МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Навчально-науковий інститут економіки та управління
Факультет менеджменту

Системний підхід використання методів математичного моделювання. (Моделювання технологічних процесів і систем)

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для підготовки здобувачів вищої освіти третього (освітньо-наукового) рівня, ступеня доктора філософії за спеціальністю 204 «Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва» та спеціальністю 201 «Агрономія»

Миколаїв
2019

УДК 004.942:67.02
М74

Друкується за рішенням науково-методичної комісії факультету менеджменту Миколаївського національного аграрного університету від 21 листопада 2019 року, протокол № 3.

Укладачі:

О. В. Шебаніна – д-р екон. наук, професор
В.П. Клочан – канд. екон. наук, доцент
А. М. Могильницька – канд. фіз.-мат. наук, в.о. доцента
І.В. Клочан – д-р. екон. наук, доцент
С. І. Тищенко – канд. пед. наук, доцент
В.О. Крайній – канд. екон. наук, в.о. доцента
І. І. Хилько – старший викладач

Рецензенти:
А.В. Панфілова – канд. с.-г. наук, доцент кафедри рослинництва та садово-паркового господарства Миколаївського національного аграрного університету
А.В. Швед – канд. техн. наук, доцент кафедри інженерії програмного забезпечення Чорноморського національного університету ім. Петра Могили

ЗМІСТ

ВСТУП

Методи статистичної обробки тривалий час були тим єдиним апаратом, який можна було б ефективновикористати для обробки дослідних даних з метою їх подальшогоаналізу.

Одними з перших вчених нашої країни, хто сприяв впровадженню математичних методів (а саме методів математичної статистики та теорії ймовірностей) булиМ.М. Вольф та Н.М. Тулайков, які розглядали їх застосування додосліджень та аналізу результатів спостережень (1910, 1911, 1914рр.). Одними з видатних результатів наукових досліджень ВольфаМ.М. стали пропозиції щодо застосування математичного підходудля обробки результатів колективних дослідів, де була поставлена задача: за відомими результатамизнайти певні причини цих результатів.

До піонерів застосування математичних методів відноситься і професор А.О. Сапєгін, в роботах якого пропонувалося застосування методів математичної статистики насамперед для обробки та аналізу результатів дослідів (1914,1915, 1916, 1921, 1922, 1926, 1928, 1935, 1937).

Внаслідок практичного спрямування науки всі роботи цього видатного вченого також мали суто прикладний характер та були визначальними для розвитку такого важливого напрямку для агрономії як дослідна справа. Окремо слід відзначитинизку підручників А.О. Сапєгіна з варіаційної статистики, перший з яких вийшов у Харкові у 1922 р., де були викладені основні практичні підходи обробки та аналізу результатів дослідів, що пропонувалися до повсякденного використання в аграрній практиці.

У роботах професора М.З. Міхайловського вже можна знайти спроби математичного опису та аналізу різних біологічних проблем за допомогою перспективних для 20-х років XX ст. розділів «чистої» математики (теорії ймовірності, варіаційної статистики, математичного аналізу) (1925, 1926, 1927, 1928, 1929).

Слід вказати, що в ці роки і представники математичної науки також почали вбачати перспективи прикладного застосування математичних методів для галузі агробіології. Актуальними стають пошуки прикладних математичних методів дослідження агробіологічних систем, а також супроводжуючі питання математичного характеру. Після 20-х років XX ст. вказаний напрямок відповідав загальним світовим тенденціям застосування математичних підходів у біології, тому він став характерним і для представників харківської математичної школи, якими були С.Н. Бернштейн (1922), а пізніше В.А. Стєклов та О.М.Ляпунов

У результаті вже в 20-ті роки склалися конкретні напрямки практичного застосування математичних підходів, а також були розроблені конкретні методики аналізу результатів дослідів. Показником цього можна вважати виданий у 1927 р. підручник проф. О.К. Філіповського «Сільськогосподарська досвідна справа». Підручник для вищих шкіл», в якому розглядалися не просто застосування математичних методів, а був наданий аналіз існуючих на той час підходів, а також дослідження процесу розвитку зарубіжних та вітчизняних поглядів на методи становлення дослідів. Дуже важливим, можна вважати знаковим, та перспективним в цій роботі став перехід до досліджень, в яких намагалися кількісно описувати явища (наприклад, застосування диференціальних рівнянь). У зв'язку з цим О.К. Філіповський розглядав проблему взаємовідношення чинників у явищах, їх міру та міру явища, на основі чого далі досліджував проблему побудови дослідів з метою виявлення значення окремих чинників. Всі результати цієї роботи в комплексі становили велике значення для впровадження у подальшому математичних методів для потреб агрономії.

Успіхи у поширенні застосування математичних методів, насамперед математичної статистики, у дослідній справі, в свою чергу, викликали розвиток відповідних методик та методології, а у подальшому стали невід'ємною складовою дослідної справи. Але початком цього процесу можна вважати 20-ті роки XX ст. (серія підручників А.О. Сапегіна з варіаційної статистики для агрономів та підручник О.К. Філіповського з сільськогосподарської досвідної справи).

Уже в 30-х роках ХХ ст., внаслідок подальшого розвитку природознавчих наук та спроб кількісного опису їх явищ, крім поширюваних на той час застосувань математичних методів (дослідна справа, дослідження проблем спадковості) відбувається впровадження математичних методів та підходів до галузі ґрунтознавства (спочатку на основі побудови емпіричних математичних залежностей на основі одержаних дослідних даних). Але з подальшим розвитком математики та успіхами, одержаними в напрямі опису ґрунтознавчих явищ, результатом розвитку напряму стало впровадження математичного моделювання вже наприкінці 40-х років ХХ ст. Основою нового напряму стало успішне застосування математичного опису теплового режиму ґрунту, а трохи згодом і опису розподілу вологи у ґрунті. Вказані роботи почали проводитися починаючи з середини 30-х років ХХ ст. в Інституті агрофізики Академії наук СРСР під керівництвом акад. А.Ф. Іоффе для галузі агрофізики. Використовуючи досягнення та розробки Інституту агрофізики Академії наук СРСР в Українському інституті агрогрунтознавства та хімізації сільського господарства вже у 30-ті рр. ХХ ст. стали проводитися роботи з подальшого поглиблення методів досліджень та уточнення поняття таких фізичних властивостей ґрунту як різновиди форм у ґрунті, вологоємності, водопроникненості та ін.

ХХ ст. також відзначилося як бурхливим розвитком вже існуючих розділів математики, так і виникненням нових, на основі вже існуючих розділів, а також внаслідок впровадження математики в різні галузі науки, насамперед до природничих. Внаслідок цього виникали нові задачі, розв’язування яких викликало у свою чергу подальший розвиток математики, нові задачі. В результаті друга половина ХХ ст. відзначилася таким явищем, як математизація різних наукових та прикладних галузей людської діяльності. Внаслідок необхідності одержання формальних описів об’єктів у процесі математизації подальший розвиток математики та математизація різних наукових галузей (наприклад, природничих галузей, в яких крім досліджень, що базуються на проведенні експериментів, формувалися теоретичні напрямки), в свою чергу, викликали розвиток теоретичних напрямів, основою яких стали математичні описи процесів. Успіхи, одержані при математичних описах фізичних процесів, викликали інтерес і до описів біологічних. Поширення та поглиблення досліджень у природничих галузях, розвиток та удосконалення наукових знань привели до формування системного уявлення, а у подальшому до виникнення нового напряму наукової методології – системного підходу, де вивчення функціонування та розвитку складних біологічних об'єктів займає особливе місце. У 50-70-і рр. XX-го ст. були запропоновані нові підходи до побудови загальної теорії систем (Заде Л., Акофф Р., Калман Р., Уємов О.І., Урманцев Ю.О., Мельников Г.П. та ін.). Загальною рисою цих підходів була розробка логіко-концептуального та математичного апарату системних досліджень. В ці роки фон Берталанфі також увів поняття та дослідив відкриті системи – системи, що постійно обмінюються речовиною та енергією із зовнішнім середовищем. В рамках системного підходу система не тільки не детермінується однозначно властивостями його елементів або їхніх груп та не зводиться до них, а самі елементи детермінуються цілим і лише в його рамках дістають функціональне пояснення та виправдання. Теорія систем на початку другої половини XX ст. вперше була застосована у точних науках та техніці. Успішне застосування теорії систем у точних науках і техніці сформувало нові підходи та методи дослідження.

Виникнення та становлення загальної теорії систем відображало різке збільшення ролі методологічних досліджень у зв’язку із специфічними перешкодами при дослідженні складних об’єктів у фізиці, біології, економіці та ін. галузях наукових знань. Проблеми аналізу та синтезу складних об’єктів привели до необхідності створення спеціального наукового інструментарію – системного підходу, головними категоріями якого стали: поняття системи, структури, ієрархії та ін. В результаті виник ряд нових методологічних задач, які неможливо розв’язувати без загальних прийомів спрощення та абстрагування, нових методів математики. Загальна теорія систем стала основою забезпечення єдиної формально методологічної бази дослідження об’єктів різної природи, що розглядаються в якості систем.

Характерною рисою XX ст., як відомо, було те, що наука, в тому числі і агрономічна, стала безпосередньою виробничою силою, швидко розвивалися усі її галузі, формувалися нові. Бурний розвиток науки привів до непомірного збільшення інформації, що треба приймати спеціалістам як безпосередньо у галузі їхньої спеціалізації, так і у суміжних. Все це підвело підґрунтя до використання системних досліджень при вирішенні задач для агрономічної галузі.

Висока продуктивність методів досліджень ґрунтів та рослин у XX ст. у сукупності з великою кількістю дослідників обумовили великий потік нових даних. Крім того, внаслідок подальшого розвитку математики відбувалося і не тільки подальше ускладнення поставлених задач, а й методів одержання їх розв'язку (наприклад, розвиток апарату для опису та досліджень фізичних процесів у ґрунтах вимагав використання диференціальних рівнянь в часткових похідних), що у свою чергу, викликало проблему одержання ефективних методів розв'язування подібних задач. Стрімкий розвиток у 50-х рр. XX ст. такої галузі математики, як чисельні методи надав можливість одержати методи розв'язку багатьох задач, але, внаслідок обчислювальної складності задач висунув у свою чергу нову проблему: одержання ефективних засобів для обчислення задач відповідними чисельними методами. Вже наприкінці 50-тих років XX ст. в якості таких засобів почали використовувати обчислювальну техніку (Інститут агрофізики АН СРСР). Розвиток обчислювальної техніки, в свою чергу, викликав стрімке поширення впровадження методів математичних описів агробіологічних процесів у прикладних дослідженнях.

Крім того, у 50-ті роки формується такий науковий напрям, як математична біологія, а у 60-ті роки чл.-кор. АН СРСР О.А. Ляпунов розробляючи методологічні основи математичної біології виокремив три напрямки біології: емпіричний, теоретичний, математичний (який повинен мати за основу математичні моделі, що використовувалися б для перевірки основних теоретичних концепцій). Взагалі 60-ті роки стали знаковими для розвитку математичної біології. Подальший розвиток математичної біології стимулював впровадження методів математичного моделювання для потреб науки та практики в галузі агрономії.

Отже, основними передумовами математичного моделювання для потреб агрономії можна вважати наступні фактори:

- ✓ поширення застосування математичних методів у дослідній справі;
- ✓ подальший розвиток математики та математизація різних

природничих галузей;

- ✓ розробка загальної теорії систем та системного підходу;
- ✓ розвиток та впровадження у наукову практику засобів для проведення обчислень (обчислювальних машин).

Сучасні агротехнології являють собою комплекси технологічних операцій з управління продукційними процесами с.-г. культур. Чим інтенсивніша агротехнологія, тим більше природних факторів враховується. Кожний об'єкт цього процесу має велику кількість різних властивостей, серед яких особливості оброблюваної культури, погодні умови, стан грунту тощо. Агроном, продумуючи вирощування культури, будує модель (технологічну карту) плану проведення с.-г. робіт.

Модель - це штучно створений об'єкт, що відбиває істотні сторони досліджуваного об'єкта з погляду мети моделювання.

В науково-дослідних установах та лабораторіях розглядають об'єкт за різними характеристиками: модель зовнішнього вигляду, модель структури, модель поведінки. Отримана база даних дозволяє оперувати розмаїттям сортів гібридів, видів (форм) культур, визначати взаємозв'язки між ними.

Серед моделей управління об'єктом визначають: реєструючи, еталонні, прогностичні, імітаційні, оптимізаційні. До реєструючих можна віднести моделі місцевості, технологічні карти, оптимізаційні моделі планування врожаю та посіву с.-г. культур, агрофітоценозів, імітаційні моделі базових технологій виробництва та переробки рослинної продукції.

За суттю: речовинно-енергетичні (натурні); ідеальні (уявні); інформаційні.

За обліком фактора часу: статичні; динамічні; детерміновані; стохастичні (ймовірнісні).

Основними задачами агрономів є розробка моделей оптимальної родючості ґрунтів і агроекосистем різного рівня продуктивності, управління врожаєм с.-г. культур та його якістю.

Серед основних моделей знань – види та сорти рослин, їх технологічні карти, оптимізаційні моделі планування врожаю та посіву с.-г. культур, агрофітоценозів, імітаційні моделі базових технологій виробництва та переробки рослинної продукції.

Об'єкт, для якого створюється модель, називають ***оригіналом*** або прототипом. Будь-яка модель відбиває деякі якості й властивості об'єкту, що є найбільш істотними для обраної мети дослідження. Процес побудови моделей називають моделюванням.

Моделювання - це побудова моделей, призначених для вивчення й дослідження об'єктів, процесів або явищ.

Моделювання – дослідження явищ, процесів або систем об'єктів шляхом побудови й вивчення їхніх моделей.

Системний підхід дозволяє створювати повноцінні моделі. Особливості системного підходу полягають у наступному.

1) Досліджуваний об'єкт розглядається як система, опис і дослідження елементів якої не виступає як сама мета, а виконується з урахуванням їх місця (наявність підзадач).

2) У цілому об'єкт не відокремлюється від умов його існування й функціонування. Об'єкт розглядається як складова частина чогось цілого (сам є підзадачею).

3) Той самий досліджуваний елемент розглядається як володіючий різними характеристиками, функціями й навіть принципами побудови.

4) При системному підході на перше місце виступають не тільки причинні пояснення функціонування об'єкта, але й доцільність включення його до складу інших елементів. Допускається можливість наявності в об'єкта безлічі індивідуальних характеристик і ступенів волі.

Комп'ютерне математичне моделювання є одним з сучасних інструментів, що дозволяють імітувати природні і економічні явища. Можливості програмного забезпечення з моделювання включати в себе рекомендації щодо, по-перше, вибору сорту культури з урахуванням прогнозних погодних значень, по-друге, вибору часу посіву та збору культури, по-третє, завчасної підготовки засобів захисту від небезпечних явищ природи.

Моделювання (експеримент) може бути незамінний. Ми не можемо, наприклад, улаштувати ядерну катастрофу, щоб з'ясувати масштаби можливого зараження, а за допомогою комп'ютера можливий розрахунок (і досить точний) параметрів, що цікавлять, дослідників.

Використання комп'ютера при моделюванні можливо по трьох напрямках:

1. Обчислювальний – прямі розрахунки по програмі.

2. Інструментальний – побудова бази знань, для перетворення її в алгоритм і програму.

3. Діалоговий – підтримка інтерфейсу між дослідником і комп'ютером.

ТЕМА 1. МОДЕЛІ ДИНАМІКИ БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМ

ПЛАН

1.1 Моделі популяційної динаміки.
1.2 Імітаційне моделювання.
1.3 Моделі міжвидової конкуренції.
1.4 Модель Вольтерри-Лотки.
  1.4.1 Припущення про компоненти системи.
  1.4.2 Трофічні піраміди.
1.5 Рівняння двовимірної моделі (хижак-жертва).
  1.5.1 Моделі типу «хижак—жертва» без врахування вікової структури.
  1.5.2 Моделі типу «хижак—жертва» з врахуванням вікової структури.
1.6 Матриця взаємозв’язків

Математичне моделювання широко застосовується для вирішення багатьох актуальних задач біології, екології, агрономії тощо. Одним з важливих напрямків в цих дослідженнях є математичне моделювання біологічних популяцій. Воно застосовується для вирішення таких завдань, як збереження зникаючих і рідкісних видів, прогнозування чисельності промислових популяцій і розробка оптимальних стратегій промислу, вивчення впливу антропогенних факторів на чисельність біологічних видів, і інших.

Перші дослідження в області популяційного моделювання з'явилися в 20-і роки XX століття. Ключовими роботами, які дали потужний поштовх подальшим дослідженням, були дослідження А. Лотки і В. Вольтерри (створені незалежно один від одного), в яких розглядалася. модель взаємодії двох популяцій «хижак-жертва».

Техніка моделювання в екології почалась від моделювання балансу енергії та матерії в екологічних системах. Основи цього напрямку пов’язані з публікаціями класиків екології в екологічному моделюванні. Спочатку переважали моделі водних систем. Але завдяки Міжнародній Біологічній Програмі (МБП) започатковано екосистемні дослідження земної біосфери, а саме: великих наземних біомів – прерій, тайги, тундри, пустинь та гір, запропоновано уяві дослідників існування багатосистемних екологічних зв’язків у ландшафтах.

Нагромаджування даних Міжнародною Біологічною Програмою було великим заохоченням до швидкого розвитку комп’ютерного моделювання. Результати МБП були подані у вигляді розбудованих блокових схем. Були в них дані про кількість енергії, накопиченої в біомасі окремих блоків екосистем і ландшафтів, а також дані щодо припливу цієї енергії та кругообігу біогенів. Приклади створення комп’ютерних моделей на основі цих даних подано в низці публікацій.

1.1 Моделі популяційної динаміки

Сучасні математичні моделі в екології можна розбити на три класи.

Перший – описові моделі: регресивні і інші емпірично встановлені кількісні залежності, що не претендують на розкриття механізму описуваного процесу. Вони застосовуються зазвичай для опису окремих процесів і залежностей і включаються як фрагменти в імітаційні моделі.

Другий – моделі якісні, які будуються з метою з'ясування динамічного механізму досліджуваного процесу, здатні відтворити спостерігаються динамічні ефекти в поведінці систем, такі, наприклад, як коливальний характер зміни біомаси. Зазвичай ці моделі не дуже громіздкі, піддаються якісному дослідженню з застосуванням аналітичних і комп'ютерних методів.

Третій клас – імітаційні моделі конкретних екологічних систем, що враховують всю наявну інформацію про об'єкт. Мета побудови таких моделей – детальне прогнозування поведінки складних систем або рішення оптимізаційної задачі їх експлуатації.

1.2 Імітаційне моделювання

Імітаційне моделювання — це метод, що дозволяє будувати моделі процесів, що описують, як ці процеси проходили б насправді. Імітаційне моделювання засноване на тому, що система, яка вивчається, замінюється імітатором і з ним проводяться експерименти з метою отримання інформації про цю систему. Імітаційне моделювання — це окремий випадок математичного моделювання.

Імітаційна модель — (у вузькому значенні) логіко-математичний опис об'єкта, який може бути використаний для експериментування на комп'ютері в цілях проектування, аналізу і оцінки функціонування об'єкта.

Імітаційні моделі мають ряд можливостей, яких немає у аналітичних моделей:

- ✓ дозволяють використовувати в моделі залежності, які не виражаються в аналітичній формі;
- ✓ дозволяють програвати різні сценарії;
- ✓ дозволяють враховувати часові та просторові неоднорідності.

1.3 Моделі міжвидової конкуренції

Перші моделі динаміки популяцій – це:

- ✓ ряд Фібоначчі (1202);
- ✓ модель експоненціального зростання Мальтуса (1798);
- ✓ модель обмеженого зростання Ферхюльста (1838).
- ✓ Напочатку 20 століття з'явилися перші моделі взаємодії видів (моделі хижак-жертва). Першою була модель Вольтерри-Лотки (1926, 1925). Наступні моделі були її модифікаціями, варіаціями, узагальненням або створювались для вирішення конкретної задачі:
- ✓ Колмагорова (1972);
- ✓ Розенцвейга-Макартура (1965);
- ✓ Базикіна (1969).

1.4 Модель Вольтерри-Лотки

Модель Вольтерри-Лотки — система диференціальних рівнянь першого порядку, яка описує кінетику чисельності популяцій. Рівняння запропонували незалежно Альфред Джеймс Лотка та Віто Вольтерра, в 1925 та 1926 роках, відповідно.

Система складається з декількох біологічних видів і запасу їжі, який використовують деякі з розглянутих видів.

1.4.1 Припущення про компоненти системи

Їжа або є в необмеженій кількості, або її надходження з плином часу жорстко регламентовано.

Особини кожного виду вимирають так, що в одиницю часу гине постійна частка існуючих особин.

Хижаки поїдають жертв, причому, за одиницю часу, кількість з'їдених жертв завжди пропорційна ймовірності зустрічі особин цих двох видів, тобто добутку кількості хижаків на кількість жертв.

