beta)$;	$B(\beta;-6+\beta;1+\beta)$;	$C(4+\beta;2+\beta;1+\beta)$;
	$D(12+\beta;-10+\beta;-15+\beta)$	$M(-2+\beta;13+\beta;12+\beta)$	
5.20	$A(-4+\beta;-2+\beta;-5+\beta)$;	$B(1+\beta;8+\beta;-5+\beta)$;	$C(\beta;4+\beta;-4+\beta)$;
	$D(9+\beta;-12+\beta;-17+\beta)$	$M(-8+\beta;12+\beta;11+\beta)$	
5.21	$A(3+\beta;4+\beta;-1+\beta)$;	$B(2+\beta;-4+\beta;2+\beta)$;	$C(5+\beta;6+\beta;\beta)$;
	$D(8+\beta;-12+\beta;-18+\beta)$;	$M(-5+\beta;15+\beta;14+\beta)$	
5.22	$A(\beta;1+\beta;-1+\beta)$;	$B(-1+\beta;5+\beta;-4+\beta)$;	$C(8+\beta;3+\beta;6+\beta)$;
	$D(13+\beta;-14+\beta;-12+\beta)$	$M(-2+\beta;13+\beta;18+\beta)$	
5.23	$A(5+\beta;1+\beta;4+\beta)$;	$B(\beta;3+\beta;-2+\beta)$;	$C(3+\beta;1+\beta;2+\beta)$;
	$D(14+\beta;-10+\beta;-13+\beta)$	$M(-7+\beta;9+\beta;15+\beta)$	
5.24	$A(6+\beta;9+\beta;1+\beta)$;	$B(3+\beta;5+\beta;\beta;)$	$C(4+\beta;1+\beta;3+\beta)$;
	$D(15+\beta;-6+\beta;-14+\beta)$	$M(-4+\beta;12+\beta;15+\beta)$	
5.25	$A(4+\beta;-1+\beta;4+\beta)$;	$B(7+\beta;7+\beta;3+\beta)$;	$C(2+\beta;5+\beta;-1+\beta)$;
	$D(16+\beta;-8+\beta;-12+\beta)$;	$M(-9+\beta;16+\beta;14+\beta)$	
5.26	$A(7+\beta;9+\beta;2+\beta)$;	$B(10+\beta;5+\beta;7+\beta)$;	$C(1+\beta;3+\beta;-1+\beta)$;
	$D(17+\beta;-10+\beta;-13+\beta)$	$M(-10+\beta;9+\beta;12+\beta)$	
5.27	$A(3+\beta;9+\beta;-2+\beta)$;	$B(11+\beta;5+\beta;8+\beta)$;	$C(5+\beta;9+\beta;\beta)$;
	$D(18+\beta;-6+\beta;-11+\beta)$;	$M(-7+\beta;12+\beta;12+\beta)$	
5.28	$A(1+\beta;7+\beta;-3+\beta)$;	$B(3+\beta;-3+\beta;4+\beta)$;	$C(7+\beta;5+\beta;4+\beta)$;
	$D(19+\beta;-6+\beta;-10+\beta)$	$M(-6+\beta;14+\beta;18+\beta)$	
5.29	$A(-1+\beta;1+\beta;-2+\beta)$;	$B(4+\beta;11+\beta;-2+\beta)$;	$C(3+\beta;7+\beta;-1+\beta)$;
	$D(15+\beta;-16+\beta;-9+\beta)$	$M(-12+\beta;9+\beta;10+\beta)$	
5.30	$A(6+\beta;7+\beta;2+\beta)$;	$B(5+\beta;-1+\beta;5+\beta)$;	$C(8+\beta;9+\beta;3+\beta)$;
	$D(17+\beta;-10+\beta;-10+\beta)$	$M(-11+\beta;11+\beta;19+\beta)$;	
5.31	$A(-3+\beta;-6+\beta;-5+\beta)$;	$B(-1+\beta;\beta;-6+\beta)$;	$C(-1+\beta;-2+\beta;-3+\beta)$
	$D(6+\beta;-26+\beta;-16+\beta)$;	$M(-15+\beta;4+\beta;6+\beta)$;	

Методичні вказівки.

<u>Розв’язання задачі 5.31</u>. Візьмемо β=4, тоді координати точок *A, B, C* і *D* будуть такі:

A(1;-2;-1), B(3;4;-2), C(3;2;1) D(10;-22;-12), M(-11;8;10).

1. Рівняння площини, яка проходить через три точки $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)\ та\ C(x_2;y_2;z_2)$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

(1)

Підставивши в (1) координати точок *A, B* та *C*, дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 3-1 & 4+2 & -2+1 \\ 3-1 & 2+2 & 1+1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Враховуючи, що всі числа третього рядка кратні числу 2, то його можна винести за знак визначника. Розділивши (скоротивши) ліву та праву частини останнього рівняння на таке кратне число (на 2), дістанемо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник, який запишемо зліва, по елементам першого рядка:

$$(x-1)\cdot A_{11}+(y+2)\cdot A_{12}+(z+1)\cdot A_{13}=0;$$

$$(x-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}6 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}+(y+2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+$$

$$+(z+1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\cdot(6+2)-(y+2)\cdot(2+1)+(z+1)\cdot(4-6)=0;$$

$$8\cdot(x-1)-3\cdot(y+2)-2\cdot(z+1)=0;$$

$$8x-8-3y-6-2z-2=0;$$

(Q) $8x-3y-2z-16=0,$

де $\overline{n}=\{8;-3;-2\}$ - нормальний вектор площини Q.

Перевірка:

т.А:

$$8\cdot 2-3\cdot(-2)-2\cdot(-1)-16=0; \qquad 8+6+2-16=0$$

$16-16=0; 0=0;$

точка $A\in Q$;

$8\cdot 3-3\cdot 4-2\cdot(-2)-16=0; \qquad 24-12+4-16=0;$ т.В:

$12-12=0; \ \ 0=0;$

точка $B\in Q$;

т.С

$8\cdot 3-3\cdot 2-2\cdot 1-16=0; \qquad 24-6-2-12=0;$

$16-16=0; \ \ 0=0;$

точка $C\in Q$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: «Наука», -1977.
2. Привалов И.Н. Аналитическая геометрия. М.: «Наука», -1970.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: «Наука», -1989.
4. Каплан И.А. практические занятия по высшей математике. Часть 1,2. Харьков: Изд-во ХГУ, -1970.