Якщо є їжа в необмеженій кількості і кілька видів, які здатні її споживати, то частка їжі, споживана кожним видом за одиницю часу, пропорційна кількості особин цього виду, взятого з деяким коефіцієнтом, що залежить від виду.

Якщо вид харчується їжею, наявної в необмеженій кількості, приріст чисельності виду за одиницю часу пропорційний чисельності виду.

Якщо вид харчується їжею, наявною в обмеженій кількості, то його розмноження регулюється швидкістю споживання їжі, тобто за одиницю часу приріст пропорційний кількості з'їденої їжі.

1.4.2 Трофічні піраміди

Екосистеми мають складну будову: кілька рівнів, між якими існують різноманітні трофічні (харчові) і топічні (не пов'язані з ланцюгом харчування) зв'язки. Структура трофічної піраміди може бути різною, в залежності від клімату, ґрунту, ландшафту, тривалості існування біогеоценозу і інших чинників.

При аналізі екосистем прийнято будувати харчові або трофічні піраміди, тобто графи, вершини яких відповідають видам, що входять до системи, а ребра вказують трофічні зв'язки між видами. Зазвичай такі графи – орієнтовані: напрямок дуги між двома вершинами вказує на той з видів, який є споживачем іншого, тобто напрямок дуги збігається з напрямком потоку речовини або біомаси в системі.

На рисунку 1.1 наведено приклад трофічного графу (дворівневої трофічної піраміди). З 15 видів комах (верхній рівень) 5 видів харчуються тільки на одному з двох видів рослин, 2 види - тільки на другому, в раціон інших 8 видів комах входять обидва види рослин. На рисунку 1.2 наведено приклад чотирирівневої трофічної піраміди з описом рівнів.

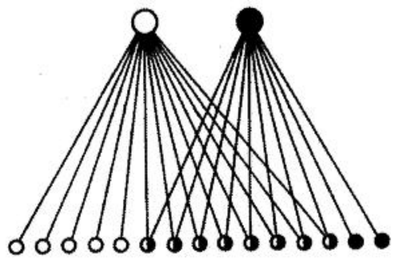


Рисунок 1.1 – Приклад дворівневої трофічної піраміди.

Рисунок 1.2 – Приклад реальної трофічної піраміди.

1.5 Рівняння двовимірної моделі (хижак-жертва)

1.5.1 Моделі типу «хижак—жертва» без врахування вікової структури

Втрати врожаю від шкідників значні і мають місце майже завжди. Цим пояснюються зусилля дослідників, що спрямовані на поглиблене розуміння механізму дій визначаючих факторів та на організацію контролю за розмірами популяцій шкідників з тим, щоб економічний збиток від них не перевищував заданої межі.

Класичний біологічний контроль оснований на регулюванні розмірів популяції шкідників за допомогою їх природного ворога. Пізніше з'явилася концепція інтегрованого контролю, що поєднує в собі як біологічні, так і хімічні засоби захисту рослин.

Розглянемо ряд простих динамічних моделей, що описують системи типу «**хижак—жертва**».

Нехай для даного природного середовища y позначає число жертв, а x — число хижаків. Прийнято такі припущення:

1. Діє закон великих чисел; популяція виду може бути представлена однією змінною; вік та стать в розрахунок не беруться.

2. Ефекти миттєві, і немає інтервалів між, наприклад, відкладанням яєць та зрілістю.

3. За відсутності хижаків $(x=0)$ число жертв (y) росте за логістичною функцією з темпом росту у початковий момент $\mu\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)$, і максимальним числом жертв для даного природного середовища y_m.

4. Темп споживання жертв пропорційний добутку розмірів популяцій жертв та хижаків з точністю до сталої k.

5. Темп виплоду нових хижаків дорівнює $k', \frac{k'}{k}$ є виплоджування хижаків у перерахунку на 1 жертву.

6. Показник смертності m приписаний тільки хижакам, для яких жертви не більше як джерело їжі.

Цим припущенням відповідають такі рівняння:

$$\frac{dy}{dt}=\mu y\left(1-\frac{y}{y_m}\right)-kxy;$$
$$\frac{dx}{dt}=k'xy-mx, \tag{1.1}$$

де μ, y_m, k, k', m — параметри.

Стаціонарні розв'язки, якщо такі існують, можуть бути одержані шляхом зведення $\frac{dy}{dt}$ та $\frac{dx}{dt}$ в рівняннях до нуля:

$$0=\mu\left(1-\frac{y}{y_m}\right)-kx; \quad 0=k'y-m, \tag{1.2}$$

звідси

$$y=\frac{m}{k'};\ x=\frac{\mu}{k}\left(1-\frac{m}{k'y_m}\right). \tag{1.3}$$

Розв'язок буде позитивним тільки у випадку, якщо $k'y_m > m$, тобто при умові, що максимальна популяція жертв достатня для перекриття показника смертності хижаків.

Графік розв'язання системи диференціальних рівнянь наближається до спіралі, що закручена за годинниковою стрілкою, ще щоб побудувати цей графік, треба оцінити кількісну динаміку системи (тобто знайти розв'язок рівнянь методами чисельного інтегрування).

Існує багато шляхів, що дозволяють застосованим рівнянням забезпечити більше реалізму або узгодити їх з тими чи іншими спеціальними ситуаціями.

1. Автономний ріст хижаків. Якщо хижаки мають ще інший спосіб споживання, окрім своїх жертв, рівняння приймає вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = k'xy + \mu_x x\left(1 - \frac{x}{x_m}\right), \tag{1.4}$$

де застосовано припущення, що число хижаків x зростає за логістичним законом з параметрами μ_x, x_m.

2. Обмежене споживання жертв хижаками. Згідно з диференціальним рівнянням, споживання жертв в перерахунку на одного хижака зростає лінійно із зростанням числа y жертв без усяких обмежень. Це навряд чи відповідає дійсності, і тому правильніше було б рівняння подати у вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = k'x\left(\frac{y}{1 + ay}\right) - mx, \tag{1.5}$$

де a - стала, що є межею $\frac{k'x}{a}$, до якої для великих значень y прагне перший член суми в правій частині.

3. Укриття для жертв. В окремих природних середовищах обмежені групи жертв можуть знаходити укриття, що оберігають їх від хижаків. В цьому випадку рівняння набувають вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = \mu y\left(1 - \frac{y}{y_m}\right) - kx(y - y_0)H(y - y_0); \\ &\frac{dx}{dt} = k'x(y - y_0)H(y - y_0) - mx, \end{aligned} \tag{1.6}$$

де y_0 — максимальне число жертв, що спроможні використати укриття; H — функція Хевісайда:

$H(y - y_0) = 1$ при $y - y_0 \geq 0$, $H(y - y_0) = 0$ при $y - y_0 < 0$.

Стаціонарні розв’язки та динамічна поведінка цих модифікованих рівнянь подібні до вище розглянутих.

Розглянемо наявність запізнень в системі. Загальний для усіх запізнень ефект — це внесення додаткової нестабільності. Запізнені реакції в біологи можуть мати різне походження. Розглянемо такі випадки.

1. Час, що потрібен для еволюційних явищ. Яка-небудь зміна в довкіллі (наприклад, збільшення ресурсів) може викликати раптовий ріст продуктивності дорослих особин Однак відповідна зміна чисельності дорослих особин відбудеться тільки через деякий час τ, що дорівнює часу, необхідному для розвитку дорослої особини з яйця. Стосовно збільшення біологічної популяції y іноді приймають припущення про експоненційну залежність $\frac{dy}{dt} = \mu y(t),$ де μ — темп росту.

Таким чином, швидкість збільшення y залежить від чисельного значення y та часу t. Так якщо, наприклад, між яйцекладкою та формуванням дорослої особини проходить час τ, то правильніше було б записати

$$\frac{dy}{dt} = \mu y(t-\tau), \tag{1.7}$$

де $y(t-\tau)$, — «доросла» популяція в момент $t-\tau$.

2. Дискретність сезонів розмноження. Багато видів розмножуються тільки у визначений проміжок року. Навіть в таких популяціях, особини яких здатні розмножуватися декілька років підряд (багаторічні рослини, птахи тощо), наявність сезонів розмноження вносить деяке запізнення в процеси регуляції чисельності. Якщо життєвий цикл певного виду продовжується декілька років та його особини щорічно дають відносно невелику кількість потомства, то запізнення на один рік, що обумовлене дискретністю сезонів розмноження, не вважається довгим порівняно з характерним часом динаміки цього виду. Таким чином, будь-які коливання, що зумовлені запізненням, будуть затухаючими. Якщо ж дорослі особини, що розмножуються в даному році, рідко або ніколи не доживають до розмноження в наступному (наприклад, однорічні рослини, більшість комах тощо), тоді наявний суттєвий вплив на динаміку їх чисельності. В цьому випадку застосовують кінцево-різницеве рівняння вигляду

$$y_{n+1} = \Phi(y_n), \tag{1.8}$$

де y_n - чисельність популяції в n-му році, Φ — деяка функція) яке часто приводить до коливань, що розходяться.

3. Виливи зовнішнього середовища, що запізнюються, які обмежують чисельність. Параметр темпу росту μ в експоненційній

залежності може залежати від змінних середовища $E(t)$, до числа яких може входити і ресурс поживного середовища. Впливи цих факторів на організм іноді проявляються із запізненням, і тому більш адекватною була б формалізація

$$\frac{dy}{dt}=\mu[E(t-\tau)]y(t), \tag{1.9}$$

в якій значення μ обчислюється з величин змінних середовища E з урахуванням затримки реакції на час τ.

Наприклад, обмеження, що пов'язані з доступом їжі, можуть давати малий вплив на темп росту популяції, якщо термін дії процесу достатньо великий.

Розглянемо такий приклад. Нехай Y є розміром популяції, і споживання якої підтримується на постійному рівні f; потрібність дорослих особин популяції в їжі складає mY, де m — стала; надлишки їжі $f-mY$ — перетворюються в яйця з ефективністю η, так що темп яйцекладіння складає $\eta(f-mY)$; яйця перетворюються в дорослу особину через час τ, смертність дорослих особин має постійний показник h.

З врахуванням цих умов маємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dY(t)}{dt}=\eta[f-mY(t-\tau)]-hY(t). \tag{1.10}$$

Стаціонарний розв’язок Y_s при цьому шукають у формі $Y(t)=Y(t-\tau)=Y_s$. В результаті отримаємо $Y_s=\dfrac{\eta f}{\eta m+h}$.

Інша система, що природним шляхом приводить до затримки реакцій,— це епідемія з інкубаційним періодом τ. Нехай Y_s — загальна популяція, Y — уражена, (Y_m-Y) — популяція, що знаходиться під впливом захворювання. Враховуючи затримку, викликану наявністю інкубаційного періоду, ймовірність ураження залежить від розміру інфікованої популяції в момент $t-\tau$, що можна виразити рівнянням

$$\frac{dY(t)}{dt}=\mu Y(t-\tau)\left(1-\frac{Y(t)}{y_m}\right)-cY(t)., \tag{1.11}$$

де μ — ймовірність ураження особини в одиницю часу, c — темп природного одужання.

Стаціонарний розв’язок одержують у формі $Y_s = Y_m\left(1 - \frac{c}{\mu}\right)$.
Після заміни $Y = Y_s + y$ рівняння можна представити у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = -\mu y(t) + cy(t-\tau). \qquad (1.12)$$

1.5.2 Моделі типу «хижак—жертва» з врахуванням вікової структури

В динаміці популяцій простіший підхід до моделювання опирається на оцінку повного числа організмів *N*. Однак моделі такого типу є надмірно спрощеними, і тому неточними.

Функцію видовікового розподілу $n(t,a)$ визначають так, що $n(t,a)da$ — це число організмів, вік яких лежить в межах від a до $da + a$ в момент *t*. Розмір популяції тоді обчислюється як

$$N(t) = n(t,a)da. \qquad (1.13)$$

Функції народження та смертності $B(t,a), D(t,a)$ можна визначити як показники цих процесів в момент *t* для організмів віку *a*, так що

$$\text{Народжуваність} = \int_0^\infty B(t,a)n(t,a)da, \qquad (1.14)$$

$$\text{Смертність} = \int_0^\infty D(t,a)n(t,a)da. \qquad (1.15)$$

Організм народжується у віці *a* = *0*, і тому $n(t,0)$ = народжуваності.

Група організмів віку *a* в момент *t* втрачає особин внаслідок смерті (насамперед в результаті старіння). Після закінчення періоду часу Δt за відсутності смертності число особин $n(t,a)da$ збільшується до $n(t+\Delta t, a+\Delta a)$, і (показати самостійно) це приводить до рівняння

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = 0, \qquad (1.16)$$

а при наявності смертності

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial a} = -D(t,a)n(t,a). \qquad (1.17)$$

Ще більшої адекватності моделі можна досягнути, якщо застосувати функцію розподілу «вік — розмір — вид», де $n(t,a,\omega)dad\omega$ позначає число особин у віці від a до $da+a$ з розмірами від ω до $\omega+d\omega$. Загальна кількість особин в популяції тоді визначається як

$$N=\int_0^\infty\int_0^\infty n(t,a,\omega)dad\omega. \qquad (1.18)$$

Такий метод швидко приводить до дуже складних формалізацій, що сильно ускладнює розв'язання задачі.

Розглянемо метод, який називають **методом матриць Леслі**. На рис. 1.3 неперервний видовіковий розподіл розбито на 4 когорти. Застосовуючи позначення рисунка, можна побудувати матрицю переходів

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}^{(t=i+1)} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{34} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}^{(t=i)} \qquad (1.19)$$

Коефіцієнти B позначають народжуваність у 4 когортах, S - це показники виживання. Наприклад, S_{12} позначає фракцію першої когорти, яка після закінчення одиниці часу виживає та переходить до складу другої когорти. Матричне рівняння еквівалентне наступним:

$$n_1(i+1)=B_1n_1(i)+B_2n_2(i)+B_3n_3(i)+B_4n_4(i);$$
$$n_2(i+1)=S_{12}n_1(i);$$
$$n_3(i+1)=S_{23}n_2(i);$$
$$n_4(i+1)=S_{34}n_3(i).$$

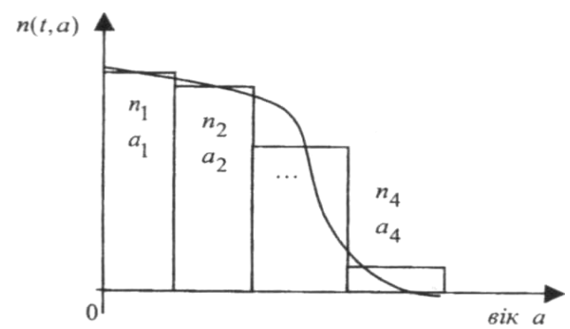


Рисунок 1.3 – Функція видовікового розподілу популяції, що зображена кривою, апроксимованою чотирма квантилями n_1, n_2, n_3, n_4.

Такий підхід широко застосовується в практичних дослідженнях.

1.6 Матриця взаємозв’язків

Повну структуру парних взаємодій між n видами можна зобразити за допомогою матриці з n*n елементів. Елемент (i, j) являє собою 1, -1 або 0 і показує вплив i-го виду на j-й. Симетричні пари елементів матриці S вказують на тип парної взаємодії між видами:

- ✓ +1 +1 симбіоз або мутуалізм;
- ✓ +1 –1 хижак - жертва (паразит-господар);
- ✓ +1 0 коменсалізм;
- ✓ –1–1 конкуренція;
- ✓ –1 0 аменсалізм;
- ✓ 0 0 нейтралізм.

ТЕМА 2. ОСНОВНІ ЗАДАЧІ СТАТИСТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

ПЛАН

2.1 Сутність парного лінійного регресійного аналізу
2.2 Поняття про метод найменших квадратів
2.3 Економічний зміст параметрів парної лінійної регресії
2.4 Парний коефіцієнт кореляції
2.5 Перевірка статистичної значущості та довірчі інтервали оцінок параметрів регресії
2.6 Коефіцієнт детермінації
2.7 Прогнозування по лінійному рівнянню регресії

2.1 Сутність парного лінійного регресійного аналізу

Регресійний аналіз – статистичний метод дослідження залежності випадкової змінної Y від однієї X або декількох незалежних змінних $X_1,...,X_m$. Завданнями регресійного аналізу є встановлення форми залежності між змінними, оцінка функції регресії, прогноз значень залежної змінної. Дослідження будь-якої залежності починається зі *специфікації моделі*, тобто із вибору структури моделі та визначення набору пояснюючих змінних.

Вибір структури моделі може здійснюватися на основі економічної теорії, попередніх результатів, апріорних знань або спеціальних математичних процедур. Парна регресія достатня, якщо існує домінуючий фактор, котрий і використовується у якості незалежної змінної.

Оскільки найбільш простою формою залежності в математиці є лінійна, то в регресійному аналізі найбільш популярні лінійні моделі. Тому, в рамках даного розділу розглянемо парний лінійний регресійний аналіз, тобто статистичний метод дослідження лінійної залежності випадкової змінної Y від однієї незалежної змінної X, тісноту лінійного зв’язку між якими, можна визначити за парним коефіцієнтом кореляції, а причино-наслідкові зв’язки – виходячи із змісту задачі.

Парна лінійна регресія – причинна модель статистичного лінійного зв'язку між двома кількісними змінними Y та X, представлена рівнянням:

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon, \qquad (2.1)$$

де X – незалежна змінна;

Y – залежна змінна;

β_0, β_1 – параметри моделі;

ε – випадкова величина (збурення).

Випадкова величина ε включає вплив не врахованих у моделі факторів, випадкових похибок та особливостей вимірювання. Її присутність у моделі викликана трьома причинами: специфікацією моделі, вибірковим характером вихідних даних, особливостями вимірювання змінних.

В основі оцінки рівняння парної лінійної регресії лежить вибірки значень двох змінних – незалежної X та залежної Y. Геометричною інтерпретацією таких вибірок розміром n буде сукупність n точок на площині (рис. 2.1 а), яка називається *діаграмою розсіювання*, чи *кореляційним полем*.

Задачею парного лінійного регресійного аналізу є знаходження такої прямої, яка найкращим чином аналітично характеризує кореляційне поле. Тобто потрібно мінімізувати деяку «міру» відхилень $g(\varepsilon_i)$ від лінії регресії (рис. 2.1 б).

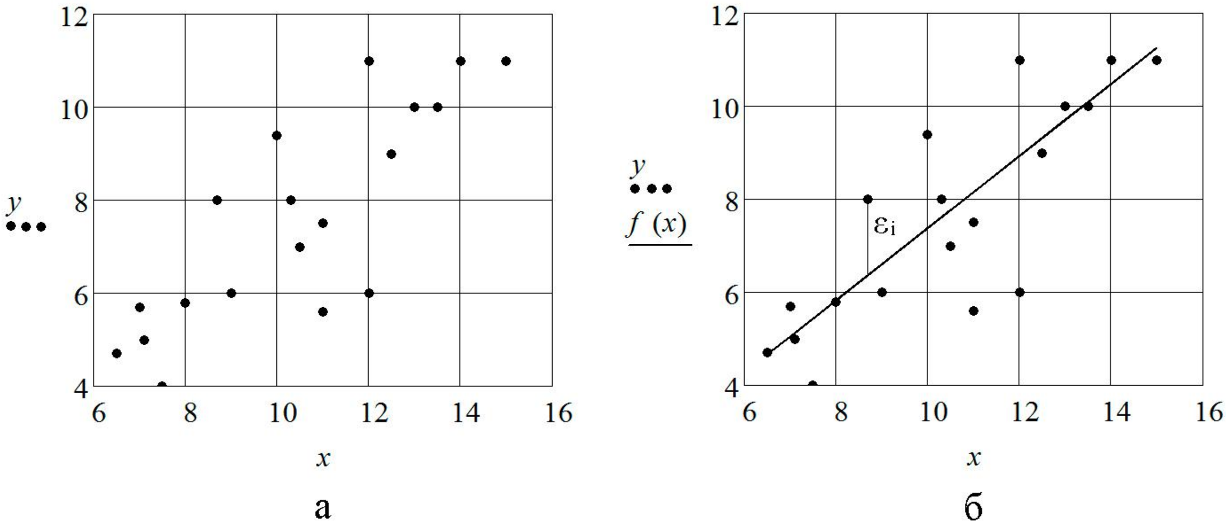


Рисунок 2.1 – Геометрична інтерпретація двох вибірок статистичних даних: а – кореляційне поле; б – кореляційне поле із лінією регресії.

У якості міри відхилення функції $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i$ від точок набору спостережень можна взяти:

1. суму квадратів відхилень $F = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x)]^2$; (2.2)
2. суму модулів відхилень $F = \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x)|$; (2.3)
3. функцію Хубера, яка при малих відхиленнях квадратична, а при великих – лінійна.

Із ряду причин, які будуть розглядатися нижче, найбільшого розповсюдження у якості міри відхилення набула сума квадратів відхилень. Метод знаходження оцінок параметрів регресії за допомогою цієї функції дістав назву методу найменших квадратів.

2.2 Поняття про метод найменших квадратів

Згідно методу найменших квадратів (МНК) оцінки невідомих параметрів β_0, β_1 обираються таким чином, щоб сума квадратів відхилень значень знайдених за рівнянням $\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_i$ від емпіричних значень y_i була мінімальною:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x)]^2 \to \min. \quad (2.4)$$

Функціонал (1) також іноді називають *функцією нев'язності*.

На підставі необхідної умови екстремуму функції двох змінних β_0, β_1 прирівнюємо до нуля її часткові похідні:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \beta_0} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i)] = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \beta_1} = -2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot [y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i)] = 0. \end{cases}, \quad (2.5)$$

Для подальших математичних викладок систему (2) доцільно записати у вигляді:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i)] = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot [y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i)] = 0. \end{cases}, \quad (2.6)$$

Розкриємо дужки та отримаємо стандартну форму нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \beta_0 \cdot n + \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i; \\ \beta_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i. \end{cases}, \qquad (2.7)$$

Потім розділив обидві частини системи на n отримаємо систему із двох алгебраїчних рівнянь із двома невідомими β_0, β_1:

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 \cdot \bar{x} = \bar{y}; \\ \beta_0 \cdot \bar{x} + \beta_1 \cdot \overline{x^2} = \overline{xy}; \end{cases}, \qquad (2.8)$$

Розв'язуючи систему (5) алгебраїчних рівнянь відносно β_0, β_1 отримаємо:

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \cdot \bar{x}; \qquad (2.9)$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}. \qquad (2.10)$$

Потрібно відзначити, що (6) та (7) є не параметрами парної лінійної регресії, а лише оцінками цих параметрів, отриманими за МНК. Реальні значення параметрів знати ми не можемо, оскільки на практиці працюємо не із генеральними сукупностями, а із вибірками із них.

Обрання у якості міри відхилення ліній регресії від емпіричних точок обгрунтовується *теоремою Гауса-Маркова*: при виконанні ряду вимог до вихідних вибірок статистичних спостережень, МНК-оцінки параметрів лінійної регресії, є найбільш *ефективними*, тобто мають найменшу дисперсію в класі усіх лінійних незміщених оцінок.

Вимоги до вихідних вибірок статистичних спостережень будуть розглянуті в темі множинний лінійний кореляційно-регресійний аналіз, оскільки він є узагальненням парного лінійного кореляційно-регресійного аналізу на моделі із довільним числом незалежних змінних.

Величина $\hat{\beta}_j$ називається *незміщеною оцінкою* параметра β_j, якщо її вибірочне математичне очикування дорівнює параметру β_j геренальної сукупності $M[\hat{\beta}_j] = \beta_j$. Змістовно незміщеність оцінки означає, що вона не має систематичної похибки.

Серед характеристик оцінок параметрів також потрібно відзначити *обгрунтованість* – властивість оцінки $\hat{\beta}_j$ параметра β_j наближатися до його реального значення при збільшенні обєму n вибірки за якою проводилася оцінка $\lim\limits_{n \to \infty} \hat{\beta}_j = \beta_j$.

Оскільки МНК, при виконанні ряду вимог до вихідних вибірок спостережень, дає найбільш ефективні оцінки параметрів парної лінійної регресії, його алгоритм реалізований багатьма компьютерними програмами. Так в Microsoft Excel існує статистична функція «ЛИНЕЙН» та інструмент «Регресія» надбудови «Аналіз даних». В MathCAD – оператор *line(X,Y).*

2.3 Економічний зміст параметрів парної лінійної регресії

Економічний зміст параметрів парної лінійної регресії визначається сутністю залежної та незалежної змінних. Розглянемо декілька прикладів.

Урожайність зерна (Y) залежно від кількості внесеного добрива (X), може бути оцінена через рівняння парної лінійної регресії $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$, при цьому всю урожайність ($\hat{Y}$) можна розділити на дві частини – безпосередньо не пов'язане із виробництвом продукції β_0 та безпосередньо пов'язане з об'ємом продукції, що випускається $(\beta_1 \cdot x)$, яке пропорційно зростає із збільшенням об'єму випуску X. Причому β_1 показує оцінку урожайністі на кожну одиницю внесеного добрива.

По аналогії із цим прикладом можна запропонувати наступний. Залежність витрат сільськогосподарського підприємства від обсягу виробництва взагалі характеризується нелінійною залежністю. Однак, на певному невиликому відрізку вони можуть оцінюватись рівнянням регресії $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot X$. Тоді витрати підприємства можуть бути розділені на умовно-постійні β_0, такі, що не змінюються із зміною об'єму виробництва (арендна платня, утримання адміністрації і ін.) і на умовно-змінні $(\beta_1 \cdot X)$, такі, що змінюються пропорційно зміні об'єму продукції (витрата матеріалу, заробітна платня працівників зайнятих безпосередньо на виробництві та ін.). Причому β_1 тут оцінка умовно-змінних витрат на одиницю виробленої продукції.

Наведені вище приклади ілюструють прямі залежності Y від X. Розглянемо зворотню залежність кількості бракованої продукції Y (%) від кількості робітників із спеціальною підготовкою X (%). Якщо така залежність буде описуватись рівнянням $\hat{Y} = \beta_0 - \beta_1 \cdot X$, то β_0 – оцінка кількості бракованої продукції при відсутності робітників із спеціальною підготовкою $x = 0$, β_1 – оцінка зменшення кількості (%) бракованої продукції, при збільшенні кількості робітників із спеціальною підготовкою на 1%.

Параметр β_0 не завжди буде мати економічний зміст, наприклад, коли він відємний.

2.4 Парний коефіцієнт кореляції

Парний коефіцієнт кореляції r – міра тісноти *лінійного* зв'язку двох випадкових величин X та Y, представлених у вигляді двох вибірок однакового об'єму n:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Парний коефіцієнт кореляції також часто називають вибірковим або коефіцієнтом кореляції К. Пірсона. Парний коефіцієнт кореляції може бути розрахований за формулою:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \overline{x}^2) \cdot (\overline{y^2} - \overline{y}^2)}}; \tag{2.11}$$

де $\overline{x}$, $\overline{y}$ – середнє значення незалежної та залежної змінних відповідно;

$\overline{xy}$ – середнє значення добутку незалежної та залежної змінної;

$\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ – середнє значення квадратів незалежної та залежної змінних відповідно.

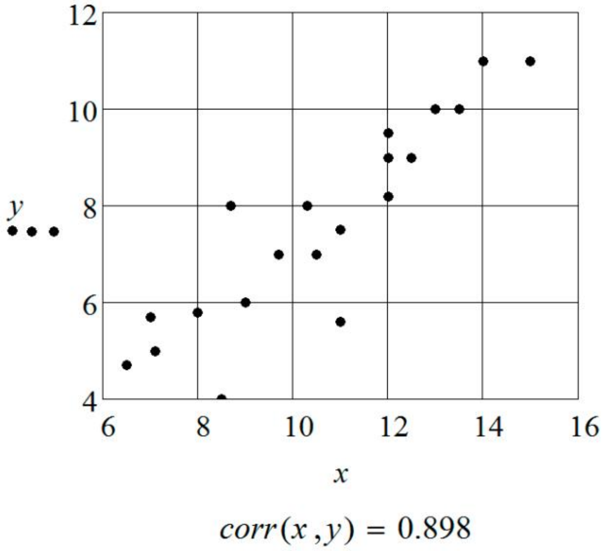
Відповідні середні визначаються за формулами:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \tag{2.12}$$

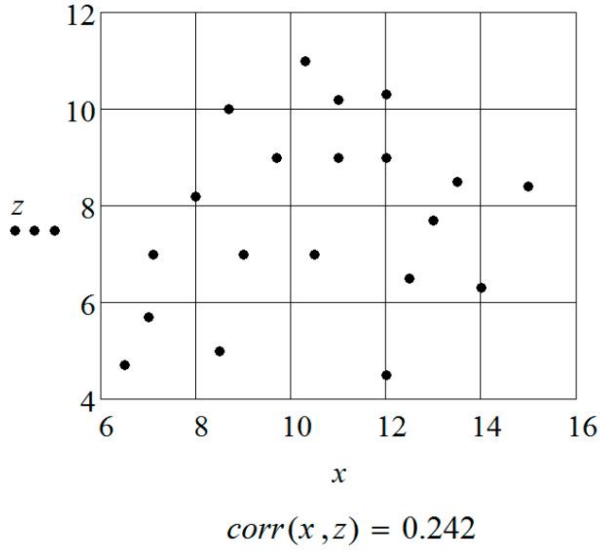
$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)}{n}; \tag{2.13}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; \quad (2.14) \qquad\qquad \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}. \quad (2.15)$$

Коефіцієнт кореляції може приймати значення від –1 до 1. По знаку та абсолютному значенню коефіцієнта кореляції можна зробити наступні висновки: чим ближче абсолютне значення $|r|$ коефіцієнта кореляції до 1, тим тісніший зв'язок існує між двома змінними x та y (рис. 2.2 а), а чим ближче $|r|$ до нуля тим зв'язок слабкіший (рис. 2.2 б). Якщо парний коефіцієнт кореляції дорівнює 1, то між двома змінними існує лінійна функціональна залежність. При цьому усі спостереження на кореляційному полі розташовуються вздовж прямої лінії. Якщо парний коефіцієнт кореляції дорівнює 0, то між двома змінними залежність відсутня.



а



б

Рисунок 2.2 – Кореляційні поля: а – для вибірки сильнокорельованих даних; б – для вибірки слабокорельованих даних

Для перетворення кількісної характеристики тісноти лінійного зв’язку між двома випадковими у якісну харатеристику може бути викристана шкала англійського статистика Чеддока (таблиця 2.1).

Таблиця 2.1 – Шкала Чеддока

Величина абсолютного значення парного коефіцієнта кореляції	Характеристика лінійного зв’язку між двома випадковими величинами
до 0,3	Практично відсутній
0,31-0,5	Слабкий
0,51-0,7	Помітний
0,71-0,9	Сильний
0,91-0,99	Дуже сильний

1. Якщо коефіцієнт кореляції додатний ($r > 0$), то зв'язок між змінними прямий, тобто при збільшенні незалежної змінної x залежна змінна y теж збільшується (рис. 2.3 а). При $r < 0$ зв'язок між змінними зворотний, тобто при збільшенні незалежної змінної x залежна змінна y зменшується (рис. 2.3 б).

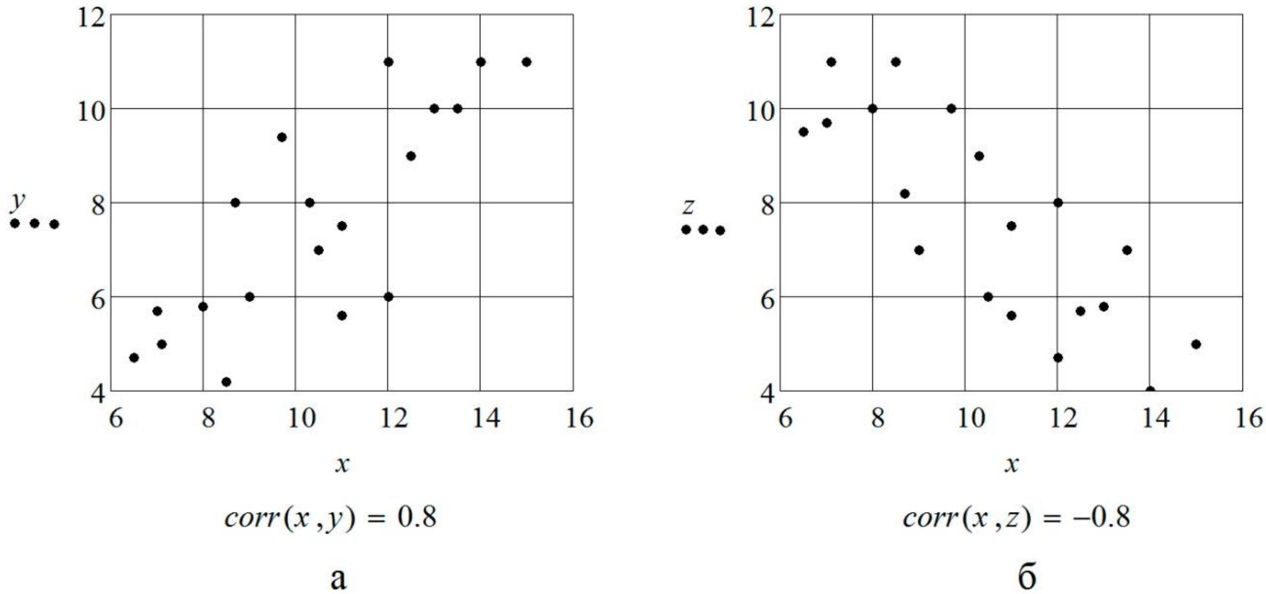


Рисунок 2.3 – Кореляційні поля: а – для вибірки даних з прямим зв’язком; б – для вибірки даних зі зворотнім зв’язком

Парний коефіцієнт кореляції є випадковою величиною, оскільки обчислюється для випадкових величин. Для нього необхідно висувати і перевіряти гіпотезу про те, чи статистично значуще він відрізняється від нуля (тобто чи є взаємозв'язки між величинами). Дана гіпотеза перевіряється за допомогою *t*-критерія

(t-статистики) Ст’юдента, фактичне значення якого визначається за формулою:

$$t_{факт.} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}. \qquad (2.16)$$

Фактичне значення критерію Стьюдента порівнюється із критичним $t_{p;k}$, отриманим за відповідною таблицею для ступенів свободи $k = n-2$ та вірогідності p, яка в загальному випадку може обиратися довідно. У багатьох джерелах у якості критерію вибору пропонується рівень значущості $\alpha = 1 - p$.

На сучасному етапі розвитку наук пов’язаних із математичною статистикою критичне значення критерію Ст’юдента можна визначити за допомогою функції СТЬЮДРАСПОБР Microsoft Excel 2003-2007 та функції СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х Microsoft Excel 2010. При використанні цих функцій в рядку «Вірогідність» діалогового вікна потрібно зазначати не вірогідність p, а рівень значущості α. Така невідповідність, скоріше за все, повязана із неточністю переклада інтерфейсу статистичних функції із англійської мови на російську. В MathCAD критичне значення t-критерія Ст’юдента можна отримати за допомогою оператора $qt(p,k)$.

Якщо $\left|t_{факт.}\right| > t_{p;k}$, то коефіцієнт кореляції статистично значуще відрізняється від нуля та залежність є достовірною. В противному випадку коефіцієнт кореляції статистично не значущий та кореляційний зв'язок між змінними відсутній.

Очевидно, що різним рівням вірогідності будуть відповідати різні значення $t_{p;k}$. Тобто при меншій вірогідності коефіцієнт кореляції може бути статистично значущим, а при більшій – не значущим. Тому обов’язково необхідно вказувати при якій вірогідності було обрано t-критерій Ст’юдента. Це можна зробити відзначивши, що *коефіцієнт кореляції статистично значущий (або не значущий) при вірогідності, наприклад,* 0,9. Вкзати вірогідність p (чи рівень значущості α) та ступені свободи при якій обиралося табличне значення t-критерію Ст’юдента можна в його індексі – $t_{p;k}$.

Зі збільшенням вірогідності p критичне значення t-критерію Ст'юдента буде зростати. Тому, якщо парний коефіцієнт кореляції виявився статистично не значущим для високої вірогідності (наприклад 0,95-0,99), доцільно перевірити його статистичну значущисть при меншому рівні вірогідності (наприклад 0,8-0,85).

При проведенні кореляційного аналізу потрібно памятати, що парний коефіцієнт кореляції є мірою тісноти *лінійного* зв'язку між двома випадковими величинами. Тому, мале абсолютне значення коефіцієнту кореляції $|r|$ і (або) його статистична незначущисть може свідчити лише про відсутність чи слабкість *лінійного* зв'язку, в той час як між двома випадковими змінними *може існувати тісний нелінійний зв'язок*. Одним із способів виявити такий зв'язок є аналіз відповідних кореляційних полів.

Коефіцієнт кореляції лише констатує факт присутності чи відстутності лінійного зв'язку між двома величинами X та Y, але він не вказує на причино-наслідкові зв'язки між ними. Таким чином визначити яка змінна є причиною, а яка наслідком можна виходячі із змісту задачі. Також зустрічаються випадки, коли тісний кореляційний зв'язок між двома величинами X та Y пояснюється дією третього фактору Z, що одночасно діє і на X, і на Y. Причому причино-наслідкові зв'язки безпосередньо між X та Y відсутні.

Формула (8) оцінки коефіцієнта кореляції рекомендується для застосування при великій кількості спостережень та якщо, r не близьке до $|1|$. Якщо величина коефіцієнта кореляції близька до 1, то розподіл його оцінок відрізняється від нормального або розподілу Стьюдента, оскільки величина коефіцієнта кореляції обмежена значеннями від – 1 до + 1. Щоб обійти це ускладнення для оцінки істотності коефіцієнта кореляції вводитися допоміжна величина z.

Математичні вирази, що знаходяться в чисельнику та знаменнику формули (8) мають самостійний статистичний зміст:

$$Cov(X,Y) = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}; \qquad (2.17)$$

називається *вибірковим кореляційним моментом* або *вибірковою коваріацією.* Ця величина є мірою тісноти лінійного зв'язку двох випадкових величин X та Y, однак, на відміну від коефіцієнта кореляції вибіркова коваріація має розмірність, що ускладнює її практичне застосування. Знак вибіркової коваріації має таку ж інтерпретацію, як і знак коефіцієнта кореляції.

У знаменнику формули (8) знаходиться корінь квадратний із добутку вибірочних дисперсій двох випадкових величин X та Y:

$$Var(X) = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \qquad (15) \qquad Var(Y) = \overline{y^2} - \bar{y}^2. \qquad (2.18)$$

Вибіркова дисперсія (варіація) – оцінка дисперсії випадкової величини за вибіркою. Під дисперсією випадкової величини тут потрібно розуміти міру розсіювання випадкової величини, тобто її відхилення від математичного очікування. Вибірочна дисперсія X позначається, як $Var(X)$ від англ. variance, також можуть бути наступні позначення $D[x]$, σ_x^2. Дисперсія $Var(X)$ вимірюється в квадраті одиниці виміру випадкової величини X, що є незручним. Квадратний корінь із дисперсії називається *середньо-квадратичним відхиленням* або *стандартним відхиленням.* Стандартне відхилення вимірюється у тих же величинах, що і сама випадкова величина.

Враховуючи формули (14)-(16) коефіцієнт кореляції (8) може бути розрахований так:

$$r = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}. \qquad (2.19)$$

На сучасному етапі розвитку наук, пов'язаних із математичною статистикою, немає необхідності здійснювати громіздкі розрахунки за формулами (8) чи (17). В Microsoft Excel існує функція *«КОРРЕЛ»* яка дозволяє розрахувати парний коефіцієнт кореляції на основі двох вибірок статистичних даних, а в MathCAD – функція *corr(X,Y)*.

2.5 Перевірка статистичної значущості та довірчі інтервали оцінок параметрів регресії

Параметри регресії оцінюються на основі вибірки емпіричних величин, в значеннях яких суттєву роль відігорають випадкові фактори. Це призводить до наявності суттєвої випадкової складової в оцінці кожного із параметрів, тому вони потребують перевірки статистичної значущості та побудови довірчих інтервалів. З цією метою по кожному з параметрів визначається його стандартна помилка – m_{β_0}, m_{β_1}.

Стандартна помилка оцінки параметру регресії β_1 визначається за формулою:

$$m_{\beta_1} = \sqrt{\frac{S^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}, \tag{2.20}$$

де S^2 – залишкова дисперсія на один ступінь свободи.

У разі нормального розподілу величин відхилень ε вона розраховується за формулою:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[y_i - (\beta_0 + \beta_1 \cdot x_i)]^2}{n-2}. \tag{2.21}$$

Далі визначається фактичне значення *t*-критерію Стьюдента:

$$t_{\beta_1} = \frac{\beta_1}{m_{\beta_1}}, \tag{2.22}$$

яке потім порівнюється з критичним (табличним) значенням, обраним при певному рівні вірогідності p, або значущості α, і числі ступенів свободи $k = n - 2$.

Якщо фактичне значення *t*-критерію перевищує табличне:

$$t_{\beta_1} > t_{p,k}, \tag{2.23}$$

то гіпотезу про статистичну незначущість оцінки параметру β_1 регресії можна відхилити.

Довірчий інтервал оцінки параметру β_1 регресії визначається:

$$\beta_1 - t_{k,p} \cdot m_{\beta_1} \le b_1 \le \beta_1 + t_{k,p} \cdot m_{\beta_1} \tag{2.24}$$

де b_1 – дійсне значення параметра β_1 регресії, яке могло б бути отримане при оцінці за генеральною сукупністю.

Стандартна помилка параметра β_0 визначається за формулою:

$$m_{\beta_0} = \sqrt{S^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}. \tag{2.25}$$

В іншому послідовність оцінювання статистичної значущості оцінки параметру β_0 і побудови її довірчого інтервалу не відрізняється від розглянутої вище для β_1.

Оскільки оцінка параметру регресії в економетричних дослідженнях має чітку інтерпретацію, то довірчі межі інтервалу для неї не повинні містити суперечливих результатів, наприклад $-10 \le b_j \le 40$. Такого роду запис по, що дійсне значення параметру регресії може приймати додатні, від'ємні і навіть нульове значення, чого, скоріше за все, не може бути.

При перевірці статистичної значущості та побудові довірчих інтервалів параметрів регресії обов'язково необхідно вказувати вірогрідність *p* для якої визначалося $t_{p,k}$. Це пов'язано із тим, що для одного рівня вірогідності оцінка параметру регресії може бути статистично значущою, в той же час, як для вищого рівня вірогідності вона буде статистично незначущою. Межі довірчих інтервалів також будуть відрізнятися для різних вірогідностей *p*.

2.6 Коефіцієнт детермінації

Окрім перевірки статистичної значущості оцінок параметрів парної лінійної регресії важливо також визначити якість моделі в цілому. Однієї з найбільш ефективних оцінок адекватності регресійної моделі, мірою якості рівняння регресії, характеристикою її прогностичної сили є *коефіцієнт детермінації*. Цей коефіцієнт показує частину дисперсії пояснену рівнянням регресії:

$$R^2 = \frac{Var(\hat{Y})}{Var(Y)}. \tag{2.26}$$

Іншою формою представлення формули (24) може бути наступна:

$$R^2 = 1 - \frac{Var(\varepsilon)}{Var(Y)}. \tag{2.27}$$

У разі парної лінійної регресійної моделі коефіцієнт детермінації рівний квадрату коефіцієнта кореляції.

$$R^2 = r^2. \tag{2.28}$$

Чим ближче R^2 до одиниці, тим краще регресія апроксимує емпіричні дані, тим тісніше точки спостереження примикають до лінії регресії. Якщо $R^2 = 1$, то емпіричні точки, що характеризують незалежну X та залежну Y змінну лежать на лінії регресії і між змінними існує лінійна функціональна залежність. Якщо $R^2 = 0$, то варіація залежної змінної повністю обумовлена дією неврахованих в моделі змінних, і лінія регресії паралельна осі абсцис. Зазначимо, що коефіцієнт R^2 має сенс розглядати тільки за наявності параметра β_0 в рівнянні регресії.

Якщо коефіцієнт детермінації відомий, то критерій його статистичної значущості (F-критерій Фішера) для парної лінійної регресії може бути записаний у вигляді:

$$F = \frac{R^2 \cdot (n-2)}{1-R^2}; \qquad (2.29)$$

Для заданого рівня значущості α, ступенів свободи k_1 та k_2 знаходиться табличне значення критерію Фішера (в деяких джерелах він називається критерієм Фішера-Снедекора). Причому, $k_1 = m-1$, де m – кількість змінних у моделі (для парної регресії $k_1 = 1$), $k_2 = n-2$.

На сучасному етапі розвитку наук пов'язаних із математичною статистикою критичне значення критерію Фішера можна визначити за допомогою статистичних функцій F.ОБР та F.ОБР.ПХ Microsoft Excel 2010. При використанні цієї функції F.ОБР.ПХ в рядку «Вірогідність» діалогового вікна потрібно зазначати не вірогідність p, а рівень значущості α. Така невідповідність довідки за функцією, скоріше за все, пов'язана із неточністю перекладу інтерфейсу статистичних функції із англійської мови на російську.

В більш старих версіях Microsoft Excel використовується функція FРАСПОБР, в рядку «Вірогідність» діалогового вікна якої необхідно вказувати не вірогідність p, а рівень значущості α.

В MathCAD критичне значення F-критерію Фішера можна отримати за допомогою оператора $qF(p, k_1, k_2)$.

Якщо $F > F_{кр.}$, то для вірогідності p, коефіцієнт детермінації статистично значущий.

Після побудови та дослідження якості моделі парної лінійної регресії можна перейти до прогнозування розвитку економічного явища чи процесу, який описує ця модель.

2.7 Прогнозування по лінійному рівнянню регресії

У прогнозних розрахунках за допомогою рівняння регресії визначається прогнозне значення залежної змінної, при деякому прогнозному значенні незалежної змінної $x_{пр.}$. Прогноз поділяють на *точковий* (коли оцінкою прогнозної величини є число) та *інтервальний* (коли оцінкою є інтервал).

Точковою оцінкою залежної змінної вважають її умовне математичне очикування $M_{x_{пр.}}(y)$, яке ототожнюють із груповою середньою $\hat{y}_{x_{пр.}}$, котру знаходять за рівнянням регресії:

$$\hat{y}_{x_{пр.}} = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{пр.} \tag{2.30}$$

Дисперсію групової середньої оцінюють за формулою:

$$s^2_{\hat{y}_{x_{пр.}}} = s^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_{пр.} - \bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right). \tag{2.31}$$

Тоді стандартна помилка групової середньої:

$$s_{\hat{y}_{x_{пр.}}} = \sqrt{s^2_{\hat{y}_{пр.}}}\ . \tag{2.32}$$

Тоді p%-й довірчий інтервал для умовного математичного очікування становить:

$$\hat{y}_{x_{пр.}} - s_{\hat{y}_{x_{пр.}}} \cdot t_{p;k} \le M_{x_{пр.}}(y) \le \hat{y}_{x_{пр.}} + s_{\hat{y}_{x_{пр.}}} \cdot t_{p;k}. \tag{2.33}$$

Побудована довірча область для умовного математичного очікування $M_{x_{пр.}}(y)$, але не окремих можливих прогнозних значень залежної змінної, котрі відхиляються від середньої. Тому при визначенні довірчого інтервалу для індивідуальних значень $y^*_{x_{пр.}}$ залежної змінної необхідно враховувати іще одне джерело дисперсії – розсіювання навколо лінії регресії. Це реалізується шляхом включення в оцінку дисперсії $s^2_{\hat{y}_{x_{пр.}}}$ величини s^2. В результаті оцінка дисперсії індивідуальних значень $y^*_{x_{пр.}}$ дорівнює:

$$s^2_{y^*_{x_{пр.}}} = s^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{пр.} - \bar{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \right). \tag{2.34}$$

Тоді стандартна помилка індивідуальних значень складає:

$$s_{y^*_{x_{пр.}}} = \sqrt{s^2_{y^*_{x_{пр.}}}}\,. \qquad (2.35)$$

p%-й довірчий інтервал для прогнозів індивідуальних значень $y^*_{x_{пр.}}$ буде становити:

$$\hat{y}_{x_{пр.}} - s_{y^*_{x_{пр.}}} \cdot t_{p;k} \le y^*_{x_{пр}} \le \hat{y}_{x_{пр.}} + s_{y^*_{x_{пр.}}} \cdot t_{p;k}\,. \qquad (2.36)$$

Чим більше $x_{пр.}$ відхиляється від середнього за вибіркою значення незалежної змінної $\bar{x}$, тим менш точним буде прогноз та ширшими довірчі інтервали для умовного математичного очікування $M_{x_{пр.}}(y)$ та індивідуальних значень $y^*_{x_{пр.}}$. Тому *екстраполяція* регресії, тобто її використання поза межами дослідженого діапазону значень незалежної змінної може призвести до значної погрішності. Навіть у тому випадку, якщо така екстраполяція виправдана для розглянутої змінної, виходячи із змісту задачі, що розв’язується.

При прогнозуванні розвитку агротехнологічних явищ чи процесів на основі регресій взагалі та парних лінійних регресійних моделей зокрема, потрібно пам’ятати про складність та імовірнісний характер цих явищ та процесів. Тому отримані прогнози не можна подавати як «істину останньої інстанції», а лише як важливий допоміжний матеріал при прийнятті управлінського рішення, пов’язаного із прогнозом розвитку агротехнологічного явища чи процесу.

На агротехнологічні явища та процеси сукупно та одночасно діє значна кількість факторів різної природи, а модель парної регресії враховує лише один, найбільш важливий на думку дослідника фактор. Більш ефективним інструментом опису вказаних вище явищ та процесів можуть служити багатофакторні регресійні моделі, що одночасно враховують декілька факторів.

ТЕМА 3. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В УПРАВЛІННІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИМ ВИРОБНИЦТВОМ

ПЛАН

3.1 Загальна математична модель лінійного програмування.

3.2 Форми запису задач лінійного програмування.

3.3 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

3.4 Технологія розв'язання оптимізаційних задач за допомогою надбудови Microsoft Excel «Пошук рішень».

3.5 Економіко-математична модель визначення оптимального плану структури посівних площ сільськогосподарських культур при заданому обсязі виробництва продукції тваринництва.

3.6 Економіко-математична модель визначення оптимального обсягу внесення добрив у господарстві аграрної сфери.

3.7 Економіко-математична модель оптимізації земель відповідно до ротаційних сівозмін.

Економіко-математичне моделювання представляє собою поєднання розділів математичного моделювання: математичного програмування, теорії ймовірностей, математичної статистики, теорії масового обслуговування, теорії ігор, сітьового планування тощо. Вони застосовуються при розв'язанні економічних задач в тій чи іншій сфері людської діяльності.

Доцільність використання економіко-математичних моделей в сільському господарстві наукове обґрунтування пріоритетів розвитку сільського господарства, як елемента внутрішньо- та зовнішньоекономічної політики неможливе без побудови економіко-математичних моделей і реалізації їх засобами програмного забезпечення, що дозволяє розробити та проаналізувати сценарії розвитку галузі.

Економічна ситуація, що невпинно змінюється, вимагає від управлінців, котрим доводиться приймати рішення як в приватному секторі, так і за його межами, системного бачення майбутнього, розуміння процесів, які відбуваються в аграрній галузі. Вірогідний рівень попиту на продукцію, ступінь зайнятості населення, очікуваний рівень цін і доходів регіону - ці та багато інших чинників є актуальними питаннями сталого розвитку. Тому економіко-математичні методи та моделі використовуються як один із напрямів наукового пізнання реальності. Саме за допомогою застосування економіко-математичних методів та моделей надаються такі можливості як формально описані зв’язки між економічними змінними, відображаючи специфіку виробничих процесів – розв’язувати задачі оптимізації планування та управління, виявлення залежності між параметрами та адекватне коректування планів й управлінських рішень, своєчасне реагування на зміни поставлених цілей.

Стан у якому знаходиться сільськогосподарське виробництво і інші галузі агропромислового комплексу, вимагає обґрунтованого визначення стратегічних напрямків здійснення аграрної політики зупинення спаду і забезпечування нарощування обсягів виробництва, відновлення внутрішнього і зовнішнього ринків продовольства, прискорення соціально-економічних перетворень на селі.

Вектор аграрної політики має бути спрямований на гарантування продовольчої безпеки країни, забезпечення пріоритетного розвитку агропромислового комплексу з визнанням сільського господарства базовою галуззю економіки національного господарства, створення умов для стабілізації та нарощування виробництва сільськогосподарської продукції. Необхідно сприяти формуванню багатоукладної аграрної політики, забезпечити свободу вибору селянам нових організаційно-правових форм господарювання на основі приватної власності на землю й засоби виробництва, досягти збалансованого поєднання державного регулювання економіки агропромислового виробництва з економічною свободою підприємств організацій при переході до ринкових відносин.

У полі зору державної аграрної політики постійно має знаходитися проблема вдосконалення організаційно-економічних механізмів, цінового регулювання, кредитно-фінансової системи й податкової політики. Особливе місце повинен займати соціальний розвиток села, інфраструктура сільських поселень: освіта, культурно-побутові умови, охорона здоров’я, газифікація, дороги з твердим покриттям, транспорт, зв’язок, об’єкти побутового обслуговування.

Необхідно створити цілісну систему економічного регулювання земельних відносин і земельного ринку.

Назріла необхідність прискорення демонополізації заготівельних, переробних та сервісних підприємств агропромислового комплексу шляхом створення конкурентоспроможних акціонерних і кооперативних асоціацій та товариств, забезпечити вільний вибір товаровиробниками форм і напрямків реалізації продукції, право розпоряджатися результатами своєї праці.

Отже, потреба у застосуванні методології дослідження аграрної галузі за допомогою економіко-математичного моделювання із застосуванням, відповідно, організаційно-правових чинників нагальна і невідкладна.

Математичне моделювання при вивчення процесів аграрної галузі економіки застосовується з метою визначення оптимального поєднання галузей, тобто збалансування виробництва і використання ресурсів таким чином, щоб забезпечити: раціональне використання наявних ресурсів виробництва; найкраще розміщення та спеціалізацію сільськогосподарського виробництва; оптимальне використання складу машинно-тракторного та автомобільного парку; оптимальний оборот та структуру стада; оптимальні раціони харчування тварин та використання кормів тощо.

Отже, сьогодні український аграрний сектор знаходиться на роздоріжжі економічного розвитку, маючи перед собою цілу низку варіантів вибору. І тому, саме економіко-математичні моделі можуть бути важливим інструментом в руках менеджерів аграрної сфери для передбачення можливих наслідків будь-яких здійснених заходів.

Перед тим, як перейти до знайомства з конкретними математичними моделями аграрної сфери, представимо систему моделей для дослідження технологій в сільському господарстві в розрізі галузей. Слід зазначити, що система моделей будуються за принципом цілеспрямованого розвитку галузей та має на меті оптимізувати виробничу програму на рівні аграрного підприємства.

Рисунок 3.1 – Система економіко-математичних моделей оптимізації виробничих процесів аграрної галузі

3.1 Загальна математична модель лінійного програмування

Лінійне програмування – це розділ математичного програмування, в якому розглядаються методи розв’язання екстремальних задач з лінійною цільовою функцією та лінійними обмеженнями, яким повинні задовольняти шукані змінні.

Загальна лінійна математична модель, так звана загальна задача лінійного програмування (ЗЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n, \qquad (3.1)$$

або

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max\ (\min)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\,. \quad (3.3)$$

Необхідно знайти значення змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які задовольняють обмеженням (3.2), (3.3) тоді як цільова функція (3.1) набуває екстремального значення.

3.2 Форми запису задач лінійного програмування

Задачі лінійного програмування можуть бути записані в загальній, стандартній (симетричній) та канонічній (основній) формі.

Більш компактно загальну задачу лінійного програмування можна записати у вигляді:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min) \quad (3.4)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\le, \ge, =\} b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \quad (3.5)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.6)$$

Стандартна (симетрична) форма задачі лінійного програмування має вид:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \quad (3.7)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m); \quad (3.8)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (3.9)$$

Канонічною (основною) формою задачі лінійного програмування називається задача (3.1)–(3.3), коли в системі обмежень (3.2) всі значення $b_j \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$ невід'ємні, а всі обмеження є рівностями, тобто

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (3.10)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = 1, 2, \ldots, m); \qquad (3.11)$$

$$x_j \ge 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.12)$$

Для цього якщо якесь значення b_i від'ємне, то помноживши і-обмеження на (–1), дістанемо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли і-те обмеження має вигляд нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in} \le b_i$, то останню завжди можна звести до рівності, увівши допоміжну балансуючу змінну x_{n+1}:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots. + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \qquad (3.13)$$

Аналогічно обмеження виду $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots. + a_{kn}x_n \ge b_k$ зводимо до рівності, віднімаючи від лівої частини допоміжну балансуючу змінну x_{n+2}, тобто

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots. + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k . \qquad (3.14)$$

Якщо в задачі деяка змінна x_k довільного знаку, то її заміняють як $x_k = x'_k - x''_k$, де $x'_k \ge 0, x''_k \ge 0$. У випадку, коли деяка змінна $x_p \le 0$, то її заміняють на $x'_p = -x_p$

Якщо задача задана на знаходження максимуму, то її можна розв'язати також і на мінімум, якщо цільову функцію помножити на (–1), тобто

$$\max Z = -\min(-Z) == \min(-c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots c_nx_n) \qquad (3.15)$$

залишивши систему обмежень без зміни.

Канонічну форму задачі лінійного програмування можна записати компактніше у векторно-матричному вигляді:

$$Z = CX \to \max(\min) \qquad (3.16)$$

за умов

$$\begin{array}{l} AX = A_0, \\ X \ge 0, \end{array}, \qquad (3.17)$$

де $A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матриця коефіцієнтів при змінних;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор змінних; $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ — вектор вільних членів; $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ – вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції.

Канонічну форму задачі лінійного програмування часто записують у векторній формі

$$Z = CX \to \max(\min) \qquad (3.18)$$

за умов

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0, \qquad (3.19)$$

$$X \geq 0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

є вектори коефіцієнтів при змінних,

Розглянуті форми задачі лінійного програмування (загальна, стандартна та канонічна) еквівалентні в тому значенні, що кожна з них за допомогою нескладних перетворень може бути приведена до любої з двох інших.

3.3 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Для розв'язування двовимірних задач лінійного програмування, тобто задач з двома змінними, а також деяких тривимірних задач застосовують графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач лінійного програмування.

Розглянемо таку задачу.

Знайти екстремум (мінімум, максимум) функції:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min) \qquad (3.20)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m \end{cases} \qquad (3.21)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (3.22)$$

Припустимо, що система (3.21) за умов (3.22) сумісна і многокутник її розв'язків обмежений.

Згідно з геометричною інтерпретацією задачі лінійного програмування кожне і-те обмеження-нерівність (3.21) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (і = 1, 2, …, т). Системою обмежень (3.21) описується спільна частина, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі. Таку множину точок називають многокутником розв'язків, або областю допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування.

Умова (3.22) невід'ємності змінних означає, що область допустимих розв'язків задачі належить першому квадранту системи координат двовимірного простору. Цільова функція задачі лінійного програмування геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = const.$

Сформулюємо деякі властивості задачі лінійного програмування, що застосовуються при графічному розв'язуванні.

Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин многокутника розв'язків. А якщо цільова функція досягає екстремального значення більш як в одній вершині многокутника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією цих вершин.

Отже, розв'язати задачу лінійного програмування графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підставляння координат якої в (3.20) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з розглянутих далі кроків.

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (3.20) знаків нерівностей на знаки рівностей.

2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.

3. Знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування.

4. Будуємо вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції задачі.

5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярну до вектора $\vec{N}$.

6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ в напрямі вектора $\vec{N}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.

7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

У разі застосування графічного методу для розв'язування задач лінійного програмування можливі такі випадки.

Цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині А многокутника розв'язків (рис. 3.2).

Максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка АВ (рис. 3.3). Тоді задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні плани.

Задача лінійного програмування не має оптимальних планів (рис. 3.4 — цільова функція не обмежена згори; рис. 3.5 — система обмежень задачі несумісна).

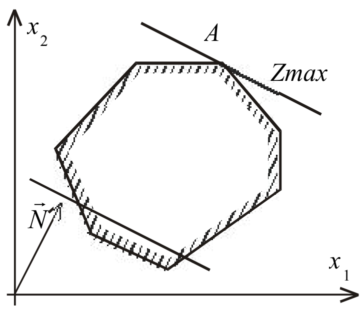


Рисунок 3.2

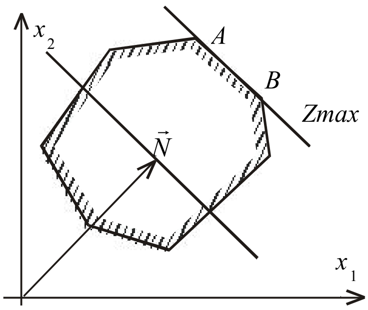
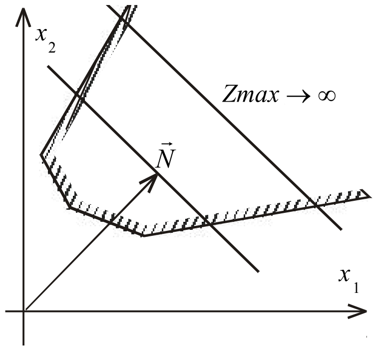


Рисунок 3.3



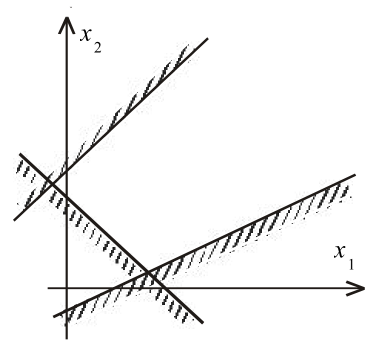
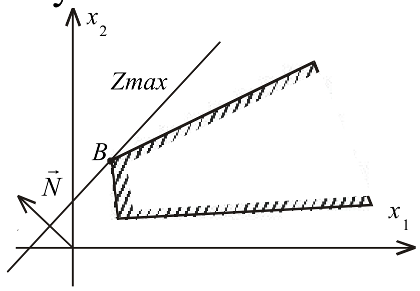


Рисунок 3.4 Рисунок 3.5



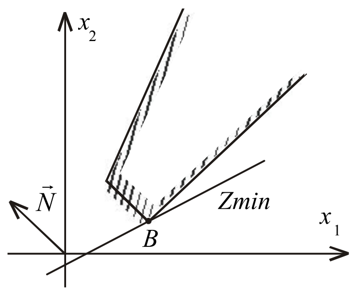


Рисунок 3.6 Рисунок 3.7

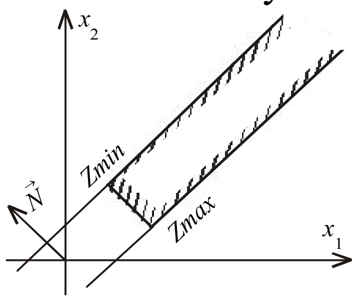


Рисунок 3.8

Задача лінійного програмування має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв’язків (рис. 3.6 і 3.7). На рис. 3.6 у точці В маємо максимум, на рис. 3.7 у точці В – мінімум, на рис. 3.8 показано, що в разі необмеженої області допустимих планів цільова функція набуває максимальне і мінімальне значення.

3.4 Технологія розв’язання оптимізаційних задач за допомогою надбудови Microsoft Excel «Пошук рішень»

Для реалізації оптимізаційних задач планування агротехнологічних процесів в Microsoft Excel існує надбудова «Пошук рішень».

«Пошук рішень» знаходить оптимальне (мінімальне або максимальне) значення цільової функції з можливих розв’язків. Для складних задач «Пошук рішень» може генерувати множину різних рішень. Шаблон задач планування економічних процесів, для рішення яких можна скористатися надбудовою, повинен мати ряд загальних властивостей:

1. Існує єдина цільова комірка, що містить формулу цільової функції.

2. Формула в цільовій комірці містить посилання (прямі або непрямі) на ряд змінюваних комірок.

Може бути задана деяка кількість обмежень.

Для звертання до надбудови «Пошук рішень» у Micrisift Word 2010 використовується команда меню **ДАНІ**. Але може бути так, що команда «Пошук рішень» в цьому меню відсутня, тоді необхідно виконати наступну команду:

Дані /Надстройки/ Пакет Аналізу – Перейти, навпроти Пошук рішень поставити галочку, натиснути Ok.

Команда меню Пошук рішення Microsoft Excel дає змогу розв’язувати системи рівнянь, задачі лінійної оптимізації.

Щоб скористатися даним сервісом Microsoft Excel слід спочатку підготувати дані на листі робочої таблиці:

1. Зарезервувати для кожної змінної комірки електронної таблиці.

2. Ввести в вигляді формули цільову функцію (для задачі лінійної оптимізації), підставляючи адреси чарунок у позиції змінних.

3. Ввести в вигляді формул ліві частини рівнянь, підставляючи адреси чарунок у позиції змінних.

Для розв’язування задачі, необхідно викликати команду меню Пошук рішення. У вікні діалогу команди слід визначити:

1. адресу чарунки, у якій міститься цільова функція, якщо розв’язується задача лінійної оптимізації, при розв’язанні системи рівнянь поле повинно бути порожнім, а також визначити якого значення повинна досягти цільова функція – мінімального, максимального або певного;

2. адреси чарунок, що змінюються, ці чарунки, які було зарезервовано для змінних;

3. в області Ограничения добавити обмеження, що визначають яке значення повинно прийняти кожне рівняння;

4. натиснути на кнопку Выполнить.

3.5 Економіко-математична модель визначення оптимального плану структури посівних площ сільськогосподарських культур при заданому обсязі виробництва продукції тваринництва

Для кожного сільськогосподарського підприємства не залежного від типу і форми власності та спеціалізації головною задачею є покращення продуктивності сільськогосподарських угідь, збільшення обсягів виробництво продукції галузі рослинництва та тваринництва. Зрозуміло, що це залежить від багатьох чинників. Проте, раціональне використання землі – було і залишається одним з ключових питань як розрізі національної економіки, так і конкретного підприємства. Необхідно зауважити, що галузі рослинництва та тваринництва тісно пов’язані між собою. Посівні площі кормових культур залежать від особливостей сівозмін, типу ґрунтів, їх фактичного стану та виду і обсягу продукції тваринництва. Головною задачею розрахунку структури посівних площ кормових культур є створення надійної кормової бази для тваринництва.

Розв’язок задачі згідно запропонованої моделі передбачає розрахунок структури посівних площ кормових культур з обов’язковим урахуванням вимог сівозмін, які забезпечать тваринництво кормами належної якості, а також збереже природну якість ґрунтів та не порушить екосистему в цілому. Можливими критеріями оптимальності можуть бути такі: мінімум матеріально-грошових витрат ви виробництво кормів, мінімум відведеної ріллі під кормові культури, максимум валової (товарної) продукції галузі тваринництва, максимум чистого доходу підприємства тощо.

Структура економіко-математичної моделі. Для формалізації фінансово-економічних показників ідентифікуємо змінні:

$\boldsymbol{i}$ – індекс земельних угідь, виробничих ресурсів, поживних речовин, груп кормів;

$\boldsymbol{j}$ – індекс кормових культур;

j_1 – індекс виду тварин, продукції галузі тваринництва;

j_2 – індекс кормів, яких необхідно більше мінімальної потреби;

$\boldsymbol{M}$ – множина земельних угідь;

M_1 – множина виробничих ресурсів;

M_3 – множина поживних речовин;

$\boldsymbol{N}$ – множина кормових культур;

N_1 – множина видів продукції галузі тваринництва, види тварин;

N_3 – множина груп кормових культур;

N_2 – множина кормів, яких виділяють більше мінімальної потреби; M_2 – множина груп культур;

G_{ij} - логічний коефіцієнт, тобто $G_{ij} = 1$ або $G_{ij} = 0$;

B_1 - обсяг ***i***-их земельних угідь;

a_{ij} - затрати ***i***-го виробничого ресурсу на обробку 1 га ***j*** -ої культури;

a_{ij1} – затрати ***i***-го виробничого ресурсу на 1 ц продукції галузі тваринництва;

$b_{i\min} b_{i\max}$ – мінімальні та максимальна площа посіву j -ої культури;

A_i – обсяг *i*-го виробничого ресурсу;

d_{ij1} – норма витрат ***i***-ої поживної речовини на 1 ц j_1-ого виду продукції тваринництва чи голову j_1 -ого виду тварин;

D_i – наявний обсяг кормів у господарстві;

v_{ij} – вихід *i*-ої поживної речовини з 1 га посіву ***j***-ої культури, обсяг ***i***-ої групи кормів з 1 га посіву ***j***-ої культури;

$d_{ij1\min}$ – мінімальна норма затрат ***i***-ої групи кормів в розрахунку на 1 ц j_1-ого виду продукції тваринництва або на голову j_1-ого виду тварини;

$d_{ij1\max}$ – різниця між максимальною та мінімальною нормою споживання ***i***-ої групи кормів в розрахунку на одиницю j_1-ої галузі тваринництва;

p_{ij1} – різниця між існуючою нормою витрат кормових одиниць в цілому і сумою мінімально допустимих норм згодовування всіх груп кормів в розрахунку на одиницю виміру j_1-ої галузі тваринництва;

Q_{j1} – гарантований обсяг виробництва j_1-ого виду продукції тваринництва;

X_j – площа посіву j-ої культури;

X_{j1} – обсяг виробництва j_1-ого виду продукції тваринництва або кількість голів j_1-ого виду тварин;

X_{j2h} – обсяг, j_2-ого виду корму, що перевищує мінімальний вміст у загальній структурі годівлі тварин;

C_j – затрати ріллі на вирощування 1 га j-ої культури на кормові цілі.

Необхідно знайти значення X_j та X_i, при яких значення цільової функції досягне мінімального значення.

Структурна економіко-математична модель має вигляд:

Цільова функція: $F(x) = \sum_{j \in N} C_j X_j \to \min$ (3.22)

за умов:

1. Обмеження по використанню земельних ресурсів: $\sum_{j \in N} G_{ij} X_j \le B_i,\ i \in M_1$ (3.23)

2. Обмеження по використанню виробничих ресурсів: $\sum_{j \in N} a_{ij} X_j + \sum_{j_1 \in N_1} a_{ij1} X_j \le A_1,\ i \in M_2.$ (3.24)

3. Обмеження по визначенню верхньої і нижньої границі посіву окремих груп культур: $b_{i\min} \le \sum_{j \in N_3} G_{ij} X_j \le b_{i\max},\ i \in M_2.$ (3.25)

4. Обмеження по забезпеченню тварин поживними речовинами: $-\sum_{j \in N} V_{ij} X_j + \sum_{j_1 \in N_1} d_{ij1\min} X_{j1} \le D_1,\ i \in M_2.$ (3.26)

5. Обмеження по формуванню структури кормових ресурсів:

$$\begin{gathered} -\sum_{j \in N} V_{ij} X_j + \sum_{j_1 \in N_1} d_{ij1\min} X_{j1} + \sum_{j_2 \in N_2} X_{ij2} \le 0, \\ -d_{ij1\max} X_{j1} + X_{ij2} \le 0, \\ -\sum_{j_1 \in N_1} p_{ij1} X_{j1} + \sum_{j_2 \in N_2} X_{ij2} = 0. \end{gathered} \quad (3.27)$$

6. Обмеження по гарантованому обсягу продукції тваринництва або кількості поголів'я тварин: $X_j = Q_{j1},\ i \in N_1.$

7. Природні умови: $X_j \ge 0,\ X_{j1} \ge 0,\ X_{j2} \ge 0.$

Для відображення конкретних умов функціонування кожного реально існуючого підприємства, відповідно, вводять у модель додаткові умови-обмеження.

Для побудови числової економіко-математичної моделі до задачі необхідна загальна характеристика галузі, тобто стан галузі, існуючі системи сівозмін, можливість ротації сівозмін, технологія і ефективність вирощування сільськогосподарських культур, відгодівля тварин, види і групи тварин, спосіб утримання тощо. Проте, необхідна така інформація:

- ✓ площі сільськогосподарських угідь: ріллі, природних чи окультурених сінокосів, пасовищ, багаторічних пасовищ;
- ✓ перелік сільськогосподарських культур, які можуть вирощуватися в господарстві, їх врожайність, вихід поживних речовин з 1га;
- ✓ наявні виробничі фонди в господарстві, норми затрат ресурсів на 1 га сільськогосподарських культур, на 1 ц продукції чи голову тварини;
- ✓ обсяг виробництва продукції тваринництва з урахуванням власних потреб та на реалізацію (товарна продукція);
- ✓ можливі агротехнічні границі насичення сівозмін окремими групами сільськогосподарськими культурами;
- ✓ допустимі річні границі годівлі окремих видів кормів у раціоні тварин. Допустимі границі вмісту окремих груп кормів у раціоні. Норми годівлі зеленими кормами у пасовищний період (розробка зеленого конвеєра);
- ✓ норми витрат поживних речовин у розрахунку на 1ц продукції тваринництва чи на голову тварин, птиці, що необхідна для забезпечення заданого рівня продуктивності;
- ✓ вартість 1ц продукції тваринництва чи виходу валової (товарної) продукції в розрахунку на 1 структурну голову тварин. Затрати ріллі, матеріально-грошових засобів у розрахунку на 1 га кормових культур.

3.6 Економіко-математична модель визначення оптимального обсягу внесення добрив у господарстві аграрної сфери

Оптимальний розподіл мінеральних добрив забезпечує підвищення урожайності сільськогосподарських культур, а це означає покращення продуктивності праці, зменшення собівартості продукції, що виробляється. Ефект від застосування добрив може бути як агрономічним, так і економічним.

Результат дії добрив на урожайність сільськогосподарських культур, тобто набавка врожаю з 1га є агрономічним ефектом, який може бути виражений виходом кінцевої продукції (овочі, фрукти, цукор тощо) або промисловою сировиною чи в умовних одиницях. Агрономічний ефект удобрення є функцією природних та організаційно-господарських умов.

Економічну ефективність використання добрив характеризують наступні показники: вартість додатково отриманої продукції, додатковий прибуток, який визначається як різниця вартістю додаткової продукції та додатковими витратами, окупність витрат, зниження собівартості продукції, підвищення продуктивності праці.

Слід відмітити, що найкращий економічний ефект від внесення добрив отримують при правильному поєднанні хімізації із іншими факторами: науково-обґрунтованій сівозміні культур, раціональній агротехніці, осушення чи зрошення земель, застосування сортів культур, які краще реагують на ті чи інші добрива, застосування засобів боротьби із шкідниками, хворобами, оптимізації асортименту добрив, їх якості, норм, строків внесення тощо.

Виходячи із наявних у господарстві обсягів мінеральних добрив та структури посівних площ сільськогосподарських культур, визначити, які види добрив, у яких сумішах, під які культури, яким способом, на якій площі слід вносити, щоб досягти найкращого економічного ефекту.

Як критерій оптимальності використовують показники: валова (товарна) продукції, вартість валової (товарної) продукції, окупність кормів, доход від внесення добрив тощо.

Структура економіко-математичної моделі. Ідентифікуємо змінні. Нехай

i – індекс виду добрив;

j – індекс сільськогосподарської продукції;

k – індекс суміші добрив;

r – індекс способу внесення добрив;

M – множина видів добрив;

N **–** множина сільськогосподарських культур;

K- множина суміші добрив;

R – множина способів внесення добрив;

C_{jrk} економічна ефективність від внесення добрив під j-ту культуру, k – суміш у розрахунку на 1 га;

X_{jrk} – площа ***j***-тої культури під яку вносять ***r***-способом ***k***-суміш добрив;

a_{jirk} – обсяг внесення на 1га добрив ***i***-го виду (для мінеральних - кг діючої речовини, для органічних - т), що входять у ***k***-суміш, яка вноситься r-способом під j-ту культуру;

A_i – обсяг наявних у господарстві добрив ***i***-го виду (для мінеральних - кг діючої речовини, для органічних – т);

S_{jr} – площа посіву j-тої культури, під яку вноситимуть добрива r-способом.

Необхідно знайти значення невідомої X_{jrh}, при якій цільовій функції набуде максимального значення.

Структурна економіко-математична модель має вигляд.

Цільова функція: $F(x) = \sum_{j \in N} \sum_{r \in R} \sum_{k \in K} C_{jrk} X_{jrk} \to \max$, (3,28)

за умов:

1. Обмеження по використанню наявних у господарстві добрив: $\sum_{j \in N} \sum_{r \in R} \sum_{k \in K} a_{ijrk} X_{jrk} \leq A_i,\ i \in M.$

2. Обмеження по посівних площах і способах внесення добрив: $\sum_{k \in K} X_{jrk} \leq S_{jr},\ j \in N,\ r \in R.$

3. Умови невід'ємності або природні умови: $X_{jrk} \geq 0.$

Важливою інформацією при розв'язку такої задачі є природно-економічні умови існування господарства, особливості вирощування сільськогосподарських культур, тип, якість чи фактичний стан ґрунтів, а також необхідно мати наступну інформацію:

- ✓ наявність органічних і мінеральних добрив у господарстві. По мінеральних добривах визначають кількість діючої речовини, по органічних – загальний обсяг по видах;
- ✓ площі посіву різних сільськогосподарських культур. Якщо одна й та сама культура висівається на різних ділянках з різними типами ґрунтів, після різних попередників, то площі розраховуються з урахуванням цих особливостей;

✓ способи внесення добрив по кожній культурі. У відповідності до технологічних карт встановлюються способи та терміни внесення добрив з урахуванням особливостей її вирощування;

✓ норми та суміші мінеральних добрив на 1га в залежності від способу внесення добрив під різні сільськогосподарські культури. Ці показники визначають на основі попереднього досвіду господарства, даних відповідних науково-дослідних інститутів, дослідних лабораторій, довідників тощо;

✓ приріст урожаю у натуральному чи грошову виразі по кожній культурі у залежності від внесеної суміші добрив на 1га.

В умовах господарства, згідно регіональної агротехнічної лабораторії, можна отримати надбавки врожаю у залежності від різних способів внесення добрив.

3.7 Економіко-математична модель оптимізації земель відповідно до ротаційних сівозмін

В умовах сьогодення актуальним є екологічне збалансоване землекористування, яке передбачає науково обґрунтоване проектування сівозмін, що дасть змогу створити агротехнічну безпеку земель, сприятиме взаємному поповненню елементів, забезпечить сприятливий стан посівів, дозволить запобігти руйнуванню фізичних властивостей ґрунту і забезпечить стійкість до ерозійних процесів.

Виконати раціональний розподіл земельних угідь дозволяє економіко-математичне моделювання.

Як критерій оптимальності використовують мінімум витрат

Структура економіко-математичної моделі. Ідентифікуємо змінні. Нехай

x_{ij} – невідома площа, що відводитиметься на і-тій ділянці під вирощування j-ї культури, га;

і – номер ділянки землі;

n – кількість усіх земельних ділянок;

j – вид сільськогосподарської культури;

m – кількість усіх потенційних видів культур;

b_i – величини i-тої земельної ділянки, га; a_j – площа у гектарах, що відводитиметься під j-ту культуру;

c_{ij} – собівартість оброблення одиниці площі *i*-тої ділянки під *j*-тою культурою, то задача зводитиметься до визначення плану розподілу земельних ділянок під вирощування різних видів сільськогосподарських культур $X = \left(x_{ij}\right)_{n\times m}$, що забезпечуватиме мінімум витрат

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{3.29}$$

за умов

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} = b_i, i = \overline{1;n}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = a_j, j = \overline{1;m}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_j = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i, \end{cases} \tag{3.30}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1;n}, j = \overline{1;m}.$$

Перші *n* умов у системі обмежень стосуються розмірів земельних ділянок, наступні m обмежень щодо величини площ, що відводитимуться для вирощування виду сільськогосподарської культури, а останнє – відображає вимогу дотримання балансу площ.

Якщо враховувати урожайність сільськогосподарських культур і, відповідно, ввести додаткові позначення: y_{ij} – урожайність j-тої культури на i-тій ділянці землі; u_j – очікуваний валовий збір (урожай) j-тої культури, то економіко-математична модель набуватиме такого вигляду.

Визначити план $X = \left(x_{ij}\right)_{n\times m}$, що $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min$ (3.31)

за умов отримання бажаного врожаю сільськогосподарських культур різних видів (перші m обмежень системи) та використання наявних земельних площ (останніn умов):

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} y_{ij}x_{ij} \geq u_j, j = \overline{1;m}, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} \leq b_i, i = \overline{1;n}, \end{cases} \tag{3.32}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1;n}, j = \overline{1;m}. \tag{3.33}$$

ТЕМА 4. ТЕОРІЯ ІГОР ЯК ЗАСІБ ПЛАНУВАННЯ ПОСІВУ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ РОСЛИН

ПЛАН

4.1. Основні поняття теорії ігор.
4.2. Класифікація ігор.
4.3. Матричні ігри двох осіб.
4.4. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловини точками.
4.5. Мішані стратегії в матричних іграх.
4.6. Геометрична інтерпретація гри теорії гри.

4.1. Основні поняття теорії ігор

За умов ринкової економіки все частіше мають місце конфліктні ситуації, коли два або більше колективів (індивідуумів) мають протилежні цілі та інтереси, причому результат дії кожної із сторін залежить і від дії супротивника. Класичним прикладом конфліктної ситуації в економіці є відношення продавець — покупець (монополія — монопсонія). Складніші ситуації виникають, коли в суперечці інтересів беруть участь об'єднання чи коаліції.

Зазначимо, що не завжди учасники ігрової ситуації мають протилежні цілі. Наприклад, дві фірми, які надають однакові послуги, можуть об'єднуватися з метою спільного протистояння більшому супернику.

Часто однією із сторін конфлікту є природні процеси чи явища, наприклад, погода, тобто маємо гру людини з природою. Погодними умовами людина практично не може керувати, але вона має змогу пристосовуватися до її постійних змін. Безліч подібних ситуацій можна зустріти і в інших сферах людської діяльності: біології, психології, політології тощо.

***Теорія ігор** — це математичний апарат, що розглядає конфліктні ситуації, а також ситуації спільних дій кількох учасників. Завдання теорії ігор полягає у розробленні рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників гри.*

Характерною особливістю ігрової ситуації є взаємодія протилежних (не завжди) інтересів двох чи більше «розумних» суперників, кожний з яких намагається оптимізувати свої рішення. Існує багато різних ігор, серед яких найпоширеніші ***стратегічні.*** У таких іграх джерелом невизначеності є відсутність інформації про його стратегію. Кожна протидіюча сторона (гравці) мають можливість вибору одного (або кількох) варіантів дій — стратегій.

Характерними рисами математичної моделі ігрової ситуації є наявність, по-перше, кількох учасників, яких називають ***гравцями***, по-друге, опису можливих дій кожної із сторін, що називаються ***стратегіями***, по-третє, визначених результатів дій для кожного гравця, що подаються ***функціями виграшу***.

Стратегією гравця називають план, за яким він здійснює вибір у будь-якій можливій ситуації, і володіючи будь-якою фактично можливою інформацією.

Ігри будуються за певними правилами й відбуваються в результаті певної кількості ходів. ***Ходом теорії ігор*** називають вибір однієї з можливих, визначених правилами гри дій і реалізацію цієї дії. Кожному ходові гравців відповідає певний виграш (програш), який вони одержують (сплачують).

Завдання кожного гравця — знайти оптимальну стратегію, яка за багаторазового повторення гри забезпечує йому максимально можливий середній виграш.

Існує дуже багато різних ігор. Прикладом «гри» в буквальному розумінні цього слова, передусім, є спортивна, карточна гра, шахи тощо. Від реальної конфліктної ситуації гра відрізняється не лише спрощеною формою, а також наявністю певних правил, за якими мають діяти її учасники. Дослідження таких формалізованих ігор звичайно не може дати чітких рекомендацій для реальних умов, проте є найзручнішим об'єктом для вивчення конфліктних ситуацій і оцінки можливих рішень з різних поглядів. Розраховані на основі ігрових моделей оптимальні плани не визначають єдино правильне рішення за складних реальних умов, проте слугують математично обґрунтованою підставою для прийняття таких рішень.

4.2. Класифікація ігор

Класифікація ігор проводиться відповідно до вибраного критерію. Ігри можуть розрізнятися залежно від кількості гравців, кількості стратегій, властивостей функцій виграшу, можливостей взаємодії між гравцями.

За кількістю гравців усі ігри поділяють на три види: з одним, двома, трьома і більшим числом учасників. Якщо гравець один, то він грає проти природи. Наявність двох учасників — мінімально необхідна умова виникнення відносин людей і їх взаємодії. Якщо у грі беруть участь три або більше гравців, вони можуть утворювати групи, або коаліції, і називаються ігри з *n* гравцями.

За кількістю ходів ігри поділяються на однокрокові та багатокрокові. Кожен з гравців зробить по одному крокові і гра завершується. Матрична гра є однокроковою. Багатокрокові ігри своєю чергою поділяються на: позиційні; стохастичні; диференційні.

Позиційні ігри: кожен з гравців робить декілька ходів послідовно в часі, і виграші визначаються в залежності від результату гри.

Стохастична гра: у грі робляться ходи, що приводять до вибору певних позицій, причому існує певна вірогідність повертання на попередню позицію.

Диференційною називається гра, якщо ходи робляться неперервно і умови їх проведення описуються диференційними рівняннями.

За станом інформації розглядаються ігри з повною та неповною інформацією. Якщо на кожному ході гри кожному з гравців відомо, які вибори були зроблені гравцями раніше, то гра є з повною інформацією (шахи, шашки). Якщо ж у грі не все відомо про попередні вибори, то гра буде з неповною інформацією.

За ресурсами гри: ігри з нульовою сумою або антагоністичні, з ненульовою сумою та ігри з постійною різницею. Гра, в якій виграш одного з гравців дорівнює програшу другого, має назву гри з нульовою сумою, або антагоністичної гри. (загальний капітал усіх гравців не змінюється, а перерозподіляється між гравцями; сума виграшів всіх гравців дорівнює нулю).

Якщо гравці виграють і програють одночасно та їм вигідно діяти разом, то такі ігри мають назву ігор з постійною різницею. Гра з ненульовою сумою – це гра, в якій наявні конфлікт та узгоджена дія гравців.

За кількістю стратегій: ігри з скінченою кількістю стратегій (кінцеві) та ігри з нескінченною кількістю стратегій (нескінчені). Якщо в грі всі гравці мають кінцеву кількість можливих стратегій, то вона називається кінцевою. Якщо хоча б один з гравців має нескінчену кількість стратегій, то така гра називається нескінченою.

За характером взаємовідносин: а) безкоаліційні: гравець не має права вступати у згоду, створюва ти коаліцію; б) коаліційні (кооперативні): гравці можуть утворювати коаліції. В кооперативних іграх коаліції наперед визначені.

За результатом гри: симетричні і несиметричні. Гра, при якій відповідні лінії стратегій у гравців будуть рівні, тобто мати однакові результати, називається симетричною. Простіше кажучи, якщо гравці поміняються місцями, то шанси на виграш залишаться.

Більшість ігор, особливо для двох гравців є симетричні. В несиметричній грі стратегії можуть бути схожими один на одну, але результат застосування їх буде різний. При виборі однієї з сторін будь-якої зі стратегій результат буде менше, ніж у другої сторони.

За часом ходу гравців: паралельні (статичні) та послідовні (динамічні). У паралельних або статичних іграх гравці ходять одночасно, або, принаймні, вони не знають про вибір інших до тих пір, поки всі не зроблять свій хід. Інший вид послідовні або динамічні ігри. У цих іграх гравці можуть робити ходи в заздалегідь встановленому або будь-якому випадковому порядку, але при цьому вони отримують деяку інформацію про попередні дії інших. Ця інформація може бути навіть не зовсім повною, наприклад, гравець може дізнатися, що його суперник зі своїх стратегій точно не обрав якусь певну, нічого не дізнавшись про інші. Вони представлені в екстенсивній формі.

Визначення динамічної гри в загальному сенсі означає, що час має значення, оскільки одноперіодна гра повторюється кілька разів (повторювана гра), або гра розгортається в часі як багатоперіодна.

В умовах багатоперіодності складної гри час може розглядатися як дискретна або безперервна змінна; останній підхід більш важкий з технічної точки зору. Якщо кількість періодів обмежена, то рішення динамічної гри визначається за допомогою зворотного індукції (backward induction), техніки аналізу, розробленої в динамічному програмуванні. По виду функцій виграшу ігри поділяються на: матричні; біматричні; безперервні; опуклі; сепарабельні; типу дуелей та ін.

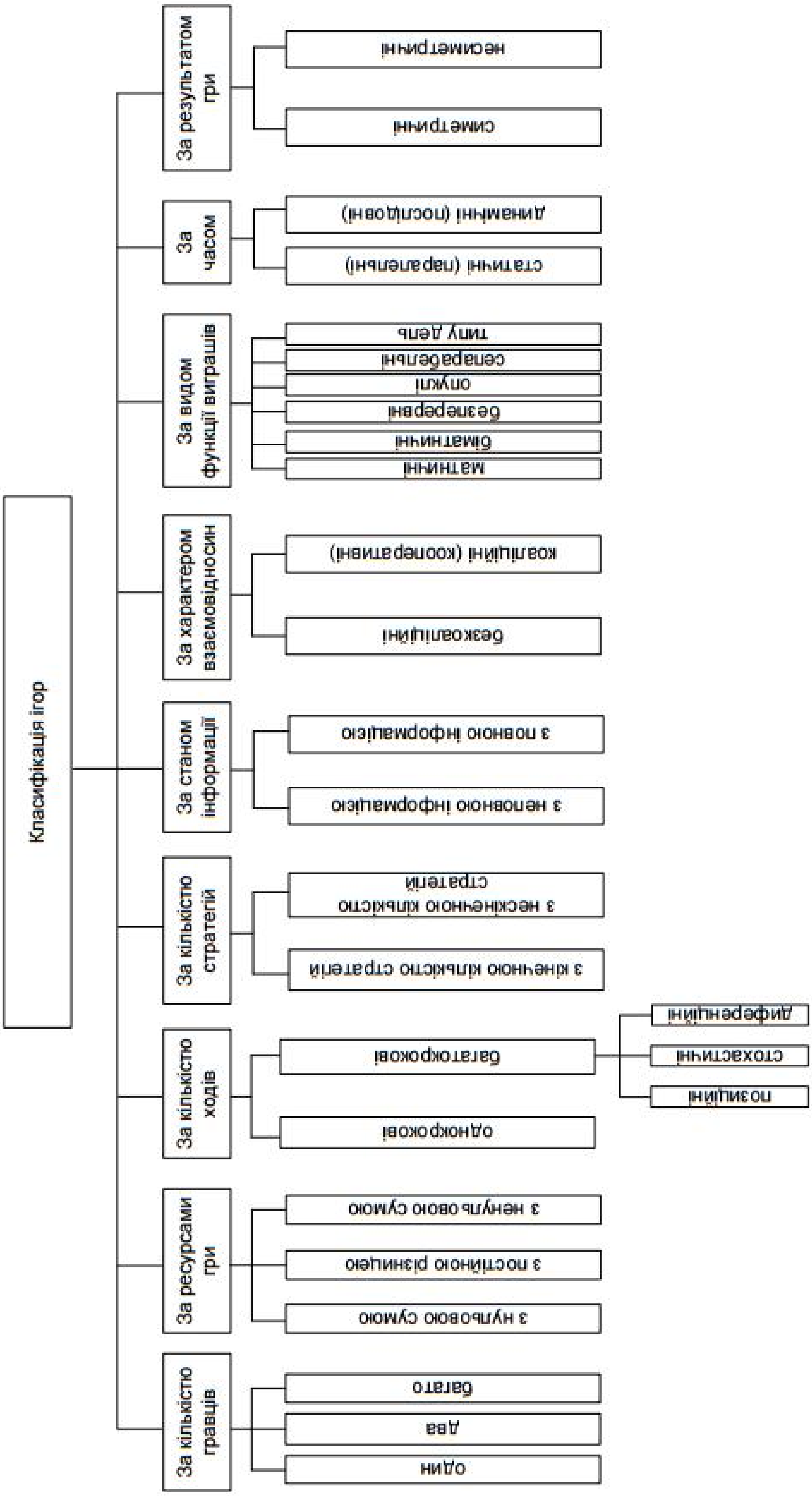


Рисунок 4.1 – Класифікація ігор

Матрична гра – це скінчена гра двох гравців з нульовою сумою, в якій задаються виграші першого гравця у вигляді матриці (рядки матриці відповідають номеру застосованої стратегії першого гравця, стовпці – номеру застосування стратегії другого гравця; на перетині рядка і стовпця матриці знаходиться виграш першого гравця, якій відповідає застосованим стратегіям). Програш другого гравця дорівнює виграшу першого. Для матричних ігор доведено, що будь-яка з них має рішення і воно може бути легко знайдено шляхом зведення гри до задачі лінійного програмування.

Біматрична гра – це скінчена гра двох гравців з ненульовою сумою, в якій виграші кожного гравця задаються матрицями окремо для відповідного гравця (в кожній матриці рядок відповідає стратегії гравця 1, стовпець – стратегії гравця 2, на перетині рядка та стовпця в першій матриці знаходиться виграш гравця 1, в другій матриці – виграш гравця 2.)

Для біматричних ігор також розроблена теорія оптимальної поведінки гравців, однак вирішувати такі ігри складніше, ніж звичайні матричні Неперервною вважається така гра, в якій функція виграшів кожного гравця є неперервною в залежності від стратегій. Якщо функція виграшів є опуклою, то така гра називається опуклою.

Якщо функція виграшу в грі може бути представлена у вигляді суми функцій одного аргумента, то така гра є сепарабельною (може бути розділеною).

Дуель – це гра, що характеризується моментом вибору ходу та ймовірностями отримання виграшу в залежності від часу, що пройшов від моменту початку гри до моменту вибору. Джерела невизначеності називаються комбінаторними, а ігри комбінаторними, коли особливості правил гри зумовлюють таку різноманітність у її розвитку, що передбачати результат гри заздалегідь неможливо. За допомогою математичного апарату й обчислювальної техніки для цілого ряду комбінаторних ігор знайдені виграшні комбінації шляхом розв’язання логічних задач не надто великого обсягу. Друге джерелом невизначеності – вплив випадкових факторів. Якщо результат виявляється невизначеним виключно в результаті випадкових причин, то такі ігри називаються азартними (ігри в кості, гра, що полягає у відгадуванні, наприклад, яким боком випаде монета, рулетка). Третє джерело невизначеності

– відсутність інформації про дії супротивника, про його стратегію. Такі ігри називаються стратегічними.

Якщо в грі беруть участь два гравці, то така гра називається ***парною*** (грою двох осіб). Часто у грі беруть участь багато сторін, тоді гра є ***множинною***.

У теорії ігор розглядаються саме стратегічні ігри. Найпростіший вид стратегічної гри – гра двох осіб з нульовою сумою (сума виграшів сторін дорівнює нулю). Тут мета одного гравця — максимізувати свій виграш, а другого — мінімізувати свій програш, причому рішення про вибір стратегії кожним гравцем приймається в умовах невизначеності, коли наперед не відомо, як вчинить супротивник. У багатьох задачах, що зводяться до ігрових, невизначеність спричинена відсутністю інформації про умови, в яких здійснюється дія. Ці умови залежать не від свідомих дій іншого гравця, а від об'єктивної дійсності, що прийнято називати природою. Такий вид ігор називають іграми з природою. У деяких задачах для станів природи може бути заданий розподіл ймовірностей. Такі ігри називають статистичними. У статистичній грі природа – не розумний гравець, що має на меті обрати для себе оптимальні стратегії.

4.3. Матричні ігри двох осіб

Щоб описати гру, потрібно вказати множину гравців, їх допустимі ходи, правила проведення і оцінки результатів гри.

Множина гравців задається переліком учасників гри, множина їх допустимих ходів – описом ходів. У правилах звичайно вказано, які ходи є в розпорядженні гравця, деколи може задаватися також кількість ходів у грі. Оцінку результатів гри гравець отримує за допомогою функції виграшу, яка може набувати певного значення під час гри або після її закінчення.

Надалі будемо розглядати найпростіші варіанти деяких ігор. Для цього зробимо три припущення. Перше – у грі беруть участь лише двоє гравців. Друге – кожен гравець має скінченну кількість допустимих ходів, серед яких повинен вибрати лише один. Третє – всі ігри двоходові, тобто кожна гра складається лише з двох ходів, виконаних по одному кожним гравцем, але так, що, обираючи свій хід, гравець нічого не знає про вибір суперника. За умов двоходової гри стратегія як план на гру зводиться до допустимого ходу гравця. Тому надалі поняття стратегії і ходу ми ототожнюватимемо.

Отже, припускаємо, що гра відбувається між двома учасниками *A* та *B*; така гра називається парною. Учасник *A* може користуватися допустимими ходами (стратегіями) $A_1, A_2, ..., A_m$, а учасник *B* – допустимими ходами $B_1, B_2, ..., B_n$. Правила гри: кожен з гравців *A* та *B* вибирає по одній зі своїх допустимих стратегій відповідно A_i та B_j, $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ і на цьому гра закінчується. Пара стратегій $\left(A_i, B_j\right)$ називається **ситуацією**. Повторення гри полягає в створенні гравцями іншої ситуації $\left(A_i, B_j\right)$. Ступінь зацікавленості гравців у результатах гри відображають функції виграшу.

Нехай $\varphi_1(A_i;B_j)$ – виграш гравця A, $(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n})$;

$\varphi_2\left(A_i;B_j\right)$ — виграш гравця B, $(i=\overline{i,m};\ j=\overline{i,n})$.

Оскільки гра з нульовою сумою, то $\varphi_1\left(A_i;B_j\right)+\varphi_2\left(A_i;B_j\right)\equiv 0$.

Тоді в разі $\varphi_1(A_i;B_j)=\varphi(A_i;B_j)$ маємо $\varphi_2(A_i;B_j)=-\varphi(A_i;B_j)$.

Отже, мета гравця A максимізувати $\varphi(A_i;B_j)$, а гравця B – її мінімізувати.

Функції виграшу набувають *mn* значень кожна. Тому їх можна задавати матрицями розміру $m\times n,$ у яких рядки матриць відповідають стратегіям першого гравця *A*, стовпці – стратегіям другого гравця *B*. Звичайно ці дві матриці об'єднують в одну матрицю виграшів (або платіжну матрицю, матрицю гри). Рядки матриці виграшів відповідають стратегіям гравця *A*, стовпці – стратегіям гравця *B*.

Нехай $\varphi(A_i;B_j)=a_{ij}$, тобто маємо матрицю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Зображення гри платіжною матрицею виграшів називається **нормальною формою запису гри**. Ця форма особливо зручна для ігор з двома гравцями. Ігри, для зображення яких можна застосувати матриці, називають також **матричними**.

4.4. Мінімаксні стратегії. Ігри з сідловини точками

Із багатьох критеріїв, які пропонуються теорією гри для вибору раціональних варіантів рішень, найпоширенішим (песимістичним) є ***критерій мінімаксу-максиміну.*** Сутність його полягає ось у чому.

Нехай гравець A вибрав стратегію A_i. Тоді в найгіршому випадку він отримає виграш, що дорівнює $\min a_{ij}$. Якщо навіть гравець B знає його стратегію, гравець A має діяти так, щоб максимізувати свій мінімальний виграш: $\alpha = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

Таку стратегію гравця A називають ***максимінною***, а розмір його гарантованого виграшу — ***нижньою ціною гри.***

Стратегія, яка забезпечує цей виграш, називається ***максимінною*** і позначається A_{i_0}.

Гравець B, який програє суми в розмірі елементів платіжної матриці, навпаки, має обрати стратегію, що мінімізує його максимально можливий програш за всіма варіантами дій гравця A. Стратегію гравця B називають ***мінімаксною*** і позначають B_{j_0}. Розмір його програшу — ***верхня ціна гри***: $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$.

Оптимальний розв'язок цієї задачі досягається тоді, коли жодній стороні не вигідно змінювати обрану стратегію, оскільки суперник може у відповідь обрати іншу стратегію, яка дасть йому кращий результат. Якщо $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \upsilon$, тобто $a = \beta = \upsilon$, то гра називається ***цілком визначеною***, число υ називається ***ціною гри***. Цілком визначені ігри називаються ***іграми із сідловою точкою.*** У цій ситуації оптимальним для обох гравців є вибір чистих стратегій — максимінної для гравця A і мінімаксної для B. Адже, якщо один із гравців додержує оптимальної стратегії, то для іншого відхилення від його оптимальної стратегії не може бути вигідним.

4.5. Мішані стратегії в матричних іграх

Ігри зі сідловою точкою на практиці трапляються рідко. Значно поширеніші ігри, у яких нижня ціна гри менша за верхню. Навіть якщо гравці *A* і *B* дотримуються своїх «обережних» стратегій, то величину виграшу заздалегідь вказати неможливо.

Якщо гра не має сідлової точки, тобто $a \neq \beta$ і $a \leq \upsilon \leq \beta$, то максимінно-мінімаксні стратегії не є оптимальними: кожна зі сторін може поліпшити свій результат, обираючи інший підхід. Оптимальний розв’язок такої гри знаходять, застосовуючи ***змішані стратегії***, які є певними комбінаціями початкових чистих стратегій.

Імовірності (або частоти) вибору кожної стратегії задаються відповідними векторами.

Для гравця $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{X = (x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_m)}$, де $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m} x_i = 1}$; (4.2)

Для гравця $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{Y = (y_1, \quad y_2, \quad \ldots \quad y_n)}$, де $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{n} y_j = 1}$. (4.3)

Очевидно, що $\boldsymbol{x_i \geq 0, (i = \overline{1,m}); \quad y_j \geq 0, (j = \overline{1,n})}$ (4.4)

4.6. Геометрична інтерпретація гри теорії гри

Найпростішим випадком скінченої гри є парна гра, коли у кожного учасника є дві стратегії (табл. 4.1).

Таблиця 4.1.

A_j \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Розглянемо випадок, коли гра не має сідловок точки. Отже, $\alpha \neq \beta$. Необхідно знайти змішані стратегії та ціну гри. Позначимо шукані значення ймовірностей застосування «чистих» стратегій гравця *A* через $X^* = (x_1^*, x_2^*)$, а для гравця *B* – через $Y^* = (y_1^*, y_2^*)$.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, якщо гравець А притримується своєї оптимальної стратегії, то виграш дорівнюватиме ціні гри. Отже, якщо гравець А притримуватиметься своєї оптимальної стратегії $X^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$, то:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* = \upsilon. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Оскільки $x_1^* + x_2^* = 1$, то $x_2^* = 1 - x_1^*$. Підставивши цей вираз у систему рівнянь (4.5), отримаємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}\left(1 - x_1^*\right) = \upsilon; \\ a_{12}x_1^* + a_{22}\left(1 - x_1^*\right) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}x_1^* + a_{21}\left(1 - x_1^*\right) = a_{12}x_1^* + a_{22}\left(1 - x_1^*\right).$$

Розв'язавши дане рівняння відносно невідомого x_1^*, маємо: $x_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$, тоді $x_2^* = 1 - x_1^* = \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Провівши аналогічні міркування стосовно гравця *B*, маємо:

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}y_2^* = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}y_2^* = \upsilon. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Оскільки $y_1^* + y_2^* = 1$, то $y_2^* = 1 - y_1^*$.

$$\begin{cases} a_{11}y_1^* + a_{12}\left(1 - y_1^*\right) = \upsilon; \\ a_{21}y_1^* + a_{22}\left(1 - y_1^*\right) = \upsilon. \end{cases} \Rightarrow a_{11}y_1^* + a_{12}\left(1 - y_1^*\right) = a_{21}y_1^* + a_{22}\left(1 - y_1^*\right). \qquad (4.7)$$

Розв'язавши це рівняння відносно невідомого y_1^*, маємо: $y_1^* = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$, тоді $y_2^* = 1 - y_1^* = \dfrac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Ціну гри υ знаходять, підставляючи значення x_1^*, x_2^* (або y_1^*, y_2^*) в будь-яке з рівнянь (4.5) або (4.6): $\upsilon = \dfrac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$.

Основні етапи знаходження розв'язку гри $2 \times n$ або $n \times 2$:

1. Будують прямі, які відповідають стратегіям другого (першого) гравця.

2. Визначають нижню (верхню) границю виграшу.

3. Знаходять дві стратегії другого (першого) гравця, яким відповідають дві прямі, що перетинаються в точці з максимальною (мінімальною) ординатою.

4. Визначають ціну гри та оптимальні стратегії.

Основні типові випадки взаємного розташування відрізків виграшів гравця А зображено на рис. 4.2 – 4.4.

Точки відрізків, які відповідають найменшим виграшам, позначено потовщеною лінією, вона називається **лінією**

найменших виграшів гравця А. Оптимальна (максимінна) поведінка гравця А полягає у виборі такої мішаної стратегії, яка відповідає точці з найбільшою ординатою на лінії найменших виграшів. Розглянемо деякі випадки.

Випадок 1 (рис. 4.2). Лінія найменших виграшів є ламаною $B_1'NB_2''$, а точка $N(x_N;v_N)$, $0 < x_N < 1$, на ній має найбільшу ординату. Тоді $v = v_N$ – ціна гри, а стратегія $\vec{X}^0 = (1 - x_N;\, x_N)^T$ – оптимальна для гравця А.

Випадок 2 (рис. 4.3). Лінія найменших виграшів є ламаною $B_1'NB_2''$, але найбільшу ординату на ній має один з кінців, наприклад, $B_2''(1;c_{22})$. Оптимальними є стратегії A_2 (для гравця А) і B_2 (для гравця В). Отже, розв'язок гри складають чисті стратегії $\vec{X}^2 = (0;1)^T$, $\vec{Y}^2 = (0;1)^T$ і сідлова точка $v = c_{22}$.

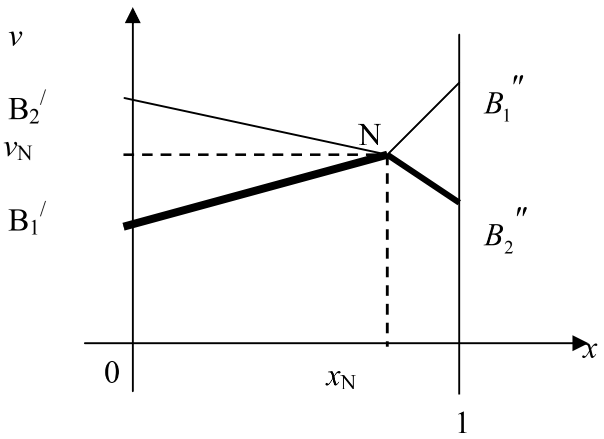


Рисунок 4.2

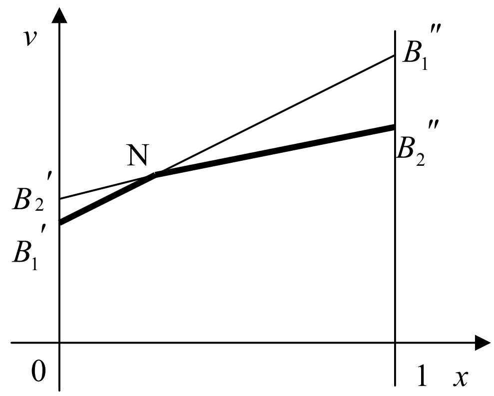


Рисунок 4.3

Випадок 3 (рис. 4.4). Лінією найменших виграшів є один з відрізків $B_1'B_1''$ або $B_2'B_2''$, наприклад, перший. Тоді стратегія B_2 є невигідною для гравця В, оскільки за стратегії B_2 він програє більше, ніж за стратегії B_1. Тому другий стовпець в матриці гри C можна викреслити і звести гру до гри 2×1. Точка $B_1''(1;\, c_{21})$ з найбільшою ординатою на відрізку найменших виграшів $B_1'B_1''$ визначає оптимальні стратегії A_2 і B_1. Розв'язок гри складають чисті стратегії $\vec{X}^2 = (0;1)$, $\vec{Y}^1 = (0;1)$ і сідлова точка $v = c_{21}$.

Оптимальну мішану стратегію гравця В можна також знайти геометрично. На рис. 9.5 побудовано графіки середніх програшів гравця B в системі координат yOv за умови застосування ним мішаних стратегій $\vec{Y}=(1-y;y)^T$, а гравець A – чистих стратегій A_1 (відрізок $A_1'A_1''$) і A_2 (відрізок $A_2'A_2''$). Потовщена ламана $A_1'MA_2''$ складена з точок, які відповідають найбільшим програшам, і називається **лінією найбільших програшів** гравця В. Якщо точка $M(y_M;v_M)$ на ній має найменшу ординату, то v_M – ціна гри, а мішана стратегія $\vec{Y}^0=(1-y_M;y_M)$ – оптимальна для гравця *B*.

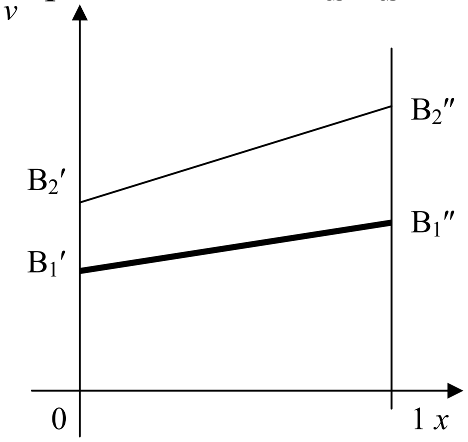


Рисунок 4.4

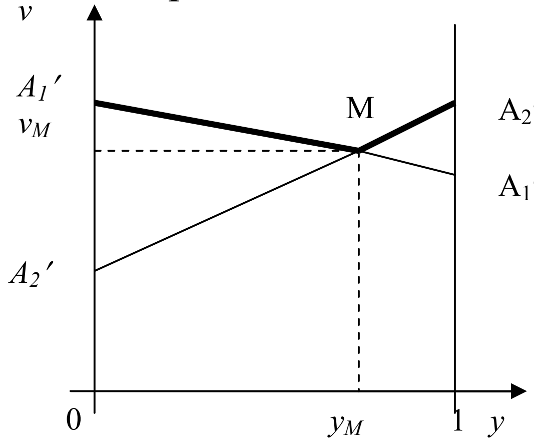


Рисунок 4.5

4.7. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Якщо матрична гра не має **сідлової** точки, то знаходження її розв’язку, особливо за великої кількості стратегій, – доволі складна задача, яку можна ефективно розв’язати методами лінійного програмування.

Задача розглядається в такому формулюванні: знайти вектори ймовірностей $X=(x_1,\ x_2,\ \dots\ x_m)$ і $Y=(y_1,\ y_2,\ \dots\ y_n)$ з метою визначення оптимального значення ціни гри та оптимальних стратегій.

Зауважимо, що доведено ***основну теорему теорії ігор***: кожна скінчена гра має принаймні один розв’язок, який можливий в області змішаних стратегій.

Отже, нехай маємо скінченну матричну гру з платіжною матрицею

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (4.8)$$

Оскільки оптимальні стратегії гравців A і B дозволяють отримати виграш

$$\alpha \le \upsilon \le \beta,$$

то використання оптимальної змішаної стратегії гравцем ***A*** має забезпечувати виграш не менший за ціну гри в разі вибору гравцем ***B*** будь-яких стратегій. Математично ця умова записується так:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge \upsilon \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{4.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

$$x_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Отже, потрібно знайти $x_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, щоб

$$\max Z = \upsilon$$

Зауважимо, що ціна гри υ невідома і має бути визначена під час розв'язування задачі.

Модель ігрової задачі може бути спрощена. З (4.9) маємо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge \upsilon, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \ldots + a_{m2}x_m \ge \upsilon, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge \upsilon. \end{cases} \tag{4.10}$$

Поділивши всі обмеження на υ, дістанемо:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{12}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \ldots + a_{m1}\dfrac{x_m}{\upsilon} \ge 1, \\ a_{21}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{22}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \ldots + a_{m2}\dfrac{x_m}{\upsilon} \ge 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\dfrac{x_1}{\upsilon} + a_{2n}\dfrac{x_2}{\upsilon} + \ldots + a_{mn}\dfrac{x_m}{\upsilon} \ge 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Нехай $\dfrac{x_i}{\upsilon} = t_i$, тоді

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1. \end{cases} \tag{4.12}$$

Згідно з умовою $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$, звідки $t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \dfrac{1}{\upsilon}$.

Отже, цільова функція початкової задачі набирає такого вигляду:

$$\max \upsilon = \min \frac{1}{\upsilon} = \min \sum_{t=1}^{m} t_i . \qquad (4.13)$$

У результаті задача лінійного програмування:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} t_i \to \min \qquad (4.14)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \geq 1, \\ a_{21}t_1 + a_{22}t_1 + \ldots + a_{m2}t_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \geq 1, \end{cases} \qquad (4.15)$$

$$t_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, знайдемо значення $t_i\left(i = \overline{1,m}\right)$, а також $\frac{1}{\upsilon}$ і $x_i = \upsilon t_i$, тобто визначимо змішану оптимальну стратегію для гравця A.

Відповідно використання оптимальної змішаної стратегії гравцем $\boldsymbol{B}$ має за будь-яких стратегій гравця $\boldsymbol{A}$ забезпечувати програш $\boldsymbol{B}$, що не перевищує ціни гри $\boldsymbol{\upsilon}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq \upsilon \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (4.16)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \qquad (4.17)$$

$$y_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \qquad (4.18)$$

За аналогією запишемо задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії гравця B. Нехай

$$u_j = \frac{y_i}{\upsilon} \quad \left(\overline{j,n}\right). \qquad (4.19)$$

Тоді маємо таку лінійну модель:

$$f = \sum_{j=1}^{n} u_j \to \max \qquad (4.20)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \leq 1, \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_1 + \ldots + a_{2n}u_n \leq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \ldots + a_{mn}u_n \leq 1, \end{cases} \qquad (4.21)$$

$$u_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Очевидно, що задача лінійного програмування для гравця B є двоїстою до задачі гравця A, а тому оптимальний розв'язок однієї з них визначає оптимальний розв'язок спряженої.

ТЕМА 5. ПОНЯТТЯ ПРО ЕКСПЕРТНІ СИСТЕМИ

ПЛАН

5.1 Експертні системи. Класифікація систем, що базуються на знаннях

На початку 80-х років в дослідженнях по штучному інтелекту сформувався самостійний напрям, що одержав назву "експертні системи" (ЕС). Основним призначенням ЕС є розробка програмних засобів, які при рішенні задач, важких для людини, одержують результати, не поступливі за якістю і ефективності рішення, рішенням одержуваною людиною-експертом. ЕС використовуються для вирішення так званих неформалізованих завдань, загальним для яких є те, що:

- завдання не можуть бути задані в числовій формі;
- цілі не можна виразити в термінах точно певної цільової функції;
- не існує алгоритмічного рішення задачі;
- якщо алгоритмічне рішення є, то його не можна використовувати
- обмеженості ресурсів (час, пам'ять).

Крім того неформалізовані завдання володіють помилковістю, неповнотою, неоднозначністю і суперечністю як початкових даних, так і знань про вирішувану задачу.

Експертна система (англ. expert system) - це автоматизована система, що реалізує ознаки та засоби штучного інтелекту, має базу знань з набором правил визначеного кола завдань та програмно-технічні засоби, що дозволяють на основі даних сформулюватирекомендації, коло рішень для користувача системи щодо стану об'єкта управління.

Джерелом знань для наповнення експертних систем слугують експерти у відповідній предметній області. При створенні експертної системи група, що складається з експерта та інженера із знань, збирає факти, правила і евристичні правила (тобто такі правила, які формуються на основі практичних знань експертів), а потім включає їх в систему штучного інтелекту. Інженер із знань – це спеціаліст високого классу, який володіє системним програмуванням і методами штучного інтелекту.

Відповідно до форми процесу вирішення задачі і кінцевої мети ЕС поділяються на:

- ✓ системи типу «питання-відповідь», що включають підсистеми діалогового спілкування з користувачем професійною мовою користувача даної предметної області.
- ✓ системи-консультанти, що забезпечують збереження, аналіз і узагальнення знань висококваліфікованих фахівців у вузькоспеціалізованих предметних областях і здатні виробляти проектні (консультативні) рішення і розв’язати логіку їхнього виводу.
- ✓ системи-вирішувачі, що розробляють моделі бази знань і реалізують їх у вигляді проблемно-орієнтованих пакетів вирішення задач на базі наявного банку знань і характеристик класу задач, що вирішується.

5.2 Структура експертної системи

ЕС складається з наступних основних компонентів:

- ✓ вирішувача (інтерпретатора);
- ✓ робочої пам'яті (РП), називаною також базою даних (БД);
- ✓ бази знань (БЗ);
- ✓ компонентів придбання знань;
- ✓ пояснювального компонента;
- ✓ діалогового компонента.

База даних (робоча пам'ять) призначена для збереження вихідних і проміжних даних розв'язуваної в сучасний момент задачі. Цей термін збігається за назвою, але не за змістом з терміном, використовуваним в інформаційно-пошукових системах (ІПС) і системах керування базами даних (СУБД) для позначення всіх даних (у першу чергу довгострокових), збережених у системі.

База знань (БЗ) у ЕС призначена для збереження довгострокових даних, що описують розглянуту область (а не поточних даних), і правил, що описують доцільні перетворення даних цієї області.

У будь-який момент часу в системі існують три типи знань:

• структуровані знання - статичні знання про предметну область, які після виявлення вже не змінюються;

• структуровані динамічні знання - знання про предметну область, які змінюються або поповнюються в міру виявлення нової інформації;

•робочі знання - знання, які застосовують для розв'язання конкретної задачі або проведення консультації.

Вирішувач, використовуючи вихідні дані з робочої пам'яті і знання з БЗ, формує таку послідовність правил, що, будучи застосованими до вихідних даних, приводять до рішення задачі.

Компонент придбання знань автоматизує процес наповнення ЕС знаннями, здійснюваний користувачем-експертом.

Пояснювальний компонент пояснює, як система отримала рішення задачі (чи чому вона не отримала рішення) і які знання вона при цьому використовувала, що полегшує експерту тестування системи і підвищує довіру користувача до отриманого результату.

Діалоговий компонент орієнтований на організацію дружнього спілкування з користувачем как у ході рішення задач, так і в процесі придбання знань і пояснення результатів роботи.

Бажаною рисою ЕС є здатність системи пояснити свою лінію міркувань у вигляді, безпосередньо зрозумілому тому, хто задав питання. ЕС працює в режимі порадника. Часто треба знати, на підставі чого ухвалене рішення. Для цього ввели підсистему пояснення. Існує поняття «порожня ЕС» - ЕС, база знань якої порожня.

Знання є явними і доступними, що відрізняє ЕС від традиційних програм, і визначає їх основні властивості, такі, як:

1) *Застосування* для вирішення проблем високоякісного

досвіду, який представляє рівень мислення найбільш кваліфікованих експертів в даній області, що веде до рішень творчих, точних і ефективних.

2) Наявність *прогностичних можливостей*, при яких ЕС видає відповіді не тільки для конкретної ситуації, але і показує, як змінюються ці відповіді в нових ситуаціях, з можливістю докладного пояснення яким чином нова ситуація привела до змін.

3) Забезпечення такої нової якості, як *інституційна пам'ять*, за рахунок бази знань, що входить до складу ЕС, і яка розроблена в ході взаємодій з фахівцями організації, і відображає поточну політику цієї групи людей. Цей набір знань стає зведенням кваліфікованих думок і довідником якнайкращих стратегій і методів, використовуваних персоналом, що постійно обновляється. Провідні фахівці йдуть, але їх досвід залишається.

4) *Можливість* використання ЕС для навчання і тренування керівних працівників, забезпечуючи нових службовців обширним багажем досвіду і стратегій, по яких можна вивчати рекомендовану політику і методи.

5.3 Склад і взаємодія учасників побудови і експлуатації експертних систем

Познайомившись з тим, що таке експертні системи і які їх основні характеристики, спробуємо тепер відповісти на питання: "Хто бере участь в побудові і експлуатації ЕС? ".

До основних учасників слід віднести саму *експертну систему*, експертів, інженерів знань, засобу побудови ЕС і користувачів. Їх основні ролі і взаємовідношення приведені на рис.5.1.

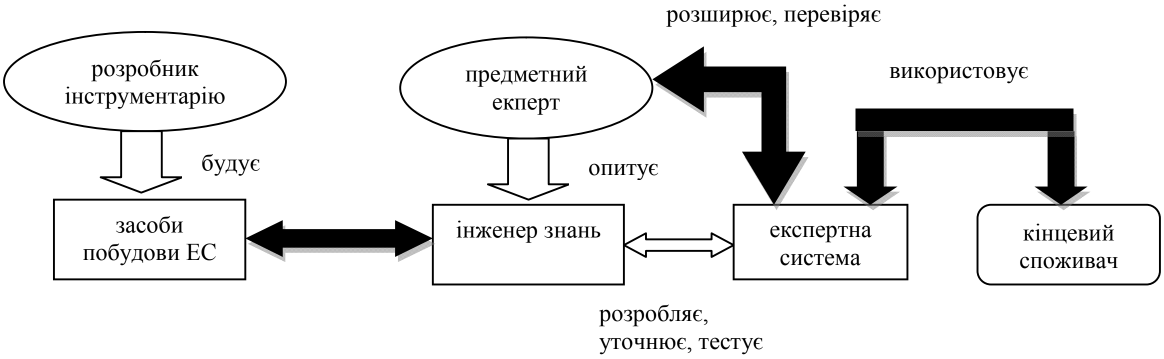


Рисунок 5.1 – Взаємозв’язок основних учасників побудови і експлуатації ЕС

Експертна система — це програмний засіб, що використовує знання експертів, для високоефективного вирішення завдань в наочній області, що цікавить користувача. Вона називається системою, а не просто програмою, оскільки містить базу знань, вирішувач проблеми і компоненту підтримки. Остання з них допомагає користувачу взаємодіяти з основною програмою.

Експерт — це людина, здатна ясно виражати свої думки і що користується репутацією фахівця, що уміє знаходити правильні рішення проблем в конкретній наочній області. Експерт використовує свої прийоми і хитрування, щоб зробити пошук рішення ефективнішим, і ЕС моделює всі його стратегії.

Інженер знань — людина, як правило, що має пізнання в інформатиці і штучному інтелекті і що знає, як треба будувати ЕС. Інженер знань опитує експертів, організовує знання, вирішує, яким чином вони повинні бути представлені в ЕС, і може допомогти програмісту в написанні програм.

Засіб побудови ЕС — це програмний засіб, використовуваний інженером знань або програмістом для побудови ЕС. Цей інструмент відрізняється від звичайних мов програмування тим, що забезпечує зручні способи представлення складних високорівневих понять.

Користувач — це людина, яка використовує вже побудовану ЕС. Так, користувачем може бути юрист, що використовує її для кваліфікації конкретного випадку; студент, якому ЕС допомагає вивчати інформатику і т.д.

5.4 Переваги використання експертних систем

Для чого потрібно експертні системи? Відзначимо лише основні переваги, які дає використання ЕС. Перевагами і позитивними якостями штучної компетенції є:

1) Її *постійність*. Людська компетенція слабшає з часом. Перерва в діяльності людини-експерта може серйозно відбитися на його професійних якостях.

2) *Легкість передачі або відтворення*. Передача знань від однієї людини іншому — довгий і дорогий процес. Передача штучної інформації — це простий процес копіювання програми або файлу даних.

3) *Стійкість* і відтворюваність результатів. Експерт-людина може приймати в тотожних ситуаціях різні рішення через емоційні

чинники. Результати ЕС — стабільні.

4) *Вартість*. Експерти, особливо висококваліфіковані обходяться дуже дорого. ЕС, навпаки, порівняно недорогі. Їх розробка дорога, але вони дешеві в експлуатації.

Разом з тим розробка ЕС не дозволяє повністю відмовитися від експерта-людини. Хоча ЕС добре справляється з своєю роботою, проте в певних областях людська компетенція явно перевершує штучну. Проте і в цих випадках ЕС може дозволити відмовитися від послуг висококваліфікованого експерта, залишивши експерта середньої кваліфікації, використовуючи при цьому ЕС для посилення і розширення його професійних можливостей.

5.5 Особливості побудови і організації експертних систем

Основою будь-якої ЕС є сукупність знань, структурована в цілях спрощення процесу ухвалення рішення. Для фахівців у області штучного інтелекту термін *знання* означає інформацію, яка необхідна програмі, щоб вона поводилася "інтелектуально". Ця інформація приймає форму фактів і правил. Факти і правила в ЕС не завжди або істинні, або помилкові. Іноді існує деяка міра невпевненості в достовірності факту або точності правила. Якщо цей сумнів виражений явно, то воно називається "коефіцієнтом довіри".

Коефіцієнт довіри — це число, яке означає вірогідність або ступінь упевненості, з якою можна рахувати даний факт або правило достовірним або справедливим.

Багато правил ЕС є *евристиками*, тобто емпіричними правилами або спрощеннями, які ефективно обмежують пошук рішення. ЕС використовують евристики, оскільки завдання, які вона вирішує, важкі, не до кінця зрозумілі, не піддаються строгому математичному аналізу або алгоритмічному рішенню. Алгоритмічний метод гарантує коректне або оптимальне рішення задачі, тоді як евристичний метод дає прийнятне рішення в більшості випадків.

Знання в ЕС організовані так, щоб знання про наочну область відокремити від інших типів знань системи, таких як загальні знання про те, як вирішувати задачі або знання про те, як взаємодіяти з користувачем. Виділені знання про наочну область називаються *базою знань*, тоді як загальні знання про знаходження рішень задач називаються механізмом висновку. Програмні засоби, які працюють із знаннями, організованими таким чином, називаються системами, заснованими на знаннях.

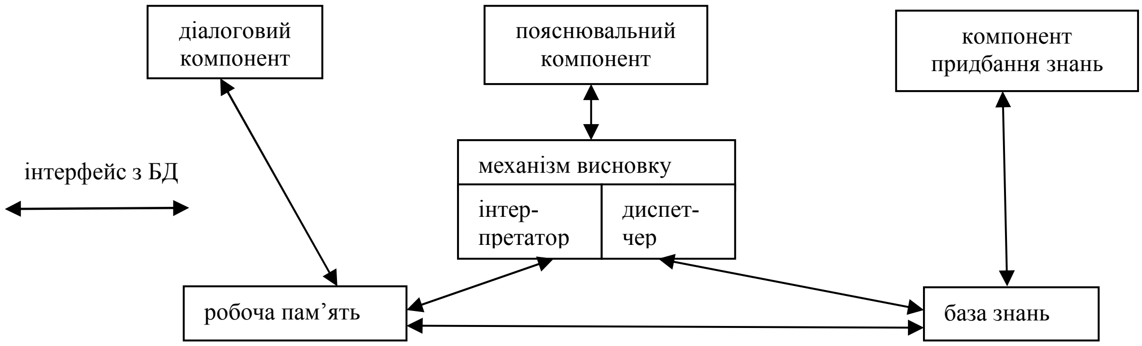


Рисунок 5.2 – Структура статичних ЕС

БЗ містить факти (дані) і правила (або інші представлення знань), використовуючі ці факти як основу для ухвалення рішень. Механізм висновку містить:

- інтерпретатор, що визначає як застосовувати правила для виведення нових знань на основі інформації, що зберігається в БЗ;
- диспетчер, що встановлює порядок застосування цих правил.

Такі ЕС одержали назву *статичних ЕС* і мають структуру, аналогічну рис.5.2. Ці ЕС використовуються в тих додатках, де можна не враховувати зміни навколишнього світу за час рішення задачі.

Проте існує вищий клас додатків, де потрібно враховувати динаміку зміни навколишнього світу за час виконання додатку. Такі експертні системи одержали назву *динамічних ЕС* і їх узагальнена структура матиме вигляд, приведений на рис.5.3.

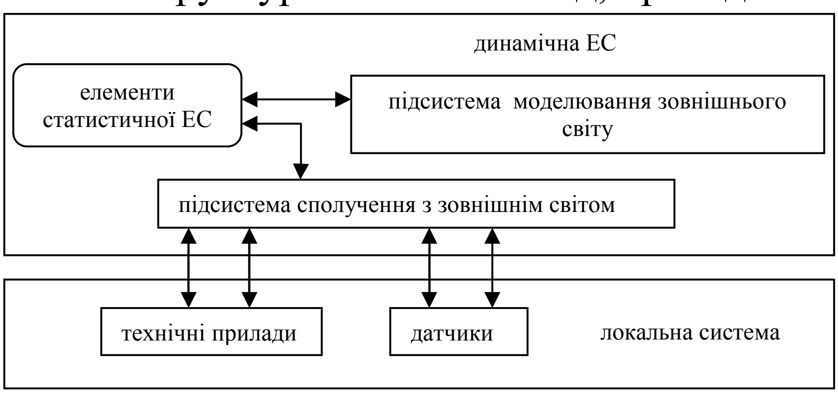


Рисунок 5.3 – Структура динамічної ЕС.

У порівнянні із статичною ЕС в динамічну вводиться ще два компоненти:

- підсистема моделювання зовнішнього світу;
- підсистема сполучення із зовнішнім світом.

Динамічні ЕС здійснює зв'язки із зовнішнім світом через систему контроллерів і датчиків. Крім того компоненти БЗ і механізму висновку істотно змінюються, щоб відобразити часову логіку подій, що відбуваються в реальному світі.

До розряду таких динамічних середовищ розробки ЕС відноситься сімейство програмних продуктів фірми Gensym Corp. (США). Один з таких продуктів система **G2** – базовий програмний продукт, що є графічне, об'єктно-орієнтоване середовище для побудови і супроводу експертних систем реального часу, призначених для моніторингу, діагностики, оптимізації, планування і управління динамічним процесом.

5.6 Основні режими роботи експертних систем

У роботі ЕС можна виділити два основні режими: режим придбання знань і режим рішення задачі (режим консультації або режим використання). У режимі *придбання знань* спілкування з ЕС здійснює експерт (за допомогою інженера знань).

Використовуючи компонент придбання знань, експерт описує проблемну область у вигляді сукупності фактів і правил. Іншими словами, "наповнює" ЕС знаннями, які дозволяють їй самостійно вирішувати задачі з проблемної області.

Відзначимо, що цьому режиму при традиційному підході до програмування відповідають етапи: алгоритмізації, програмування і відладки, що виконуються *програмістом*. Таким чином, на відміну від традиційного підходу у разі ЕС розробку програм здійснює не програміст, а експерт, що не володіє програмуванням.

У режимі *консультацій* спілкування з ЕС здійснює кінцевий користувач, якого цікавить результат і (або) спосіб його отримання. Необхідно відзначити, що залежно від призначення ЕС користувач може:

- не бути фахівцем в даній наочній області, і в цьому випадку він звертається до ЕС за результатом, який не уміє одержати сам;
- бути фахівцем, і в цьому випадку він звертається до ЕС з

метою прискорення отримання результату, покладаючи на ЕС рутинну роботу.

Слід зазначити, що на відміну від традиційних програм ЕС при рішенні задачі не тільки виконують наказану алгоритмом послідовність операцій, але і сама заздалегідь формує її.

Добре побудована ЕС має можливість самонавчатися на вирішуваних задачах, поповнюючи автоматично свою БЗ результатами одержаних висновків і рішень.

5.7 Відмінність експертних систем від традиційних програм

Особливості ЕС, що відрізняють їх від звичайних програм, полягають в тому, що вони повинні володіти:

1. Компетентністю, а саме:

- Досягати експертного рівня рішень (тобто в конкретній наочній області мати той же рівень професіоналізму, що і експерти-люди).
- Бути умілою (тобто застосовувати знання ефективно і швидко, уникаючи, як і люди, непотрібних обчислень).
- Мати адекватну працездатність (тобто здатність лише поступово знижувати якість роботи у міру наближення до меж діапазону компетентності або допустимої надійності даних).

2. Можливістю до символьних міркувань, а саме:

- Представляти знання в символьному вигляді
- Переформулювати символьні знання. На жаргоні штучного інтелекту символ — це рядок знаків, відповідний змісту деякого поняття. Символи об'єднують, щоб виразити відносини між ними. Коли відносини представлені в ЕС вони називаються символьними структурами.

3. Глибиною, а саме:

- Працювати в наочній області, що містить важкі завдання
- Використовувати складні правила (використовувати або складні конструкції правил, або велику їх кількість)

4. Самосвідомістю, а саме:

- Досліджувати свої міркування (тобто перевіряти їх правильність)
- Пояснювати свої дії

Існує ще одна важлива відмінність ЕС. Якщо звичайні програми розробляються так, щоб кожного разу породжувати правильний результат, то ЕС розроблені з тим, щоб поводитися як експерти. Вони, як правило, дають правильні відповіді, але іноді, як і люди, здатні помилятися.

Традиційні програми для вирішення складних завдань, теж можуть робити помилки. Але їх дуже важко виправити, оскільки алгоритми, лежачі в їх основі, явно в них не сформульовані. Отже, помилки нелегко знайти і виправити. ЕС, подібно людям, мають потенційну можливість вчитися на своїх помилках.

5.8 Технологія розробки експертних систем

Технологія розробки ЕС, включає шість етапів (рис.5.4): етапи ідентифікації, концептуалізації, формалізації, виконання, тестування, дослідної експлуатації. Розглянемо детальніше послідовності дій, які необхідно виконати на кожному з етапів.

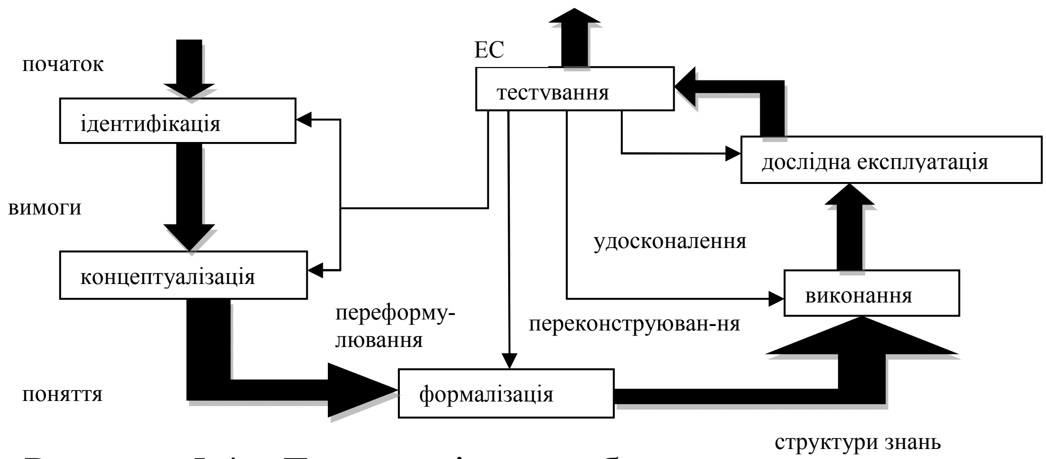


Рисунок 5.4 – Технологія розробки експертних систем

1)На етапі ***ідентифікації*** необхідно виконати наступні дії:

- визначити завдання, що підлягають рішенню і меті розробки
- визначити експертів і тип користувачів.

2)На етапі *концептуалізації*:

- проводиться змістовний аналіз наочної області
- виділяються основні поняття і їх взаємозв'язки
- визначаються методи рішення задач.

3)На етапі ***формалізації***:

- вибираються програмні засоби розробки ЕС

- визначаються способи представлення всіх видів знань
- формалізуються основні поняття.

4)На етапі *виконання* (найбільш важливому і трудомісткому) здійснюється наповнення експертом БЗ, при якому процес придбання знань розділяють:

- на "витягання" знань з експерта
- на організацію знань, що забезпечує ефективну роботу ЕС
- на представлення знань у вигляді, зрозумілому для ЕС.

Процес придбання знань здійснюється інженером по знаннях на основі діяльності експерта.

5)На етапі *тестування* експерт і інженер по знаннях з використанням діалогових і пояснювальних засобів перевіряють компетентність ЕС. Процес тестування продовжується до тих пір, поки експерт не вирішить, що система досягла необхідного рівня компетентності.

6)На етапі дослідної експлуатації перевіряється придатність ЕС для кінцевих користувачів. За наслідками цього етапу можлива істотна модернізація ЕС.

Процес створення ЕС не зводиться до строгої послідовності цих етапів, оскільки в ході розробки доводиться неодноразово повертатися на раніші етапи і переглядати ухвалені там рішення.

5.9 Експертні системи в сільському господарстві

Системний аналіз й імітаційні моделі посівів забезпечують альтернативний метод управління сільськогосподарським виробництвом. Використовуючи моделі розвитку та росту посівів, можна розробити сценарії керування, провести аналіз стратегій для оцінки впливу зміни клімату в сільськогосподарському виробництві й агротехнологічної адаптації. Виходячи з заданих вхідних параметрів, системи забезпечують розробку та видачу інженерно-технологічного проекту отримання врожаю на конкретному полі, формуючи послідовний опис усіх необхідних технологічних процесів і операцій для отримання запланованого врожаю культур.

Експертні системи в сільському господарстві здійснюють:

- ✓ планування програм агротехнічних заходів для конкретних полів, на яких будуть вирощуватись культури;

- ✓ визначення параметрів управління, термін проведень операцій, їх характеристики і умови відтворення;
- ✓ корекція інформаційної бази проектування відповідно до нових уявлень щодо технології обробки;
- ✓ видачу обгрунтованих рекомендацій;
- ✓ автоматизацію системи оперативного керування технологічним процесом оброблення с.-г. Культур системами економічних розрахунків.

Застосування систем дозволяє: поліпшити, прискорити і здешевити процес проектування та забезпечити одержання рекомендацій, адекватних властивостям конкретного посіву, поля, устаткування.

Розроблені програмні алгоритми та програмні комплекси дозволять:

- ✓ проектувати технологію вирощування с.-г. культур у цілому та фрагментарно;
- ✓ планувати агрозаходи на різний часовий період;
- ✓ забезпечити розрахунки дійсно можливого врожаю та витрат на його отримання;
- ✓ норми та строки проведення поливів;
- ✓ керувати режимом підживлення грунту.

Наведемо для порівняння дві експертні системи DSSAT - система підтримки агротехнологічних рішень, що розроблена групою фахівців-ініціаторів із трьох американських штатів: Флорида, Мічиган, Гавайї та систему підтримки прийняття рішень при виробництві с.-г. Продукції "Геомир", що розпочав роботу з 80-х рр. І нині є єдиною в Російській Федерації компанією, що пропонує агропромисловим й іншим підприємствам розробку й "здачу під ключ" інформаційно-аналітичних систем для ефективного виробництва.

DSSAT (система підтримки агротехнологічних рішень), спрямована на перевірку правильності рішень, що приймає фермер: від вибору культур на різних ділянках землі до використання різних технологій, вибору проміжків часу, планування посівів, поливу, використання добрив.

ЛІТЕРАТУРА

1. Берегова Г. І. Математика для економістів: вища математика (перша частина) : навч. посібник / Г. І. Берегова, В. Н. Гладунський. – К. : УБС НБУ, 2014. – 374 с.
2. Вергунов В. А. Основы математического моделирования для анализа и прогноза агрономических процессов / В. А. Вергунов, И. Н. Вергунова, В. С. Шкрабак. – Типография С-Пб ГАУ/ООО «Литера», 2003.- 219 с.
3. Вергунова І. М. Основи математичного моделювання для аналізу та прогнозу агрономічних процесів / І. М. Вергунова. – К. : Нора-Прінт, 2000. – 146 с.
4. Дослідна справа в агрономії : навч. посібник : у 2 кн. – Кн. 1. Теоретичні аспекти дослідної справи / [А. О. Рожков, В. К. Пузік, С. М. Каленська та ін.] ; за ред. А. О. Рожкова. – Х.: Майдан, 2016. – 316 с.
5. Доспехов А. М. Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований) / А. М. Доспехов. – 5-е изд., доп. и перераб. – М. : Агропромиздат, 1985 - 351 с.
6. Забуранна Л. В. Оптимізаційні методи та моделі [Електронний ресурс] : підручник / Л. В. Забуранна. - К., 2014. – 372 с. – Режим доступу : https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u104/%D0%9F%D1%96%D0%B4%D1%80%D1%83%D1%87%D0%BD%D0%B8%D0%BA_18.pdf
7. Інтелектуальні системи управління : курс лекцій до теми «Системи експертного оцінювання» розділу «Основи штучного інтелекту» кредитного модуля «Інтелектуальні системи управління» для студ. спец. 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» / уклад. : Л. Д. Ярощук. - К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 40 с.
8. Інформаційні технології : навч. посібник. / [Ю. В. Волосюк, В. В. Кузьома, О. А. Коваленко та ін.]. ; під заг. ред. А. В. Нєлєпової. – К. : Кафедра, 2017. – 200 с.
9. Компьютерное моделирование биотехнологических процессов и систем : учеб. пособие / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, Е. И.

Муратова, А. А. Ермаков. – Тамбов : Изд-воТамб. гос. техн. ун-та, 2005. - 80 с.
10. Красніцький В. Й. Передумови впровадження математичного моделювання як наукової методології для потреб агрономії [Електронний ресурс] / В. Й. Красніцький. - Режим доступу : http://inb.dnsgb.com.ua/2010-4/10_krasnytsky.pdf.
11. Леснікова І. Ю. Основи роботи і вирішення задач сільського господарства в середовищі електронних таблиць EXCEL : навч. посібник / І. Ю. Леснікова, Є. М. Харченко. - Дніпропетровськ : Пороги, 2002. - 145 с.
12. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / [А. М. Гатаулин, Г. В. Гаврилов, Т. Н. Сорокина и др.] ; под ред. А. М. Гатаулина. - М. : Агропромиздат, 1990. – 432 с.
13. Методика наукових досліджень в агрономії [Електронний ресурс] : навч. посіб. / В. Г. Дідора, О. Ф. Смаглій, Е. Р. Ермантраут [та ін.]. – К. : Центр учбової літератури, 2013. – 264 с. – Режим доступу : http://ir.znau.edu.ua/bitstream/123456789/3892/1/MNDA_2013_73-86.pdf.
14. Методика наукових досліджень в агрономії : навч. посіб. / Е. Р. Ермантраут, А. С. Малиновський, В. Г. Дідора [та ін.]. – Житомир : ЖНАЕУ, 2010. – 124 с.
15. Оптимізаційні методи та моделі : підручник / Л. В. Забуранна [та ін.]. - К. : ЦП "Компринт", 2014. – 372 с.
16. Основи наукових досліджень в агрономії. Методичні поради до вивчення дисципліни за напрямом 6.091100 “Агрономія” фахового спрямування 6.130100 – плодоовочівництво та виноградарство і 6.090105 – захист рослин / П. В. Костогриз. – Умань : Уманський національний університет садівництва, 2010. – 34 с.
17. Основи наукових досліджень в агрономії : підручник / В. О. Єщенко, П. Г. Копитко, П. В. Костогриз; В. П. Опришко ; за ред. В. О. Єщенка. – Вінниця : ПП «ТД «Едельвейс і К»», 2014. — 332 с.
18. Підготовка агрономів-дослідників до сучасних потреб АПК

України / Н. Т. Тверезовська, А. В. Нєлєпова // Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія "Педагогіка. Психологія. Філософія". - К., 2010. – Вип. 155. – Ч. 2. – С. 181-186.
19. Поле - агроном - компьютер: экспертные системы в сельском хозяйстве / Д. М. Блинов, Н. А. Иевлев, В. Н. Мальцев, С. С. Паповян. - М. : Агропромиздат, 1990. – 64 с.
20. Польовий А. М. Моделювання гідрометеорологічного режиму та продуктивності агроекосистем [Електронний ресурс] : підруч. для студентів ВНЗ / А. М. Польовий ; Одес. держ. екол. ун-т. - Одеса : Екологія, 2013. - 430 с. – Режим доступу : http://coe.osenu.org.ua/wp-content/uploads/page/2014/04/09-540/Model_gidromet_rezhimu.pdf
21. Стеценко І. В. Моделювання систем : навч. посіб. / І. В. Стеценко ; М-во освіти і науки України ; Черкас.держ. технол. ун-т. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.
22. Тверезовська Н. Т. Інформаційні технології в агрономії : навч. посіб. / Н. Т. Тверезовська, А. В. Нєлєпова. – К., 2014. – 282 с.
23. Хусаінов Д. Я. Моделювання динамічних систем : навч. посіб. / Д. Я. Хусаінов, І. І. Харченко, А. В. Шатирко ; Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка. - К. : ВПЦ "Київ. ун-т", 2011. – 135 с.
24. Хусаінов Д. Я. Введення в моделювання динамічних систем [Електронний ресурс] : навч. посібник / Д. Я. Хусаінов, І. І. Харченко, А. В. Шатирко. - Київ : Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2010, — 128 с. – Режим доступу : http://www.csc.knu.ua/en/library/books/khusainov-17.pdf.
25. Вступ в експертні системи. Основні поняття і визначення [Електронний ресурс]. - Режим доступу : https://studfile.net/preview/5745314/.
26. Сутність парного лінійного регресійного аналізу [Електронний ресурс]. - Режим доступу : https://studfile.net/preview/1588226/page:2/.

Навчальне видання

Системний підхід використання методів математичного моделювання. (Моделювання технологічних процесів і систем)

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
для підготовки здобувачів вищої освіти третього (освітньо-наукового) рівня, ступеня доктора філософії за спеціальністю 204 «Технологія виробництва і переробки продукції тваринництва» та спеціальністю 201 «Агрономія»

Укладачі:
Шебаніна Олена В'ячеславівна
Клочан Віра Павлівна
Могильницька Алла Миколаївна та ін.

Формат 60x84 1/16. Ум. друк. арк. 16,2
Тираж 100 прим. Зам. № __

Надруковано у видавничому відділі
Миколаївського національного аграрного університету
54020, м. Миколаїв, вул. Г. Гонгадзе, 9

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4490 від 20.02.2013 р.